Tôhoku Math. Journ.
30 (1978), 583-605.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

MONIQUE SABLÉ-TOUGERON

(Received June 15, 1977, revised November 21, 1977)

Introduction. Ce travail généralise et améliore les résultats de Pham The Laï [16]. Par l'étude du noyau de la résolvante, méthode employée par S. Agmon, on obtient un équivalent avec estimation du reste pour les valeurs propres d'un opérateur non nécessairement auto-adjoint, d'ordre $2m$, elliptique à l'intérieur, dégénérant à l'ordre k (k entier, $1 \leqq k \leqq 2m-1$), sur le bord d'un ouvert borné régulier de $\boldsymbol{R}^n$.

Dans le cas auto-adjoint et à l'ordre deux, le comportement asymptotique des valeurs propres a été déterminé, pour un opérateur particulier, par N. Shimakura [17] pour la boule unité, puis par C. Nordin [11] pour un domaine général; et pour un opérateur plus général, par L. Vulis et Z. Solomjak [18]. Pour une bibliographie plus complète sur ce sujet on renvoie à [18] et aussi [15].

1. Notations et hypothèses. Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$, de frontière Γ, tel qu'il existe une fonction φ de classe C^∞ dans $\boldsymbol{R}^n$ qui vérifie:

$$\begin{cases}\Omega = \{x \in \boldsymbol{R}^n,\ \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \boldsymbol{R}^n,\ \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{grad} \varphi(s) \neq 0 \quad \text{pour} \quad s \in \Gamma\ .\end{cases}$$

Pour $m, k \in \boldsymbol{N}$, on considère les espaces de Sobolev avec poids:

$$W_m^{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \text{pour } |\alpha| \leqq m\}\ ,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_j = -i(\partial/\partial x_j)$. $W_m^{k/2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $(\sum_{|\alpha| \leqq m} \|\varphi^{k/2} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$. Si $m - k/2 > 0$, on a $W_m^{k/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte, et $W_m^{k/2}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.

De même si on note $\boldsymbol{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \boldsymbol{R}^n,\ x_n > 0\}$, on utilise les espaces

$$W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+^n) = \{u \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}_+^n),\ x_n^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n),\ \text{pour } |\alpha| \leqq m\}\ .$$

On considère la forme sesquilinéaire:

$$a(u, v) = \int_\Omega \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) \overline{D^\beta v(x)} dx .$$

Pour $s \in \Gamma$, on note T_s l'espace vectoriel des vecteurs tangents en s à Γ, S_{T_s} la sphère unité de T_s et $\nu_s = \operatorname{grad} \varphi(s)/\|\operatorname{grad} \varphi(s)\|$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ désignant la norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$. Alors pour tout $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$ on associe à $a(u, v)$ la forme:

$$b_{s,\omega}(u, v) = \int_0^\infty t^k \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s D_t)^\alpha u(t) \overline{(\omega + \nu_s D_t)^\beta v(t)} dt ,$$

avec $D_t = -i(\partial/\partial t)$.

On fait les hypothèses: $1 \leq k \leq 2m - 1$ et:

H 1) Pour tous α, β, $a_{\alpha\beta}$ appartient à l'espace $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ des restrictions à $\bar{\Omega}$ de fonctions C^∞ dans $\boldsymbol{R}^n$,

$$\text{Pour } |\alpha| = |\beta| = m , \quad x \in \bar{\Omega} , \quad a_{\alpha\beta}(x) \in \boldsymbol{R} \text{ et } a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x) .$$

H 2) $a(u, v)$ est fortement coercitive sur $W_m^{k|2}(\Omega)$, c'est-à-dire: il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in W_m^{k|2}(\Omega)$ on ait:

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geqq \alpha \|u\|^2_{W_m^{k|2}(\Omega)} .$$

D'après R. Pavec (non publié) et P. Boero-R. Pavec [5] dans un cas particulier, H 2) entraîne:

- il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ on ait

$$\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geqq c \|\xi\|^{2m}$$

- pour tout $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, $b_{s,\omega}$ est fortement coercitive sur $W_m^{k|2}(\boldsymbol{R}_+)$.

2. Enoncé des résultats. D'après P. Bolley-J. Camus [6], [7], l'opérateur A non borné dans $L^2(\Omega)$ associé à $a(u, v)$ a un domaine $D(A)$ contenu dans $W_{2m}^k(\Omega)$; $\mathscr{D}(\bar{\Omega})$ étant dense dans $W_m^{k|2}(\Omega)$, on dira que A est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\mathscr{A}(\cdot, D) = \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} D^\beta (a_{\alpha\beta} \varphi^k D^\alpha) .$$

Avec les données et les hypothéses de 1), le spectre de A est constitué d'une infinité dénombrable de valeurs propres $(\lambda_j)_{j \in N}$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de λ_j en dehors de la région $\{\mu \in \boldsymbol{C}, |\arg \mu| < \varepsilon\}$. Alors, les λ_j étant rangées par ordre croissant des modules, si on note $N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \lambda} 1$, on a:

THÉORÈME 2.1. *Si $n < 2m/k$, on a:*

$$N(\lambda) = \int_\Omega \omega(x)dx \cdot \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{(n-\theta)/2m}) ,$$

pour tout θ vérifiant $0 < \theta < (2m - kn)/(6m - kn - 2k)$, *avec*

$$\omega(x) = (2\pi)^{-n}\varphi(x)^{-kn/2m} \int_{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}<1} d\xi . \tag{2.1}$$

De même l'opérateur $\mathcal{B}_{s,\omega}$, non borné dans $L^2(\boldsymbol{R}_+)$, associé à $b_{s,\omega}(u, v)$ a un domaine $D(\mathcal{B}_{s,\omega})$ contenu dans $W^k_{2m}(\boldsymbol{R}_+)$, et on dira aussi que $\mathcal{B}_{s,\omega}$ est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\mathscr{B}_{s,\omega} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)(\omega + \nu_s D_t)^\beta(t^k(\omega + \nu_s D_t)^\alpha) .$$

De plus, $s \in \Gamma$ et $\omega \in S_{T_s}$ étant fixés, $(\mathcal{B}_{s,\omega}, D(\mathcal{B}_{s,\omega}))$ est auto-adjoint positif dans $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ d'après H 1) et H 2); si $(\mu_j(s, \omega))_{j\in N}$ désigne la suite des valeurs propres de $\mathcal{B}_{s,\omega}$ on a alors:

THÉORÈME 2.2. *Si $n > 2m/k$, pour tout $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, la série $\sum_{j\geqq 1}\rho_j(s)$, où*

$$\rho_j(s) = \frac{1}{n-1}\int_{S_{T_s}} \mu_j(s, \omega)^{(1-n)/(2m-k)}d\omega , \tag{2.2}$$

est convergente et sa somme est bornée sur Γ.

THÉORÈME 2.3. *Si $2m/k < n < 4m/k - 1$ on a*:

$$N(\lambda) = \int_\Gamma C(s)ds \cdot \lambda^{(n-1)/(2m-k)} + O(\lambda^{(n-1)/(2m-k)-\theta/2m}\,\mathrm{Log}\,\lambda) ,$$

pour tout θ vérifiant $\theta \leqq \inf(1/2, m(kn - 2m)/(2m - k)(kn - m))$ *et si* $n \geqq 4m/k - 1$ *on a*

$$N(\lambda) = \int_\Gamma C(s)ds \cdot \lambda^{(n-1)/(2m-k)} + O(\lambda^{(n-1)/(2m-k)-\theta/2m}) ,$$

pour tout θ vérifiant $0 < \theta < m/(3m - k)$ *et* $\theta \leqq 1/2$, *avec*

$$C(s) = (2\pi)^{1-n}||\mathrm{grad}\,\varphi(s)||^{k(1-n)/(2m-k)} \sum_{j\geqq 1}\rho_j(s) . \tag{2.3}$$

REMARQUE 2.4.

i) Si A est auto-adjoint on peut supprimer les contraintes $\theta \leqq 1/2$ dans l'énoncé du théorème 2.3.

ii) Si $2m/k$ est entier et si $n = 2m/k$, d'après [10], en adaptant la méthode de [14], on montre que

$$N(\lambda) = \int_\Gamma \tilde{\omega}(s)ds \cdot \lambda^{1/k}\,\mathrm{Log}\,(\lambda^{1/(2m-k)}) + O(\lambda^{1/k}) , \quad \text{avec}$$

$$\tilde{\omega}(s) = (2\pi)^{-n} \|\mathrm{grad}\, \varphi(s)\|^{-1} \int_{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)\xi^{\alpha+\beta}<1} d\xi \,.$$

iii) Le théorème 2.1 est vrai aussi pour toute réalisation auto-adjointe semi-bornée $(A, D(A))$ de $\mathscr{A}(x, D)$ dans $L^2(\Omega)$ telle qu'il existe $q \in N$, $(2m-k)q > n$ et $D(A^q) \subset W^{kq}_{2mq}(\Omega)$.

3. Opérateurs bornés dans $L^2(\Omega)$, (resp. $L^2(R^n_+)$), à image dans $W^k_{2m}(\Omega)$, (resp. $W^k_{2m}(R^n_+)$).

LEMME 3.1. *Si $m > n/2$, toute fonction $u \in W^{k/2}_m(\Omega)$ est continue dans Ω et: il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in W^{k/2}_m(\Omega)$, $x \in \Omega$ on ait*

$$|u(x)| \leqq c\varphi(x)^{-kn/4m} \|u\|^{n/2m}_{W^{k/2}_m(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-n/2m}_{L^2(\Omega)} \,. \tag{3.1}$$

DÉMONSTRATION. On utilise la méthode de [14].

