Tôhoku Math. Journ.
26 (1974), 487-504.

SUMMEN VON FK-RÄUMEN. FUNKTIONALE ABSCHNITTSKONVERGENZ UND UMKEHRSÄTZE

Meinem Lehrer WERNER MEYER-KÖNIG in herzlicher Dankbarkeit gewidmet*)

GÜNTHER GOES

(Received May 31, 1973)

Abstract. Sectional boundedness (AB) and functional sectional convergence (FAK) in FK-spaces (= locally convex, metrizable and complete spaces of complex sequences $x=(x_k)_{k=1}^{\infty}$) are considered with emphasis on sums $E+F=\{x: x=a+b,\ a\in E,\ b\in F\}$ of FK-spaces E and F. *Notations and definitions*: *Let* $\delta^k=(\delta_n^k)_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n^n=1$, $\delta_n^k=0$ if $n\neq k$. $P_n x=\sum_{k=1}^n x_k\delta^k$ is the n-th section of x. Let E be an FK-space, E' the space of linear and continuous functionals on E. Let $P_n x\in E$ for every $n=1,2,\cdots$. x has AB in E if $\{P_n x\}$ is a bounded set in E, x has AK in E if $\lim_n P_n x=x$ in E, x has FAK in E, if $\lim_n (P_n x)$ exists for every $f\in E'$, x has AD in E if $x\in\bar{\phi}^E$ (= the closure of ϕ in E), where ϕ is the space of x with only finitely many $x_k\neq 0$. The spaces E_{AB}, E_{AK}, E_{FAK}, E_{AD} consisting of all x which have respectively AB, AK, FAK, AD in E, are FK-spaces with appropriate topologies. Let $E_f=\{x: x_k=f(\delta^k)$ for some $f\in E'$ if $\delta^k\in E\}$, $E^\beta=\{x: \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ exists for every $y\in E\}$, $E^\gamma=\{x: \sup_n|\sum_{k=1}^n x_k y_k|<\infty$ for every $y\in E\}$. If A and B are sets of complex sequences, then $(A\to B)=\{x: (x_k y_k)\in B$ for every $y\in A\}$.

Theorem. (i) Let E be an FK-space, $\phi\subset E$. Then $E\subset E_{FAK}\leftrightarrow E_f=E^\beta\leftrightarrow E_{FAK}=E^{\beta\beta}\leftrightarrow E^\beta=(E_{AK})^\beta\leftrightarrow E$ has AB and $E^\beta=E^\gamma$.

(ii) Let E, F be FK-spaces, $\phi\subset E, F$. Then $(E\to F)\subset(E_{AD}\to F_{AD})\subset(F_f\to E_f)\subset(E_{FAK}\to F_{FAK})\subset(E_{AK}\to F_{AK})=(E_{AB}\to F_{AB})=(E_{AK}\to F)$.

(iii) Let E, F be FK-spaces with AB and $\phi\subset E, F$. Then $(E+F)_{AK}=E_{AK}+F_{AK}$. Furthermore $(E+F)_{FAK}=E_{FAK}+F_{FAK}$ if and only if $E_{FAK}+F_{FAK}=D^\beta$ for some set D of complex sequences.

(iv) Every solid FK-space containing ϕ has FAK.

(v) The theorem of F. and M. Riesz about the absolute continuity of measures μ on the circle for which $\hat{\mu}(n)=0$ for all $n<0$, is equivalent to the fact, that the FK-space L_+^∞ of x which can be extended to $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ such that $\sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}\sim f(t)\in L^\infty(T)$, has $(C,1)$-FAK, i.e. $x\in L_+^\infty$ implies: $\lim_n\sum_{k=1}^n(1-(k-1)/n)x_k f(\delta^k)$ exists for every $f\in(L_+^\infty)'$.

(vi) The space of absolutely $(C,1)$-limitable sequences $|\sigma c|=\{x: \sum_{n=1}^{\infty}|\Delta n^{-1}\sum_{k=1}^n x_k|<\infty\}$, can be represented as $|\sigma c|=bv+dl=q+dl$, where $bv=\{x: \sum_{k=1}^{\infty}|\Delta x_k|<\infty\}$, $dl=\{x: \sum_{k=1}^{\infty}|k^{-1}x_k|<\infty\}$, $q=\{x: \sum_{k=1}^{\infty}k|\Delta^2 x_k|<\infty$ and $\sup_k|x_k|<\infty\}$.

(vii) The conditions "$(kx_k)\in|\sigma c|$", "$(kx_k)\in bv$" and "$(kx_k)\in q$" are equiva-

*) Teile der vorliegenden Arbeit wurden Herrn Meyer-König am 3. Juni 1972 bei einem Festkolloquium an der Universität Stuttgart überreicht.

lent absolute Tauber conditions for the Abel summation method for series.

Similar statements as in (i) to (iii) hold if one replaces the sections $P_n x$ by $P_n^1 x$, the Cesàro- sections of order one: $P_n^1 x = \sum_{k=1}^{n} (1-(k-1)/n) x_k \delta^k$, and if one changes the concepts AB, AK, FAK, E^β and E^γ accordingly.

Die Summe $E + F$ von zwei FK-Räumen E und F tritt in natürlicher Weise auf, wenn man den konjugierten Raum des Durchschnitts $A \cap B$ von zwei FK-Räumen A und B betrachtet, und wenn die konjugierten Räume A' und B' mit den FK-Räumen E und F identifiziert werden können.

Summen von Folgenräumen erweisen sich als nützlich im Zusammenhang mit Umkehrsätzen (=Taubersätzen) und bei Einschließungssätzen, wie Arbeiten von W. Meyer-König und H. Tietz ([14], [15], [16]), M. Stieglitz [21], G. Kangro [11], H. Tietz [22], D. Leviatan [13] und G. Goes ([5] bis [8]) zeigen.

Grob gesprochen gilt: Eine Aussage über einen Summenraum $E + F$ ist umso interessanter, je kleiner die Räume E und F im Vergleich zu dem Raum $E + F$ sind, denn eine lineare Abbildung, welche E und F in einen Raum G abbildet, bildet auch $E + F$ nach G ab. Diese Tatsache kann oft beim Vergleich von Tauberbedingungen verwendet werden. Zum Beispiel folgt aus der Gleichung $c_0 = cs + (-1)^k \cdot cs$ ([7], Theorem 7), wobei $(-1)^k \cdot cs$ der Raum der komplexen Zahlenfolgen $x = (x_k)$ ist, für die $((-1)^k \cdot x_k) \in cs$, und die Räume c_0 und cs im Abschnitt 0 erklärt sind, daß "$x \in c_0$" genau dann eine Tauberbedingung für ein gegebenes additives und permanentes Summierungsverfahren zur Summierung von Reihen ist, wenn "$x \in (-1)^k \cdot cs$" eine Tauberbedingung für dieses Verfahren ist.

Der erste Teil dieser Arbeit enthält Aussagen über die Abschnittsbeschränktheit (AB), Abschnittskonvergenz (AK) und funktionale Abschnittskonvergenz (FAK) der Summe von FK-Räumen. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für Cesàroabschnitte. Dabei wird vor allem die Bedeutung der bisher in der Literatur weniger beachteten funktionalen Abschnittskonvergenz aufgezeigt. Es wird bewiesen, daß der bekannte Satz von F. und M. Riesz ([17] oder [29], S. 285 über die Absolutstetigkeit der Maße $\mu \in M(T)$, für die $\hat{\mu}(n) = 0$ für $n = -1, -2, \cdots$, äquivalent ist mit dem Satz: Der FK-Raum $\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty}$ hat funktionale Cesàro-Abschnittskonvergenz.

Im zweiten Abschnitt werden für den Raum $|\sigma c|$ der absolut-$(C, 1)$-limitierbaren Folgen zwei Summendarstellungen abgeleitet. Dabei ist $|\sigma c|$ der Raum der Folgen x für die $(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k) \in bv$, wobei $y \in bv$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta y_k| < \infty$, $(\Delta y_k = y_k - y_{k+1})$. Es wird gezeigt, daß

$$|\sigma c| = bv + dl = q + dl ,$$

wobei $dl = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} |x_k/k| < \infty\}$ und $q = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\Delta^2 x_k| + \sup|x_k| < \infty\}$. Daraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Summendarstellungen für den Raum $|C, 1|$ der absolut-$(C, 1)$-summierbaren Reihen:

$$|C, 1| = l + T^{-1}(l) = h + T^{-1}(l)\ ,$$

wobei $l = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$, $h = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\Delta x_k| < \infty$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = 0\} = l \cap \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta k x_k| < \infty\}$ ([5], Theorem 3.2) und T der Operator der arithmetischen Mittel ist: $Tx = (k^{-1} \sum_{\nu=1}^{k} x_\nu)$.

