Tôhoku Math. Journ.
36 (1984), 41-48.

UNE REMARQUE SUR L'APPROXIMATION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE DU TYPE NONCAUSAL PAR UNE SUITE DES INTEGRALES DE STIELTJES

Dedicated to Professor Tamotsu Tsuchikura on his sixtieth birthday

SHIGEYOSHI OGAWA

(Received January 19, 1983)

1. Soit $B(x, w)$ le processus du mouvement brownien réel défini sur un espace probabilisé $(W, \mathscr{F}, P)$ et soit $f(x, w)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ une fonction aléatoire par laquelle on entendra dans cette Note une fonction réelle, mesurable en (x, w) par rapport au tribu $\mathscr{B}_{[0,1]} \times \mathscr{F}$ et satisfaisante à la condition $P\left[\int_0^1 f^2(x, w)dx < +\infty\right] = 1$. On se donne ensuite un système des fonctions orthonormales $\{\varphi_n\}$ dans l'espace hilbertien réel $L^2(0, 1)$ et on considère la série aléatoire $\sum_n (f, \varphi_n)(\varphi_n, \dot{B})$ où $(f, \varphi_n) = \int_0^1 f(x, w)\varphi_n(x)dx$, $(\varphi_n, \dot{B}) = \int_0^1 \varphi_n(x)dB$. La fonction $f(x, w)$ est dite integrable (ou bien, φ-integrable) par rapport à la base $\{\varphi_n\}$ si la série converge en probabilité et dans ce cas, la somme, notée comme $\int_0^1 f(x, w)d^*B$, est appelée l'integrale stochastique du type noncausal de $f(x, w)$.

La nouvelle integrale, ainsi introduite par l'auteur dans la recherche sur le produit direct du bruit blanc ([1]), possède les deux propriétés bien remarquables: d'une part, elle est libre de la restriction de causalité, c'est-à-dire qu'elle peut s'appliquer même à des fonctions qui ne sont pas adaptées à la famille des tribus $\mathscr{F}_x = \sigma(B(y, w); y \leqq x)$ $(x \geqq 0)$ et d'autre part, elle contient l'integrale symétrique comme un cas particulier. Notamment, l'auteur a démontré, dans l'article précédant [2], que si $f(x, w)$ est une quasi-martingale continue, adaptée à la famille $\{\mathscr{F}_x\}$ bien entendu, alors la fonction est integrable par rapport au système des fonctions trigonométriques et l'integrale $\int f(x, w)d^*B$ coïncide avec l'integrale symétrique $\int f(x, w)dB$.

On s'interesse à eclaircir la condition d'integrabilité d'une fonction donnée, qui dépend évidemment du choix de la base. Pour le moment, on est très loin de pouvoir donner une solution générale à ce problème. Considérons, par exemple, une fonction $f(x, w)$ qui est integrable par rapport à des deux bases, disons $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$. Même dans une telle situation particulière, il n'est pas facile de savoir si la valeure de l'integrale $\int fd^*B$ par rapport à une base coïncide avec celle de l'autre. Dans la présente Note, on va montrer un résultat concernant ce sujet. Plus précisément, on a à démontrer l'énoncé suivant:

THÉORÈME. *La fonction aléatoire, integrable par rapport au système des fonctions trigonométriques au sens de $L^1(W, P)$, est aussi integrable par rapport au système orthonormal de Haar et les deux integrales coïncident l'une avec l'autre.*

(Remarque) Dans cette note, on entend par l'integrabilité de $f(x, w)$ par rapport au système orthonomal de Haar, la propriété que la série, $(f, H_{0,0})(H_{0,0}, \dot{B}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2(n-1)-1} (f, H_{n,i})(H_{n,i}, \dot{B})$ converge en probabilité.

