Tôhoku Math. Journ.
31 (1979), 151-164.

SUR L'UNICITÉ DANS LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À CARACTÉRISTIQUES DE MULTIPLICITÉ CONSTANTE

KINJI WATANABE

(Received January 25, 1978, revised November 29, 1978)

I. Enoncé du résultat. On se propose d'étudier l'unicité des solutions du problème suivant:

$$(*) \qquad \begin{cases} P[u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 & \text{dans } t < |x|^2 \end{cases}$$

oú P est un opérateur différentiel d'ordre m défini dans un voisinage Ω de l'origine de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ de la forme suivante:

$$P[u] = D_t^m u + \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|+j \leqq m} p_{\alpha,j}(x, t) D_x^\alpha D_t^j u \ .$$

On généralise le résultat obtenu dans Watanabe [6] aux opérateurs différentiels non nécessairement elliptiques à caractéristiques de multiplicité constante sous les hypothèses:

[H] Les coefficients de la partie principale p_m de P sont à valeurs réelles et de classe C^∞, ceux de la partie d'ordre $(m-1)$ sont lipschitziens et ceux d'autres parties sont mésurables et bornés.

[H_0] Les racines non réelles (resp. réelles) de l'equation caractéristique de P:

$$p_m(x, t; \xi, \tau) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|+j=m} p_{\alpha,j}(x, t) \xi^\alpha \tau^j = 0$$

sont au plus triples (resp. simples).

On a alors.

THÉORÈME. *Soit P un opérateur différentiel à caractéristiques de multiplicité constante, satisfaisant aux hypothèses* [H] *et* [H_0]. *Alors chaque solution de classe C^m du problème* $(*)$ *s'annule identiquement dans un voisinage de l'origine.*

REMARQUE. Le théorème reste encore vérifié lorsque l'on remplace la surface initiale $t = |x|^2$ par une surface de classe C^2 à vecteur normal $(0, 1)$ en 0.

Dans §II on traite les invariabilités des multiplicités des racines caractéristiques. La preuve du théorème est donné dans §III.

II. Polynômes à caractéristiques de multiplicité constante. On donne ici la définition des opérateurs différentiels à caractéristiques de multiplicité constante selon celle de Matsuura [4] dans le cas d'opérateurs hyperboliques et généralise son résultat.

Soit $p(x, t; \xi, \tau)$ un polynômes homogène de degré m en (ξ, τ) à coefficients de classe C^∞ dans un voisinage Ω de l'origine tel que $p(x, t; 0, 1) = 1$. On dit que p est un polynôme à caractéristiques simples si $p(0, 0; \xi, \tau) = 0$ $(0 \neq \xi \in \boldsymbol{R}^n, \tau \in \boldsymbol{C})$ implique $(\partial p/\partial\tau)(0, 0; \xi, \tau) \neq 0$. On dit que p est un polynôme à caractéristiques de multiplicité constante s'il existe des entiers k, μ_j $(j = 1, \cdots, k)$ et des polynômes homogènes p_j à coefficients de classe C^∞ dans un voisinage $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tels que

$$p(x, t; \xi, \tau) = \prod_{j=1}^{k} p_j(x, t; \xi, \tau)^{\mu_j} \quad \text{dans} \quad \Omega' \times \boldsymbol{R}^{n+1} \tag{1}$$

et que $\prod_{j=1}^{k} p_j$ est un polynôme à caractéristiques simples.

Etendant le resultat de Matsuura [4] pour les polynômes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, on considère deux conditions suivantes:

[H$_1$] Pour tout $\xi^0 \in \boldsymbol{R}^n$ avec $|\xi^o| = 1$, il existe un voisinage $\Omega(\xi^o)$ de l'origine, un voisinage conique $\Gamma(\xi^o)$ de ξ^o, une constante $\delta(\xi^o) > 0$, des entiers $k(\xi^o)$, $\mu_j(\xi^o)$ $(j = 1, \cdots, k(\xi^o))$ et des fonctions $\tau_j(x, t, \xi; \xi^o)$ homogènes de degré un en ξ de classe C^∞ dans $\Omega(\xi^o) \times \Gamma(\xi^o)$ tels que pour $(x, t, \xi, \tau) \in \Omega(\xi^o) \times \Gamma(\xi^o) \times \boldsymbol{R}$

$$p(x, t; \xi, \tau) = \prod_{j=1}^{k(\xi^o)} (\tau - \tau_j(x, t, \xi; \xi^o))^{\mu_j(\xi^o)} \tag{2}$$

et que

$$|\tau_j(x, t, \xi; \xi^o) - \tau_i(x, t, \xi; \xi^o)| \geqq \delta(\xi^o)|\xi|, 1 \leqq i < j \leqq k(\xi^o)\,. \tag{3}$$

[H$_2$] La condition [H$_1$] est vérifiée indépendamment de ξ^o, c'est-à-dire que avec la notation de [H$_1$] $\Omega(\xi^o)$, $\delta(\xi^o)$, $k(\xi^o)$ et $\mu_j(\xi^o)$ sont indépendants de ξ^o, $\Gamma(\xi^o) = \boldsymbol{R}^n - 0$ et l'identité (2) et les inégalités (3) sont vérifiées pour tout (x, t, ξ, τ).

[H$_1$] (resp. [H$_2$]) signifie que des polynômes p d'une variable τ, ont localement (resp. globalement) les racines de multiplicité constante par rapport aux paramètres (x, t, ξ). De plus [H$_1$] (resp. [H$_2$]) implique que pour chaque point fixé (x, t, ξ^o) les racines $\tau_j(x, t, \xi; \xi^o)$ sont analytiques en ξ dans $\Gamma(\xi^o)$ (resp. $\boldsymbol{R}^n - 0$).