Im letzten Abschnitt werden die Aussagen des Abschnittes 2 in Vergleichssätzen für Tauberbedingungen verwendet. H. Tietz ([22], Seite 140, 4a) hat gezeigt, daß die absolute Tauberbedingung ($=ATB$) von J. M. Hyslop [10] "$(n^{-1} \sum_{k=1}^{n} kx_k) \in bv$" für absolute Abelsummierung äquivalent ist zu der ATB "$(k \cdot x_k) \in bv$". Es zeigt sich, daß diese Bedingungen auch äquivalent sind zu der ATB "$(k \cdot x_k) \in q$".

0. Bezeichnungen, Definitionen, Grundlagen. Es sei an die Begriffe "FK-Raum" und "BK-Raum" (K. Zeller [27]) erinnert: Ein lokalkonvexer, vollständiger und metrisierbarer Folgenraum E bei dem die Funktionale $\tau_k\colon E \to \boldsymbol{C}$ (= komplexe Zahlen) mit $\tau_k x = x_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ alle stetig sind, heißt ein FK-Raum. Zu einem gegebenen Folgenraum existiert höchstens eine Topologie, welche den Raum zu einem FK-Raum macht, und diese Topologie ist durch abzählbar viele Halbnormen $p_j (j \in Z^+ \equiv \{1, 2, \cdots\})$ bestimmt. Dies wird durch die Bezeichnung $(E; p_j)$ ausgedrückt. Ein FK-Raum, dessen Topologie durch eine Norm gegeben ist, heißt ein BK-Raum.

Neben den schon in der Einleitung definierten Räumen werden die folgenden Räume betrachtet:

ϕ: der Raum der Folgen x mit höchstens endlich vielen $x_k \neq 0$.

ω: der FK-Raum aller komplexen Zahlenfolgen; $p_j(x) = |x_j|$, $j \in Z^+$. Alle weiteren Räume sind BK-Räume:

m: der Raum der beschränkten Zahlenfolgen, $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

c_0: der Raum der Nullfolgen, $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

bs: der Raum der x für die $\|x\| = \sup_n |s_n(x)| < \infty$, $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

cs: der Raum der x für die $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ existiert; $\|x\| = \sup_n |s_n(x)|$.

σs: der Raum der $(C, 1)$ summierbaren Folgen $= \{x\colon \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$ existiert, wobei $\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - (k-1)/n) x_k\}$, $\|x\| = \sup_n |\sigma_n(x)|$.

σb: der Raum der x für die $\sup_n |\sigma_n(x)| \equiv \|x\| < \infty$.

$|C, 1|$: der Raum der absolut $(C,1)$-summierbaren Folgen $= \{x\colon \sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n(x) - \sigma_{n+1}(x)| + \sup_n |\sigma_n(x)| \equiv \|x\| < \infty\}$.

Ist $1 \leqq p \leqq \infty$ und sind L_c^p, C_c, M_c die Räume der 2π-periodischen, *geraden*, L^p-Funktionen bzw. stetigen Funktionen bzw. beschränkten

Borelmaße auf $T = R/2\pi Z$ (R die additive Gruppe der reellen Zahlen, Z die additive Gruppe der ganzen Zahlen), so bezeichnen $\widehat{L_c^p}$, $\hat{C}_c$ und $\hat{M}_c$ beziehentlich die zugeordneten Räume der Fourier-Kosinus-Koeffizienten, wobei wir der Einfachheit halber $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$ für $f \in L_c^p$, C_c und $\int_0^{2\pi} d\mu = 0$ für $\mu \in M_c$ annehmen. Es sei also zum Beispiel für $1 \leqq p \leqq \infty$ $\widehat{L_c^p} = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos kt \sim f(t),\ f \in L_c^p\}$. Entsprechend bezeichnen $\widehat{L_s^p}$, $\hat{C}_s$ und $\hat{M}_s$ beziehentlich die Fourier-Sinus-Koeffizientenräume von *ungeraden* Funktionen in L^p, C und Maßen in M. Bei diesen Räumen von Fourierkoeffizienten wird $\|\cdot\|_{\hat{E}} = \|\cdot\|_E$ für $E = L^p, C, M$ gesetzt, wobei E unter der üblichen Banachnorm betrachtet wird.

Sind $x, y \in \omega$, so sei $xy = (x_k y_k)$ das punktweise Produkt. Von besonderer Bedeutung sind die Einsfolge $\delta = (\delta_k)$ mit $\delta_k = 1$ für alle $k \in Z^+$, $\delta^n = (\delta_k^n)$ mit $\delta_k^n = 0$ für $k \neq n$ und $\delta_n^n = 1$, $P_n = \sum_{k=1}^{n} \delta^k$, $P_n^1 = \sum_{k=1}^{n} (1-(k-1)/n)\delta_k$. Für $x \in \omega$ heißt $P_n x$ der n-te Abschnitt und $P_n^1 x$ der n-te $(C, 1)$-Abschnitt von x.

Sind $A, B \subset \omega$, so sei

$$AB = \{x \in \omega\colon x = ab,\ a \in A,\ b \in B\}\ ,$$
$$A + B = \{x \in \omega\colon x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}\ ,$$
$$(A \rightarrow B) \equiv A^B = \{x \in \omega\colon xA \equiv \{x\}A \subset B\}\ .$$

Speziell seien wie üblich

$$(A \rightarrow cs) \equiv A^\beta,\ (A \rightarrow bs) \equiv A^\gamma,\ (A \rightarrow \sigma s) \equiv A^\sigma,\ (A \rightarrow \sigma b) \equiv A^{\sigma b}$$

die β-, γ-, σ-, σb-dualen (Köthe)-Räume von A.

A heißt eine B-Menge (oder ein B-Raum, wenn A ein linearer Raum ist), wenn eine Menge $D \subset \omega$ existiert, sodaß $A = (D \rightarrow B)$.

Ein Folgenraum E heißt normal oder solid, wenn $E = (m \rightarrow E)$.

Sei E ein lokalkonvexer Folgenraum. Ist E' der konjugierte Raum von E, d.h. der Raum der stetigen und linearen Funktionale auf E, so sei

$$E_f = \{x \in \omega\colon \exists f \in E',\quad \text{sodaß}\quad f(\delta^k) = x_k,\quad \text{wenn}\quad \delta^k \in E\}\ .$$

Ist $\phi \subset E$, so ist die Bedingung "$\delta^k \in E$" natürlich für jedes $k \in Z^+$ erfüllt. Ist $\phi \not\subset E$ und $\delta^k \notin E$, so ist $x \in E_f \Leftrightarrow x + \lambda\delta^k \in E_f$ für jede komplexe Zahl λ.

Für irgendeine Menge $A \subset \omega$, sei $dA = \{x \in \omega\colon (x_k/k) \in A\}$ und $\int A = \{x \in \omega\colon (k \cdot x_k) \in A\}$.

Im folgenden sei E ein FK-Raum mit Abschnittsinklusion. Das letztere bedeutet $E \subset E_{AI} \equiv \{x \in \omega\colon P_n x \in E$ für alle $n \in Z^+\}$. Offensichtlich ist $E_{AI} =$

$\{x \in \omega: x_k = 0, \text{ wenn } \delta^k \notin E,\ k \in Z^+\}$. Es ist also E_{AI} ein abgeschlossener Unterraum von ω.

$x \in E$ hat Abschnittskonvergenz (AK), wenn $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ in E. $x \in E$ hat $(C, 1)$-Abschnittskonvergenz (σK), wenn $\lim_{n\to\infty} P_n^1 x = x$ in E. $x \in \omega$ hat Abschnittsbeschränktheit in E (AB) bzw. $(C, 1)$-Abschnittsbeschränktheit in E (σB), wenn beziehentlich die Mengen $\{P_n x\}$ oder $\{P_n^1 x\}$ beschränkt sind in E. Eine Folge kann also AB oder σB in E besitzen ohne selbst zu E zu gehören. Entsprechendes gilt für die Eigenschaften FAK und $F\sigma K$: $x \in \omega$ hat funktionale Abschnittskonvergenz (FAK) bzw. funktionale $(C, 1)$-Abschnittskonvergenz ($F\sigma K$) in E, wenn beziehentlich für jedes $f \in E'$ die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} f(P_n x)$ oder $\lim_{n\to\infty} f(P_n^1 x)$ existieren. Ist zudem $x \in E$ und sind die letztgenannten Grenzwerte $f(x)$, so hat x schwache Abschnittskonvergenz (SAK) bzw. schwache $(C, 1)$-Abschnittskonvergenz ($S\sigma K$). $x \in E$ hat Abschnittsdichte (AD), wenn $x \in \overline{\phi \cap E}$, der abgeschlossenen Hülle von $\phi \cap E$ in E.