Pour la démonstration de cet énonce, on fait intervenir une suite des integrales de Stieltjes; $\mathscr{I}_n(f) = \int_0^1 f(x, w)dB^{(n)}$, où $\{B^{(n)}\}$ sont les processus approximatifs linéaires du $B(x, w)$ associés à la famille des partitions dyadiques de l'intervalle $[0, 1]$ et on cherche la relation entre la $\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n(f)$ et $\int_0^1 f(x, w)d^*B$. L'avantage de ce procédé est que l'on peut obtenir, en même temps, quelques résultats sur le problème d'approximation de l'integrale stochastique du type noncausal.

2. Soit $\{\psi_{n,i}(x): i = 0, 1, \cdots, 2^{n-1} - 1,\ n \geqq 0\}$ le systeme orthonormal de Haar: $\psi_{0,0}(x) = 1$, $\psi_{n,i}(x) = 2^{(n-1)/2}[1_{[2\cdot 2^{-n}i, 2^{-n}(2i+1))}(x) - 1_{[2^{-n}(2i+1), 2^{-n}(2i+2))}(x)]$ $(n \geqq 1)$. On désigne par $\{B^{(n)}(x, w)\}_{n\geqq 1}$ la suite des processus définis par; $B^{(n)}(x, w) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (\chi_{n,i}, \dot{B})\tilde{\chi}_{n,i}(x)$ où $\chi_{n,i}(x) = 2^{n/2}\cdot 1_{[2^{-n}i, 2^{-n}(i+1))}(x)$ et $\tilde{\chi}_{n,i}(x) = \int_0^x \chi_{n,i}(y)dy$.

Etant donnée une fonction aléatoire $f(x, w)$, on considère la suite des integrales de Stieltjes: $\mathscr{I}_n(f) = \int_0^1 f(x, w)dB^{(n)}$ $(n \geqq 1)$. On a à chercher la convergence en probabilité de la suite et la relation entre la $\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n(f)$ et l'integrale $\int f(x, w)d^*B$.

Voici le premier résultat:

PROPOSITION 1. *La fonction $f(x, w)$ est intgrable par rapport à la base $\{\psi_{n,i}\}$ si et seulement se la $\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n(f)$ existe en probabilité et dans ce cas on a l'égalité, $\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n(f) = \int f(x, w)d^*B$.*

PREUVE. Puisque les fonctions $\{\psi_{m,i}\}$, $\{\chi_{n,j}\}$ satisfont à la relation $(\psi_{m,i}, \chi_{n,j}) = 0$ pour tous i et j lorsque $m > n$, chaque fonction $\chi_{n,j}$ peut être représentée comme une combinaison linéaire de nombre fini des $\psi_{m,i}$ $(m \leqq n)$. Notamment,

$$\chi_{n,j}(x) = \sum_{(k,i)}^{(n,0)}{}' C(n, j; k, i)\psi_{k,i}(x) ,$$

où on entend par le symbol $\sum'^{(n,0)}_{(k,i)} a(k, i)$ la somme, $a(0, 0)+\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{2^{(k-1)}-1} a(k, i)$ et par $C(n, j; k, i)$ les quantités $(\chi_{n,j}, \psi_{k,i})$, qui satisfont à l'égalité suivante:

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} C(n, j; k, i)C(n, j; g, h) = \delta_{k,g}\delta_{i,h} \quad (k, g \leqq n) .$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_n(f) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} (f, \chi_{n,j})(\chi_{n,j}, \dot{B}) \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \left\{\sum_{(k,i)}^{(n,0)}{}' (f, \psi_{k,i})C(n, j; k, i)\right\}\left\{\sum_{(g,h)}^{(n,0)}{}' (\psi_{g,h}, \dot{B})C(n, j; g, h)\right\} \\ &= \sum_{(k,i)}^{(n,0)}{}' \sum_{(g,h)}^{(n,0)}{}' (f, \psi_{k,i})(\psi_{g,h}, \dot{B}) \sum_{j=0}^{2^n-1} C(n, j; k, i)C(n, j; g, h) \\ &= \sum_{(k,i)}^{(n,0)}{}' (f, \psi_{k,i})(\psi_{k,i}, \dot{B}) , \quad \text{ceci démontre l'énoncé .} \qquad \text{C.Q.F.D.}\end{aligned}$$

