Tôhoku Math. J.
45 (1993), 423–436

LE GROUPE AFFINE COMME VARIETE SYMPLECTIQUE

MARTIN BORDEMANN, ALBERTO MEDINA AND ALI OUADFEL

(Received March 3, 1992)

Abstract. For a Lie group carrying a left invariant symplectic form certain Lagrangian foliations are considered. We describe all left invariant (exact) symplectic structures on the affine group $K^n \times GL(K^n)$ for $K = \boldsymbol{R}$ or $\boldsymbol{C}$. It is shown that for some of these structures there exists an exact symplectic embeding of the real affine group onto an open subset of the cotangent bundle of the Euclidean group $\boldsymbol{R}^n \times SO(n)$.

Soit $G = GA(\boldsymbol{K}^n) = \boldsymbol{K}^n \times GL(\boldsymbol{K}^n)$ le groupe des transformations affines de $\boldsymbol{K}^n$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$ et $\mathfrak{g} = \mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n) = \boldsymbol{K}^n \times \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ l'algèbre de Lie de G. Il est connu que G admet des formes symplectiques invariantes à gauche. Comme le groupe de cohomologie scalaire $H^2(\mathfrak{g}, \boldsymbol{K})$ est nul ($[M-R]$) ces formes s'écrivent comme $\Omega = dv$ où v est une 1-forme différentielle invariante sur G et elles correspondent à des orbites ouvertes de la représentation co-adjointe de G. Dans [D-M] il a été montré que la composante connexe de l'unité G_0 de $GA(\boldsymbol{K}^{n-1})$ peut être obtenue par réduction symplectique de (G, Ω) suivant l'orthogonal symplectique $(\boldsymbol{K}^n)^\perp$ du sous-groupe $\boldsymbol{K}^n$ de G.

Ici nous caractérisons de plusieurs façons les éléments de $\mathfrak{g}^*$ à orbite ouverte pour la représentation co-adjointe de G_0 (théorèmes 2.1 et 2.5). Nous prouvons que (G, Ω) admet deux feuilletages symplectiques invariants à gauche transverses (théorème 3.1, corollaire 3.2) en raffinant le résultat de [D-M] cité ci-dessous.

Nous démontrons l'existence d'un sous-fibré intégrable lagrangien L de TG, invariant par les translations à gauche inclus dans le noyau de la 1-forme v. Ceci nous permet d'identifier (G_0, dv) à un ouvert du cotangent de la variété quotient $Q = G/\mathfrak{L}$ où $\mathfrak{L}$ est le feuilletage associé à L (théorème 3.3). Le fait que les feuilles de $\mathfrak{L}$ soient fermées est une conséquence du théorème 1.1. En particulier (G_0, dv) s'identifie à un ouvert de $T^*(SO(n))$ si $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$.

Dans la suite l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = L(G)$ d'un groupe de Lie G s'identifie à $T_\varepsilon(G)$ où ε désigne l'élément neutre de G. Pour X dans $\mathfrak{g}$, on désigne par X^+ (resp. X^-) le champ de vecteurs invariant à gauche (resp. invariant à droite) sur G défini par X. Par forme symplectique sur G invariant on entend une forme symplectique invariante à gauche.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C30; Secondary 53C15, 17B99.

Key words: Left invariant symplectic forms, left invariant foliations, affine group, exact symplectic embedding.

Par commodité, et malgré l'abus de langage nous dirons qu'un groupe de Lie (réel ou complexe) muni d'une forme symplectique invariante est un groupe de Lie symplectique; l'algèbre de Lie d'un groupe symplectique sera dite symplectique. Si $\mathfrak{g}$ est symplectique, l'idéal dérivé $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est distinct de $\mathfrak{g}$ (voir par exemple [M-R]. Soulignons que les groupes symplectiques sont liés aux groupes de Lie-Poisson et que ces derniers ont des applications aux systèmes hamiltoniens intégrables ([B-V], [B], [L-W]).

1. Feuilletages lagrangiens invariants sur un groupe symplectique. Soit (G, Ω) un groupe de Lie symplectique, $\omega=\Omega_\varepsilon$, $\mathfrak{g}=L(G)$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Désignons par H le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre $\mathfrak{h}$. Considérons l'action à gauche de H sur G, $L_H\colon H\times G\to G$, $(\rho,\sigma)\mapsto\rho\sigma$. Evidemment L_H est symplectique. Notons $O_L(\sigma)=H\sigma$ l'orbite passant par σ. Soit F le sous-fibré de TG tangent aux orbites de L_H, $\mathfrak{F}$ le feuilletage associé. Le sous-fibré $F^\perp$ de TG orthogonal à F est intégrable; désignons par $\mathfrak{F}^\perp$ le feuilletage qui lui est associé. Il est clair que la fibre de F au-dessus de σ est $F_\sigma=\{X_\sigma^-;\, X\in\mathfrak{h}\}$ et que $F^\perp$ est défini par les noyaux des formes fermées $i(X^-)\Omega$ où $X\in\mathfrak{h}$.