Mit $E = (E; p_j)$ sind auch die Räume

$$\begin{aligned}
E_{AD} &= \overline{\phi \cap E}\,, \\
E_{AK} &= \{x \in E: x \text{ hat } AK\} \\
E_{\sigma K} &= \{x \in E: x \text{ hat } \sigma K\} \\
E_{AB} &= \{x \in \omega: x \text{ hat } AB \text{ in } E\} \\
E_{\sigma B} &= \{x \in \omega: x \text{ hat } \sigma B \text{ in } E\} \\
E_{FAK} &= \{x \in \omega: x \text{ hat } FAK \text{ in } E\} \\
E_{F\sigma K} &= \{x \in \omega: x \text{ hat } F\sigma K \text{ in } E\} \\
E_{SAK} &= \{x \in E: x \text{ hat } SAK\} \\
E_{S\sigma K} &= \{x \in E: x \text{ hat } S\sigma K\}
\end{aligned}$$

FK-Räume und zwar E_{AD} unter der Topologie von E, E_{AK}, E_{AB}, E_{FAK}, E_{SAK} unter der Topologie gegeben durch die Halbnormen q_j ($j \in Z^+$), wobei $q_j(x) = \sup_n p_j(P_n x)$, und die Räume $E_{\sigma K}$, $E_{\sigma B}$, $E_{F\sigma K}$, $E_{S\sigma K}$ unter den entsprechenden Topologien, die man erhält, wenn man q_j durch q_j^1 mit $q_j^1(x) = \sup_n p_j(P_n^1 x)$ ersetzt.

1. Summen von FK-Räumen und FAK.

1.1. Sind $(E; p_j)$, $(F; q_j)$ FK-Räume, so ist $E + F$ ein FK-Raum unter der Infimumstopologie, welche durch die Halbnormen $r_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, \cdots$) mit

$$r_{j,k}(x) = \inf\{p_j(a) + q_k(b): x = a + b,\ a \in E,\ b \in F\}$$

gegeben ist. Es wird also das Infimum genommen bezüglich aller möglichen Darstellungen von x als Summe von Elementen aus E und F. ([18], [26], [25]).

1.2. Sind E und F FK-Räume mit AK oder mit AB, so hat auch der FK-Raum $E+F$ AK beziehungsweise AB (W. Ruckle [18], 5.4 und 5.2). Offensichtlich gilt Entsprechendes für $\sigma K, \sigma B$ und für AD.

1.3. Bevor wir einen entsprechenden Satz für FAK und $F\sigma K$ beweisen, bringen wir einige nützliche Charakterisierungen der Räume E_f, E_{FAK} und $E_{F\sigma K}$ als β-, γ-, σ-oder σb-duale Räume.

1.4 Satz. (a) *Ist E ein FK-Raum mit AB, so gilt*:

$$E_f = (E_{AK})_f = (E_{AB})_f = (E_{AK})^\beta = (E_{AK})^\gamma = (E_{AB})^\gamma = E^\gamma .$$

(b) *Ist E ein FK-Raum mit σB so gilt*:

$$E_f = (E_{\sigma K})_f = (E_{\sigma B})_f = (E_{\sigma K})^\sigma = (E_{\sigma K})^{\sigma b} = (E_{\sigma B})^{\sigma b} = E^{\sigma b} .$$

Beweis. (a) Ist E ein FK-Raum mit AB, so ist $(E_{AK})_f = E_f = (E_{AB})_f$ wegen $E_{AK} \subset E \subset E_{AB}$ und auf Grund des Hahn-Banachschen Erweiterungssatzes. Da $f \in (E_{AK})'$ genau dann, wenn $f(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ für ein $y \in (E_{AK})^\beta$ ([28], 3.4 u. 2.1), so ist $(E_{AK})_f = (E_{AK})^\beta$. Ferner ist $(E_{AK})^\beta \subset (E_{AK})^\gamma = (E_{AK} \rightarrow (bs)_{AK}) = (E_{AK} \rightarrow cs)$ wegen der Stetigkeit der durch Multiplikatoren gegebenen Abbildung von E_{AK} nach bs und wegen $(bs)_{AK} = cs$. Somit ist $(E_{AK})^\beta = (E_{AK})^\gamma$. Dies beweist die vier ersten Gleichungen. Offensichtlich ist $(E_{AB})^\gamma \subset (E_{AK})^\gamma$. Somit verbleibt der Beweis von $(E_{AB})_f \subset (E_{AB})^\gamma = E^\gamma$. Sei $x \in (E_{AB})_f$. Dann existiert ein $f \in (E_{AB})'$ derart, daß $x_k = f(\delta^k)$ wenn $\delta^k \in E_{AB}$ für $k \in Z^+$. Für jedes $y \in E_{AB}$ gilt also $\sup_n |f(P_n y)| = \sup_n |\sum_{k=1}^n f(\delta^k) y_k| = \sup_n |\sum_{k=1}^n x_k y_k| < \infty$.

Dies zeigt, daß $(E_{AB})_f \subset (E_{AB})\gamma$. Da $E_{AK} \subset E \subset E_{AB}$ und wie schon gezeigt $(E_{AK})^\gamma = (E_{AB})^\gamma$, so ist offensichtlich auch $(E_{AB})^\gamma = E^\gamma$.

(b) Der $(C,1)$-Fall kann entsprechend bewiesen werden unter Beachtung der Tatsache, daß $f \in (E_{\sigma k})'$ genau dann, wenn $f(x) = (C,1) - \sum_{k=1}^\infty x_k y_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n (1-(k-1)/n) x_k y_k$ für ein $y \in (E_{\sigma k})^\sigma$. Ferner gilt $(\sigma b)_{\sigma K} = \sigma s$ ([1], Prop. 3.6).

1.5 Satz. *Sei E ein FK-Raum. Dann gilt*:

(a) $E_{AB} = (E_f)^\gamma \cap E_{AI}$; $E_{FAK} = (E_f)^\beta \cap E_{AI}$.

(b) $E_{\sigma B} = (E_f)^{\sigma b} \cap E_{AI}$; $E_{F\sigma K} = (E_f)^\sigma \cap E_{AI}$.

Beweis. (a) Auf Grund des Satzes von Banach und Mackey über die Äquivalenz von schwacher Beschränktheit und Beschränktheit in lokalkonvexen Räumen gilt $x \in E_{AB}$ genau dann, wenn für jedes $f \in E'$

$$\sup_n |f(P_n x)| = \sup_n |\sum_{k=1}^n f(\delta^k) x_k| < \infty .$$

Aus dieser Tatsache ergibt sich unmittelbar die erste Gleichung. Die zweite Gleichung ergibt sich aus der Definition von E_{FAK}.

(b) Dies kann entsprechend bewiesen werden.

1.6 BEMERKUNG. Ist $\phi \subset E$, so ist $E_{AI} = \omega$. Somit kann in diesem Fall in 1.5 der Raum E_{AI} weggelassen werden.

Ist $E \subset E_{AI}$, so gilt $E \subset E_{AB}$ genau dann, wenn $E_f = E^\gamma$, denn nach 1.5 folgt aus $E \subset E_{AB}$, daß $E_f = E^\gamma$. Ist umgekehrt $E_f = E^\gamma$ und $E \subset E_{AI}$, so ist $E = E \cap E_{AI} \subset E^{\gamma\gamma} \cap E_{AI} = (E_f)^\gamma \cap E_{AI} = E_{AB}$.

1.7 FOLGERUNG. *Ist E ein FK-Raum mit $E \subset E_{AI}$, so gilt:*

(a) $E_{AB} = (E_{AB})^{\gamma\gamma} \cap E_{AI} = (E_{AK})^{\gamma\gamma} \cap E_{AI} = (E_{AK})^{\beta\gamma} \cap E_{AI}$.

(b) $E_{\sigma B} = (E_{\sigma B})^{\sigma b \sigma b} \cap E_{AI} = (E_{\sigma k})^{\sigma b \sigma b} \cap E_{AI} = (E_{\sigma k})^{\sigma\sigma b} \cap E_{AI}$.