On a alors

PROPOSITION 2.1. *Pour que p soit un polynôme à caractéristiques de multiplicité constante, il faut et il suffit que p satisfasse à la condition* $[H_1]$.

PROPOSITION 2.2. *Lorsque la dimension $n+1$ de l'espace n'est pas égale à 3, i.e. $n \neq 2$, la condition* $[H_1]$ *est équivalente à la condition* $[H_2]$.

COROLLAIRE 2.3 (Matsuura [4]). *Pour un polynôme hyperbolique, il est un polynôme à caractéristiques de multiplicité constante si et seulement s'il satisfait à l'une des* $[H_1]$ *et* $[H_2]$.

REMARQUE. Il est facile de voir que dans le cas $n = 2$ $[H_1]$ n'implique pas en général $[H_2]$, en observant les polynômes:

$$p = \tau^4 + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\tau^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \varepsilon \prod_{j=1}^{4} (\xi_1 + \sqrt{-1} j \xi_2),\ \varepsilon \neq 0 .$$

La démonstration de la Proposition 2.1 est tout à fait analogue à celle de Matsuura [4] dans le cas d'opérateurs hyperboliques. Il suffit de remarquer que sa preuve reste encore valable sans l'hyperbolicité et sans les existences globales des racines caractéristiques.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.2. Il est clair que $[H_2]$ entraîne généralement $[H_1]$ et que l'implication réciproque dans le cas $n = 1$ est vérifiée. Soit $n \geqq 3$ et S^{n-1} la sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$. Si l'on compare deux décompositions de p:

$$\begin{aligned} p(0, 0; \xi, \tau) &= \prod_{j=1}^{k(\xi^0)} (\tau - \tau_j(0, 0, \xi; \xi^0))^{\mu_j(\xi^0)} \\ &= \prod_{j=1}^{k(\xi)} (\tau - \tau_j(0, 0, \xi; \xi))^{\mu_j(\xi)} \end{aligned}$$

on voit facilement que $k(\xi)$ est localement constante dans S^{n-1} et qu'elle y est donc constante. On note cet constante par k. En utilisant un recouvrement fini de S^{n-1} et les inégalites (3), il existe une constante $\delta_1 > 0$ et un voisinage Ω' de l'origine tels que

$$(4)\quad p(x, t; \omega, \tau) = 0 \quad ((x, t) \in \Omega',\ \omega \in S^{n-1},\ \tau_1 \neq \tau_2) \ \text{ implique } \ |\tau_1 - \tau_2| > \delta_1 .$$

On a alors

LEMME 2.4. *Soit $n \geqq 3$. Pour tout $j = 1, \cdots, k$ et tout ω^0 dans S^{n-1}, $\tau_j(0, 0, \omega; \omega^0)$ a un prolongement analytique à S^{n-1}, plus précisément il existe une fonction $\lambda_j(\omega; \omega^0)$ analytique dans S^{n-1} telle que $\lambda_j(\omega; \omega^0) = \tau_j(0, 0, \omega; \omega^0)$ dans $\Gamma(\omega^0)$.*

Pour le moment on suppose ce lemme. Comme les ensembles $\{\lambda_j(\omega; \omega^0);$

$j=1, \cdots, k\}$ sont indépendants de ω^o, on peut trouver k-fonctions $\nu_j(\omega)$ analytiques dans S^{n-1} telles que la condition suivante est satisfaite: Pour tout $j=1, \cdots, k$ et tout ω^o dans S^{n-1} il existe une et une seule indice $j(\omega^o)$ telle que

$$(5) \qquad \nu_j(\omega) = \lambda_{j(\omega^o)}(\omega; \omega^o) \quad \text{dans} \quad S^{n-1}.$$

D'autre part on trouve pour tout ω^o dans S^{n-1} un voisinage $\Omega'(\omega^o) \subset \Omega'$ de l'origine et un voisinage $\Gamma'(\omega^o) \subset \Gamma(\omega^o)$ de ω^o de telle manière que

$$(6) \quad |\tau_j(x, t, \omega; \omega^o) - \tau_j(0, 0, \omega; \omega^o)| < \delta_1/2 \quad \text{dans} \quad \Omega'(\omega^o) \times \Gamma'(\omega^o) \cap S^{n-1}.$$

En utilisant un recouvrement fini $\{\Gamma'(\omega^{(l)}) \cap S^{n-1}\}$ de S^{n-1}, on définit les racines globales par

$$\lambda_j(x, t, \xi) = \tau_{j(\omega^{(l)})}(x, t, \xi; \omega^{(l)})$$

lorsque (x, t) est dans $\bigcap_l \Omega'(\omega^{(l)})$ et $\xi/|\xi|$ est dans $\Gamma'(\omega^{(l)})$. λ_j sont bien définies parce que si ω est dans $\Gamma'(\omega^{(l)}) \cap \Gamma'(\omega^{(l')}) \cap S^{n-1}$, on a de (5)

$$\tau_{j(\omega^{(l)})}(0, 0, \omega; \omega^{(l)}) = \nu_j(\omega) = \tau_{j(\omega^{(l')})}(0, 0, \omega; \omega^{(l')})$$

et donc on obtient grâce aux (4) et (6)

$$\tau_{j(\omega^{(l)})}(x, t, \omega; \omega^{(l)}) = \tau_{j(\omega^{(l')})}(x, t, \omega; \omega^{(l')}) .$$

Finalement on obtient une décomposition globale de p:

$$p(x, t; \xi, \tau) = \prod_{j=1}^{k} (\tau - \lambda_j(x, t, \xi))^{\mu_j}$$

où μ_j sont indépendantes de ξ. c.q.f.d.