Soit $R_H\colon G\times H\to G$ avec $R_H(\sigma,\rho)=\sigma\rho$. Les orbites de R_H sont les feuilles de la distribution $D_\sigma^+=\{X_\sigma^+;\, X\in\mathfrak{h}\}$. Evidemment pour $\rho\in H$ on a $O_L(\rho)=H=O_R(\rho)$.

D'autre part de la formule $\Omega_\sigma(X_\sigma^+, Y_\sigma^+)=\omega(X, Y)$ pour $\sigma\in G$ et X, Y dans $\mathfrak{g}$ il résulte que si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre symplectique (resp. une sous-algèbre isotrope, co-isotrope ou lagrangienne) de $(\mathfrak{g},\omega)$ alors R_H définit un feuilletage symplectique (resp. isotrope, co-isotrope, lagrangien) invariant à gauche de (G,Ω).

Supposons L_H hamiltonienne et soit $J\colon G\to\mathfrak{g}^*$ un moment pour L_H. Puisque L_H est à isotropie triviale J est une submersion et par conséquent les feuilles de $\mathfrak{F}^\perp$, c'est-à-dire les composantes connexes des fibres de J, sont fermées dans G. De plus nous avons:

1.1. THÉORÈME. *Soit $\mathfrak{L}$ un feuilletage lagrangien invariant à gauche du groupe symplectique (G, Ω), H la feuille de $\mathfrak{L}$ passant par ε. Si L_H est hamiltonienne alors $\mathfrak{L}$ est à feuilles fermées.*

DÉMONSTRATION. Désignons par K la composante connexe de $J^{-1}(J(\varepsilon))$ contenant ε. De ce qui précède K est la sous-variété intégrale maximale connexe, passant par ε, de la distribution $F_\sigma^\perp=\{X_\sigma^-;\, X\in\mathfrak{h}\}^\perp$, $\sigma\in G$. Aussi, R_H définit un feuilletage lagrangien de (G,Ω) et H est la sous-variété intégrale maximale connexe, passant par ε, de la distribution $\{X_\sigma^+;\, X\in\mathfrak{h}\}$. Or pour tout ρ dans H on a $F_\rho^\perp=\{X_\rho^+;\, X\in\mathfrak{g}\}^\perp$ car $\{X_\rho^+;\, X\in\mathfrak{h}\}$ coïncide avec $\{X_\rho^-;\, X\in\mathfrak{h}\}$. Ainsi si $\mathfrak{h}$ est lagrangienne dans $(\mathfrak{g},\omega)$ on aura pour tout ρ dans H:

$$T_\rho(H)=\{X_\rho^+;\, X\in\mathfrak{h}\}=\{X_\rho^+;\, X\in\mathfrak{h}\}^\perp=\{X_\rho^-;\, X\in\mathfrak{h}\}^\perp.$$

Par conséquent puisque $\varepsilon\in H\cap K$ et H et K sont connexes on aura $H=K$ et en particulier H est fermé dans G. Ceci achève la preuve.

1.2. REMARQUES. 1. Si $\Omega = d\nu$ est une forme symplectique sur G et ν est invariante par L_H où H est un sous-groupe de Lie de G, l'application $J: G \to \mathfrak{h}^*$ avec $J(\sigma)(X) = \nu(\sigma)(X^-)$ est un moment pour L_H qui est en plus Ad_H^* invariant.

2. Si G est symplectique compact (et donc commutatif), l'action L_H pour H de dimension ≥ 1 où H est un sous-groupe de Lie de G, n'est pas hamiltonienne car s'il en était ainsi: X^- pour $X \in \mathfrak{h}$ serait le hamiltonien de $J(X): G \to \boldsymbol{R}$, $J(X)(\sigma) = J(\sigma)(X)$ et donc $X = 0$. Dans ce cas G admet des feuilletages lagrangiens invariants dont les feuilles ne sont pas fermées.

3. Si (G, Ω) est symplectique et G est complètement résoluble alors (G, Ω) admet un feuilletage lagrangien invariant $\mathfrak{L}$ (d'après [M]). Si G est connexe $\mathfrak{L}$ est à feuilles fermées.