Ist überdies $E_{FAK} \subset (E_{FAK})_{FAK}$ (speziell $E \subset E_{AB}$), beziehungsweise ist $E_{F\sigma K} \subset (E_{F\sigma K})_{F\sigma K}$ (speziell $E \subset E_{\sigma B}$), so gilt:

(c) $E_{FAK} = (E_{AK})^{\beta\beta} \cap E_{AI} = (E_{AK})^{\gamma\beta} \cap E_{AI} = (E_{AB})^{\gamma\beta} \cap E_{AI}$, *beziehentlich*

(d) $E_{F\sigma K} = (E_{\sigma K})^{\sigma\sigma} \cap E_{AI} = (E_{\sigma K})^{\sigma b \sigma} \cap E_{AI} = (E_{\sigma B})^{\sigma b \sigma} \cap E_{AI}$.

BEWEIS. (a) Wegen $E_{AB} = (E_{AB})_{AB}$ folgt dies aus 1.4 und 1.5.

(b) Wegen $E_{\sigma B} = (E_{\sigma B})_{\sigma B}$ ([1], S. 194) folgt dies aus 1.4 u. 1.5.

(c) Die Inklusionen $E_{FAK} \subset (E_{FAK})_{FAK} \subset (E_{AB})_{FAK} = (E_{AK})_{FAK} \subset E_{FAK}$ implizieren $E_{FAK} = (E_{AB})_{FAK}$, woraus mit 1.4 und 1.5 die Behauptung folgt.

(d) Dies ergibt sich wie im Fall (c).

1.8 SATZ. *Ist E ein FK-Raum mit $\phi \subset E$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:* (i) $E \subset E_{FAK}$, (ii) $E_f = E^\beta$, (iii) $E_f \subset E^\beta$, (iv) $E_{FAK} = E^{\beta\beta}$.

BEWEIS. Für einen beliebigen FK-Raum E, der ϕ enthält, gilt $E^\beta \subset E_f$ auf Grund des Satzes von Banach und Steinhaus, denn für jedes $n \in Z^+$ definiert die Gleichung $f_n(y) = \sum_{k=1}^n y_k x_k$ $(y \in E,\ x \in \omega)$ ein $f_n \in E'$. Ist also $x \in E^\beta$, so existiert $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k = f(y)$, und dieser Grenzwert definiert $f \in E'$. $\phi \subset E$ impliziert $f(\delta^k) = x_k$ für jedes $k \in Z^+$. Also ist $x \in E_f$ und damit $E^\beta \subset E_f$. Somit gilt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Wir zeigen (i) $\Leftrightarrow$ (iii): $E \subset E_{FAK}$ bedeutet $E \subset (E_f)^\beta$ (1.5 und 1.6). Da $S \subset \omega$ stets $S \subset S^{\beta\beta}$ impliziert, so folgt $E_f \subset (E_f)^{\beta\beta} \subset E^\beta$. Umgekehrt impliziert $E_f \subset E^\beta$ in (iii), daß $E \subset E^{\beta\beta} \subset (E_f)^\beta = E_{FAK}$. Dies beweist (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Daß (iv) $\Leftrightarrow$ (iii) ergibt sich mit 1.5 und 1.6 und der Tatsache, daß (iii) $\Leftrightarrow$ (ii).

1.9 SATZ. *Ist E ein FK-Raum mit $\phi \subset E$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $E \subset E_{F\sigma K}$,

(ii) $E_f = E^\sigma$,

(iii) $E_f \subset E^\sigma$,

(iv) $E_{F\sigma K} = E^{\sigma\sigma}$.

BEWEIS. Entsprechend wie bei 1.8.

1.10 BEMERKUNG. Mit ganz ähnlichen Überlegungen läßt sich auch zeigen, daß jede der Bedingungen (i) bis (iv) in 1.8 äquivalent ist mit jeder der folgenden Bedingungen:

(v) $E^{\beta} = (E_{AK})^{\beta}$,
(vi) $E^{\beta\beta} = (E_{AK})^{\beta\beta}$,
(vii) $E \subset (E_{AK})^{\beta\beta}$,
(viii) *E hat AB und $E^{\gamma} = E^{\beta}$,*
(ix) *E hat AB und $E^{\beta\beta}$ ist ein FK-Raum mit FAK.*

Entsprechend läßt sich zeigen, daß jede der Bedingungen (i) bis (iv) in 1.9 äquivalent ist mit jeder der folgenden Bedingungen:

(v) $E^{\sigma} = (E_{\sigma K})^{\sigma}$,
(vi) $E^{\sigma\sigma} = (E_{\sigma K})^{\sigma\sigma}$,
(vii) $E \subset (E_{\sigma K})^{\sigma\sigma}$,
(viii) *E hat σB und $E^{\sigma b} = E^{\sigma}$,*
(ix) *E hat σB und $E^{\sigma\sigma}$ ist ein FK-Raum mit $F\sigma K$.*

1.11. Für die Anwendungen ist es nun von besonderer Bedeutung, daß unter der zusätzlichen Bedingung, daß E und F AB (σB) besitzen, eine Verschärfung der ersten Aussage in 1.2 gilt.

1.12 SATZ. *Sind E und F FK-Räume welche ϕ enthalten und $AB(\sigma B)$ besitzen, so gilt $(E + F)_{AK} = E_{AK} + F_{AK}$ beziehungsweise $(E + F)_{\sigma K} = E_{\sigma K} + F_{\sigma K}$.*

BEWEIS. Nach den Bemerkungen in 1.2 genügt es zu zeigen, daß jeweils der linke Raum in dem rechten Raum enthalten ist.

Nach Garling ([3], Theorem 4) gilt für jeden FK-Raum A der AB besitzt die Gleichung $A_{AK} = bv_0 \cdot A$, wobei $bv_0 = bv \cap c_0$. Somit ist $(E+F)_{AK} = bv_0 \cdot (E + F) \subset bv_0 \cdot E + bv_0 \cdot F = E_{AK} + F_{AK}$. Dies beweist die Behauptung im AB-Fall.

Besitzen E und F σB so ergibt sich die Behauptung entsprechend unter Verwendung der von Buntinas ([1], Theorem 3.11) bewiesenen Aussage: Ist A ein FK-Raum mit σB, so gilt $A_{\sigma K} = q_0 \cdot A$, wobei $q_0 = q \cap c_0$.

Wir kommen nun zu dem in 1.3 angekündigten Satz.

1.13 SATZ. *Sind E und F FK-Räume welche ϕ enthalten und FAK ($F\sigma K$) besitzen, so gilt $E + F \subset (E + F)_{FAK}$ beziehungsweise $E + F \subset (E + F)_{F\sigma K}$.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem folgenden allgemeineren Satz.

1.14 SATZ. *Sind E und F FK-Räume welche ϕ enthalten so gilt:*

(a) *Haben E und F AB, so ist $E_{FAK}+F_{FAK}\subset(E+F)_{FAK}$ und es ist $E_{FAK}+F_{FAK}=(E+F)_{FAK}$ genau dann, wenn $E_{FAK}+F_{FAK}=D^{\beta}$ für ein $D\subset\omega$, das heißt, wenn $E_{FAK}+F_{FAK}$ ein β-dualer Raum ist.*

(b) *Haben E und F σB, so ist $E_{F\sigma K}+F_{F\sigma K}\subset(E+F)_{F\sigma K}$ und es ist $E_{F\sigma K}+F_{F\sigma K}=(E+F)_{F\sigma K}$ genau dann, wenn $E_{F\sigma K}+F_{F\sigma K}=D^{\sigma}$ für ein $D\subset\omega$, das heißt, wenn $E_{F\sigma K}+F_{F\sigma K}$ ein σ-dualer Raum ist.*

BEWEIS. Wir beschränken uns auf den Beweis der Aussage (a), da sich (b) ganz entsprechend beweisen läßt. Es gilt die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}(E+F)_{FAK}&=\{(E+F)_{AK}\}^{\beta\beta}=(E_{AK}+F_{AK})^{\beta\beta}=[(E_{AK})^{\beta}\cap(F_{AK})^{\beta}]^{\beta}\\&=[(E_{AK})^{\beta\beta}+(F_{AK})^{\beta\beta}]^{\beta\beta}=(E_{FAK}+F_{FAK})^{\beta\beta}\,.\end{aligned}$$

Dabei folgt die erste und fünfte Gleichung aus 1.2 und 1.7, die zweite aus 1.12, die dritte ist klar, bei der vierten verwenden wir, daß für eine beliebige Menge $S\subset\omega$ gilt: $S^{\beta\beta\beta}=S^{\beta}$. Aus $(E+F)_{FAK}=(E_{FAK}+F_{FAK})^{\beta\beta}$ liest man die Behauptung ab, denn für einen β-dualen Raum ist $A^{\beta\beta}=A$ ([4], Theorem 3).