PREUVE DU LEMME 2.4. Il est aisé de voir qu'il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que pour tout $j=1, \cdots, k$ et tout ω^o dans S^{n-1}, $\tau_j(0, 0, \omega; \omega^o)$ a un prolongement analytique à l'intersection $U(\omega^o; \delta_2)$ de S^{n-1} et la disque ouverte de centre ω^o et de rayon δ_2. On dénote par $\tau_j(\omega; \omega^o)$ ce prolongement et considère leur prolongement au long d'une courbe continue dans S^{n-1}, $\sigma: [0, 1] \to S^{n-1}$. Montrons que pour tout $j=1, \cdots, k$ il existe une fonction continue $\lambda_{\sigma,j}: [0, 1] \to \boldsymbol{C}$ telle que

$$(8) \qquad \begin{cases} p(0, 0; \sigma(s), \lambda_{\sigma,j}(s)) = 0 \quad \text{pour} \quad s \quad \text{dans} \quad [0, 1] \\ \lambda_{\sigma,j}(0) = \tau_j(\sigma(0); \sigma(0)) . \end{cases}$$

Posons

$$s_1 = \sup \{s' \in [0, 1]; \sigma(s) \in U(\sigma(0); \delta_2/2) \quad \text{pour tout} \quad s \quad \text{dans} \quad [0, s']\}$$

et définissons $\lambda_{\sigma,j}$ par $\lambda_{\sigma,j}(s) = \tau_j(\sigma(s); \sigma(0))$ pour s dans $[0, s_1[$. Il est clair que $\lambda_{\sigma,j}$ est continue et sa limite $\lambda_{\sigma,j}(s_1 - 0)$ existe. On trouve successivement des points $s_1 < s_2 < \cdots < s_{l+1} \leqq 1$ tels que

$$s_{l+1} = \sup\{s' \in [s_l, 1];\ \sigma(s) \in U(\sigma(s_l); \delta_2/2) \quad \text{pour tout } s \text{ dans } [s_l, s']\}$$

et définit $\lambda_{\sigma,j}$ par $\lambda_{\sigma,j}(s) = \tau_{j_l}(\sigma(s); \sigma(s_l))$ pour s dans $[s_l, s_{l+1}[$. Ici on a choisi les indices j_l de telle manière que $\lambda_{\sigma,j}(s_l - 0) = \tau_{j_l}(\sigma(s_l); \sigma(s_l))$. La continuité de σ et les identités $|\sigma(s_l) - \sigma(s_{l+1})| = \delta_2/2$ $(l = 1, 2, \cdots)$ entraînent l'existence de la fonction satisfaisante à (8).

En remarquant qu'il existe une constante δ_3 $(0<\delta_3<\delta_2)$ telle que pour tout $j = 1, \cdots, k$ et tout ω° dans S^{n-1}

$$(9) \quad |\tau_j(\omega; \omega^\circ) - \tau_j(\omega^\circ; \omega^\circ)| \leqq \delta_1/8 \quad \text{lorsque } \omega \text{ est dans } U(\omega^\circ; \delta_3)$$

on montre que pour deux courbes continues dans S^{n-1}, $\sigma_0, \sigma_1\colon [0, 1] \to S^{n-1}$, on a $\lambda_{\sigma_0,j}(1) = \lambda_{\sigma_1,j}(1)$ lorsque $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ et $\sigma_0(1) = \sigma_1(1)$.

Puisque S^{n-1} est simplement connexe grâce à l'hypothèse $n \geqq 3$, il existe une application continue $F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to S^{n-1}$ telle que

$$F(0, s) = \sigma_0(s),\ F(1, s) = \sigma_1(s) \quad \text{pour } s \text{ dans } [0, 1]$$
$$F(t, 0) = \sigma_0(0),\ F(t, 1) = \sigma_0(1) \quad \text{pour } t \text{ dans } [0, 1]\,.$$

Posons pour l'indice fixée j

$$\lambda_t(s) = \lambda_{\sigma_t,j}(s)$$
$$s^*(t, t') = \sup\{s' \in [0, 1];\ |\lambda_t(s) - \lambda_{t'}(s)| \leqq \delta_1/4 \text{ pour tout } s \text{ dans } [0, s']\}$$

où σ_t est une courbe définie par $\sigma_t(s) = F(t, s)$. En utilisant une constante $\delta_4 > 0$ telle que

$$|F(t, s) - F(t', s)| < \delta_3 \quad \text{lorsque} \quad |t - t'| < \delta_4$$

on démontre que $s^*(t, t') = 1$ lorsque $|t - t'| < \delta_4$.

Supposons que $s^* = s^*(t, t') < 1$. On trouve alors une indice j_0 telle que $\tau_{j_0}(\tilde\omega, \tilde\omega) = \lambda_t(s^*)$ où $\tilde\omega = \sigma_t(s^*)$. Puisque $\tau_{j_0}(\sigma_t(s); \tilde\omega)$ et $\lambda_t(s)$ sont continues en s, on a de (4)

$$(10) \qquad \tau_{j_0}(\sigma_t(s); \tilde\omega) = \lambda_t(s) \quad \text{dans un voisinage de } s^*\,.$$

D'autre part on voit que $|\sigma_t(s) - \sigma_{t'}(s)| < \delta_3$ pour tout s et on a donc de (9) et de la définition de s^*

$$\begin{aligned} &|\tau_{j_0}(\sigma_{t'}(s^*); \tilde\omega) - \lambda_{t'}(s^*)| \\ &\leqq |\tau_{j_0}(\sigma_{t'}(s^*); \tilde\omega) - \tau_{j_0}(\tilde\omega; \tilde\omega)| + |\tau_{j_0}(\tilde\omega; \tilde\omega) - \lambda_{t'}(s^*)| \\ &\leqq \delta_1/8 + |\lambda_t(s^*) - \lambda_{t'}(s^*)| \leqq 3\delta_1/8\,. \end{aligned}$$