D'autre part un groupe de Lie symplectique (G, Ω) est muni d'une structure affine invariante à gauche c'est-à-dire d'une connexion linéaire ∇ invariante à gauche de courbure et torsion nulles donnée par la formule

$$\omega(\nabla_X Y, Z) = -\omega(Y, [X, Z]) \tag{1}$$

pour X, Y, Z dans $\mathfrak{g}$ (voir par exemple [M-R]). Nous avons ainsi la conséquence suivante du théorème:

1.3. COROLLAIRE. *Si $\mathfrak{L}$ est un feuilletage lagrangien invariant à gauche du groupe symplectique (G, Ω) dont la feuille H passant par ε est un sous-groupe distingué et L_H est hamiltonienne alors*

1. *H est un sous-groupe commutatif fermé de G.*
2. *H est une sous-variété plongée totalement géodésique de (G, ∇).*
3. *Le groupe quotient G/H est muni d'une structure affine invariante à gauche déduite de celle de G pour laquelle la projection canonique $\pi: G \to G/H$ est affine.*

DÉMONSTRATION. Munissons $\mathfrak{g}$ du produit $XY = \nabla_X Y$ défini par (1); $\mathfrak{g}$ avec ce produit est une algèbre (à associateur) symétrique à guche. Mais alors puisque $\mathfrak{h}$ est un idéal lagrangien de $(\mathfrak{g}, \omega)$, $\mathfrak{h}$ est un idéal de Lie abelien et un idéal bilatère d'algèbre symétrique à gauche (voir [M-R]). Par conséquent l'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est muni d'une structure d'algèbre symétrique à gauche telle que $\bar{X} \cdot \bar{Y} - \bar{Y} \cdot \bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ pour X, Y dans $\mathfrak{g}$ et $\pi: X \mapsto \bar{X}$ est un homomorphisme d'algèbre symétrique à gauche. Ceci prouve les trois affirmations du corollaire.

Ceci étant il convient de souligner que si (K, ∇) est un groupe de Lie à structure affine invariante à gauche et $\eta: K \to GL(L(\boldsymbol{K})^*)$ est une représentation linéaire dont la représentation linéaire associée est de la forme $X \mapsto -{}^t\nabla_X$ alors le groupe produit semi-direct $L(\boldsymbol{K})^* \times K$ est un groupe de Lie symplectique pour la forme définie par

$$\omega((\alpha, X), (\beta, Y)) = \alpha(Y) - \beta(X)\,.$$

Ce groupe symplectique contient $L(\boldsymbol{K})^*$ et K comme sous-groupes lagrangiens le premier étant évidemment distingué.

Dorénavant nous nous intéressons au cas où $\Omega = dv$, v étant une 1-forme différentielle invariante à gauche sur G. Dans ce cas L_H est hamiltonienne quel que soit le sous-groupe de Lie H de G. Si $\mathfrak{h} = L(H)$ est lagrangienne nous allons chercher des conditions suffisantes pour que G puisse admettre une immersion symplectique sur un ouvert d'un fibré cotangent T^*Q. Dans ce but remarquons d'abord le fait suivant:

1.4. LEMME. *Soit (M^{2n}, dv) une variété symplectique exacte, L un sous-fibré intégrable de rang n de TM contenu dans le noyau de v et $\mathfrak{L}$ le feuilletage de M qui lui est associé. Supposons que $M/\mathfrak{L} = Q$ soit une variété différentiable telle que la projection canonique $\pi\colon M \to Q$ soit une submersion. Alors l'application $\Phi\colon M \to T^*Q$ définie par $\Phi(x)(\pi_{*,x}X_x) = v(x)(X_x)$ est un étalement symplectique de M sur un ouvert de T^*Q tel que $\Phi^*v_0 = v$, v_0 étant la 1-forme canonique sur T^*Q.*

DÉMONSTRATION. D'abord si X, Y sont deux sections différentiables de L on a:

$$\Omega(X, Y) = dv(X, Y) = \mathfrak{L}(X)(v(Y)) - \mathfrak{L}(Y)(v(X)) - v([X, Y])$$

où $\mathfrak{L}(X)$ désigne la dérivée de Lie dans la direction de X. Mais puisque $L \subset \operatorname{Ker} v$ et L est intégrable, les trois termes de droite de cette formule, sont nuls. Ainsi L est lagrangien.

Par ailleurs puisque π est une submersion et $\operatorname{Ker}(\pi_{*,x}) = L_x$ est contenu dans $\operatorname{Ker} v(x)$ il résulte que Φ est bien définie. Soit $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ un système de coordonnées locales adaptées à $\mathfrak{L}$: les p-coordonnées sont des coordonnées le long des plaques de $\mathfrak{L}$, ces plaques étant définies par $q^1 = c_1, \dots, q^n = c_n$. Dans ces coordonnées v s'écrit comme $v(q, p) = \sum_{i=1}^n v_i(q, p)dq^i$. Mais puisque les q-coordonnées sont des coordonnées locales sur Q, Φ s'exprime localement comme $\Phi(q, p) = v(q, p)$ et donc Φ est différentiable.