1.15. Der nächste Satz zeigt die Identität verschiedener Multiplikatorenräume. Wir verwenden diesen Satz auch zum Beweis der wichtigen Tatsache, daß jeder solide *FK*-Raum der ϕ enthält, *FAK* besitzt. Für *BK*-Räume wurde dies schon von Sargent ([20], Theorem 3) mit einer unnötigen, automatisch erfüllten Bedingung bewiesen.

1.16 SATZ. *Sind E und F FK-Räume, welche ϕ enthalten, so gilt: $(E\to F)\subset(E_{AD}\to F_{AD})\subset(F_f\to E_f)\subset(E_{FAK}\to F_{FAK})\subset(E_{AK}\to F_{AK})=(E_{AB}\to F_{AB})=(E_{AK}\to F)$. Ist überdies $E_{FAK}\subset(E_{FAK})_{FAK}$, so gilt: $(E_{FAK}\to F_{FAK})=(E_{AK}\to F_{AK})$.*

BEWEIS. Sei $x\in E_{AD}$. Dann existiert eine Folge $(x^n)\subset\phi$ derart, daß $\lim_{n\to\infty}x^n=x$ in E. Sei $y\in(E\to F)$. Die Abbildung $T_y\colon E\to F$ mit $T_yx=yx$ ist auf Grund des Satzes vom abgeschlossenen Graph stetig. Also gilt $\lim_{n\to\infty}x^ny=xy$ in F. Wegen $x^ny\in\phi$ ist $xy\in F_{AD}$ und damit $y\in(E_{AD}\to F_{AD})$. Somit ist $(E\to F)\subset(E_{AD}\to F_{AD})$.

Sei nun $y\in(E_{AD}\to F_{AD})$ und $f\in(F_{AD})'$, also $f(\delta^k)\in(F_{AD})_f$. Die Abbildung $T_y\colon E_{AD}\to F_{AD}$ mit $T_yx=yx$, ist linear und stetig. Also ist $f\circ T_y\in(E_{AD})'$ und $\{f\circ T_y(\delta^k)\}=\{y_k\circ f(\delta^k)\}\in(E_{AD})_f$. Daraus folgt $y\in((F_{AD})_f\to(E_{AD})_f)$.*) Nun ist $F_f=(F_{AD})_f$, denn $F_{AD}\subset F$ impliziert $F_f\subset(F_{AD})_f$, und ist $x\in(F_{AD})_f$, so ist $x_k=f(\delta^k)$ für ein $f\in(F_{AD})'$ wenn $\delta^k\in F_{AD}$. Dies f kann zu einem $g\in F'$ auf Grund des Hahn-Banachschen Erweiterungssatzes ausgedehnt werden. Also ist auch $x\in F_f$ und damit $F_f=(F_{AD})_f$. Daraus folgt $(E_{AD}\to F_{AD})\subset(F_f\to E_f)$.

*) Der Beweis für die Inklusion $(E_{AD}\to F_{AD})\subset((F_{AD})_f\to(E_{AD})_f)$ wurde nachträglich (am 11. 11. 1973) vereinfacht.

Für beliebige Mengen D, G, H in ω gilt $(D\to G)\subset(G^H\to D^H)$, wie leicht nachzuprüfen ist. Also ist auch $(D\to G)\subset((D^H)^H\to(G^H)^H)$. Wendet man dies auf $E_{AB}=(E_{AK})^{\gamma\gamma}$ (1.7), $E_{FAK}=(E_f)^\beta$ (1.5) und entsprechend für F an, so ergibt sich mit den vorausgegangenen Schlüssen

$$(E\to F)\subset(E_{AD}\to F_{AD})\subset(F_f\to E_f)\subset(E_{FAK}\to F_{FAK})\ .$$

Ferner ist $(E_{FAK}\to F_{FAK})\subset(E_{AK}\to F_{AK})$, denn $E_{AK}\subset E_{FAK}\subset E_{AB}$, $(F_{FAK})_{AK}=F_{AK}$ und für beliebige FK-Räume A und B gilt $(A_{AK}\to B)=(A_{AK}\to B_{AK})$ ([8], Lemma 2.3). Wegen $(E_{AK}\to F_{AK})\subset((E_{AK})^{\gamma\gamma}\to(F_{AK})^{\gamma\gamma})=(E_{AB}\to F_{AB})\subset(E_{AK}\to(F_{AB})_{AK})=(E_{AK}\to F_{AK})$ ergibt sich hieraus die erste Behauptung. Ist überdies $E_{FAK}\subset(E_{FAK})_{FAK}$, so ist nach 1.7 $E_{FAK}=(E_{AK})^{\beta\beta}$. Somit gilt in diesem Fall $(E_{AK}\to F_{AK})\subset((E_{AK})^{\beta\beta}\to(F_{AK})^{\beta\beta})=(E_{FAK}\to(F_{AK})^{\beta\beta})\subset(E_{FAK}\to F_{FAK})\subset(E_{AK}\to F_{AK})$, woraus die zweite Behauptung folgt.

1.17 BEMERKUNG. Ersetzt man in 1.16 FAK, AK, AB beziehentlich durch $F\sigma K$, σK, und σB, so bleiben die Aussagen gültig und es ist $(E_{\sigma K}\to F_{\sigma K})\subset(E_{AK}\to(F_{\sigma K})_{AK})=(E_{AK}\to F_{AK})$.

1.18 SATZ. (a) *Ist E ein FK-Raum, ist $\phi\subset E$ und ist $(E_{AK})^\beta$ ein FK-Raum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $E_{AB}=(E_{AB})_{FAK}=E_{FAK}$,

(ii) $(E_{AK})^\beta$ *hat FAK*,

(iii) $(E_{AK})^\beta=(E_{AB})^\beta$.

(b) *Ist E ein FK-Raum, ist $\phi\subset E$ und ist $(E_{\sigma K})^\sigma$ ein FK-Raum, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $E_{\sigma B}=(E_{\sigma B})_{F\sigma K}=E_{F\sigma K}$,

(ii) $(E_{\sigma K})^\sigma$ *hat $F\sigma K$*,

(iii) $(E_{\sigma K})^\sigma=(E_{\sigma B})^\sigma$.

BEWEIS. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach 1.7 ist $E_{AB}=(E_{AK})^{\beta\gamma}$ und $(E_{AB})_{FAK}=(E_{AK})^{\beta\beta}$. Also impliziert (i), daß $(E_{AK})^{\beta\gamma}=(E_{AK})^{\beta\beta}$. Nach 1.10 (viii) folgt hieraus (ii), wenn $(E_{AK})^\beta$ AB hat. Dies ist der Fall, denn $(cs)^\beta=bv$, $\delta\in bv$ und $(E_{AK})^\beta\equiv(E_{AK}\to cs)\subset(cs^\beta\to(E_{AK})^\beta)=(bv\to(E_{AK})^\beta)$ implizieren $(E_{AK})^\beta=bv\cdot(E_{AK})^\beta$, sodaß $(E_{AK})^\beta$ AB hat nach [3], Seite 1005, Theorem 4.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Hat $(E_{AK})^\beta$ FAK, so ist nach 1.10 (viii) $(E_{AK})^{\beta\gamma}=(E_{AK})^{\beta\beta}$. Wegen $E_{AB}=(E_{AK})^{\beta\gamma}$ (1.7) und $(E_{AB})_{FAK}=((E_{AB})_{AK})^{\beta\beta}=(E_{AK})^{\beta\beta}$ (1.7), folgt hieraus $E_{AB}=(E_{AB})_{FAK}$. Da $(E_{AB})_{FAK}=(E_{AK})_{FAK}\subset E_{FAK}\subset E_{AB}$, so folgt hieraus (i).

(i) $\Rightarrow$ (iii): Gilt (i), so ist wegen 1.7 $E_{AB}=(E_{AB})_{FAK}=(E_{AK})^{\beta\beta}$. Wegen $(E_{AK})^{\beta\beta\beta}=(E_{AK})^\beta$ ([4], Th. 3) folgt hieraus (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Gilt (iii), so ist $(E_{AK})^{\beta\beta}=(E_{AB})^{\beta\beta}$. Also ist wegen $(E_{AB})_{AK}=E_{AK}$ und wegen 1.10 (vi) $E_{AB}\subset(E_{AB})_{FAK}=(E_{AK})_{FAK}\subset E_{FAK}\subset E_{AB}$. Somit gilt (i).

(b) Dies läßt sich entsprechend beweisen, unter Verwendung der Tatsache, daß $(\sigma s)^\sigma = q$. Dies impliziert $(E_{\sigma K})^\sigma = q\cdot(E_{\sigma K})^\sigma$, sodaß $(E_{\sigma K})^\sigma$ σB hat ([1], Seite 197, Th. 3.11). Ferner gilt $(\sigma b)_{\sigma K} = \sigma s$ ([1], Proposition 3.6). Daneben hat man 1.10 zu beachten.