En vertu de (4) on a $\tau_{j_0}(\sigma_{t'}(s^*); \tilde\omega) = \lambda_{t'}(s^*)$ et donc

$$(11) \qquad \tau_{j_0}(\sigma_{t'}(s); \tilde\omega) = \lambda_{t'}(s) \quad \text{dans un voisinage de } s^*\,.$$

Grâce aux (9), (10), (11) on obtient dans un voisinage de s^*

$$\begin{aligned}&|\lambda_t(s) - \lambda_{t'}(s)|\\ &\quad \leqq |\tau_{j_0}(\sigma_t(s);\, \tilde{\omega}) - \tau_{j_0}(\tilde{\omega};\, \tilde{\omega})| + |\tau_{j_0}(\tilde{\omega};\, \tilde{\omega}) - \tau_{j_0}(\sigma_{t'}(s);\, \tilde{\omega})|\\ &\quad \leqq \delta_1/4\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire à la définition de $s^*(t, t')$. Il en résulte que $s^*(t, t') = 1$ lorsque $|t - t'| < \delta_4$. En utilisant de nouveau (4), on a $\lambda_t(1) = \lambda_{t'}(1)$ lorsque $|t - t'| < \delta_4$ et on obtient donc $\lambda_0(1) = \lambda_1(1)$.

On définit finalement un prolongement à S^{n-1} de $\tau_j(0, 0, \omega; \omega^0)$ par $\lambda_j(\omega; \omega^0) = \lambda_{\sigma,j}(1)$ où σ est une courbe continue arbitaire dans S^{n-1} avec $\sigma(0) = \omega^0$, $\sigma(1) = \omega$. Puisque λ_j est localement égale à l'une des $\tau_j(0, 0, \omega; \omega')$, elle est analytique dans S^{n-1}. c.q.f.d.

III. Estimation de type de Carleman. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème. En utilisant les fonctions de poids $\exp(2\rho(t-\delta)^2)$ à deux paramètres ρ, $\delta > 0$, on donne la soi-disant estimation de type de Carleman qui entraîne immédiatement l'unicité des solutions du probleme $(*)$ par une méthode usuelle (se référer Calderón [1]).

PROPOSITION 3.1. *Sous les hypothèses dans le théorème, il existe des constantes* δ_0, $C_0 > 0$ *telles que l'inégalité*

$$(1) \qquad C_0 \int_0^{\delta/2} \|Pu\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq (\rho/\delta^2) \sum_{j=0}^{m-2} \int_0^{\delta/2} |||u|||_j^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt$$

est vérifiée pour tout u *dans* $C_c^\infty(\{x; |x| < \delta\} \times]0, \delta/2[)$ *et pour tout* ρ, δ *avec* $0 < \delta < \delta_0$, $\rho\delta^2 > C_0$.

On a ici utilisé la norme usuelle $\|\cdot\|$ pour $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ et

$$|||u|||_j^2 = \sum_{|\alpha|+k=j} \|D_x^\alpha D_t^k u\|^2 .$$

On considère tout d'abord une décomposition de p_m. Les hypothèses sur p_m dans le théorème impliquent les existences des polynômes homogènes $a(x, t; \xi, \tau)$, $a_j(x, t; \xi, \tau)$ à coefficients de classe C^∞ dans un voisinage $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine tels que les conditions suivantes (2) $\sim$ (6) sont satisfaites:

(2) a et a_j $(j = 1, 2)$ sont elliptiques.

(3) a_3 est strictement hyperbolique.

(4) a_4 est un polynôme ayant simultanément les racines caractéristiques réelles et non réelles.

(5) $a\prod_{j=1}^{4} a_j$ est un polynôme à caractéristiques simples.

(6) p_m coïncide avec l'un des polynômes a^3b où

$$b = \prod_{j=1}^{4} a_j^{\varepsilon_j},\ \varepsilon_1 = 2, 0,\ \varepsilon_j = 1, 0 \qquad (j = 2, 3, 4)\ .$$

REMARQUE. Grâce à l'hypothèse que les coefficients de p_m sont à valeurs réelles les parties imaginaires des racines caractéristiques de a_4 ne s'annule jamais ou bien s'annule identiquement.

On désigne le degré de a (resp. a_j, b) par M (resp. M_j, N) et on a $m = 3M + N$. Pour facilter des calculs on traite un prolongement de l'opérateur $A = A(x, t; D_x, D_t)$ à symbole $a(x, t; \xi, \tau)$ à $\boldsymbol{R}^n \times [0, T]$ pour une certaine $T > 0$, que l'on désigne par même A, defini par $A = A(\chi(x)x, t; D_x, D_t)$ où χ est une fonction convenable dans $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ telle que $\chi(x) = 1$ (resp. 0) lorsque $|x| < \varepsilon$ (resp. $|x| > 2\varepsilon$) pour une certaine $\varepsilon > 0$. Pour l'opérateur B à symbole $b(x, t; \xi, \tau)$, A_j à symbole $a_j(x, t; \xi, \tau)$ et le P, on considère leurs prolongements définis par même façon que A. En outre on suppose sans perte de généralité que $a(x, t; 0, 1) = a_j(x, t; 0, 1) = 1$.

On prépare le lemme suivant bien connu concernant l'estimation de type de Carleman pour les opérateurs à caractéristiques simples (se référer Calderón [1] et Kumano-go [3]).