D'autre part on a $\tau_Q^* \circ \Phi = \pi$ où $\tau_Q^*\colon T^*Q \to Q$ est la projection canonique et par suite pour $x \in M$ *et* $X_x \in T_xM$ on aura:

$$\begin{aligned}(\Phi^*v_0)(x)(X_x) &= v_0(\Phi(x))(\Phi_{*,x}X_x) = \Phi(x)((\tau_Q^*)_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x}X_x)\\ &= \Phi(x)((\tau_Q^* \circ \Phi)_{*,x}X_x) = \Phi(x)(\pi_{*,x}X_x)\\ &= v(x)(X_x)\,.\end{aligned}$$

Par conséquent $\Phi^*\Omega_0 = \Phi^*(dv_0) = d(\Phi^*v_0) = dv = \Omega$. Finalement puisque $\dim M = 2n = \dim T^*Q$ et Ω et $\Omega_0 = dv_0$ sont non dégénérées il suit que $\Phi_{*,x}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel pour tout x dans M. Ceci prouve le lemme.

Voici un exemple de variété symplectique exacte qui n'est pas un ouvert d'un fibré cotangent. Identifions T^*S^1 au cylindre $S^1 \times \boldsymbol{R}$ muni de la forme $v_0(q, p) = pdq$ avec $q \in S^1$, $p \in \boldsymbol{R}$. Considérons p_0 un réel $p_0 > 0$ et faisons des coupes sur le cylindre suivant les quatre segments horizontaux

$$\{(e^{i\varphi}, p) \in S^1 \times \boldsymbol{R}\,; p = \pm p_0 \text{ et } \varphi \in A\}$$

où $A=[0, \pi/4]\cup[3\pi/4, 5\pi/4]\cup[7\pi/4, 2\pi]$ et les deux segments verticaux

$$\{(e^{i\varphi}, p)\in S^1\times \boldsymbol{R}\,;\ -p_0\le p\le p_0 \text{ et } \varphi=0 \text{ ou } \varphi=\pi\}\,.$$

Ces coupes produisent deux fenêtres se faisant face ayant chacune deux volets. Choisissons un $\varepsilon\in]0, \pi/8[$, ouvrons les quatre volets vers l'intérieur du cylindre et collons les deux volets pour lesquels $\varphi\in]0, \pi/4[$ (resp. les deux volets pour lesquels $\varphi\in]\pi, 2\pi[$) en identifiant la bande ouverte $\{e^{i\varphi}\in S^1\,;0<\varphi<\varepsilon\}\times]-p_0, p_0[$ avec $\{e^{i\varphi}\in S^1\,;\pi-\varepsilon<\varphi<\pi\}\times]-p_0, p_0[$ (respectivement identifiant la bande ouverte $\{e^{i\varphi};\ \pi<\varphi<\pi+\varepsilon\}\times]-p_0, p_0[$ avec $\{e^{i\varphi}\in S^1\,;2\pi-\varepsilon<\varphi<2\pi\}\times]-p_0, p_0[$). L'espace M qui en résulte possède la structure différentiable de T^2 moins quatre points et la 1-forme v_0 se projette sur une 1-forme v sur M car v_0 est invariante par les S^1 rotations. Ainsi (M, dv) est une surface symplectique connexe.

D'autre part tout fibré cotangent d'une 1-variété connexe est ou bien difféomorphe à $\boldsymbol{R}^2 \rightrightarrows T^*\boldsymbol{R}$ ou bien à $\boldsymbol{R}^2-\{0\} \rightrightarrows T^*S^1$. Donc pour montrer que M ne peut pas être étalée comme un ouvert d'un fibré cotangent il suffit de prouver que M ne peut pas être étalée comme un ouvert du plan. Or ceci est clair car tout 1-cycle d'un ouvert connexe du plan est déconnectante tandis que dans le tore T^2 moins quatre points il existe des 1-cycles qui ne sont pas déconnectantes.

2. Orbites ouvertes de la representation co-adjointe du groupe affine. Dans la suite $G=GA(\boldsymbol{K}^n)=\boldsymbol{K}^n\times GL(\boldsymbol{K}^n)$ désigne le groupe affine de $\boldsymbol{K}^n$ et $\mathfrak{g}=\boldsymbol{K}^n\times \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ est son algèbre de Lie. Nous allons déterminer les $\alpha\in\mathfrak{g}^*$ dont l'orbite $0(\alpha)$ relative à la représentation co-adjointe de G est un ouvert de $\mathfrak{g}^*$. Puisque l'application $N\to\mathrm{Tr}({}^tNN)$ est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ tout élément α de $\mathfrak{g}^*$ s'écrit comme $\alpha((x, u))=g(x)+\mathrm{Tr}(M\circ u)$ pour $(x, u)\in\mathfrak{g}$, où $g\in(\boldsymbol{K}^n)^*$ et $M\in\mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ sont uniques.