1.19 BEISPIELE. (a) Für $E = m$ ist 1.18 (a), (ii) erfüllt, denn $m_{AK} = c_0$, $(c_0)^\beta = l$ und l hat AK. Also ist nach 1.18 (a), (i) $m_{AB} = m = m_{FAK}$. Somit hat m FAK.

(b) Für $E = \widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty}$ ist 1.18 (b), (iii) auf Grund des in der Einleitung genannten Satzes von F. und M. Riesz ([29], Seite 285 oder [17]) erfüllt, denn $\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty} = (\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{\sigma B}$, $(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{\sigma K} = \hat{C}_c + \hat{C}_s$, $(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})^\sigma = \hat{L}_c \cap \hat{L}_s$, $(\hat{C}_c + \hat{C}_s)^\sigma = \hat{M}_c \cap \hat{M}_s$. Die Gleichung $\hat{M}_c \cap \hat{M}_s = \hat{L}_c \cap \hat{L}_s$ ist aber äquivalent zur Aussage von F. und M. Riesz. Für mehr Einzelheiten wird auf Satz 1.22 hingewiesen.

1.20 SATZ. *Jeder solide FK-Raum der ϕ enthält, hat FAK.*

BEWEIS. Sei E ein solider *FK*-Raum der ϕ enthält. Nach 1.19 (a) ist m ein *FK*-Raum mit *FAK* und es ist $m_{FAK} = (c_0)^{\beta\beta} = m$. Mit 1.16 folgt hieraus $E = (m \to E) \subset (m \to E_{FAK}) \subset E_{FAK}$, wobei die letzte Inklusion aus $\delta \in m$ folgt.

1.21 SATZ. *Sind E und F FK-Räume welche ϕ enthalten, so gilt:* (a) *Haben E und F AB, so ist $(E+F)_{AB} = E_{AB} + F_{AB}$ genau dann, wenn $E_{AB} + F_{AB} = D^\gamma$ für ein $D \subset \omega$, d.h. wenn $E_{AB} + F_{AB}$ ein γ-dualer Raum ist. Die letzte Bedingung ist erfüllt, wenn $(E_{AK})^\gamma$ und $(F_{AK})^\gamma$ FK-Räume sind oder wenn E und F BK-Räume sind.*

(b) *Haben E und F σB, so ist $(E+F)_{\sigma B} = E_{\sigma B} + F_{\sigma B}$ genau dann, wenn $E_{\sigma B} + F_{\sigma B} = D^{\sigma b}$ für ein $D \subset \omega$, d.h. wenn $E_{\sigma B} + F_{\sigma B}$ ein σb-dualer Raum ist. Die letzte Bedingung ist erfüllt, wenn $(E_{\sigma K})^{\sigma b}$ und $(F_{\sigma K})^{\sigma b}$ FK-Räume sind, oder wenn E und F BK-Räume sind.*

BEWEIS. (a) Die erste Aussage läßt sich genau wie die erste Aussage in Satz 1.14 beweisen. Man hat nur im Beweis von Satz 1.14 überall *FAK* durch *AB* und β durch γ zu ersetzen. Wir zeigen, daß $E_{AB} + F_{AB}$ ein γ-dualer Raum ist, wenn $(E_{AK})^\gamma$ und $(F_{AK})^\gamma$ *FK*-Räume sind: Unter diesen Voraussetzungen ist wegen 1.2, 1.16 und da für jeden *FK*-Raum A der ϕ enthält $(A_{AK})^\beta$ mit $(A_{AK})'$ identifiziert werden kann ([2], Seite 965) $E_{AB} + F_{AB} \subset (E+F)_{AB} = [(E+F)_{AK}]^{\gamma\gamma} = [E_{AK} + F_{AK}]^{\gamma\gamma} = \{(E_{AK})^\gamma \cap (F_{AK})^\gamma\}^\gamma$. Da $(bs)_{AK} = cs$, so ist für jeden *FK*-Raum A nach 1.16 $A^\gamma \subset (A_{AK})^\beta$. Somit gilt $\{(E_{AK})^\gamma \cap (F_{AK})^\gamma\}^\gamma \subset \{(E_{AK})^\gamma{}_{AK} \cap (F_{AK})^\gamma{}_{AK}\}^\beta = \{(E_{AK})^\gamma{}_{AK}\}^\beta + \{(F_{AK})^\gamma{}_{AK}\}^\beta$, wobei die letzte Gleichung wie in [7], Theorem 4 bewiesen, oder aus 2.3, (a) gefolgert werden kann, da AK die Eigenschaft FAK impliziert. Wegen 1.16 und 1.7 ist der letzte Raum identisch mit $\{(E_{AK})^{\gamma}{}_{AB}\}^{\gamma} + \{(F_{AK})^{\gamma}{}_{AB}\}^{\gamma} = (E_{AK})^{\gamma\gamma} + (F_{AK})^{\gamma\gamma} = E_{AB} + F_{AB}$. Also ist $E_{AB} + F_{AB} = [(E + F)_{AK}]^{\gamma\gamma}$ und damit ein γ-dualer Raum, wenn $(E_{AK})^{\gamma}$ und $(F_{AK})^{\gamma}$ FK-Räume sind. Ist E ein BK-Raum, so ist $(E_{AK})^{\gamma}$ stets ein BK-Raum unter der Norm $\| x \| = \sup_{\|y\|_{E_{AK}} \leq 1} \| xy \|_{bs}$. Entsprechendes gilt für F.

(b) Dies läßt sich entsprechend beweisen.

1.22 Satz. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\hat{M}_c \cap \hat{M}_s = \hat{L}_c \cap \hat{L}_s$ (F. und M. Riesz [17]),

(ii) $\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty} = (\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{F\sigma K}$,

(iii) $\hat{M}_c \cap \hat{M}_s = (\hat{M}_c \cap \hat{M}_s)_{F\sigma K}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) wurde in 1.19, (b) gezeigt. Umgekehrt impliziert (ii) nach 1.10 (viii) und 1.9 (i), daß $(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})^{\sigma b} = (\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})^{\sigma}$. Wie leicht nachzuprüfen ist, gilt $(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})^{\sigma b} = (\widehat{L_c^\infty})^{\sigma b} \cap (\widehat{L_s^\infty})^{\sigma b} = \hat{M}_c \cap \hat{M}_s$ und $(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})^{\sigma} = (\widehat{L_c^\infty})^{\sigma} \cap (\widehat{L_s^\infty})^{\sigma} = \hat{L}_c \cap \hat{L}_s$. Also gilt (i). Schließlich ist (iii) äquivalent zu (i), da 1.18, (b), (iii) äquivalent ist zu 1.18, (b), (ii). Setzt man $E = \widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty}$ in 1.18, (b), (iii), so erhält man die Gleichung (i) von F. und M. Riesz, denn $[(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{\sigma K}]^{\sigma} = (\hat{C}_c + \hat{C}_s)^{\sigma} = (\hat{C}_c)^{\sigma} \cap (\hat{C}_s)^{\sigma} = \hat{M}_c \cap \hat{M}_s$ und $[(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{\sigma B}]^{\sigma} = (L_c^\infty + L_s^\infty)^{\sigma} = \hat{L}_c \cap \hat{L}_s$. Andererseits erhält man aus 1.18, (b) (ii) die Tatsache, daß $[(\widehat{L_c^\infty} + \widehat{L_s^\infty})_{\sigma k}]^{\sigma}$ $F\sigma K$ hat. Das bedeutet, daß $(\hat{C}_c + \hat{C}_s)^{\sigma} = \hat{M}_c \cap \hat{M}_s$ $F\sigma K$ hat. Somit ist $\hat{M}_c \cap \hat{M}_s \subset (\hat{M}_c \cap \hat{M}_s)_{F\sigma K}$. Da umgekehrt $(\hat{M}_c \cap \hat{M}_s)_{F\sigma K} \subset (\hat{M}_c \cap \hat{M}_s)_{\sigma B} = \hat{M}_c \cap \hat{M}_s$, so ergibt sich (iii).

2. Summendarstellungen für $|\sigma c|$ und $|C, 1|$.

2.1. Es sei an die Definition des BK-Raumes $|\sigma c|$ der absolut $(C, 1)$-limitierbaren Folgen erinnert:

$$|\sigma c| = \left\{x \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Delta n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k \right| + \sup_n \left| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k \right| = \| x \| < \infty \right\}.$$

Mit Hilfe des Operators T der arithmetischen Mittel (siehe Einleitung), läßt sich $|\sigma c|$ auch einfach als $T^{-1}(bv) = bv_A$ schreiben, das heißt $|\sigma c|$ ist das Wirkfeld bestehend aus denjenigen Folgen, welche durch die Matrix $A = (a_{nk})$ der arithmetischen Mittel nach bv abgebildet werden.