LEMME 3.2. *Il existe des constantes* $\delta_1, C_1 > 0$ *telles que les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout* u *dans* $C_c^\infty(]0, \delta/2[; H^\infty)$ *et pour tout* ρ, δ *avec* $0 < \delta < \delta_1$, $\rho\delta^2 > C_1$:

(7)
$$C_1 \int_0^{\delta/2} \|Au\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq (1/\rho\delta^2) \int_0^{\delta/2} |||u|||_M^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\ ,$$

(8)
$$C_1 \int_0^{\delta/2} \|A_3u\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq (\rho\delta)^2 \int_0^{\delta/2} |||u|||_{M_3-1}^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\ ,$$

(9)
$$C_1 \int_0^{\delta/2} \|A_4u\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq \rho \int_0^{\delta/2} \|u\|_{M_4-1}^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\ .$$

Ici on a utilisé l'espace H^∞ defini par $H^\infty = \bigcap_s H^s(\boldsymbol{R}^n)$ où $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ est l'espace de Sobolev d'ordre s dans $\boldsymbol{R}^n$. Comme il est facile de voir que

$$A^2B = \begin{cases} (AA_1)(AA_1A_2^{\varepsilon_2}A_3^{\varepsilon_3}A_4^{\varepsilon_4}) + \text{terme d'ordre inférieur, si } \varepsilon_1 = 2 \\ A(AA_2^{\varepsilon_2}A_3^{\varepsilon_3}A_4^{\varepsilon_4}) + \text{terme d'ordre inférieur, si } \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

on obtient la corollaire suivante du lemme 3.2.

COROLLAIRE 3.3. *Il existe des constantes* δ_2, $C_2 > 0$ *telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout* u *dans* $C_c^\infty(]0, \delta/2[; H^\infty]$ *et pour tout* ρ, δ *avec* $0 < \delta < \delta_2$, $\rho\delta^2 > C_2$:

$$(10) \qquad C_2 \int_0^{\delta/2} \| A^2Bu \|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq \delta^{-2} \int_0^{\delta/2} ||| u |||^2_{2M+N-1} \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\ .$$

Considérons l'ensemble

$$\{\tau^{N-1-j}a(x, t; \xi, \tau)^3, \tau^{3M-1-k}b(x, t; \xi, \tau); 0 \leqq j \leqq N-1, 0 \leqq k \leqq 3M-1\}$$

de m-polynômes en τ de degré $\leqq (m-1)$. Comme cet ensemble est linéairement indépendant pour chaque point fixé (x, t, ξ) dans $R^n \times [0, T] \times R^n - 0$, le symbole $c(x, t; \xi, \tau)$ de la partie $C(x, t; D_x, D_t)$ d'ordre $(m-1)$ de $P - A^3B$ peut être écrit sous la forme suivante:

$$(11) \qquad \begin{cases} c(x, t; \xi, \tau) = \psi(x, t; \xi, \tau)a(x, t; \xi, \tau)^3 + \phi(x, t; \xi, \tau)b(x, t; \xi, \tau) \\ \psi(x, t; \xi, \tau) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(x, t, \xi)\tau^{N-1-j}\ , \\ \phi(x, t; \xi, \tau) = \sum_{k=0}^{3M-1} \phi_k(x, t, \xi)\tau^{3M-1-k} \end{cases}$$

où $\psi_j(x, t, \xi)$ (resp. $\phi_k(x, t, \xi)$) est lipschitzienne et homogène en ξ de degré j (resp. k).

Ensuite on traite des opérateurs $A(Y; D_x, D_t)^3 + \phi(Y; D_x, D_t)$ à symbole $a(Y; \xi, \tau)^3 + \phi(Y; \xi, \tau)$ où $Y = (x_o, t_o)$ est un point fixé dans $R^n \times [0, T]$.

Rappelons que A est un opérateur paru dans la décomposition (6) de p_m et que ϕ est défini par (11). On a alors

LEMME 3.4. *Il existe des constantes* δ_3, $C_3 > 0$ *telles que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout* Y *dans* $R^n \times [0, T]$, *pour tout* u *dans* $C_c^\infty(]0, \delta/2[; H^\infty)$ *et pour tout* ρ, δ *avec* $0 < \delta < \delta_3$, $\rho\delta^2 > C_3$:

$$(12) \qquad C_3 \int_0^{\delta/2} \| \{A(Y; D_x, D_t)^3 + \phi(Y; D_x, D_t)\}u \|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq (1/\rho\delta^2) \int_0^{\delta/2} ||| A(Y; D_x, D_t)^2 u |||^2_M \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\ .$$

PREUVE DU LEMME 3.4. Soit θ une fonction dans $C^\infty(R^1)$ à support contenu dans $\{t; |t| < 1\}$ telle que

$$\sum_{g=-\infty}^{\infty} \theta(t-g) = 1 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{R}^1$$

où g parcourt l'ensemble des nombres entiers et posons

$$u_g(x, t) = u(x, t)\theta(t\rho^{1/2} - g),\ t_g = g/\rho^{1/2}\,.$$

Ecrivons $a(\xi, \tau) = a(Y; \xi, \tau)$, $\phi(\xi, \tau) = \phi(Y; \xi, \tau)$, en omettant Y. Puisque a est un polynôme elliptique à caractéristiques simples, on a pour tout (ξ, η_1, η_2) dans $\boldsymbol{R}^{n+2}$