Passons au cas de système des fonctions trigonométriques, $\{1_{[0,1]}(x), \varphi_{1,n}(x), \varphi_{2,n}(x); n \geqq 1\}$, où $\varphi_{1,n}(x) = \sqrt{2}\cos 2\pi nx$, $\varphi_{2,n}(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi nx$. Pour la convenience des notations, on désignera comme $\varphi_{1,0}(x) = 1_{[0,1]}(x)$, $\varphi_{2,0}(x) = 0$. Alors ce système possède un caractère bien remarquable comme on le voit dans l'énoncé suivant, qui est facile à vérifier et donc la démonstration est surprimée.

LEMME 1. *Les fonctions $\{\varphi_{\alpha,n}; \alpha = 1, 2, n \geqq 0\}$ satisfont à l'égalité*

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (\chi_{n,i}, \varphi_{\alpha,m})(\chi_{n,i}, \varphi_{\beta,h}) = \begin{cases}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{m,h}\left[\dfrac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi}\right]^2 , & si \quad m \geqq 1 \\ 1 , & si \quad n = m = h = 0 , \quad \alpha = \beta = 1 \\ 0 , & autrement\end{cases}$$

où $\alpha, \beta = 1, 2$.

Grâce à ce Lemme, on obtient le résultat suivant, qui avec la Proposition 1 implique la conclusion du Théorème.

PROPOSITION 2. *Si la fonction $f(x, w)$ est integrable au sens de $L^1(W, P)$ par rapport à la base $\{\varphi_{\alpha,n}: \alpha = 1, 2, n \geqq 0\}$. Alors, la suite $\{\mathscr{I}_n(f)\}$ converge en probabilité et on a l'égalité*; $\lim_{n\to\infty} \mathscr{I}_n(f) = \int_0^1 f(x, w)d^*B$.

PREUVE. On décompose la quantité $\int_0^1 f(x, w)dB^{(n)}$ en trois parties comme suit;

$$\int_0^1 f(x, w)dB^{(n)} = \sum_{i=0}^{2^n-1}(f, \chi_{n,i})(\chi_{n,i}, \dot{B})$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \chi_{n,i})\right\}\left\{\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\beta,h})(\varphi_{\beta,h}, \dot{B})\right\}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 ,$$

où

$$I_1 = \sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=0}^{n2^{2n}}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \chi_{n,i})\right\}\left\{\sum_{h=0}^{n2^{2n}}\sum_{\beta=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\beta,h})(\varphi_{\beta,h}, \dot{B})\right\}$$
$$I_2 = \sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=0}^{n2^{2n}}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \chi_{n,i})\right\}\left\{\sum_{h=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\beta,h})(\varphi_{\beta,h}, \dot{B})\right\}$$
$$I_3 = \sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \chi_{n,i})\right\}(\chi_{n,i}, \dot{B}) .$$

Quant aux termes I_2, I_3, il est facile de voir que $\lim_{n\to\infty} I_2 = 0$, $\lim_{n\to\infty} I_3 = 0$ en probabilité. En effet, pour terme I_2, on a d'après le Lemme l'inégalité suivante:

$$|I_2| \leqq \left[\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=0}^{n2^{2n}}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \chi_{n,i})\right\}^2\right]^{1/2}$$
$$\times\left[\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\beta=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\beta,m})(\varphi_{\beta,m}, \dot{B})\right\}^2\right]^{1/2}$$
$$\leqq \left[\sum_{m=0}^{n2^{2n}}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})^2\right\}\left(\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$\times\left[\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})\right\}^2\right]^{1/2}$$
$$\leqq \left[\int_0^1 f^2(x, w)\,dx\right]^{1/2}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})\right\}^2\right]^{1/2} .$$