On note $\|T\|_{0,j,\Omega}$ la norme de T dans $\mathscr{L}(L^2(\Omega), H^j(\Omega))$, $\|T\|_{0,2m:k,\Omega}$ sa norme dans $\mathscr{L}(L^2(\Omega), W^k_{2m}(\Omega))$, ($E$ et F étant deux espaces de Banach, $\mathscr{L}(E, F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F). De même pour R^n_+. Alors on a:

PROPOSITION 3.2. *Soit T un opérateur borné dans $L^2(\Omega)$ tel que son image et celle de T^* soient contenues dans $W^k_{2m}(\Omega)$, avec $2m-k > n$. Alors T est un opérateur intégral dont le noyau $T(x, y)$ est continu et borné sur $\Omega \times \Omega$ et vérifie: il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $x, y \in \Omega$ on ait*

$$|T(x, y)| \leqq c(\|T\|_{0,2m:k,\Omega} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,\Omega})^{n/2(2m-k)} \cdot \|T\|^{1-n/(2m-k)}_{0,0,\Omega} \tag{3.2}$$

$$|T(x, y)| \leqq c(\varphi(x)\varphi(y))^{-kn/4m}(\|T\|_{0,2m:k,\Omega} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,\Omega})^{n/4m} \cdot \|T\|^{1-n/2m}_{0,0,\Omega} \,. \tag{3.3}$$

(*On peut énoncer la même proposition avec Ω remplacé par R^n_+ et $\varphi(x)$ remplacé par x_n*).

DÉMONSTRATION. Le début de la proposition et (3.2) résultent d'une proposition de [12] et de l'inclusion $W^k_{2m}(\Omega) \subset H^{2m-k}(\Omega)$. Pour montrer (3.3) on utilise (3.1) et des inégalités de [12].

PROPOSITION 3.3. *Soit T un opérateur borné dans $L^2(R_+)$ tel que son image et celle de T^* soient contenues dans $W^k_{2m}(R_+)$; soit $T(t, \tau)$ son noyau; alors si $2m-k > 1$ il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $t, \tau \in R_+$ on ait*

$$|T(t, \tau)| \leqq c(t\tau)^{-k/2} \cdot (\|T\|_{0,2m:k,R_+} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,R_+})^{1/2} \,. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION. Comme pour (3.1) on montre qu'il existe $c > 0$ telle que pour $u \in W^{k/2}_m(R_+)$, $t > 0$ on ait:

$$|u(t)| \leqq ct^{-k/2}\|u\|_{W_m^{k/2}(R_+)} ,$$

puis on utilise l'inégalité suivante qui résulte de [12]:

$$\|Tf\|_{W_m^{k/2}(R_+)} \leqq (\|T\|_{0,2m:k,R_+} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,R_+})^{1/2} \cdot \|f\|_{(W_m^{k/2}(R_+))'} ,$$
$$\text{pour } f \in L^2(R_+) .$$

PROPOSITION 3.4. *Soit T un opérateur borné dans $L^2(R_+)$ dont l'image est contenue dans $W_{2m}^k(R_+)$ avec $2m - k > 1$, et $k > 1$. Alors T est un opérateur nucléaire au sens de Gohberg et Krein* [9], *et la suite $(\mu_j)_{j\in N}$, $|\mu_1| \geqq |\mu_2| \geqq \cdots \geqq |\mu_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, de ses valeurs propres vérifie: il existe une constante $c > 0$ telle que pour $j \geqq 1$ on ait*

$$|\mu_j| < c \cdot j^{-k} . \tag{3.5}$$

DÉMONSTRATION. D'après [13] l'opérateur $Q = (TT^*)^{1/2}$ borné dans $L^2(R_+)$ a son image contenue dans $W_{2m}^k(R_+)$; soit $Q(t, \tau)$ son noyau; (3.2) donne l'intégrabilité de $Q(t, t)$ au voisinage de 0 et (3.4) la donne au voisinage de $+\infty$. Si $(s_j)_{j\in N}$ est la suite décroissante des valeurs propres de Q, l'inégalité

$$\sum_{j\geqq 1} |\mu_j| \leqq \sum_{j\geqq 1} s_j ,$$

démontrée dans [9] et l'égalité

$$\sum_{j\geqq 1} s_j = \int_0^\infty Q(t, t)dt ,$$

montrent que T est nucléaire.
Pour montrer (3.5) on applique (3.3) et (3.4) au noyau $Q_\lambda(t, \tau)$ du résolvant modifié de Q, $Q_\lambda = Q(I + \lambda Q)^{-1}$, $\lambda > 0$:
Puisque $\|Q_\lambda\|_{0,0,R_+} \leqq c/\lambda$ et $\|Q_\lambda\|_{0,2m:k,R_+} \leqq c\|Q\|_{0,2m:k,R_+}$, (3.4) donne

$$\int_{\lambda^{1/k}}^\infty Q_\lambda(t, t)dt \leqq c\lambda^{-1+1/k} ,$$

et (3.3) donne une majoration identique pour $\int_0^{\lambda^{1/k}} Q_\lambda(t, t)dt$. De l'égalité

$$\sum_{j\geqq 1} \frac{1}{s_j^{-1} + \lambda} = \int_{R_+} Q_\lambda(t, t)dt ,$$

on déduit alors

$$\sum_{s_j^{-1}<\lambda} 1 \leqq c\lambda^{1/k} , \qquad \text{pour } \lambda > 0 .$$

Ceci implique l'existence d'une constante $c > 0$ telle que, pour $j \geqq 1$, on ait:

$$s_j \leqq c j^{-k} ;$$

Alors (3.5) s'obtient à l'aide du résultat de [9] suivant: pour tout $r > 0$ et $n \in \boldsymbol{N}$ on a:

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + r|\mu_j|) \leqq \prod_{j=1}^{n} (1 + r s_j) .$$

A ce stade on peut déjà démontrer le théorème 2.2: on se place donc dans le cas $n > 2m/k$ et on peut supposer $2m - k > n$, (sinon on considère $\beta^q_{s,\omega}$ avec $q(2m - k) > n$, les techniques de [4] donnant $D(\beta^q_{s,\omega}) \subseteqq W^{kq}_{2mq}(\boldsymbol{R}_+)$).

Γ et S_{T_s} étant compacts et les données régulières, la proposition 3.4 appliquée à $\beta^{-1}_{s,\omega}$ donne l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tous $s \in \Gamma$, $\omega \in S_{T_s}$, $j \geqq 1$ on ait:

$$\mu_j(s, \omega)^{(1-n)/(2m-k)} \leqq c j^{-1+(2m-kn)/(2m-k)} .$$

La série $\sum_{j \geqq 1} \rho_j(s)$ est donc convergente et sa somme est une fonction bornée sur Γ.

4. Ensemble résolvant de $(A, D(A))$. Dans ce paragraphe on donne les calculs qui permettent, grâce à une formule de A. Pleijel utilisée d'abord par S. Agmon [3], de déduire le comportement asymptotique de $N(\lambda)$ de l'étude du noyau de $(A - \lambda)^{-1}$.

On note $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de $(A, D(A))$. On a:

PROPOSITION 4.1. *Il existe* $K > 0$ *tel que la région*

$$\mathscr{R} \equiv \{\mu \in \boldsymbol{C}, \operatorname{Re} \mu \leqq 0\} \cup \{\mu \in \boldsymbol{C}, |\operatorname{Im} \mu| \geqq K(1 + |\mu|)^{1-1/2m}\}$$

soit contenue dans $\rho(A)$ *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour* $\mu \in \mathscr{R}$ $\mu \neq 0$ *on ait,* $d(\mu)$ *désignant la distance de* μ *à* $\boldsymbol{R}_+$:

$$\|(A - \mu)^{-1}\|_{0,0,\Omega} \leqq \frac{c}{d(\mu)} . \tag{4.1}$$

DÉMONSTRATION. Elle est identique à celle de [16]: on utilise la forte coercivité de a pour montrer (4.1) pour $\operatorname{Re} \mu < 0$, puis on considère l'opérateur A' non borné dans $L^2(\Omega)$, de domaine $D(A')$ contenu dans $W^k_{2m}(\Omega)$ associé à

$$a'(u, v) = \int_\Omega \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta v} dx ; \tag{4.2}$$

on démontre l'estimation: il existe $c > 0$ telle que pour tous $\delta > 0$, $l \in \boldsymbol{N}$, $0 \leqq l \leqq 2m$, $u \in W^k_{2m}(\Omega)$ on ait:

$$\|u\|_{W^k_l(\Omega)} \leqq c\{\delta^{2m-l} \|u\|_{W^k_{2m}(\Omega)} + \delta^{-l} \|u\|_{L^2(\Omega)}\} .$$

On utilise alors un argument de perturbation d'Agmon [1] pour montrer l'existence de $\mathscr{R}$ et l'estimation (4.1) dans cette région.

PROPOSITION 4.2. *Pour tout* $\mu \in \rho(A)$, $(A-\mu)^{-1}$ *est compact dans* $L^2(\Omega)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de* A *en dehors du secteur* $\{\mu \in \boldsymbol{C}, |\arg \mu| < \varepsilon\}$.

DÉMONSTRATION. Comme dans [15], elle utilise la compacité de l'injection de $H^{2m-k}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.3. *Si* $2m-k > n$ *il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{|\lambda_j-\mu|} \leqq \begin{cases} c\dfrac{|\mu|^{(n-1)/(2m-k)}}{d(\mu)} & si \quad n > \dfrac{2m}{k} \\ c\dfrac{|\mu|^{n/2m}}{d(\mu)} & si \quad n < \dfrac{2m}{k} \end{cases}, \quad pour \quad \mu \in \mathscr{R} \tag{4.3}$$

$$\left|\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j-\mu} - \sum_{j\geqq 1}\frac{1}{\lambda_j-\mu}\right| \leqq c\,\frac{|\mu|^{1-1/2m}}{d(\mu)}\cdot\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{|\lambda_j-\mu|}, \quad pour \quad \mu \in \mathscr{R},\ |\mu| \geqq 1\,. \tag{4.4}$$

DÉMONSTRATION. Comme dans [16], à l'aide de la proposition 4.2, (4.4) se déduit de (4.3) dont la preuve suit; soit $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$ et $Q_\mu = (G_\mu G_\mu^*)^{1/2}$; Q_μ est continu dans $L^2(\Omega)$, son image est contenue dans $W^k_{2m}(\Omega)$ et d'après [13],

$$||Q_\mu||_{0,0,\Omega} \leqq ||G_\mu||_{0,0,\Omega}\,.$$

Alors (4.1), (3.2) et (3.3) donnent:

$$\begin{cases} 0 \leqq Q_\mu(x,x) \leqq c\dfrac{|\mu|^{n/(2m-k)}}{d(\mu)} \\ 0 \leqq Q_\mu(x,x) \leqq c\varphi(x)^{-kn/2m}\dfrac{|\mu|^{n/2m}}{d(\mu)} \end{cases}, \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R}\,.$$

Si $n < 2m/k$, la seconde inégalité donne:

$$\int_\Omega Q_\mu(x,x)dx \leqq c\frac{|\mu|^{n/2m}}{d(\mu)}\,.$$

Si $n > 2m/k$, en intégrant la seconde inégalité sur $\Omega(|\mu|^{-1/(2m-k)})$ et la première sur $\Omega - \Omega(|\mu|^{-1/(2m-k)})$, où

$$\Omega(\rho) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > \rho\}\,, \quad \text{pour} \quad \rho \geqq 0\,,$$

on obtient

$$\int_\Omega Q_\mu(x,x)dx \leqq c\frac{|\mu|^{(n-1)/(2m-k)}}{d(\mu)}\,;$$

la majoration $\sum_{j\geqq 1}(1/|\lambda_j - \mu|) \leqq \int_\Omega Q_\mu(x, x)dx$, démontrée dans [9], donne alors (4.3).