Que $0(\alpha)$ soit ouverte revient à dire que $\eta\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*(y, v)\mapsto -\alpha\circ\mathrm{ad}(y, v)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels ou ce qui est de même que $\omega=d\alpha$ est non dégénérée où ω est donnée par

$$\begin{aligned}(2)\qquad \omega((x, u), (y, v)) &= g(u(y)-v(x))+\mathrm{tr}(M\circ[u, v])\\ &= g(u(y)-v(x))+\mathrm{tr}([M, u]\circ v)\,.\end{aligned}$$

De cette formule il est évident que le radical de la restriction de ω à $\mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ est le commutant $C(M)$ de M dans $\mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$. Nous allons prouver:

2.1. THÉORÈME. *L'orbite de $\alpha\equiv(g, M)\in(\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n))^*$ est ouverte pour la représentation co-adjointe de $GA(\boldsymbol{K}^n)$ si et seulement si $\dim C(M)=n$ et $\{u\in C(M)\,; g\circ u=0\}=\{0\}$.*

Pour démontrer ce résultat commençons par remarquer le fait trivial suivant:

2.2. LEMME. *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $2l$ sur $\boldsymbol{K}$ et W un sous-espace de V de dimension k. Si $k\ge l$ alors le rang de la restriction de ω à*

$W \times W$ *est* $\geq 2(k-l)$.

Pour montrer l'assertion il suffit de se placer dans le pire des cas c'est-à-dire celui où W contient un sous-espace lagrangien L de (V, ω). On a alors $W = L \oplus S$ avec $\dim S = k - l$. Il est alors clair que L contient un sous-espace S^* en dualité avec S d'où le lemme.

Appliquons 2.2 au cas qui nous intéresse. Ici nous avons $2l = n + n^2$ i.e. $l = n(n+1)/2$. Prenons $W = \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$. On a $k = n^2 \geq n(n+1)/2$. Si ω est non dégénérée, on a d'après le lemme:

$\mathrm{rang}(\omega | W^2) \geq 2(n^2 - (n^2 + n)/2) = n^2 - n$ mais comme $\mathrm{rang}(\omega | W^2) = \dim W - \dim \mathrm{Rad}(\omega|_{W^2})$ l'inégalité revient à affirmer que $\dim \mathrm{Rad}(\omega | W^2) \leq n$.

D'autre part il est connu que quel que soit $M \in \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$ $\dim C(M) \geq n$. Par conséquent si $\omega = d\alpha$ avec $\alpha = (g, M) \in \mathfrak{g}^*$ est non dégénérée on a nécessairement $\dim C(M) = n$. Aussi si ω est non dégénérée on a, $\{u \in C(M) u \circ g = 0\} \subset \mathrm{Rad}(\omega) = \{0\}$ et $g \neq 0$ car sinon $C(M) \subset \mathrm{Rad}(\omega)$. Il nous reste donc à montrer que $\dim C(M) = n$ et $\{u \in C(M) ; g \circ u = 0\} = \{0\}$ impliquent que $\omega = d\alpha$, où $\alpha \equiv (g, M) \in \mathfrak{g}^*$, est non dégénérée. Pour faire ceci rappelons le résultat classique suivant où $\boldsymbol{K}$ désigne un corps de caractéristique nulle (voir par exemple [Lu]).

2.3. PROPOSITION. *Si E est un espace vectoriel sur $\boldsymbol{K}$ de dimension finie n et $M \in \mathrm{End}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $\dim C(M) = n$.
2. *Les polynômes caractéristique et minimal de M sont identiques.*
3. $C(M) = \boldsymbol{K}[M]$.
4. *$C(M)$ est une algèbre commutative.*
5. *Dans toute extension $\bar{K}$ de $\boldsymbol{K}$ où M admet une forme de Jordan celle-ci est constitutée d'un seul bloc de Jordan pour chaque valeur propre.*
6. *Il existe x dans E tel que $\{x, M(x), M^2(x), \ldots, M^{n-1}(x)\}$ est une base de E.*

Supposons $\boldsymbol{K}$ algébriquement clos, $E = \boldsymbol{K}^n$ et soit $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ la décomposition primaire de E relative à M. Si $u \in C(M)$ on a $u(E_i) \subset E_i$ pour $1 \leq i \leq p$ (en particulier $M(E_i) \subset E_i$). Posons $M_i = M|_{E_i}$, $1 \leq i \leq p$. Si $[u, M] = 0$ il est clair que $[u_i, M_i] = 0$ où $u_i = u|_{M_i}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $C(M) = \bigoplus_{i=1}^p C(M_i)$. Réciproquement si $M_i \in \mathrm{End}(E_i)$, $1 \leq i \leq p$, est tel que $[u_i, M_i] = 0$ alors l'endomorphisme $u = \bigoplus_{i=1}^p u_i$ de E commute avec M.