2.2 Satz. $|\sigma c| = bv + dl = q + dl$.

Beweis. Ist $A = (a_{nk})$ die Matrix der arithmetischen Mittel, das heißt ist

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für} \quad k = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & \text{für} \quad k = n + 1, n + 2, \cdots, \end{cases}$$

so definiert die transponierte Matrix A^* den Operator T^*, der für alle $x \in d(cs)$ definiert ist, und es ist für $x \in d(cs)$

$$(T^*x)_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x_n}{n} .$$

Nach G. H. Hardy ([9], Seite 132) bildet T^* den Raum cs in den Raum $\int c_0 \cap cs$ ab. Da T der zu T^* adjungierte Operator ist, so bildet T den Raum $\left(\int c_0 \cap cs\right)'$ nach cs' ab. Da $\int c_0 \cap cs$ als Durchschnitt von zwei BK-Räumen mit AK auch ein BK-Raum mit AK ist, so kann $\left(\int c_0 \cap cs\right)'$ mit $\left(\int c_0 \cap cs\right)^\beta = \left(\int c_0\right)^\beta + (cs)^\beta = dl + bv$ identifiziert werden ([2], S. 965). Somit bildet T $bv + dl$ nach bv ab. Dies beweist $bv + dl \subset T^{-1}(bv)$.

Nach A. Wilansky und K. Zeller ([24], Seite 268) oder nach B. Tyler ([23], S. 345) ist

$$|\sigma c|^\beta = cs \cap \int m$$

Zum restlichen Beweis verwenden wir die folgende Aussage, welche wir wegen ihrer Bedeutung gleich allgemeiner, als hier eigentlich notwendig wäre, formulieren.

2.3 SATZ. *Sind E und F FK-Räume welche ϕ enthalten, so gilt:*
(a) $(E \cap F)^\beta = E^\beta + F^\beta$, *wenn E und F FAK haben.*
(b) $(E \cap F)^\sigma = E^\sigma + F^\sigma$, *wenn E und F $F\sigma K$ haben.*
(c) $(E \cap F)^\gamma = E^\gamma + F^\gamma$, *wenn E und F AB haben.*
(d) $(E \cap F)^{\sigma b} = E^{\sigma b} + F^{\sigma b}$, *wenn E und F σB haben.*

BEWEIS. (a) Haben E und F FAK so hat auch $E \cap F$ FAK, denn $(E \cap F)_f = E_f + F_f$ ([19], Seite 867, Theorem 3.1). Also ist nach 1.5

$$(E \cap F)_{FAK} = [(E \cap F)_f]^\beta = (E_f)^\beta \cap (F_f)^\beta = E_{FAK} \cap F_{FAK} .$$

Da $E \cap F$ FAK hat, so ist $(E \cap F)_f = (E \cap F)^\beta$ (1.8) und damit $(E \cap F)^\beta = E_f + F_f = E^\beta + F^\beta$.

(b) Dies läßt sich entsprechend beweisen unter Verwendung von $E_f = E^\sigma$ (1.9), für jeden FK Raum E der ϕ enthält und $F\sigma K$ besitzt.

(c) Haben E und F AB, so hat auch $E \cap F$ AB. Also ist nach dem in Teil (a) Bewiesenen, nach 1.16 und wegen $(bs)_{AK} = cs$

$$\begin{aligned}(E \cap F)^\gamma \subset [(E \cap F)_{AB}]^\gamma = (E_{AB} \cap F_{AB})^\gamma &= (E_{AK} \cap F_{AK})^\beta \\ &= (E_{AK})^\beta + (F_{AK})^\beta \\ &= (E_{AB})^\gamma + (F_{AB})^\gamma \subset E^\gamma + F^\gamma .\end{aligned}$$

Die Umkehrung $E^\gamma + F^\gamma \subset (E \cap F)^\gamma$ ist klar.

2.4 BEMERKUNGEN. (i). Aussage 2.3, (a) wurde auf andere Weise zuerst von Lloyd Gavin [30] bewiesen.

(ii) Wegen 1.20 gilt 2.3, (a) insbesondere für solide FK-Räume welche ϕ enthalten. Da für solide Folgenräume $E^\beta = E^\alpha \equiv (E \to l)$, so kann der in G. Köthe ([12], Seite 414) konstruierte Fall der Ungleichung $(E \cap F)^\alpha \neq E^\alpha + F^\alpha$ bei soliden FK-Räumen welche ϕ enthalten, nicht eintreten.

2.5 FORTSETZUNG DES BEWEISES VON 2.2. Da $\int m$ als solider BK-Raum FAK hat (1.20) und cs ein BK-Raum mit AK ist, so ist $cs \cap \int m$ ein BK-Raum mit FAK der die Voraussetzungen von 2.3 (a) erfüllt. Somit gilt $|\sigma c|^{\beta\beta} = \left(cs \cap \int m\right)^\beta = (cs)^\beta + \left(\int m\right)^\beta = bv + dl \subset |\sigma c|$. Wegen $|\sigma c| \subset |\sigma c|^{\beta\beta}$ folgt hieraus $|\sigma c| = bv + dl$. Die Gleichung $bv + dl = q + dl$ ergibt sich aus Hardys $O(1/n)$-Taubersatz für das $(C, 1)$-Verfahren ([9], Seite 121):

$$cs \cap \int m = \sigma s \cap \int m \,.$$

Da auf beiden Seiten dieser Gleichung BK-Räume mit $F\sigma K$ stehen, so ergibt sich mit 2.3, (b) und mit bekannten Aussagen über Summierbarkeitsfaktoren für das $(C, 1)$-Verfahren ([9], S. 128), daß $\left(cs \cap \int m\right)^\sigma = (cs)^\sigma + \left(\int m\right)^\sigma = bv + dl$ und $\left(\sigma s \cap \int m\right)^\sigma = (\sigma s)^\sigma + \left(\int m\right)^\sigma = q + dl$.

2.6 FOLGERUNG. $|C, 1| = l + T^{-1}(l) = h + T^{-1}(l)$.

BEWEIS. Sei $x \in \omega$, $s = (s_n)$, wobei $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Die obigen Gleichungen ergeben sich aus denjenigen in 2.2 unmittelbar wie folgt:

$$\begin{aligned} s \in |\sigma c| &\Leftrightarrow x \in |C, 1| \\ s \in bv &\Leftrightarrow x \in l \\ s \in dl &\Leftrightarrow x \in T^{-1}(l) \\ s \in q &\Leftrightarrow x \in h_b \,, \end{aligned}$$

wobei $h_b = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\Delta x_k| < \infty$ und $x \in bs\}$. Da $q \subset bv$ und da $s \in bv$ impliziert, daß $x \in l$, so impliziert $s \in q$ auch $h_b \subset l$. Also ist $h_b \subset h = \{x\colon \sum_{k=1}^{\infty} k\,|\Delta x_k| < \infty$ und $x \in c_0\}$. Da $h = l \cap \int bv$ ([5], Theorem 3.2), so ist $h \subset h_b$ und somit $h_b = h$.

2.7 BEMERKUNG. Im Zusammenhang mit 2.2 und 2.6 sind auch die folgenden Gleichungen von Interesse:

(a) $\int |\sigma c| = T(|C, 1|)$,

(b) $\int bv = T(l)$,

(c) $\int q = T(h)$.

BEWEIS. Mit s wie in 2.6 ist offensichtlich $\int s = T(x)$, wobei $\int s = (s_n/n)$. Daraus ergeben sich (a), (b) und (c) unmittelbar auf Grund der im Beweis von 2.6 angegebenen Beziehungen zwischen s und x. Man hat nur in der Gleichung $\int s = T(x)$ anstelle von s beziehungsweise x, die im Beweis von 2.6 links beziehungsweise rechts stehenden Räume einzusetzen.