On note enfin, comme dans [16]:

$$f(\mu) = \sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda_j - \mu}\,, \quad \text{pour} \quad \mu \notin \boldsymbol{R}_+ \tag{4.5}$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{L(\lambda)} f(\mu)d\mu\,, \quad \text{pour} \quad \lambda > 0\,, \tag{4.6}$$

où $L(\lambda)$ est une courbe orientée de $\boldsymbol{C}$ joignant $\lambda - ia\lambda^{1-\theta/2m}$ à son conjugué, ne rencontrant pas $\boldsymbol{R}_+$ et où a, $\theta \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $0 < \theta < 1$.

$$\mathscr{R}_\theta = \{\mu \in \boldsymbol{C}, \operatorname{Re}\mu \leqq 0\} \cup \{\mu \in \boldsymbol{C}, |\operatorname{Im}\mu| > K(1 + |\mu|)^{1-\theta/2m}\}\,, \quad \text{pour} \quad 0 < \theta < 1. \tag{4.7}$$

Alors on a:

PROPOSITION 4.4. *Si $2m - k > n$, pour tout θ, $0 < \theta < 1$, il existe $a > 0$, $c > 0$, $\lambda_0 > 0$ tels que $\lambda + ia\lambda^{1-\theta/2m}$ appartienne à $\mathscr{R}_\theta$ pour $\lambda \geqq \lambda_0$ et tels que*:

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leqq c\left(\lambda^{1-\theta/2m}\left|\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{\lambda_j - (\lambda + ia\lambda^{1-\theta/2m})}\right| + \begin{cases}\lambda^{(n-\theta)/2m}\,, & si \quad n < 2m/k \\ \lambda^{(n-1)/(2m-k)-\theta/2m}\,, & si \quad n > 2m/k\end{cases}\right), \quad pour \quad \lambda \geqq \lambda_0\,. \tag{4.8}$$

DÉMONSTRATION. Pour $a > 0$, $\theta \in]0, 1[$, $\lambda > 0$, d'après la formule de A. Pleijel citée dans [16] par exemple, on a:

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leqq a\lambda^{1-\theta/2m}|f(\lambda + ia\lambda^{1-\theta/2m})|\,.$$

On note $\xi = \lambda + ia\lambda^{1-\theta/2m}$; θ étant fixé on montre facilement qu'il existe $a > 0$, $\lambda_0 > 0$ tels que pour $\lambda \geqq \lambda_0$ on ait $\xi \in \mathscr{R}_\theta$ et $|\xi| \geqq 1$. Alors (4.3) et (4.4) donnent:

$$|f(\xi)| \leqq \left|\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{\lambda_j - \xi}\right| + c\left(\frac{|\xi|}{d(\xi)}\right)^2|\xi|^{-1-1/2m} \times \begin{cases}|\xi|^{n/2m} & \text{si} \quad n < 2m/k \\ |\xi|^{(n-1)/(2m-k)} & \text{si} \quad n > 2m/k\end{cases},$$

d'où (4.8) par une majoration immédiate.

5. Démonstration du Théorème 2.1: $n < 2m/k$. L'estimation de $N(\lambda)$ s'obtient ici, comme dans le cas non dégénéré traité par S. Agmon [2], par une étude du noyau de la résolvante à l'intérieur de Ω.

5.1. *Cas où* $2m - k > n$. Pour $x \in \Omega$ on note $F_{x,\mu}(y)$ la solution élémentaire dans $\boldsymbol{R}^n$ de l'opérateur à coefficients constants:

$$\mathscr{A}_x'(D) - \mu \equiv \varphi(x)^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha+\beta} - \mu\ , \quad \text{où} \quad \mu \notin \boldsymbol{R}_+\ ;$$

on a, avec la notation (2.1):

$$F_{x,\mu}(0) = \frac{n\pi}{2m}\left(\sin\frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \omega(x)(-\mu)^{-1+n/2m}$$

où $(-\mu)^{-1+n/2m}$ est la détermination holomorphe dans $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R}_+$ qui est positive sur le demi-axe négatif.
Pour $\mu \in \rho(A)$ on note $G_\mu(y, z)$ le noyau de l'opérateur $G_\mu = (A - \mu)^{-1}$ et pour $x \in \Omega$ on note $\mathscr{R}_{x,\mu}$ la restriction à Ω de l'opérateur inverse de $(\mathscr{A}_x'(D) - \mu, H^{2m}(\boldsymbol{R}^n))$ dans $L^2(\boldsymbol{R}^n)$.
Le résultat essentiel pour montrer le théorème 2.1 est obtenu par application de la proposition 3.2 et constitue la proposition suivante:

PROPOSITION 5.1. *Soient $\theta > 0$, $\beta > 0$, $\theta + \beta < 1$. Il existe des constantes $c > 0$, $a_0 > 0$, $\mu_0 > 0$ telles que pour tout $x \in \Omega$ on ait*

$$|G_\mu(x, x) - F_{x,\mu}(0)| < c\varphi(x)^{-1-kn/2m+k/2m} \frac{|\mu|^{n/2m+1-\beta/2m}}{d(\mu)^2}\ ,$$

pour $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $a_0|\mu| > \varphi(x)^{-(2m-k)/\beta}$, $|\mu| > \mu_0$.

DÉMONSTRATION. Le schéma de la démonstration est classique: pour $x \in \Omega$ on considère l'opérateur borné dans $L^2(\Omega)$:

$$T_{x,\mu,r} = \zeta_{x,r}(G_\mu - \mathscr{R}_{x,\mu})\zeta_{x,r}\ ,$$

où $\mu \in \rho(A)$, $r \in \boldsymbol{R}$ vérifie $0 < r < \inf(1, \varphi(x), \varphi(x)/2 \sup_{y\in\Omega}\|\operatorname{grad}\varphi(y)\|)$, et où $\zeta_{x,r}$ est une fonction C^∞ dans $\boldsymbol{R}^n$, à support contenu dans $B(x, r) = \{y \in \Omega, \|y - x\| < r\}$, à valeurs dans $[0, 1]$, valant 1 en x et vérifiant $\|D^\alpha\zeta_{x,r}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq cr^{-|\alpha|}$, où c est indépendante de x et de r.

On écrit:

$$T_{x,\mu,r} = T_1 + T_2 \equiv \zeta_{x,r}G_\mu\eta_{x,r}(\mathscr{A}_x' - \mathscr{A})\mathscr{R}_{x,\mu}\zeta_{x,r} + \zeta_{x,r}G_\mu[\eta_{x,r}, \mathscr{A}]\cdot\mathscr{R}_{x,\mu}\zeta_{x,r}\ ,$$

où la fonction $\eta_{x,r}$ possède les mêmes propriétés que $\zeta_{x,r}$ et vérifie de plus $\eta_{x,r}\zeta_{x,r} = \zeta_{x,r}$.

Une inégalité d'interpolation classique appliquée à $\Omega(\varphi(x)/2)$, la majoration $\|u\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leqq \rho^{-k}\|u\|_{W^k_{2m}(\Omega)}$, et (4.1) donnent:

$$\|G_\mu f\|_{H^j(B(x,r))} \leqq c\varphi(x)^{-kj/2m}\frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)}\|f\|_{L^2(\Omega)}\ , \tag{5.1}$$

pour $f \in L^2(\Omega)$, $\mu \in \mathscr{R} - \{0\}$. D'où:

$$\|\zeta_{x,r}G_\mu\|_{0,2m:k,\Omega} \leqq \frac{c|\mu|}{d(\mu)}\ , \quad \text{pour} \quad |\mu| \geqq \varphi(x)^k\cdot r^{-2m}\ , \quad \mu \in \mathscr{R} - \{0\}\ . \tag{5.2}$$

D'après [3] on a aussi:

$$(5.3) \qquad \|\mathscr{R}_{x,\mu}\|_{0,j,\Omega} \leqq c\varphi(x)^{-kj/2m}\frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)}, \quad \text{pour} \quad \mu \notin \boldsymbol{R}_+ .$$

On en déduit, en écrivant

$$\mathscr{A}(y, D) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y)\varphi^k(y)D^{\alpha+\beta} + \sum_{h=1}^{k} \varphi^{k-h}(y) \sum_{|\alpha|\leqq 2m-h} a_{h,\alpha}(y)D^\alpha ,$$

$$\|\eta_{x,r}(\mathscr{A}'_x - \mathscr{A})\mathscr{R}_{x,\mu}\zeta_{x,r}\|_{0,0,\Omega} \leqq c\cdot\frac{|\mu|r\varphi(x)^{-1}}{d(\mu)}, \quad \text{pour} \quad |\mu| \geqq \varphi(x)^k\cdot r^{-2m}, \ \mu \notin \boldsymbol{R}_+ .$$

Cette dernière majoration, (4.1) et (5.2) donnent alors l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \in \mathscr{R}$, $|\mu| > \varphi(x)^k\cdot r^{-2m}$ on ait:

$$\|T_1\|_{0,0,\Omega} \leqq c\frac{|\mu|\varphi(x)^{-1}r}{d(\mu)^2} \quad \text{et} \quad \|T_1\|_{0,2m:k,\Omega} \leqq c\frac{|\mu|^2\varphi(x)^{-1}r}{d(\mu)^2} .$$