$$\begin{aligned} &|a(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)|^2 + |\eta_2|^2|(\partial a/\partial\tau)(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)|^2 \\ &\quad \geqq C\{|\xi| + |\eta_1| + |\eta_2|\}^{2M} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} &|a(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)^3 + \phi(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)|^2 \\ &\qquad + |\eta_2|^2|(\partial/\partial\tau)(a^3 + \phi)(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)|^2 \\ &\qquad + \{|\xi| + |\eta_1| + |\eta_2|\}^{2(3M-1)} \\ &\quad \geqq C'\{|\xi| + |\eta_1| + |\eta_2|\}^{2M}|a(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)^2|^2 \end{aligned}$$

avec des constantes $C, C' > 0$. Par multipliant $|\tilde{v}_g(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)|^2$ à cette inégalité ci-dessus, où $\tilde{v}_g(\xi, \eta_1 + \sqrt{-1}\eta_2)$ est l'image de $u_g(x, t)\cdot\exp(\eta_2 t)$ par la transformation de Fourier, on a de la formule de Parseval

$$\begin{aligned} (13) \qquad &\int_0^{\delta/2}\{|||u_g|||_{3M-1}^2 + ||\{A(D_x, D_t)^3 + \phi(D_x, D_t)\}u_g||^2 \\ &\qquad + |\eta_2|^2||\{3A^{(1)}(D_x, D_t)A(D_x, D_t)^2 + \phi^{(1)}(D_x, D_t)\}u_g||^2\}\exp(2\eta_2 t)dt \\ &\quad \geqq C\int_0^{\delta/2}|||A(D_x, D_t)^2 u_g|||_M^2 \exp(2\eta_2 t)\,dt \end{aligned}$$

avec d'autre constante $C > 0$. Ici on a désigné par $A^{(1)}$, $\phi^{(1)}$ l'opérateur pseudodifférentiel à symbole $(\partial a/\partial\tau)(\xi, \tau)$, $(\partial\phi/\partial\tau)(\xi, \tau)$ respectivement. Par remplacant η_2 par $2\rho(t_g - \delta)$ et multipliant $\exp(2\rho\{(t_g - \delta)^2 - 2(t_g - \delta)t_g\})$ à (13), on obtient

$$\begin{aligned} (14) \qquad &\int_0^{\delta/2}\{|||u_g|||_{3M-1}^2 + ||\{A(D_x, D_t)^3 + \phi(D_x, D_t)\}u_g||^2 \\ &\qquad + (\rho\delta)^2||\{3A^{(1)}(D_x, D_t)A(D_x, D_t)^2 + \phi^{(1)}(D_x, D_t)\}u_g||^2\} \\ &\qquad \times \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \\ &\quad \geqq C\int_0^{\delta/2}|||A(D_x, D_t)^2 u_g|||_M^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \end{aligned}$$

avec d'autre constante $C > 0$. Ici on a utilisé que dans le support de u_g, $|t - t_g|^2 < 1/\rho$ et que $|t_g - \delta|^2 < \delta^2$ lorsque $\rho\delta^2 > 4$.

D'autre part il est bien connu que l'identité suivante est vérifiée (se référer Hörmander [2] et Trèves [5]): Pour tout polynôme q d'une variable τ, pour tout ω dans $C_c^\infty(\boldsymbol{R}^1)$, et pour tout $\rho > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(D_t)\omega|^2 \exp(2\rho t^2)dt$$
$$= \sum_k (4^k\rho^k/k!) \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{q}^{(k)}(D_t - 4\rho t\sqrt{-1})\omega|^2 \exp(2\rho t^2)dt$$

où $\bar{q}$ est l'adjoint de q et $\bar{q}^{(k)} = \partial^k\bar{q}/\partial\tau^k$. Cette identité entraîne que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(D_t)\omega|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq C\rho \int_{-\infty}^{\infty} |q^{(1)}(D_t)\omega|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \tag{15}$$

avec une constante $C > 0$, qui ne dépend que le degré de q. On a donc de (7) et (14)

$$\int_0^{\delta/2} \|\{A(D_x, D_t)^3 + \phi(D_x, D_t)\}u_g\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \geqq \int_0^{\delta/2} \frac{C'}{\rho\delta^2} |||A(D_x, D_t)^2 u_g|||_M^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt \tag{16}$$

avec une constante $C' > 0$.

Pour démontrer (12), on groupe (16) par rapport à g. On a de l'inégalité de Cauchy

$$2\sum_g |||A(D_x, D_t)^2 u_g|||_M^2 \geqq |||A(D_x, D_t)^2 u|||_M^2$$

et de la formule de Leibniz.

$$\{A(D_x, D_t)^3 + \phi(D_x, D_t)\}u_g = \sum_k (\rho^{k/2}/k!)\theta^{(k)}(t\rho^{1/2} - g)p^{(k)}(D_x, D_t)u$$

où $\theta^{(k)} = D_t^k\theta$, $p^{(k)}(\xi, \tau) = (\partial/\partial\tau)^k\{a(\xi, \tau)^3 + \phi(\xi, \tau)\}$. Grâce à (15) on a

$$\rho^k \int_0^{\delta/2} \|p^{(k)}(D_x, D_t)u\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt$$
$$\leqq \mathrm{Const} \int_0^{\delta/2} \|p(D_x, D_t)u\|^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt$$

et on obtient donc (12). c.q.f.d.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1. Rappelons que $P - A^3B - C$ est d'ordre $\leqq (m-2)$ et qu'il suffit de démontrer l'inégalité (1) pour $A^3B + C$ au lieu de P. Soit θ une fonction dans $C^\infty(\boldsymbol{R}^{n+1})$ à support contenu dans $\{(x, t);\ \max|x_k| < 1 \text{ et } |t| < 1\}$ telle que

$$\sum_g \theta((x, t) - g) = 1 \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{R}^{n+1}$$

où $g = (g_1, \cdots, g_n, g_{n+1})$ parcourt l'ensemble des points aux coordonnées entiers. Posons