3. Anwendungen auf Taubersätze.

3.1. Es sei zunächst das allgemeine Prinzip erläutert, auf dem unsere Taubervergleichssätze beruhen.

Seien A, B, C, D und E lineare Räume in ω, $\tau: D \to \omega$ eine additive Abbildung, $C \subset \tau^{-1}(E)$, $B \not\subset C$ (zur Vermeidung des trivialen Falles $B+C=C$) und

$$A = B + C\,.$$

Dann gilt

$$\tau^{-1}(E) \cap A = \tau^{-1}(E) \cap B + C\,. \tag{1}$$

3.2 DEFINITION. "$x \in A$" heißt eine (E, C)-Tauberbedingung für τ, wenn $\tau^{-1}(E) \cap A \subset C$.

3.3. Die Gleichung (1) impliziert, daß "$x \in A$" genau dann eine (E, C)-Tauberbedingung für τ ist, wenn "$x \in B$" eine solche Tauberbedingung für τ ist. Kürzer drücken wir dies so aus: "$x \in A$" und "$x \in B$" sind äquivalente $(E, C) - TB$ für τ.

3.4. Ist τ durch eine Matrix gegeben in der Art, daß $\tau x = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k)$, wobei die a_{nk} $(n, k = 1, 2, \cdots)$ komplexe Zahlen sind und ist E ein FK-Raum, $D = \{x: \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ existiert für jedes $n = 1, 2, \cdots\}$, so ist bekanntlich das E-Wirkfeld $\tau^{-1}(E)$ ein FK-Raum ([27], S. 474). Sind also auch A, B und C FK-Räume, so ist (1) eine Gleichung zwischen dem FK-Raum $\tau^{-1}(E) \cap A$ und der Summe der FK-Räume $\tau^{-1}(E) \cap B$ und C, auf welche nun die Theorie des ersten Abschnitts angewandt werden kann. Dies wird hier nicht weiter ausgeführt. Dagegen sollen die Aussagen des zweiten Abschnitts zur Gewinnung von Taubervergleichssätzen benützt werden.

3.5. Zur Erläuterung unserer Bezeichnungen sei bemerkt, daß für $E = c$, $\tau^{-1}(E) = \sigma s$ und $C = cs$ die Gleichung (1) eine Aussage zum Vergleich von Tauberbedingungen für das $(C, 1)$-Verfahren zur Summierung von Reihen liefert. Ist $E = bv$, $\tau^{-1}(bv) = |C, 1|$ und $C = l$, so liefert (1) eine Aussage zum Vergleich von "absoluten Tauberbedingungen" $=(bv,l) -$

$TB = ATB$ für das $|C, 1|$-Verfahren zur Summierung von Reihen.

3.6 SATZ. *Sind D und E lineare Räume in ω, $\tau: D \to \omega$ eine additive Abbildung und $l \subset \tau^{-1}(E)$, so sind die folgenden, jeweils auf derselben Zeile stehenden Bedingungen äquivalente $(E, l) - TB$ für τ:*

(a) "$x \in \int |\sigma c|$", "$x \in \int bv$", "$x \in \int q$".

(b) "$x \in |C, 1|$", "$x \in T^{-1}(l)$".

BEWEIS. (a) Nach 2.2 ist

$$\tau^{-1}(E) \cap \int |\sigma c| = \tau^{-1}(E) \cap \int bv + l = \tau^{-1}(E) \cap \int q + l .$$

Daraus liest man die Behauptung ab.

(b) Dies ergibt sich ganz entsprechend mit 2.6.

3.7 BEMERKUNG. Nach J. M. Hyslop [10] ist "$x \in \int |\sigma c|$" eine ATB für dasAb elverfahren. Aus einer Aussage von H. Tietz ([22], S. 140, 4a) folgt die Äquivalenz dieser ATB für das Abelverfahren mit der Bedingung "$x \in \int bv$". Nach 3.6 sind diese ATB für das Abelverfahren auch äquivalent zu der gröberen Bedingung "$x \in \int q$" (beachte: $q \subsetneqq bv \subsetneqq |\sigma c|$).

SCHLUßBEMERKUNGEN

1. Die folgende Frage drängt sich im Hinblick auf die Aussagen in 1.7 und 1.16 auf: Gilt für jeden FK-Raum E die Inklusion $E_{FAK} \subset (E_{FAK})_{FAK}$?

2. Die Aussage (v) in 1.10 "$E \subset E_{FAK}$" $\Leftrightarrow$ "$E^{\beta} = (E_{AK})^{\beta}$" wurde für BK-Räume E welche ϕ enthalten, schon von W. L. C. Sargent ([20], p. 60, Theorem 3) und für Toeplitz-Funktionale Abschnittskonvergenz von Glenn Meyers (unveröffentlicht) bewiesen.

M. Buntinas bin ich zu Dank verpflichtet für Gedankenaustausch zum Gegenstand des ersten Abschnitts. Insbesondere waren die Aussagen 1.4, 1.5, 1.6 und 1.7 (a), (b) Buntinas schon früher bekannt (siehe auch M. Buntinas, On sectionally bounded sequence spaces and γ-duality, Notices Amer. Math. Soc. 18 (1971), 188). Unsere Beweise sind teilweise von den ursprünglich von Buntinas gegebenen Beweisen verschieden.

S. Goes danke ich für kritisches Studium der Arbeit und für zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

LITERATUR

[1] M. BUNTINAS, Convergent and bounded Cesàro sections in FK-spaces. Math. Z. 121, (1971), 191-200.

[2] D. J. H. GARLING, The β- and γ-duality of sequence spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc. 63, (1967), 963-998.

[3] D. J. H. GARLING, On topological sequence spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc. 63, (1967), 997-1019.

[4] G. GOES, Complementary spaces of Fourier coefficients, convolutions, and generalized matrix transformations and operators between *BK*-spaces. J. Math. Mech. 10, (1961), 135-157.

[5] G. GOES AND S. GOES, Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients I. Math. Z. 118, (1970), 93-102.

[6] G. GOES, Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients II. J. Math. Anal. Appl. 39, (1972), 477-494.

[7] G. GOES, Bounded variation sequences of order k and the representation of null sequences. J. Reine Angew. Math. 253, (1972), 152-161.

[8] G. GOES, On a Tauberian theorem for sequences with gaps and on Fourier series with gaps. Tôhoku Math. J. 24, (1972), 153-165.

[9] G. H. HARDY, Divergent series. London: Oxford at the Clarendon Press 1949.

[10] J. M. HYSLOP, A Tauberian theorem for absolute summability. J. London Math. Soc. 12, (1937), 176-180.

[11] G. KANGRO, Über die Schwächung der Tauber-Bedingungen (Russisch. Estnische und deutsche Zusammenfassungen). Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat. 19, (1970), 24-33.

[12] G. KÖTHE, Topologische lineare Räume I, Springer, Berlin 1960.

[13] D. LEVIATAN, Remarks on some Tauberian theorems of Meyer-König, Tietz and Stieglitz. Proc. Amer. Math. Soc. 29, (1971), 126-132.

[14] W. MEYER-KÖNIG AND H. TIETZ, On Tauberian conditions of Type *o*. Bull. Amer. Math. Soc. 73, (1967), 926-927.

[15] W. MEYER-KÖNIG AND H. TIETZ, Über die Limitierungsumkehrsätze vom Type *o*. Studia Math. 31, (1968), 205-216.

[16] W. MEYER-KÖNIG AND H. TIETZ, Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie. Arch. Math. (Brno) 5, (1969). 177-186.

[17] F. RIESZ AND M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Quatrième Congrès des mathématicians scandinaves, Stockholm 1916, 27-44.

[18] W. RUCKLE, Lattices of sequence spaces. Duke Math. J. 35, 491-503.

[19] W. RUCKLE, An abstract concept of the sum of a numerical series. Canad. J. Math. 22, 863-874.

[20] W. L. C. SARGENT, On sectionally bounded *BK*-spaces. Math. Z. 83, (1964), 57-66.

[21] M. Stieglitz, Über ausgezeichnete Tauber-Matrizen. Arch. Math. (Brno) 5, (1969), 227-234.

[22] H. TIETZ, Über absolute Tauber-Bedingungen. Math. Z. 113, (1970), 136-144.

[23] B. TYLER, Absolute convergence and summability factors in a sequence. J. London Math. Soc. 33, (1958), 341-351.

[24] A. WILANSKY AND K. ZELLER, Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Math. Z. 64, (1956), 258-269.

[25] A. WILANSKY, Topics in functional analysis. Springer, Berlin 1967.

[26] A. WILANSKY, From triangular matrices to separated inductive limits. Studia Math. 31, (1968), 469-479.

[27] K. ZELLER, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 55, (1951), 463-487.

[28] K. ZELLER, Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. 55, (1951), 55-70.

[29] A. ZYGMUND, Trigonometric series, vol. I, London: Cambridge University Press 1959.
[30] L. GAVIN, On some classes of FK-spaces and on summability factors, Ph. D. thesis, Illinois Institute of Technology, 1973.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
ILLINOIS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
CHICAGO, ILL. 60616, U.S.A.