Pour estimer T_2 on introduit pour $p \in \boldsymbol{N} - \{0\}$, des fonctions $\varphi_2, \cdots, \varphi_p$, ayant les mêmes propriétés que $\zeta_{x,r}$; on pose $\varphi_1 = \eta_{x,r}$, $\varphi_{p+1} = \zeta_{x,r}$ et on impose $\varphi_j\varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$ pour $1 \leqq j \leqq p$. On montre facilement que l'on a:

$$\zeta_{x,r}G_\mu[\eta_{x,r}, \mathscr{A}] = -\zeta_{x,r}G_\mu[\mathscr{A}, \varphi_p]G_\mu[\mathscr{A}, \varphi_{p-1}] \cdots G_\mu[\mathscr{A}, \varphi_1] .$$

En écrivant $[\mathscr{A}, \varphi_j] = \sum_{h=0}^{k} \varphi^{k-h} \sum_{1\leqq|\alpha|\leqq 2m-h} a_{h,\alpha} \sum_{\substack{\gamma+\nu=\alpha \\ |\gamma|\geqq 1}} c_{\gamma\nu}(D^\gamma\varphi_j)D^\nu$, (5.1) et des majorations simples donnent:

$$\|[\mathscr{A}, \varphi_j]G_\mu\|_{0,0,\Omega} \leqq c\frac{|\mu|}{d(\mu)}(r(\varphi(x)^{-k}|\mu|)^{1/2m})^{-1}, \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R}, \ |\mu| \geqq \varphi(x)^k\cdot r^{-2m} .$$

De même, en utilisant (5.3), on obtient une majoration analogue pour $\|[\mathscr{A}, \varphi_1]\mathscr{R}_{x,\mu}\zeta_{x,r}\|_{0,0,\Omega}$. Alors ces estimations, avec (5.2), montrent que pour tout $p \geqq 1$ il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$\begin{cases} \|T_2\|_{0,0,\Omega} \leqq \dfrac{c}{d(\mu)}\cdot\left(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}(r(\varphi(x)^{-k}|\mu|)^{1/2m})^{-1}\right)^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,\Omega} \leqq \dfrac{c|\mu|}{d(\mu)}\left(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}(r(\varphi(x)^{-k}|\mu|)^{1/2m})^{-1}\right)^p \end{cases}, \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R}, \ |\mu| \geqq \varphi(x)^k\cdot r^{-2m} .$$

On sait donc estimer $T_{x,\mu,r}$ et aussi $T^*_{x,\mu,r}$ puisque A^* est associé à $a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}$ donc aussi à une forme $W_m^{k/2}(\Omega)$-coercive.

On applique alors (3.3): pour tout $p \geqq 1$, il existe $c > 0$ telle que

$$(5.4) \qquad |G_\mu(x, x) - F_{x,\mu}(0)|$$
$$\leqq c\varphi(x)^{-kn/2m}\frac{|\mu|^{n/2m}}{d(\mu)}\left(\frac{|\mu|\varphi(x)^{-1}r}{d(\mu)} + \frac{|\mu|}{d(\mu)}(r(\varphi(x)^{-k}|\mu|^{1/2m})^{-1})^p\right)$$

pour tous $x \in \Omega$, $0 < r < \inf(1, \varphi(x), \varphi(x)/2\sup_{y\in\Omega}\|\text{grad}\,\varphi(y)\|)$, $\mu \in \mathscr{R}$,

$|\mu| \geqq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}$. Soit maintenant $\beta \in \boldsymbol{R}$, $\beta > 0$. On fait $r = \varphi(x)^{k/2m}|\mu|^{-\beta/2m}$ dans (5.4); on obtient il existe $\mu_0 > 0$, $a_0 > 0$ tels que pour tout $p \geqq 1$ il existe une constante $c > 0$ qui vérifie:

$$(5.5) \qquad |G_\mu(x, x) - F_{x,\mu}(0)|$$
$$\leqq c\varphi(x)^{-kn/2m-1+k/2m}\frac{|\mu|^{n/2m+1-\beta/2m}}{d(\mu)^2}\left(1+\varphi(x)^{(2m-k)/2m}|\mu|^{-1+\beta/2m}d(\mu)\left(\frac{|\mu|^{1+(\beta-1)/2m}}{d(\mu)}\right)^p\right),$$

pour tous $x \in \Omega$, $\mu \in \mathscr{R}$ vérifiant $|\mu| \geqq \mu_0$ et $a_0|\mu| > \varphi(x)^{-(2m-k)/\beta}$.

Soit enfin $\theta \in \boldsymbol{R}$, $0<\theta<1$. Pour $\theta+\beta<1$, on peut choisir p de façon que la quantité entre parenthèses de (5.5) reste bornée indépendamment de $x \in \Omega$ et de $\mu \in \mathscr{R}_\theta$; ceci donne bien la proposition 5.1.

COROLLAIRE 5.2. *Soit* $\theta \in \boldsymbol{R}$, $0 < \theta < (2m - kn)/(6m - kn - 2k)$. *Il existe* $c > 0$, $\mu_0 > 0$ *tels que* $\left|\int_\Omega G_\mu(x, x)dx\right| \leqq c|\mu|^{-1+n/2m}$ *pour* $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $|\mu| > \mu_0$.

DÉMONSTRATION. Soit $\beta > 0$, $\theta + \beta < 1$. De la proposition 5.1 on déduit

$$\int_{\Omega(\rho)} |G_\mu(x, x) - F_{x,\mu}(0)|\,dx \leqq c\frac{|\mu|^{1+n/2m}}{d(\mu)^2} \times \begin{cases} |\mu|^{-\beta/2m}\,\mathrm{Log}\,|\mu| & \text{si} \quad n = 1 \\ |\mu|^{-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)} & \text{si} \quad n \geqq 2 \end{cases}$$

pour $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $|\mu| > \mu_0$, avec $\rho = (a_0|\mu|)^{-\beta/(2m-k)}$

D'autre part (4.1) et (3.3) donnent:

$$\int_{\Omega-\Omega(\rho)} |G_\mu(x, x)|\,dx \leqq c\frac{|\mu|^{n/2m-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)}}{d(\mu)}, \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R} - \{0\}\,.$$

Enfin on montre facilement l'analogue de cette dernière inégalité pour $F_{x,\mu}(0)$ avec $\mu \notin \boldsymbol{R}_+$. Ces trois estimations impliquent:

$$(5.6) \qquad \left|\int_\Omega (G_\mu(x, x) - F_{x,\mu}(0))dx\right| \leqq c\frac{|\mu|^{1+n/2m}}{d(\mu)} \times \begin{cases} |\mu|^{-\beta/2m}\,\mathrm{Log}\,|\mu| & \text{si} \quad n = 1 \\ |\mu|^{-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)} & \text{si} \quad n \geqq 2 \end{cases}$$

pour $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $|\mu| > \mu_0$.
θ étant fixé, la meilleure majoration de $\left|\int_\Omega G_\mu(x, x)dx\right|$ par une puissance de $|\mu|$ dans $\mathscr{R}_\theta$ est obtenue s'il existe β, $0 < \theta + \beta < 1$, tel que $\beta > 2\theta(2m - k)/(2m - kn)$ si $n = 1$, $\beta \geqq 2\theta(2m - k)/(2m - kn)$ si $n \geqq 2$, ce qui donne bien le corollaire 5.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Puisque, d'après S. Agmon [1], pour $\mu \in \rho(A)$ on a:

$$(5.7) \qquad \int_\Omega G_\mu(x, x)dx = \sum_{j\geqq 1} \frac{1}{\lambda_j - \mu}\,,$$

le corollaire 5.2 et la proposition 4.4 donnent: pour $0 < \theta < (2m-kn)/(6m-kn-2k)$, il existe $c>0$, $\lambda_0 > 0$ tels que pour $\lambda \geqq \lambda_0$ on ait:

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leqq c\lambda^{n/2m-\theta/2m} . \tag{5.8}$$

Il reste à étudier $I(\lambda)$ dans $\mathscr{R}_\theta$, avec $\theta < (2m - kn)/(6m - kn - 2k)$. On note

$$\alpha_{m,n} = \frac{n\pi}{2m}\left(\sin \frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \int_\Omega \omega(x)dx .$$

(4.3), (4.4), (5.7) et (5.6), en prenant β très voisin de $1 - \theta$, donnent:

$$|f(\mu) - \alpha_{m,n}(-\mu)^{-1+n/2m}| \leqq c\frac{|\mu|^{1+\varepsilon+n/2m-(1-\theta)(1-kn/2m)/(2m-k)}}{d(\mu)^2} , \tag{5.9}$$

$$\text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R}_\theta,\ |\mu| > \mu_0,\ \varepsilon > 0 .$$

On choisit la courbe:

$$L(\lambda) = \{\mu \in C,\ \mu = \lambda + iy,\ a\lambda^{1-\theta/2m} \leqq |y| \leqq a\lambda\}$$
$$\cup \{\mu \in C,\ |\mu| = (1 + a^2)^{1/2} \cdot \lambda,\ \mathrm{Re}\, \mu \leqq \lambda\} .$$

Pour $\lambda \geqq \lambda_1$, $L(\lambda)$ est contenue dans $\mathscr{R}_\theta \cap \{|\mu| > \mu_0\}$; l'intégration de (5.9) sur $L(\lambda)$ donne alors, avec la notation (4.6):

$$\left|I(\lambda) - \frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+n/2m}d\mu\right| \leqq c\lambda^{\varepsilon+\theta/2m+n/2m-(1-\theta)(1-kn/2m)/(2m-k)} ,$$

$$\text{pour} \quad \lambda \geqq \lambda_1 .$$

Enfin un calcul simple de variable complexe donne:

$$\left|\frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+n/2m}d\mu - \int_\Omega \omega(x)dx \cdot \lambda^{n/2m}\right| \leqq c\lambda^{n/2m-\theta/2m}$$

(5.8) et ces deux dernières majorations donnent alors le théorème 2.1.