Supposons $\dim C(M) = n$. D'après la proposition 2.3, $M_i = \lambda_i 1 + N_i$ où N_i est un endomorphisme nilpotent principal de E_i, c'est-à-dire d'ordre n_i où $n_i = \dim E_i$ $1 \leq i \leq p$. Mais puisque $C(M_i) = C(N_i)$ il nous suffit par conséquent de nous intéresser au cas où M est un endomorphisme nilpotent principal de E. Dans ce cas nous avons:

2.4. LEMME. *Soit $M \in \mathrm{End}(E)$ vérifiant $M^n = 0$, $M^{n-1} \neq 0$ où $n = \dim_{\boldsymbol{K}} E$ ($\boldsymbol{K}$ de caractéristique nulle) et $g \in E^*$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. $\{u \in C(M) ; g \circ u = 0\} = \{0\}$

2. $g|E_1 \neq 0$ *où* $E_i = \operatorname{Ker} M^i$ *pour* $1 \leq i \leq n$.

En outre si l'une de ces conditions est vérifiée alors $\omega = d\alpha$ *où* $\alpha \equiv (g, M)$ *fait de* $\mathfrak{g} = \operatorname{aff}(E)$ *une algèbre symplectique.*

DÉMONSTRATION. Supposons 1) vérifiée. On a alors en particulier $g \circ M^{n-1} \neq 0$ mais puisque $\operatorname{Im} M^k = \operatorname{Ker} M^{m-k}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ on a $g|E_1 \neq 0$.

Réciproquement supposons $g|E_1 \neq 0$. Posons $\operatorname{Im} M^k = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-k}) = \operatorname{Ker} M^{n-k}$, $0 \leq k \leq n-1$. Comme $\dim C(M) = n$ nécessairement $C(M) = \operatorname{Vect}(M^o, M, \ldots, M^{n-1})$. Soit $u = \lambda_0 1 + \lambda_1 M + \cdots + \lambda_i M^i + \cdots + \lambda_{n-1} M^{n-1}$ non nul dans $C(M)$, les λ_i étant des éléments de $\boldsymbol{K}$. Désignons par k le petit nombre entier tel que $\lambda_k \neq 0$, $0 \leq k \leq n-1$. Par récurrence sur l on a $M^l(e_{l+1}) = e_1$ et par suite $M^{l+p}(e_{l+1}) = M^p(M^l(e_{l+1})) = M^p(e_1) = 0$ si $p \geq 1$. Ainsi $u(e_{k+1}) = \lambda_k M^k(e_{k+1}) = \lambda_k e_1 \neq 0$ et donc $g(u(e_{k+1})) \neq 0$ si $g|E_1 \neq 0$.

Pour achever la preuve montrons que ω est non dégénérée si $g|E_1 \neq 0$. Soit $(x, u) \in \operatorname{aff}(E) = E \times \operatorname{End}(E)$; il est clair que (x, u) appartient au radical de $\omega = d\alpha$, $\alpha \equiv (g, M)$, si et seulement si,

(i) $-g(v(x)) = \operatorname{Tr}([M, u] \circ v)$ pour tout v dans $\operatorname{End}(E)$

(ii) $\operatorname{Im} u \subset \ker g$.

Prenons (x, u) dans le radical de ω. Alors quel que soit $v \in C(M)$ on a $g(v(x)) = 0$ $(*)$. Montrons que cette relation implique que $x = 0$. Pour ceci considérons le drapeau $(E_i)_i$, $1 \leq i \leq n$ $E_i = \operatorname{Ker} M^i = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_i)$ de E. Puisque $M(e_n) = e_{n-1}$, $M(e_{n-1}) = e_{n-2}, \ldots, M(e_2) = e_1$, l'ensemble $\{e_n, M(e_n), \ldots, M^{n-1}(e_n)\}$ et une base de E. Ainsi $M^k(e_n) = e_{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et en particulier $M^{n-1}(e_n) = e_1$.

Soit x dans E, x s'écrit $x = \lambda_0 e_n + \lambda_1 M(e_n) + \cdots + \lambda_k M^k(e_n) + \cdots + \lambda_{n-1} M^{n-1}(e_n)$ où les $\lambda_i \in \boldsymbol{K}$. Si x vérifie $(*)$ on aura, $g(M^k(x)) = 0$ pour tout $k \geq 0$. Or $M^{n-1}(x) = \lambda_0 M^{n-1}(e_n) = \lambda_0 e_1$ et donc $g(M^{n-1}(x)) = \lambda_0 g(e_1) = 0$ ce qui implique $\lambda_0 = 0$ car $g(e_1) \neq 0$.