D'autre part, on a

$$E\sum_{i=0}^{2^n-1}\left\{\sum_{m=2n^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})\right\}^2$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1}\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{2}(\chi_{n,i}, \varphi_{\alpha,m})^2 = 2\sum_{m=n2^{2n}+1}^{\infty}\left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi}\right]^2$$
$$\leqq \frac{C}{n} \quad (C\text{: constant}) ,$$

d'où on confirme que $\lim_{n\to\infty} I_2 = 0$ en probabilité. De la même manière, on peut vérifier que $\lim_{n\to\infty} I_3 = 0$ en probabilité. Afin de calculer le terme I_1, on le décompose encore en trois parties comme suit;

$$I_1 = \sum_{m=0}^{n2^{2n}}\left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi}\right]^2\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B}) = I_4 + I_5 + I_6$$

(ici, on entend $(\sin 2^{-n}m\pi)/2^{-n}m\pi = 1$ pour $m = 0$), où

$$I_4 = \sum_{m=0}^{n2^{2n}} \sum_{\alpha=1}^{2} (f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B}) ,$$

$$I_5 = \sum_{m=0}^{2[n/2]} \left\{ \left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right]^2 - 1 \right\} \sum_{\alpha=1}^{2} (f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B}) \quad \text{et}$$

$$I_6 = \sum_{m=2[n/2]+1}^{n2^{2n}} \left\{ \left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right]^2 - 1 \right\} \sum_{\alpha=1}^{2} (f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B}) .$$

Si l'on pose $S(k) = \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{2} (f, \varphi_{\alpha,m})(\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})$, alors le terme I_6 s'écrit dans la forme comme suit:

$$\begin{aligned}
I_6 = & \sum_{m=2[n/2]+1}^{n2^{2n}} [S(m) - S(m+1)] \left\{ \left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right]^2 - 1 \right\} \\
= & \sum_{m=2[n/2]+1}^{n2^{2n}} S(m) \left\{ \left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right]^2 - \left[\frac{\sin 2^{-n}(m-1)\pi}{2^{-n}(m-1)\pi} \right]^2 \right\} + S(n2^{2n}+1) \\
& + \left\{ \left[\frac{\sin 2^{[n/2]-n}\pi}{2^{[n/2]-n}\pi} \right]^2 - 1 \right\} S(2^{[n/2]}+1) .
\end{aligned}$$

Soit a_k $(0 = a_0 < a_1 < a_2 \cdots)$ le point où la fonction $[(\sin x\pi)/x\pi]^2$ prend sa k-ième valeure maximum. Alors, la fonction $[(\sin x\pi)/x\pi]^2$ etant monotone dans les intervalles $[k, a_k)$, $[a_k, (k+1))$ $(k = 1, 2, \cdots)$, on obtient l'inégalite,

$$\begin{aligned}
E|I_6| \leqq & E|S(2^{[n/2]}+1)| + E|S(n2^{2n}+1)| \\
& + \max_{2[n/2] < m \leqq n2^{2n}} E|S(m)| \sum_{m=2[n/2]}^{n2^{2n}} \left| \left[\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right]^2 - \left[\frac{\sin 2^{-n}(m-1)\pi}{2^{-n}(m-1)\pi} \right]^2 \right| \\
\leqq & E|S(2^{[n/2]}+1)| + E|S(n2^{2n}+1)| + \max_{2[n/2] < m \leqq n2^{2n}} 2E|S(m)| \sum_{k=1}^{n2^n} \left[\frac{\sin a_k\pi}{a_k\pi} \right]^2 \\
\leqq & \max_{2[n/2] < m \leqq n2^{2n}+1} E|S(m)| \left\{ \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{1}{k^2} + 2 \right\} \\
\leqq & \frac{7}{3} \max_{2[n/2] < m \leqq n2^{2n}+1} E|S(m)| , \quad \text{d'où on obtient} \quad \lim_{n\to\infty} E|I_6| = 0 .
\end{aligned}$$

Pour le terme qui reste, on a l'inégalité;

$$\begin{aligned}
|I_5| \leqq & \left[\sum_{m=0}^{2[n/2]} \sum_{\alpha=1}^{2} (f, \varphi_{\alpha,m})^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{2[n/2]} \sum_{\alpha=1}^{2} (\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right)^2 \right\}^2 \right]^{1/2} \\
\leqq & \left[\int_0^1 f^2(x, w)dx \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{2[n/2]} \sum_{\alpha=1}^{2} (\varphi_{\alpha,m}, \dot{B})^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi} \right)^2 \right\}^2 \right]^{1/2} .
\end{aligned}$$