5.2. *Cas où* $2m - k < n$. On considère A^{2q} avec $2(2m - k)q > n$; avec les mêmes techniques que dans [4] on montre que le domaine $D(A^{2q})$ de A^{2q} est contenu dans $W^{2kq}_{4mq}(\Omega)$. Des calculs simples dans les espaces avec poids décrits dans [8] montrent que:

$$(A^{2q} - A'^{2q}) \in \mathscr{L}(W^{2kq}_{4mq-1}(\Omega), L^2(\Omega)) .$$

A'^{2q} étant associé à une forme fortement coercitive sur $D(A^q)$, on en déduit, comme dans la proposition 4.1, l'existence d'une région

$$\mathscr{R}_{2q} = \{\mu \in C,\ d(\mu) \geqq K_q(1 + |\mu|)^{1-1/4mq}\} ,$$

contenue dans $\rho(A^{2q})$ et telle que pour $\mu \in \mathscr{R}_{2q}$ on ait aussi (4.1) avec A remplacé par A^{2q}.

Alors la proposition 5.1 et le corollaire 5.2 sont vrais pour le noyau de $(A^{2q}-\mu)^{-1}$. On montre facilement aussi l'analogue de (4.3) et (4.4) dans $\mathscr{R}_{2q}$; alors (4.8) est vraie pour $N_{2q}(\lambda)=\sum_{(\mathrm{Re}\,\lambda_j)^{2q}}1$. La fonction ω associée à A^{2q} étant la même que celle associée à A on en déduit encore le théorème 2.1.

6. Préliminaires à la démonstration du Théorème 2.3.

6.1. *Un problème variationnel dans $\boldsymbol{R}_+$, à paramètre.* ξ désignant un paramètre de $\boldsymbol{R}^{n-1}-\{0\}$, on considère sur $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)\times W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$ la forme:

$$c_\xi(u,v)=\int_0^\infty t^k\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}c_{\alpha\beta}(\xi,D_t)^\alpha u\overline{(\xi,D_t)^\beta v}dt\ ,$$

où $k,m\in\boldsymbol{N}$, $1\leqq k\leqq 2m-1$, $c_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{R}$, $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$, $D_t=-i\partial/\partial t$.

On fait l'hypothèse:

pour tout ω appartenant à la sphère unité S_{n-2} de $\boldsymbol{R}^{n-1}$, c_ω est fortement coercitive sur $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$.

On note $(C_\omega, D(C_\omega))$ l'opérateur non borné dans $L^2(\boldsymbol{R}_+)$ associé à c_ω et $(\mu_j(\omega))_{j\in N}$ la suite croissante des valeurs propres de C_ω. On va démontrer le résultat suivant:

PROPOSITION 6.1. *On suppose $2m/k<n<2m-k$. Pour tout $\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}-\{0\}$, pour tout $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$, le problème*

(6.1) $\quad c_\xi(u,v)-\mu(u,v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)}=(f,v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)}$, *pour tout* $v\in W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$,

admet, pour $f\in L^2(\boldsymbol{R}_+)$ une solution unique u_μ dans $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$ qui s'écrit à l'aide d'un noyau:

$$u_\mu(\xi,t)=\int_0^\infty r(\xi,\mu,t,\tau)f(\tau)d\tau\ ,$$

où $r(\xi,\mu,t,\tau)$ est une fonction qui possède les propriétés:

(6.2) *pour tous $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$, $t,\tau>0$, $\xi\mapsto r(\xi,\mu,t,\tau)$ appartient à $L^1(\boldsymbol{R}^{n-1})$*

(6.3) *pour tous $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$, $t>0$, $(\xi,\tau)\mapsto r(\xi,\mu,t,\tau)$ appartient à $L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$*

(6.4) *pour tout $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$, $(\xi,t)\mapsto r(\xi,\mu,t,t)$ appartient à $L^1(\boldsymbol{R}_+^n)$ et:*

$$(6.5)\quad \int_{\boldsymbol{R}_+^n}r(\xi,\mu,t,t)d\xi dt=\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\Big(\sin\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\Big)^{-1}\Big(\sum_{j\geqq 1}\rho_j\Big)\cdot(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}\ ,$$

où $\rho_j=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_{S_{n-2}}\mu_j(\omega)^{(1-n)/(2m-k)}d\omega.$

DÉMONSTRATION. La coercivité forte de c_ω sur $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$ implique l'inclusion de $D(C_\omega)$ dans $W_{2m}^k(\boldsymbol{R}_+)$ et l'existence du résolvant $(C_\omega-\mu)^{-1}$ pour $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$. De plus il résulte de la compacité de S_{n-2} qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\omega \in S_{n-2}$, $\mu \in \boldsymbol{R}_+$ on ait:

$$\|(C_\omega - \mu)^{-1}\|_{0,0,\boldsymbol{R}_+} \leqq \frac{1}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|(C_\omega - \mu)^{-1}\|_{0,2m:k,\boldsymbol{R}_+} \leqq \frac{c|\mu|}{d(\mu)} .$$

Alors (3.2) et (3.4) donnent pour le noyau $r(\omega, \mu, t, \tau)$ de $(C_\omega - \mu)^{-1}$ l'estimation: il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $\omega \in S_{n-2}$, $\mu \notin \boldsymbol{R}_+$, $t, \tau > 0$ on ait:

$$(6.6) \qquad |r(\omega, \mu, t, \tau)| \leqq c\frac{|\mu|^{1/(2m-k)}}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad |r(\omega, \mu, t, \tau)| \leqq c(t\tau)^{-k/2}\frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

on fixe maintenant $\mu \notin \boldsymbol{R}_+$. Pour $\xi \in \boldsymbol{R}^{n-1} - \{0\}$, le changement de variable $z = |\xi|t$, avec les notations $w(\xi, z) = u(\xi, t)$ et $g(z) = f(t)$ transforme le problème (6.1) en:

$$c_{\xi|\xi|^{-1}}(w, v) - \mu|\xi|^{-2m+k}(w, v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)} = (|\xi|^{-2m+k}g, v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)} ,$$

pour tout $v \in W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$.

Pour f donné dans $L^2(\boldsymbol{R}_+)$, l'unique solution v_μ de ce problème dans $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+)$ est donnée par:

$$v_\mu(\xi, z) = |\xi|^{-2m+k}\int_0^\infty r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, z, z')g(z')dz' .$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de u_μ et donne aussi la formule:

$$r(\xi, \mu, t, \tau) = |\xi|^{-2m+k+1}r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, |\xi|t, |\xi|\tau) .$$

Alors les estimations (6.6) se traduisent par:

$$|r(\xi, \mu, t, \tau)| \leqq c(\mu) \quad \text{et} \quad |r(\xi, \mu, t, \tau)| \leqq c(\mu)(t\tau)^{-k/2}|\xi|^{-2m+1} .$$

Ces majorations permettent de montrer (6.2), (6.3) et (6.4) et donc aussi d'appliquer le théorème de Fubini pour écrire:

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}_+^n} r(\xi, \mu, t, t)d\xi dt &= \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k}\int_0^\infty r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, z, z)dzd\xi \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k}\sum_{j\geqq 1}\frac{1}{\mu_j(\xi|\xi|^{-1}) - \mu|\xi|^{-2m+k}}d\xi \\ &= \frac{1}{2m-k}\int_{S_{n-2}}\left(\int_0^\infty \sum_{j\geqq 1}\frac{r^{-1+(n-1)/(2m-k)}}{r\mu_j(\omega) - \mu}dr\right)d\omega .\end{aligned}$$

La proposition 3.4 donnant $\mu_j(\omega) \geqq cj^k$ pour tous $\omega \in S_{n-2}$, $j \geqq 1$, on a aussi:

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n} r(\xi, \mu, t, t)d\xi dt = \frac{1}{2m-k}\sum_{j\geqq 1}\int_{S_{n-2}}\frac{1}{\mu_j(\omega)}\left(\int_0^\infty \frac{r^{-1+(n-1)/(2m-k)}}{r - \dfrac{\mu}{\mu_j(\omega)}}dr\right)d\omega ,$$

ce qui, à l'aide de la formule $\int_0^\infty (r^{-1+\alpha}/(r-\mu))dr = (-\mu)^{-1+\alpha}\pi/\sin\pi\alpha$, valable pour $0<\alpha<1$, $\mu\notin \boldsymbol{R}_+$, donne (6.5).

6.2. *Etude de la résolvante d'un opérateur modèle dans $\boldsymbol{R}^n_+$.* Sur $W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}^n_+)\times W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}^n_+)$, on considère la forme

$$c(u, v) = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} c_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta v} dx ,$$

avec encore $k, m\in \boldsymbol{N}$, $1\leqq k\leqq 2m-1$, $c_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{R}$, $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$.

On suppose que pour tout $\mu<0$, $c(u, v)-\mu(u, v)_{L^2(\boldsymbol{R}^n_+)}$ est fortement coercitive sur $W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}^n_+)$. Alors pour $\omega\in S_{n-2}$ la forme c_ω associée de manière évidente à c est fortement coercitive sur $W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}_+)$.

On note $(C, D(C))$ l'opérateur non borné dans $L^2(\boldsymbol{R}^n_+)$ associé à c; pour $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$ le résolvant $F_\mu=(C-\mu)^{-1}$ existe et a son image contenue dans $W^k_{2m}(\boldsymbol{R}^n_+)$.

Si de plus $2m-k>n$, la proposition 3.2 donne l'existence d'un noyau $F_\mu(x, y)$ pour F_μ. On note enfin $F_\mu(x_n, x_n)$ au lieu de $F_\mu((0, x_n), (0, x_n))$.