De même on a $M^{n-2}(x) = \lambda_1 M^{n-1}(e_n) = \lambda_1 e_1$ et donc $g(M^{n-2}(x)) = 0$ implique $\lambda_1 = 0$. Par conséquent de proche en proche on trouve $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ si $(x, u) \in \operatorname{Rad}(\omega)$. De plus l'identité $\omega(u, (y, v)) = g(u(y)) + \operatorname{tr}(M[u, v]) = 0$ pour tout $(y, v) \in \operatorname{aff}(E)$ implique, pour $y = 0$, que $u \in C(M)$ et aussi (en posant $v = 0$) que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} g$. Or comme 1 et 2 sont équivalentes on peut conclure que $u = 0$. Ceci termine les preuves du lemme et du théorème.

La description suivante des $\alpha \in \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)^*$ à orbite ouverte pour la représentation co-adjointe est une conséquence du théorème.

2.5. THÉORÈME. *Pour* $\alpha \equiv (g, M) \in \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)^*$ *les assertions suivantes sont équivalentes*:

1. α *est à orbite ouverte pour la représentation co-adjointe de* $GA(\boldsymbol{K}^n)$.

2. $\{g, g \circ M, \ldots, g \circ M^{n-1}\}$ *est une base de* $(\boldsymbol{K}^n)^*$.

3. *Il existe* x *dans* $\boldsymbol{K}^n$ *tel que* $\{x, M(x), M^2(x), \ldots, M^{n-1}(x)\}$ *est une base de* K^n *et* $g \circ M^{n-1}(x) = 1$, $(g \circ M^k)(x) = 0$ *pour* $0 \leq k \leq n-2$.

DÉMONSTRATION. Supposons α à orbite ouverte. D'après le théorème 2.1

$\dim C(M)=n$, ce qui est équivalent à $C(M)=\mathrm{Vect}(I, M, \ldots, M^{n-1})$, et $g\circ u\neq 0$ pour tout $u\neq 0$ dans $C(M)$. Donc si $\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(g\circ M^i)=0$ avec α_i dans $\boldsymbol{K}$ on aura $g\circ\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i M^i=0$ et par suite $\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i M^i=0$ ce qui implique que les α_i sont tous nuls. Ainsi 1 entraîne 2.

Montrons que 2 implique 3. Soit $B=\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ la base duale de $B^*=\{g\circ M^i\}$, $0\leq i\leq n-1$. Si l'on pose $x=x_{n-1}$ on a en particulier $(g\circ M^{n-1})(x)=1$ et $(g\circ M^k)(x)=0$ si $0\leq k\leq n-2$. Prouvons que $\{x, M(x), \ldots, M^{n-1}(x)\}$ est une base de $\boldsymbol{K}^n$. Or si $\lambda_0 x+\lambda_1 M(x)+\cdots+\lambda_{n-1}M^{n-1}(x)=0$, $\lambda_i\in\boldsymbol{K}$, l'application successive à ce vecteur des formes $g, g\circ M, \ldots, g\circ M^{n-1}$ montre que tous les λ_i sont nuls.

Supposons que l'on ait 3. Compte tenu de 2.3 on a $C(M)=\mathrm{Vect}(I, M, \ldots, M^{n-1})$ qui équivaut à $\dim C(M)=n$. Soit $u\in C(M)$ tel que $g\circ u=0$. Alors $u=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i M^i$ et pour tout $y\in\boldsymbol{K}^n$ on a $g(u(y))=0$. Or si l'on prend pour y successivement les vecteurs $x, M(x), \ldots, M^{n-1}(x)$ il suit que $\lambda_i=0$ pour tout $0\leq i\leq n-1$. Ainsi 3 implique 1.

2.6. COROLLAIRE. *Quelle que soit la forme symplectique $\omega=d\alpha$ où $\alpha\equiv(g, M)$, sur $\mathfrak{g}=\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ le sous-espace $\boldsymbol{K}^n\times C(M)$ est une sous-algèbre symplectique, produit semi-direct de sous-algèbres commutatives de l'algèbre* $(\mathfrak{g}, \omega)$.

DÉMONSTRATION. En effet d'après la formule (2) les sous-espaces $\boldsymbol{K}^n$ et $C(M)$ de $\mathfrak{g}$ sont totalement isotropes pour ω. De plus, d'après le théorème, si $v\neq 0$ est un élément de $C(M)$ il existe $y\in\boldsymbol{K}^n$ tel que $g(v(y))\neq 0$ ce qui signifie que $\boldsymbol{K}^n$ et $C(M)$ sont en dualité pour ω. Ceci prouve le corollaire.