$$u_g(x, t) = u(x, t)\theta(\omega(\rho, \delta)^{1/2}(x, t) - g)\,, \qquad Y_g = g/\omega(\rho, \delta)^{1/2}$$

où $\omega(\rho, \delta) = \rho\delta^{3/2}$. On a alors

LEMME 3.5. *Il existe des constantes δ_4, $C_4 > 0$ telles que l'inégalité*

$$\text{(17)} \qquad C_4\int_0^{\delta/2}||\{A^3B + C\}u_g||^2 \exp(2\rho(t - \delta)^2)dt$$
$$\geqq (1/\rho\delta^2)\int_0^{\delta/2}|||A^2Bu_g|||_M^2 \exp(2\rho(t - \delta)^2)dt$$

est vérifiée pour tout g, pour tout u dans $C_c^\infty(]0, \delta/2[; H^\infty)$ et pour tout ρ, δ avec $0 < \delta < \delta_4$, $\rho\delta^2 > C_4$.

PREUVE DU LEMME 3.5. Posons

$$P_gu = \{A(Y_g; D_x, D_t)^3 + \phi(Y_g; D_x, D_t)\}\{B(x, t; D_x, D_t) + \psi(Y_g; D_x, D_t)\}u$$
$$v_g = B(x, t; D_x, D_t)u_g$$
$$I(u_g) = \int_0^{\delta/2}||P_gu_g||^2 \exp(2\rho(t - \delta)^2)dt$$

où ϕ et ψ sont définies par (11). On a alors du Lemme 3.4.

$$\text{Const}\; I(u_g)$$
$$\geqq (1/\rho\delta^2)\int_0^{\delta/2}|||A(Y_g; D_x, D_t)^2\{B(x, t; D_x, D_t)$$
$$+ \psi(Y_g; D_x, D_t)\}u_g|||_M^2 \exp(2\rho(t + \delta)^2)dt$$

Puisque ψ est d'ordre $\leqq (N - 1)$, on a

$$|||A(Y_g; D_x, D_t)^2\psi(Y_g; D_x, D_t)u_g|||_M^2 \leqq \text{Const}\; |||u_g|||_{m-1}^2$$

et on a donc

$$\text{(18)} \quad \text{Const}\left\{I(u_g) + (1/\rho\delta^2)\int_0^{\delta/2}|||u_g|||_{m-1}^2 \exp(2\rho(t - \delta)^2)dt\right\}$$
$$\geqq (1/\rho\delta^2)\int_0^{\delta/2}|||A(Y_g; D_x, D_t)^2B(x, t; D_x, D_t)u_g|||_M^2 \exp(2\rho(t-\delta)^2)dt\,.$$

Pour estimer $\{A(Y_g; D_x, D_t)^2 - A(x, t; D_x, D_t)^2\}v_g$, on prépare le lemme suivant.

LEMME 3.6. *Pour deux opérateurs Q, R on a*

$$\text{(19)} \qquad Q^2 - R^2 = -(Q - R)^2 + 2(Q - R)Q - [Q, R]\,,$$

$$\text{(20)} \qquad Q^3 - R^3 = (Q - R)^3 - 3(Q - R)^2Q + 3(Q - R)Q^2$$
$$- 3[Q, R]Q + 3(Q - R)[Q, R] - [Q, [Q, R]] + [[Q, R], Q - R]\,.$$

PREUVE DU LEMME 3.6. Il est facile de voir (19) et

$$Q^3 - R^3 = Q^2(Q - R) + (Q^2 - R^2)(R - Q) + (Q^2 - R^2)Q .$$

En utilisant $[Q^2, R] = 2[Q, R]Q + [Q, [Q, R]]$, on a

$$Q^2(Q - R) = (Q - R)Q^2 - 2[Q, R]Q - [Q, [Q, R]] .$$

D'autre part on obtient grâce à (19)

$$\begin{aligned}(Q^2 - R^2)(R - Q) &= (Q - R)^3 - 2(Q - R)Q(Q - R) + [Q, R](Q - R)\\ &= (Q - R)^3 - 2(Q - R)^2Q + 3(Q - R)[Q, R]\\ &\quad + [[Q, R], Q - R] .\end{aligned}$$

(19) et trois identités ci-dessus impliquent (20). c.q.f.d.

FIN DE LA PREUVE DU LEMME 3.5. Puisque dans le support de u_g et donc de $v_g = B(x, t; D_x, D_t)u_g$

$$|(x, t) - Y_g| < (n + 1)/\omega(\rho, \delta)^{1/2}$$

et les coefficients de A sont de classe C^∞, en vertu de (19) on a pour $|\alpha| + k = M$

$$\begin{aligned}&\|\{A(Y_g; D_x, D_t)^2 - A(x, t; D_x, D_t)^2\}D_x^\alpha D_t^k v_g\|^2\\ &\leqq \text{Const}\Big\{\omega(\rho, \delta)^{-2}|||v_g|||_{3M}^2 + \omega(\rho, \delta)^{-1}|||A(Y_g; D_x, D_t)v_g|||_{2M}^2\\ &\quad + \sum_{j=0}^{3M-1}|||v_g|||_j^2\Big\} .\end{aligned}$$

Ces inégalités impliquent grâce aux (10) et (18)

$$\begin{aligned}(21)\qquad &\text{Const } I(u_g)\\ &\geqq (1/\rho\delta^2)\int_0^{\delta/2}|||A(x, t; D_x, D_t)^2B(x, t; D_x, D_t)u_g|||_M^2\\ &\qquad \times \exp(2\rho(t - \delta)^2)dt .\end{aligned}$$