De la proposition 6.1, en utilisant les notations 6.1, on va déduire:

COROLLAIRE 6.2. *On suppose $2m/k<n<2m-k$. Pour $\mu\notin\boldsymbol{R}_+$, on a:*

$$\int_0^\infty F_\mu(x_n, x_n)dx_n = (2\pi)^{1-n}\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\left(\sin\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1}\left(\sum_{j\geqq 1}\rho_j\right)(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)} . \tag{6.7}$$

DÉMONSTRATION. Comme dans Pham The Laï [15], on calcule $F_\mu(x, y)$; on montre que pour tous $x, y\in\boldsymbol{R}^n_+$ on a:

$$F_\mu(x, y) = (2\pi)^{1-n}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} e^{i\langle x'-y', \xi\rangle} r(\xi, \mu, x_n, y_n)d\xi , \tag{6.8}$$

les notations étant celles de 6.1:

Pour $\varphi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n_+)$, la fonction $u_\mu(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n_+}F_\mu(x, y)\varphi(y)dy$ vérifie en particulier: pour presque tout $\xi\in\boldsymbol{R}^{n-1}$,

$$\begin{cases}\hat u_\mu(\xi, \cdot)\in W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}_+) \quad \text{et}\\ c_\xi(\hat u_\xi(\xi, \cdot), v) - \mu(\hat u_\mu(\xi, \cdot), v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)} = (\hat\varphi(\xi, \cdot), v)_{L^2(\boldsymbol{R}_+)} ,\end{cases}$$

pour tout $v\in W^{k/2}_m(\boldsymbol{R}_+)$, où

$$\hat\varphi(\xi, x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} e^{-i\langle x', \xi\rangle}\varphi(x', x_n)dx'$$

est la transformée de Fourier partielle en x' de φ.

D'après la proposition 6.1 on a donc:

$$u_\mu(x', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x',\xi\rangle}\Big(\int_0^\infty r(\xi, \mu, x_n, y_n)\hat{\varphi}(\xi, y_n)dy_n\Big)d\xi\ .$$

(6.3) et le théorème de Fubini donnent:

$$u_\mu(x', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int_0^\infty\Big(\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x',\xi\rangle}r(\xi, \mu, x_n, y_n)\hat{\varphi}(\xi, y_n)d\xi\Big)dy_n\ .$$

(6.2) et ce même théorème donnent ensuite:

$$u_\mu(x', x_n)=(2\pi)^{-(n-1)}\int_0^\infty dy_n\int_{R^{n-1}}\Big(\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x'-y',\xi\rangle}r(\xi, \mu, x_n, y_n)d\xi\Big)\varphi(y', y_n)d\xi dy'$$

on a donc montré l'égalité dans $\mathscr{D}'(R^n_+)$ de $F_\mu(x, \cdot)$ et de $\int_{R^{n-1}} e^{i\langle x'-y',\xi\rangle}r(\xi, \mu, x_n, y_n)d\xi$, pour presque tout $x \in R^n_+$. Ces fonctions de (x, y) étant continues dans $R^n_+ \times R^n_+$, on a bien (6.8).

Enfin (6.8), (6.4) et (6.5) donnent immédiatement le corollaire 6.2.

Sur le noyau $F_\mu(x, y)$ on a aussi le résultat suivant, conséquence immédiate de la proposition 3.2.:

PROPOSITION 6.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $\mu \notin R_+$ et $\varepsilon > 0$ on ait*

$$\int_\varepsilon^\infty |F_\mu(x_n, x_n)|\, dx_n \leqq c\varepsilon^{1-kn/2m}\frac{|\mu|^{n/2m}}{d(\mu)}\ . \tag{6.9}$$

On donne maintenant des estimations sur l'opérateur F_μ qui seront utilisées dans l'étude des commutants pour la démonstration du théorème 2.3. Ces estimations sont basées sur un lemme, essentiel pour améliorer les résultats de Pham The Laï [16]: Pour $r > 0$ on note: $B_+(r) = \{x \in R^n, ||x|| < r,\ x_n > 0\}$, et pour $l, k \in N$,

$$W^k_l(B_+(r)) = \{u \in \mathscr{D}'(B'_+(r));\ x^k_n D^\alpha u \in L^2(B_+(r));\ |\alpha| \leqq l\}\ ;$$

on munit $W^k_l(B_+(r))$ de la norme:

$$||u||_{W^k_l(B_+(r))} = \Big(\sum_{||\alpha||\leqq l}||x^k_n D^\alpha u||^2_{L^2(B_+(r))}\Big)^{1/2}\ .$$

On a:

LEMME 6.4. *Soient $k, m \in N$, $k \leqq m$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous δ, r, $0 < \delta \leqq r \leqq 1$, pour tous $u \in W^k_m(B_+(1))$ et $l \in N$, $0 \leqq l \leqq m$, on ait*:

$$||u||_{W^k_l(B_+(r))} \leqq c\{\delta^{m-l}||u||_{W^k_m(B_+(1))} + \delta^{-l}(\delta^k + r^k)||u||_{L^2(B_+(1))}\}\ .$$

DÉMONSTRATION. D'après [8], $||v||_{W^k_l(B_+(1))}$ est équivalente à $||x^k_n v||_{H^l(B_+(1))}$

si $k \geqq l$ et à $\{||v||_{H^{l-k}(B_+(1))} + ||x_n^k v||_{H^l(B_+(1))}\}$ si $k < l$.
Un résultat classique d'interpolation donne alors dans les deux cas l'existence d'une constante $c > 0$ telle que pour tout ρ, $0 < \rho \leqq 1$, tout $l \in N$, $0 \leqq l \leqq m$, tout $v \in W_m^k(B_+(1))$ on ait:

$$||v||_{W_l^k(B_+(1))} \leqq c\Big\{\rho^{m-l}\Big(\sum_{|\beta|=m} ||D^\beta(x_n^k v)||_{L^2(B_+(1))} + \sum_{|\gamma|=m-k} ||D^\gamma v||_{L^2(B_+(1))}\Big) + \rho^{k-l}||v||_{L^2(B_+(1))} + \rho^{-l}||x_n^k v||_{L^2(B_+(1))}\Big\} .$$

Soit alors $0 < r \leqq 1$ et $u \in W_m^k(B_+(1))$. On sait $y = rx$, $v(x) = u(rx)$ dans cette inégalité; on obtient, pour tout α, $|\alpha| \leqq l$:

$$r^{|\alpha|-l}||y_n^k D^\alpha u||_{L^2(B_+(r))} \leqq c\Big\{(\rho r)^{m-l}\Big(\sum_{|\beta|=m} ||D^\beta(y_n^k u)||_{L^2(B_+(r))} + \sum_{|\gamma|=m-k} ||D^\gamma u||_{L^2(B_+(r))}\Big) + (\rho r)^{k-l}||u||_{L^2(B_+(r))} + (\rho r)^{-l}||y_n^k u||_{L^2(B_+(r))}\Big\} ,$$

d'où le lemme.

Pour $0 < \varepsilon \leqq 1/2$, on introduit une fonction ζ_ε possédant les propriétés

$$(6.10)\qquad \begin{cases} \zeta_\varepsilon \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n), \quad 0 \leqq \zeta_\varepsilon \leqq 1, \quad \zeta_\varepsilon = 1 \quad \text{dans} \quad ||x|| \leqq \varepsilon \\ \text{le support de } \zeta_\varepsilon \text{ est contenu dans } ||x|| < 2\varepsilon, \text{ et} \\ \qquad ||D^\alpha \zeta_\varepsilon||_{L^\infty(\boldsymbol{R}^n)} \leqq c\varepsilon^{-|\alpha|} . \end{cases}$$

Du lemme 6.4 on va déduire:

PROPOSITION 6.5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \notin \boldsymbol{R}_+$, $0 < \varepsilon \leqq 1/2$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait*:

$$(6.11)\qquad ||\zeta_\varepsilon F_\mu||_{0,2m:k,\boldsymbol{R}_+^n} \leqq c\frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

$$(6.12)\qquad ||[C, \zeta_\varepsilon]F_\mu||_{0,0,\boldsymbol{R}_+^n} \leqq c\frac{|\mu|}{d(\mu)}(\varepsilon^{-2m+k}|\mu|^{-1})^{1/2m} .$$

DÉMONSTRATION. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $\mu \notin \boldsymbol{R}_+$ on ait:

$$(6.13)\qquad ||F_\mu||_{0,0,\boldsymbol{R}_+^n} \leqq \frac{c}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad ||F_\mu||_{0,2m-h:k-h,\boldsymbol{R}_+^n} \leqq c\frac{|\mu|}{d(\mu)} , \quad \text{pour} \quad 0 \leqq h \leqq k .$$

Ces majorations et le lemme 6.4 donnent pour $f \in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$, $0 \leqq h \leqq k$, $0 \leqq l \leqq 2m - h$ et $0 < \delta \leqq 2\varepsilon$:

$$(6.14)\qquad ||F_\mu f||_{W_l^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \leqq \frac{c}{d(\mu)}\{\delta^{2m-h-l}|\mu| + \delta^{-l}(\delta^{k-h} + \varepsilon^{k-h})\}||f||_{L^2(\boldsymbol{R}_+^n)}$$

on fait alors $\delta = (\varepsilon^{k-h}|\mu|^{-1})^{1/(2m-h)}$ avec $\delta < \varepsilon$; (6.14) devient:

$$(6.15) \qquad ||F_\mu f||_{W_l^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \leqq \frac{c}{d(\mu)}\varepsilon^{k-h}(\varepsilon^{k-h}|\mu|^{-1})^{-l/(2m-h)}||f||_{L^2(R_+^n)} ,$$

$$\text{pour} \quad |\mu| > \varepsilon^{-2m+k} .$$

De cette estimation on déduit alors facilement (6.11) et (6.12).