En appliquant l'inegalite, $1 - ((\sin x)/x)^2 \leqq x^2$ à ce dernier terme on obtient,

$$E\left[\sum_{m=0}^{2[n/2]}\sum_{\alpha=1}^{2}(\varphi_{\alpha,m},\ \dot{B})^2\left\{1-\left(\frac{\sin 2^{-n}m\pi}{2^{-n}m\pi}\right)^2\right\}^2\right]\leqq 2\sum_{m=1}^{2[n/2]}(2^{-n}m\pi)^4<2\pi^4 2^{-3n/2}\ ,$$

qui implique que $\lim_{n\to\infty} I_5=0$ en probabilité. C.Q.F.D.

Afin d'obtenir l'énoncé inverse du Théorème 1, il faudrait une discussion plus délicate qui semble nécéssiter une sorte de régularité de la fonction $f(x, w)$. Au lieu d'avancer à cette direction, on va se contenter de donner le résultat suivant.

PROPOSITION 3. *Soit $f(x, w)$ une fonction aléatoire. S'il existe une suite des fonctions $\{f_n(x, w)\}$ satisfaisantes aux conditions* (A.1)-(A.3) *ci-dessous*:

(A.1) *Pour chaque x fixé, $f_n(x, w)$ est measurable par rapport au tribu $\mathscr{F}_n=\sigma(B(2^{-n}i),\ i=1, 2, \cdots, 2^n-1)$.*

(A.2) $\lim_{m\to\infty} m\int_0^1 |f_m(x, w)-f(x, w)|^2dx=0$ *(en probabilité).*

(A.3) *La suite $\mathscr{I}_n(f_n)=\int_0^1 f_n(x, w)dB^{(n)}$ converge en probabilite.*

Alors la fonction $f(x, w)$ est integrable par rapport à la base $\{\varphi_{\alpha,n}(x)\}$ et on a l'égalité: $\int_0^1 f(x, w)d^*B=\lim_{n\to\infty}\mathscr{I}_n(f_n)$.

Pour la démonstration de cet énoncé, on nécessite le

LEMME 2. (i) *Pour chaque n fixé, les variables aléatoires $\{(\varphi_{\alpha,k},\ \dot{B}^{(n)});\ \alpha=1, 2,\ k\geqq 0\}$ sont mutuellement indépendantes. Plus précisément, elles satisfont à la relation suivante*:

$$E(\varphi_{\alpha,h},\ \dot{B}^{(n)})(\varphi_{\beta,k},\ \dot{B}^{(n)})=\sum_{i=0}^{2^n-1}(\chi_{n,i},\ \varphi_{\alpha,h})(\chi_{n,i},\ \varphi_{\beta,k})\ .$$

(ii) *Les deux tribus $\mathscr{F}_n$ et $\mathscr{F}^n=\sigma\{(\varphi_{\alpha,k},\ \dot{B}-\dot{B}^{(n)});\ \alpha=1, 2,\ k\geqq 0\}$ sont indépendants.*

PREUVE. (i) Comme $(\varphi_{\alpha,k},\ \dot{B}^{(n)})=\sum_{i=0}^{2^n-1}(\chi_{n,i},\ \dot{B})(\chi_{n,i},\ \varphi_{\alpha,k})$, la relation se résulte immédiatement du Lemme 1.