D'autre part il est aisé de voir grâce à (11) que

$$\begin{aligned}P_g &= A(x, t; D_x, D_t)^3B(x, t; D_x, D_t) + C(x, t; D_x, D_t)\\ &\quad + \{A(Y_g; D_x, D_t)^3 - A(x, t; D_x, D_t)^3\}B(x, t; D_x, D_t)\\ &\quad + \{C(Y_g; D_x, D_t) - C(x, t; D_x, D_t)\}\\ &\quad + \phi(Y_g; D_x, D_t)\{B(x, t; D_x, D_t) - B(Y_g; D_x, D_t)\}\\ &\quad + \phi(Y_g; D_x, D_t)\psi(Y_g; D_x, D_t) .\end{aligned}$$

En rappelant que les coefficients de B (resp. C) sont de classe C^∞ (resp. lipschitziens) et que ϕ (resp. ψ) est d'ordre $\leqq 3M - 1$ (resp. $N - 1$), on a

$$\|\{C(Y_g; D_x, D_t) - C(x, t; D_x, D_t)\}u_g\|^2 \leqq \text{Const } \omega(\rho, \delta)^{-1}|||u_g|||_{m-1}^2 ,$$

$$||\phi(Y_g;\, D_x\, D_t)\{B(Y_g;\, D_x,\, D_t) - B(x,\, t;\, D_x,\, D_t)\}u_g||^2$$
$$\leqq \text{Const}\left\{\omega(\rho,\,\delta)^{-1}|||u_g|||^2_{m-1} + \sum_{j=0}^{m-2}|||u_g|||^2_j\right\},$$
$$||\phi(Y_g;\, D_x,\, D_t)\psi(Y_g;\, D_x,\, D_t)u_g||^2 \leqq \text{Const}\;|||u_g|||^2_{m-2}\,.$$

Pour terminer la preuve, il reste à estimer le terme $\{A(Y_g;\, D_x,\, D_t)^3 - A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^3\}v_g$. En utilisant (20), on obtient

$$||\{A(x,\, t;\, D_x\, D_t)^3 - A(Y_g;\, D_x,\, D_t)^3\}v_g||^2$$
$$\leqq \text{Const}\left\{\omega(\rho,\,\delta)^{-3}|||v_g|||^2_{3M} + \omega(\rho,\,\delta)^{-2}|||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)v_g|||^2_{2M}\right.$$
$$+ \omega(\rho,\,\delta)^{-1}(|||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^2v_g|||^2_M + |||v_g|||^2_{3M-1})$$
$$\left. + |||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)v_g|||^2_{2M-1} + \sum_{j=0}^{3M-2}|||v_g|||^2_j\right\}$$

et on obtient finalement (17). c.q.f.d.

FIN DE LA PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1. Pour démontrer (1), on groupe (17) par rapport à g. On a de l'inégalité de Cauchy

$$2^{n+1}\sum_g |||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^2B(x,\, t;\, D_x,\, D_t)u_g|||^2_M$$
$$\geqq |||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^2B(x,\, t;\, D_x,\, D_t)u|||^2_M$$

et de la formule de Leibniz

$$\tilde{P}u_g = \sum_\nu (\omega(\rho,\,\delta)^{|\nu|/2}/\nu!)\theta^{(\nu)}(\omega(\rho,\,\delta)^{1/2}(x,\, t) - g)\tilde{P}^{(\nu)}u$$

où $\tilde{P} = A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^3B(x,\, t;\, D_x,\, D_t) + C(x,\, t;\, D_x,\, D_t)$, $\theta^{(\nu)} = D^\nu_{(x,t)}\theta$. Pour estimer $\tilde{P}^{(\nu)}u$ avec $|\nu| = 1, 2$ on les écrit sous les formes suivantes:

$$\tilde{P}^{(\nu)}u = \begin{cases} Q_1A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^2u + R_1u & \text{si} \quad |\nu| = 1 \\ Q_2A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)u + R_2u & \text{si} \quad |\nu| = 2 \end{cases}$$

où Q_1 (resp. Q_2, R_1, R_2) est un opérateur différentiel d'ordre $\leqq M + N - 1$ (resp. $2M + N - 2$, $m - 2$, $m - 3$). On a alors

$$||\tilde{P}^{(\nu)}u||^2$$
$$\leqq \begin{cases} \text{Const}\left\{|||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)^2u|||^2_{M+N-1} + \sum_{j=0}^{m-2}|||u|||^2_j\right\} & \text{si} \quad |\nu| = 1 \\ \text{Const}\left\{|||A(x,\, t;\, D_x,\, D_t)u|||^2_{2M+N-2} + \sum_{j=0}^{m-3}|||u|||^2_j\right\} & \text{si} \quad |\nu| = 2 \\ \text{Const}\sum_{j=0}^{m-|\nu|}|||u|||^2_j \quad \text{si} \quad |\nu| \geqq 3 \end{cases}$$

ce qui entraînent l'inégalité (1). c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. P. CALDERÓN, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer, J. Math., 80 (1958), 16-36.

[2] L. HÖRMANDER, On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., 7 (1959), 177-190.

[3] H. KUMANO-GO, Pseudo differential operators and the uniqueness of the Cauchy problem, Comm. Pure. Appl. Math., 22 (1969), 73-129.

[4] S. MATSUURA, On non-strict hyperbolicity, Proceeding of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo, April 1969, Univ. of Tokyo Press, 171-176.

[5] T. TRÈVES, Relations de domination entre opérateurs différentiels, Acta Math., 101 (1959), 1-139.

[6] K. WATANABE, On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptic equations with triple characteristics, Tôhoku Math. J., 23 (1971), 473-490.

INSTITUTE DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU
SENDAI, 980 JAPAN