7. Démonstration du Théorème 2.3: $n > 2m/k$.

7.1. *Cas où* $2m - k > n$. D'après P. Boero-R. Pavec [5], pour chaque point s de Γ il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de s dans $\boldsymbol{R}^n$ et un difféomorphisme θ_s de $\mathscr{V}$ dans $B(1) = \{x \in \boldsymbol{R}^n, ||x|| < 1\}$ qui possède les propriétés:

(7.1) $\begin{cases} \cdot\ \theta_s(s) = 0, \quad \theta_s(\mathscr{V} \cap \Omega) \subseteqq \{x \in B(1), x_n > 0\}, \quad \theta_s(\mathscr{V} \cap \Gamma) \subseteqq \{x \in B(1), x_n = 0\} \\ \cdot\ \text{l'image par } \theta_s \text{ de la normale en } s \text{ à } \Gamma \text{ est contenue dans } \{x \in \boldsymbol{R}^n, x' = 0\} \\ \cdot\ \text{pour tout } x \in \mathscr{V} \text{ la } n^{\text{ième}} \text{ coordonnée de } \theta_s(x) \text{ est } \varphi(x) \\ \cdot\ \text{si } J(x) \text{ désigne la matrice jacobienne de } \theta_s \text{ en } x,\ J(s) \text{ est une isométrie de } T_s \text{ sur } T = \{x \in \boldsymbol{R}^n, x_n = 0\},\ {}^tJ(s) \text{ est une isométrie de } T \text{ sur } T_s \text{ et l'image par } {}^tJ(s) \text{ de } (0, \cdots, 0, 1) \text{ est } ||\text{grad}\,\varphi(s)||\nu_s, \\ \cdot\ \text{si } \rho_s \text{ désigne la valeur absolue du déterminant jacobien de } \theta_s^{-1},\ \Gamma \text{ étant compacte, il existe } \varepsilon_0,\ 0 < \varepsilon_0 \leqq 1, \text{ tel que la boule } \{x \in \boldsymbol{R}^n, ||x|| \leqq \varepsilon_0\} \text{ soit contenue dans } \theta_s(\mathscr{V}) \text{ pour tout } s \in \Gamma \text{ et tel que l'application } (s, h) \mapsto \rho_s(0, h) \text{ soit continue sur } \Gamma \times [0, \varepsilon_0]. \end{cases}$

On note $\mathscr{U} = \mathscr{V} \cap \Omega$ et $U = \theta_s(\mathscr{U})$. Par le difféomorphisme θ_s la forme a est transformée en une forme c fortement coercitive sur l'espace des fonctions de $W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+^n)$ à support dans $\bar{U}$: la restriction à $\mathscr{U}$ de $G_\mu = (A - \mu)^{-1}$ est transformée en un opérateur A_μ continu dans $L^2(u)$, à image dans $W_{2m}^k(U)$ qui vérifie: pour $f \in L^2(U)$, $c(H_\mu f, v) - \mu(H_\mu f, v)_{L^2(U)} = (f, v)_{L^2(U)}$ pour tout $v \in W_m^{k/2}(\boldsymbol{R}_+^n)$ à support dans $\bar{U}$. Alors pour $2m-k>n$, G_μ et H_μ sont des opérateurs intégraux dont les noyaux $G_\mu(x, y)$ et $H_\mu(x, y)$ sont liés par la relation:

$$H_\mu(x, y) = G_\mu(\theta_s^{-1}(x), \theta_s^{-1}(y))\rho_s(y) .$$

Pour étudier $H_\mu(x, y)$ et par là même $G_\mu(x, y)$ on va se ramener à la situation de 6.2: on a

$$c(u, v) = \int_U x_n^k \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq m} a_{\alpha\beta} \circ \theta_s^{-1} P_\alpha(x, D)u\overline{P_\beta(x, D)v}dx ,$$

avec $(P_\alpha(x, D)u) \circ \theta_s = D^\alpha(u \circ \theta_s)$; $P_\alpha(x, D)$ est donc un opérateur différentiel d'ordre $|\alpha|$; on note $P'_\alpha(0, D)$ la partie homogène d'ordre $|\alpha|$ de $P_\alpha(x, D)$, les coefficients étant figés en 0 et:

$$c_s'(u, v) = \int_{R_+^n} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) P_\alpha'(0, D) u \overline{P_\beta'(0, D) v} dx .$$

Pour tout $\mu < 0$, $c_s'(u, v) - \mu(u, v)_{L^2(R_+^n)}$ est fortement coercitive sur $W_m^{k|2}(R_+^n)$; C_s' étant l'opérateur non borné associé à c_s' dans $L^2(R_+^n)$, pour $2m - k > n$ on note alors $F_\mu(x, y)$ le noyau de l'opérateur $(C_s' - \mu)^{-1}$, $\mu \in R_+$.

On va utiliser d'abord la fin du paragraphe 6.2 pour démontrer le résultat de comparaison suivant:

PROPOSITION 7.1. *On suppose $2m/k < n < 2m - k$. Soient $\theta, \beta \in R_+$, $\theta + \beta < 1$; il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour $s \in \Gamma$, $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $|\mu| > \mu_0$ on ait:*

$$\left| \int_0^{|\mu|^{-\beta/(2m-k)}} (G_\mu(\theta_s^{-1}(0, h), \theta_s^{-1}(0, h)) \rho_s(0, h) - F_\mu(h, h)) dh \right| < c \frac{|\mu|^{1+(n-1)/(2m-k)-\beta/(2m-k)}}{d(\mu)^2} .$$

DÉMONSTRATION. Pour $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0/2$ on considère deux fonctions ζ_ε et η_ε vérifiant (6.10) et de plus $\eta_\varepsilon \zeta_\varepsilon = \zeta_\varepsilon$. Pour $\mu \in \rho(A)$ on note

$$T_{\varepsilon,\mu} = \zeta_\varepsilon (H_\mu - F_\mu) \zeta_\varepsilon .$$

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_s'$ désignent les opérateurs différentiels associés à c et c_s' respectivement, on a:

$$T_{\varepsilon,\mu} = \zeta_\varepsilon F_\mu \eta_\varepsilon (\mathscr{C}_s' - \mathscr{C}) H_\mu \zeta_\varepsilon - \zeta_\varepsilon F_\mu [\eta_\varepsilon, \mathscr{C}_s'] H_\mu \zeta_\varepsilon \equiv T_1 + T_2 .$$

Pour estimer T_1 on écrit $\mathscr{C}_s' - \mathscr{C}$ sous la forme

$$\sum_{h=0}^k x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leqq 2m-h} (q_{h,\alpha}(x) - q_{h,\alpha}(0)) D^\alpha + \sum_{h=0}^k x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leqq 2m-h-1} P_{h,\alpha} D^\alpha$$

alors on a: pour $f \in L^2(R_+^n)$,

$$\|\eta_\varepsilon (\mathscr{C}_s' - \mathscr{C}) H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{L^2(R_+^n)} \leqq c \left\{ \varepsilon \|H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{W_{2m}^k(U)} + \sum_{h=0}^k \|H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{W_{2m-h-1}^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \right\} . \tag{7.2}$$

D'après (4.1), H_μ vérifie des inégalités identiques à (6.13) pour $\mu \in \mathscr{R} - \{0\}$ donc aussi les inégalités (6.15) avec $f \in L^2(U)$ et $\mu \in \mathscr{R} - \{0\}$.

Ces majorations, (7.2) et (6.11) impliquent:

$$\|T_1\|_{0,0,R_+^n} \leqq c \frac{\varepsilon |\mu|}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|T_1\|_{0,2m:k,R_+^n} \leqq \frac{\varepsilon |\mu|^2}{d(\mu)^2} , \tag{7.3}$$

$$\text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R}, \ |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$$

pour estimer T_2 on introduit encore $\varphi_2, \cdots, \varphi_p$ vérifiant (6.10) et $\varphi_j\varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$ pour $1 \leqq j \leqq p$ avec $\varphi_1 = \eta_\varepsilon$ et $\varphi_{p+1} = \zeta_\varepsilon$. On a:

$$\zeta_\varepsilon F_\mu[\eta_\varepsilon, \mathscr{C}'_s] = -\zeta_\varepsilon F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_p]F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_{p-1}] \cdots F_\mu[\mathscr{C}'_s, \varphi_1] .$$

De plus $H_\mu\zeta_\varepsilon$ vérifie aussi une inégalité de type (6.12) pour $\mu \in \mathscr{R}$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$. Alors, avec (6.11), (6.12) on obtient: pour tout $p \geqq 1$ il existe $c > 0$ tel que pour $\mu \in \mathscr{R}$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait:

$$\text{(7.4)} \qquad \begin{cases} \|T_2\|_{0,0,R^n_+} \leqq \dfrac{c}{d(\mu)}\Big(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}(\varepsilon^{-2m+k}|\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,R^n_+} \leqq \dfrac{c|\mu|}{d(\mu)}\Big(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)}(\varepsilon^{-2m+k}|\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p . \end{cases}$$

Ayant des majorations identiques pour l'adjoint (7.3), (7.4), (3.2) et (3.3) montrent que pour tout $p \geqq 1$, il existe $c > 0$ tel que pour $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0/2$, $x, y \in \boldsymbol{R}^n_+$, $\mu \in \mathscr{R}$, $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ on ait:

$$\begin{cases} |T_{\varepsilon,\mu}(x, y)| \leqq c\dfrac{|\mu|^{n/(2m-k)}}{d(\mu)}\Big(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} + \Big(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k}|\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p\Big) \\ |T_{\varepsilon,\mu}(x, y)| \leqq c(x_ny_n)^{-kn/4m}\Big(\dfrac{\varepsilon|\mu|}{d(\mu)} + \Big(\dfrac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k}|\mu|^{-1})^{1/2m}\Big)^p\Big) . \end{cases}$$

Soit alors $\beta > 0$; on fait $\varepsilon = |\mu|^{\beta/(2m-k)}$ dans les inégalités ci-dessus; en notant $H_\mu((0, h), (0, h)) = H_\mu(h, h)$, de même pour F_μ, on obtient: pour $|\mu| > \mu_0 \geqq 1$, $\mu \in \mathscr{R}$, $0 < h < |\mu|^{-\beta/(2m-k)}$,

$$\begin{cases} |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leqq c\dfrac{|\mu|^{1+(n-\beta)/(2m-k)}}{d(\mu)^2}\Big(1 + |\mu|^{-1+\beta/(2m-k)}d(\mu) \cdot \Big(\dfrac{|\mu|^{-1+(\beta-1)/2m}}{d(\mu)}\Big)^p\Big) \\ |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leqq ch^{-kn/2m}\dfrac{|\mu|^{1+n/2m-\beta/(2m-k)}}{d(\mu)^2}\Big(1 + |\mu|^{-1+\beta/(2m-k)}d(\mu)\Big(\dfrac{|\mu|^{1+(\beta-1)/2m}}{d(\mu)}\Big)^p\Big). \end{cases}$$

Soit enfin $\theta \in \boldsymbol{R}$, $0 < \theta < 1$. Comme en 5.1, ces deux derniéres inégalités montrent que pour $\theta + \beta < 1$ on a:

$$\begin{cases} |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leqq c\dfrac{|\mu|^{1+(n-\beta)/(2m-k)}}{d(\mu)^2} & \text{pour } \mu \in \mathscr{R}_\theta,\ |\mu| > \mu_0, \\ |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leqq ch^{-kn/2m}\dfrac{|\mu|^{1+n/2m-\beta/(2m-k)}}{d(\mu)^2} & 0 < h < |\mu|^{-\beta/(2m-k)} . \end{cases}$$

On intégre alors la première inégalité sur $(0, |\mu|^{-1(2m-k)})$ et la seconde sur $(|\mu|^{-1/(2m-k)}, |\mu|^{-\beta/(2m-k)})$; on obtient la proposition 7.1 puisqu'on peut choisir μ_0 indépendent de s.