(ii) On note que le résultat (i) implique l'indépendance des variables gaussiennes $\{(\varphi_{\alpha,k},\ \dot{B}-\dot{B}^{(n)});\ \alpha=1, 2,\ k\geqq 0\}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}E(\varphi_{\alpha,h},\ \dot{B})(\varphi_{\beta,k},\ \dot{B}^{(n)}) &= E\sum_{i=0}^{2^n-1}(\chi_{n,i},\ \dot{B})(\varphi_{\alpha,h},\ \dot{B})(\chi_{n,i},\ \varphi_{\beta,k})\\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1}(\chi_{n,i},\ \varphi_{\alpha,h})(\chi_{n,i},\ \varphi_{\beta,k})\\ &= E(\varphi_{\alpha,h},\ \dot{B}^{(n)})(\varphi_{\beta,k},\ \dot{B}^{(n)})\ ,\end{aligned}$$

ceci démontre l'énoncé.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B}) = \mathscr{I}_n(f_n) + I_1 + I_2 ,$$

où

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f - f_n, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B}) \qquad \text{et}$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f_n, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B} - \dot{B}^{(n)}) .$$

Le fait, $\lim_{n\to\infty} I_1 = 0$ en probabilité, étant évident d'après la condition (A.2), on n'a qu'à démontrer que $\lim_{n\to\infty} I_2 = 0$ en probabilité. Considérons le cas particulier où les fonctions $\{f_n\}$ satisfont à la condition, $\sup_n E\int_0^1 |f_n(x, w)|^2 dx = M < \infty$. Alors, en utilisant les Lemmes 1 et 2, on obtient l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} E(I_2)^2 &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2} E(f_n, \varphi_{\alpha,k})^2\left[1 - \left\{\frac{\sin 2^{-n}k\pi}{2^{-n}k\pi}\right\}^2\right] \\ &\leqq 2M\sum_{k=0}^{n}\left[1 - \left\{\frac{\sin 2^{-n}k\pi}{2^{-n}k\pi}\right\}^2\right], \end{aligned}$$

d'où on obtient $\lim_{n\to\infty} E(I_2)^2 = 0$.

Pour le cas general, on a l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} P(|I_2| > \varepsilon) &\leqq P\left[\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f_n^M, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B} - \dot{B}^{(n)}\right| > \varepsilon/2\right] \\ &\quad + P\left[\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f_n - f_n^M, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B} - \dot{B}^{(n)})\right| > \varepsilon/2\right] \\ &\leqq P\left[\left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2}(f_n^M, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B} - \dot{B}^{(n)})\right| > \varepsilon/2\right] \\ &\quad + P\left[\int_0^1 |f_n(x, w)|^2 dx > M\right], \end{aligned}$$

où ε, M sont des nombres positifs quelconques et les $\{f_n^M\}$ sont des fonctions définies de la façon suivante: $f_n^M(x, w) = f_n(x, w)1_{[0,M]}\left(\int_0^x |f_n(y, w)|^2 dy\right)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$. Remarquons que; $E\int_0^1 |f_n^M(x, w)|^2 dx \leqq M$, pour tout n.

Comme $\lim_{n\to\infty} P[|\sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=1}^2 (f_n^M, \varphi_{\alpha,k})(\varphi_{\alpha,k}, \dot{B} - \dot{B}^{(n)})| > \varepsilon/2] = 0$ d'après la discussion donnée en haut et comme on a, d'autre part, l'égalité $\lim_{n\to\infty} P\left[\int_0^1 |f_n(x, w)|^2 dx > M\right] = P\left[\int_0^1 |f(x, w)|^2 dx > M\right]$ d'après la condition (A.3), on obtient l'inégalité suivante: $\lim_{n\to\infty} P(|I_2| > \varepsilon) \leqq P\left[\int_0^1 |f(x, w)|^2 dx > M\right]$, M étant un nombre positif arbitraire, ceci démontre l'énoncé.

RÉFÉRENCES

[1] S. OGAWA, Sur le produit direct du bruit blanc par luimême. C.R. Acad. Sc. Paris, 288 (1979), Série A, 359-362.

[2] S. OGAWA, Quelques propriétés de l'integrale stochastique du type noncausal. (1981, à paraître).

FACULTY OF TEXTILE SCIENCE
KYOTO UNIVERSITY OF INDUSTRIAL ARTS AND TEXTILE FIBRES
MATSUGASAKI, SAKYO-KU, KYOTO 606
JAPAN