COROLLAIRE 7.2. *On suppose $2m/k < n < 2m - k$. On a*

$$\left|\int_\Omega G_\mu(x, x)dx\right| = O(|\mu|^{-1+(n-1)/(2m-k)}) \quad \textit{dans } \mathscr{R}_\theta \textit{ avec}$$

$$(7.5) \quad \begin{cases} \theta \leqq m(kn-2m)/(2m-k)(kn-m) & si \quad 2m/k < n < 4m/k - 1 \\ \theta < m/(3m-k) \quad si \quad n \geqq 4m/k - 1 \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION. Pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ on a $P'_\alpha(y, \xi) = ({}^tJ(\theta_s^{-1}(y))\xi)^\alpha$ donc pour $\omega \in S_{n-2}$, en notant $\omega_s = {}^tJ(s)\binom{\omega}{0}$, on a d'après (7.1) et avec des notations analogues à celles de 6.2:

$$c'_{s,\omega}(u, v)$$
$$= \int_0^\infty x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s)(\omega_s + \|\text{grad}\,\varphi(s)\|\nu_s\partial_{x_n})^\alpha u \overline{(\omega_s + \|\text{grad}\,\varphi(s)\|\nu_s\partial_{x_n})^\beta v} dx_n .$$

La $j^{\text{ième}}$ valeur propre de $c'_{s,\omega}$ est donc $\|\text{grad}\,\varphi(s)\|^k \mu_j(s, \omega_s)$, où $\mu_j(s, \omega_s)$ est la $j^{\text{ième}}$ valeur propre de β_{s,ω_s}. Alors le corollaire 6.2 donne, avec la notation (2.3):

$$\int_0^\infty F_\mu(x_n, x_n)dx_n = \frac{\pi(n-1)}{2m-k}\left(\sin\frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1} C(s)(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)} .$$

On note $\gamma_{m,k,n} = \pi(n-1)/(2m-k)(\sin\pi(n-1)/(2m-k))^{-1}\int_\Gamma C(s)ds.$

Les propositions 6.3 et 7.1 impliquent alors: pour $|\mu| > \mu_0$, $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, avec $\rho = |\mu|^{-\beta/(2m-k)}$

$$\left|\int_{\Omega-\Omega(\rho)} G(x, x)dx - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}\right|$$
$$\leqq c\left\{\frac{|\mu|^{1+(n-1-\beta)/(2m-k)}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{n/2m-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)}}{d(\mu)}\right\} .$$

Ce qui, joint à la majoration déduite de (4.1) et (3.3):

$$\left|\int_{\Omega(\rho)} G_\mu(x, x)dx\right| \leqq c\frac{|\mu|^{n/2m-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)}}{d(\mu)}, \quad \text{pour} \quad \mu \in \mathscr{R} ,$$

donne enfin: pour $|\mu| > \mu_0$, $\mu \in \mathscr{R}_\theta$:

$$(7.6) \qquad \left|\int_\Omega G_\mu(x, x)dx - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}\right|$$
$$\leqq c\left\{\frac{|\mu|^{1+(n-1-\beta)/(2m-k)}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{n/2m-\beta(1-kn/2m)/(2m-k)}}{d(\mu)}\right\} .$$

θ étant fixé, la meilleure majoration de $\left|\int_\Omega G_\mu(x, x)dx\right|$ par une puissance de $|\mu|$ dans $\mathscr{R}_\theta$ est obtenue s'il existe β, $0 < \theta + \beta < 1$ tel que:

$$\theta(2m-k)/m \leqq \beta \leqq 1 - (2m-k)\theta/(kn-2m) ,$$

et ceci équivaut au corollaire 7.2.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. Le corollaire 7.2 et la proposition 4.4 donnent:

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leqq c\lambda^{(n-1)/(2m-k)-\theta/2m} \quad \text{pour} \quad \lambda > \lambda_0 ,$$

θ appartenant aux intervalles $(0, \theta_n)$ décrits en (7.5) suivant les valeurs de n.

On étudie encore $I(\lambda)$: (4.4) et (7.6) donnent, pour $\mu \in \mathscr{R}_\theta$, $|\mu| > \mu_0$, $0 < \theta + \beta < 1$:

$$\begin{aligned} &|f(\mu) - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}| \\ &\quad \leqq c\frac{|\mu|^{(n-1)/(2m-k)}}{d(\mu)}\left(\frac{|\mu|^{1-1/2m}}{d(\mu)} + \frac{|\mu|^{-\beta/(2m-k)}}{d(\mu)} + |\mu|^{-(1-\beta)(kn-2m)/2m(2m-k)}\right) . \end{aligned}$$

On choisit $L(\lambda)$ du même type qu'en 5.1. Alors pour λ assez grand:

$$\begin{aligned} &\left|I(\lambda) - \frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi}\int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}d\mu\right| \\ &\quad \leqq c\lambda^{(n-1)/(2m-k)}\{\lambda^{-(1-\theta)/2m} + \lambda^{-\beta/(2m-k)+\theta/2m} + \lambda^{-(1-\beta)(kn-2m)/2m(2m-k)} \operatorname{Log} \lambda\} . \end{aligned}$$

Enfin le même calcul qu'en 5.1 donne pour λ assez grand:

$$\left|\frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi}\int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1+(n-1)/(2m-k)}d\mu - \int_\Gamma C(s)ds \cdot \lambda^{(n-1)/(2m-k)}\right| \leqq c\lambda^{(n-1)/(2m-k)-\theta/2m} .$$

On a donc: θ vérifiant (7.5), pour tout β, $0 < \theta + \beta < 1$, pour λ assez grand:

$$\begin{aligned} &\left|N(\lambda) - \int_\Gamma C(s)ds \cdot \lambda^{(n-1)/(2m-k)}\right| \\ &\quad \leqq c\lambda^{(n-1)/(2m-k)}(\lambda^{-\theta/2m} + \lambda^{-(1-\theta)/2m} + \lambda^{-\beta/(2m-k)+\theta/2m} + \lambda^{-(1-\beta)(kn-2m)/2m(2m-k)} \operatorname{Log} \lambda) . \end{aligned}$$

On note $f(\lambda)$ la parenthèse de cette dernière inégalité et on fait

$$\beta = (2m - k)\alpha\theta/2m + (1 - \alpha)(1 - \theta) , \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < 1 ,$$

dans $f(\lambda)$. Alors $f(\lambda) \leqq c\lambda^{-\theta/2m}$ pour λ assez grand si $\theta \leqq 1/2$ et si: il existe $\alpha \in]0, 1[$, $2m(4m - k - kn)\theta/(kn - 2m)(2m - \theta(4m - k)) < \alpha < 2(m - \theta(3m - k))/(2m - \theta(4m - k))$. Cette condition est toujours vérifiée si $n \geqq 4m/k - 1$ et seulement pour $\theta < m(kn - 2m)/(2m - k)(kn - m)$ si $n < 4m/k - 1$; mais dans ce dernier cas on voit facilement que pour $\theta \leqq 1/2$ et $\theta \leqq m(kn - 2m)/(2m - k)(kn - m)$ on a $f(\lambda) \leqq c\lambda^{-\theta/2m} \operatorname{Log} \lambda$. Ceci démontre le théorème 2.3 dans le cas $2m - k > n$.

7.2. *Cas où* $2m - k < n$. On procède comme en 5.2 pour se ramener à l'étude du noyau de $(A^{2q} - \mu)^{-1}$ avec $2q(2m - k) > n$, et on compare ce noyau à celui de $(B_s'^{2q} - \mu)^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON, Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Mathematical Studies (1965).

[2] S. AGMON, Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators, Arch. Rational Mech. Anal., 28 (1968).

[3] S. AGMON ET Y. KANNAÏ, On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, Israel J. Math., 5 (1967), 1-30.

[4] M. S. BAOUENDI ET C. GOULAOUIC, Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rational Mech. Anal., 34 (1969), 361-379.

[5] P. BOERO ET R. PAVEC, Coercivité des formes sesquilinéaires intégro-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids, CRAS Paris, 270 (1970), 1416-1419.

[6] P. BOLLEY ET J. CAMUS, Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels, CRAS Paris, 279 (1974), 651-653.

[7] P. BOLLEY ET J. CAMUS, Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels, CRAS Paris, 282 (1976), 45-47.

[8] P. BOLLEY ET J. CAMUS, Espaces de Sobolev avec poids, Sém. Anal. Fonctionnelle Rennes (1968-1969).

[9] C. GOHBERG ET G. KREIN, Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints dans un espace hilbertien, Paris, Dunod (1971).

[10] P. MALLIAVIN, Un théorème taubérien avec reste pour la transformée de Stieltjes, CRAS Paris, 255 (1962), 2351-2352.

[11] C. NORDIN, The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator, Ark. Mat., 10 (1972), 3-21.

[12] PHAM THE LAÏ, Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés, Israel J. Math., 17 (1974), 364-379.

[13] PHAM THE LAÏ, Noyaux d'Agmon, Séminaire J. Leray, Collège de France (1973).

[14] PHAM THE LAÏ, Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2, CRAS Paris, 278 (1974), 1619-1622. Séminaire J. Leray, Collège de France.

[15] PHAM THE LAÏ, Opérateurs elliptiques dégénérés: comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres, CRAS Paris, 280 (1975), 1067-1070. J. Math. Pures Appl., 55 (1976), 379-420.

[16] PHAM THE LAÏ, Estimation du reste dans la théorie spectrale d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76 exposé n° X.

[17] N. SHIMAKURA, Quelques exemples de ζ-fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 1065-1069.

[18] L. VULIS ET Z. SOLOMJAK, Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators, Soviet Math. Dokl., 13 (1972), 1484-1488.

U. E. R. MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE RENNES
AVENUE DU GÉNÉRAL LECLERC
35042 RENNES CEDEX
FRANCE