Soit $B=\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\boldsymbol{K}^n$, $B^*=\{e_i^*\}$, $1\leq i\leq n$ la base duale de B. Désignons par M la matrice de l'endomorphisme M de $\boldsymbol{K}^n$ dans la base B. L'étude qui vient d'être faite montre que $\alpha\equiv(g, M)\in\mathfrak{g}^*$ où $\mathfrak{g}=\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ aura une orbite ouverte pour la représentation co-adjointe de $GA(\boldsymbol{K}^n)$ dans les cas simples suivants:

1.

$$M=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad g=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i^* \text{ avec } \lambda_1\neq 0.$$

Ici M n'a qu'un seul bloc de Jordan.

2.

$$M=\begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{est diagonale}$$

le $\mu_i \in \boldsymbol{K}$ étant deux à deux distincts, et $g=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$ avec $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$,

3. $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$, M admet un seul bloc de Jordan réel

$$M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & & & & \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ & & & & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

et $g=\sum_{i=1}^{4p=n} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1^2+\lambda_2^2 \neq 0$ où α et β sont réels et $\beta \neq 0$.

Dans le second cas $C(M)$ est l'ensemble des matrices diagonales. Dans le premier cas $C(M)$ est constitué des matrices de la forme

$$u=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-1} \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & a_3 \\ & & & & \ddots & a_2 \\ & & & & & a_1 \end{pmatrix}.$$

3. Feuilletages lagrangiens invariants sur le groupe affine. Soit $\omega=dv$ une forme symplectique sur $G=GA(\boldsymbol{K}^n)$, v étant une 1-forme invariante, à gauche sur G. Nous allons montrer qu'il existe un sous-fibré intégrable de rang $n(n+1)/2$ de TG stable par les translations à gauche de G et inclus dans le noyau de v.

Posons $\alpha=v_\varepsilon \equiv (g, M)$ où $g \in (\boldsymbol{K}^n)^*$ et $M \in \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n)$. Nous savons que pour tout $(x, u) \in \mathfrak{g}=L(G)$ on a

$$\alpha(x, u)=g(x)+\mathrm{Tr}(M \circ u) .$$

Considérons α_1, α_2 dans $\mathfrak{g}^*$ définies par

$$\alpha_1(x, u)=g(x) ; \qquad \alpha_2(x, u)=\mathrm{Tr}(M \circ u) .$$

On a $d\alpha=d\alpha_1+d\alpha_2$.

D'après 2.6, $\mathfrak{g}_1=\boldsymbol{K}^n \times C(M)$ est une sous-algèbre symplectique de $(\mathfrak{g}, \omega)$. Plus précisément $(\mathfrak{g}_1, d\hat{\alpha}_1)$ est une algèbre symplectique où $\hat{\alpha}_1$ est la restriction de α_1 à $\mathfrak{g}_1$.

Déterminons l'orthogonal $\mathfrak{g}_1^\perp$ de $\mathfrak{g}_1$ dans $(\mathfrak{g}, \omega)$. Puisque $\omega((x, u), (y, v))=g(u(y)-v(x))+\mathrm{Tr}(M \circ [u, v])$ il est clair que le sous-espace $\mathfrak{g}_2$ de $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_2=\{0\} \times \{v \in \mathrm{End}(\boldsymbol{K}^n) ; g \circ v=0\}$ est inclus dans $\mathfrak{g}_1^\perp$. D'autre part $\dim \mathfrak{g}_2=n(n-1)=$

$\dim \mathfrak{g}_1^{\perp} = n^2 + n - 2n$.

Ainsi $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1^{\perp}$.

Par ailleurs $\mathfrak{g}_2$ est évidemment une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{g}_2$ est une sous-algèbre symplectique de $(\mathfrak{g}, \omega)$, la forme symplectique sur $\mathfrak{g}_2$ étant $\omega_2 = d\hat{\alpha}_2$ où $\hat{\alpha}_2$ désigne la restriction de α_2 à $\mathfrak{g}_2$.

Soit $B^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n-1}^*, g\}$ une base de $(\boldsymbol{K}^n)^*$, $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z\} = B$ la base duale de B^*; évidemment $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ est une base de $\operatorname{Ker} g$. Soit $(0, v) \in \mathfrak{g}_2$, la matrice de v relative à B s'écrit comme:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite il devient clair que l'application

$$\mathfrak{g}_2 \to \operatorname{aff}(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker} g \times \operatorname{End}(\operatorname{Ker}(g)) \qquad v \mapsto (v(z), v|_{\operatorname{Ker} g})$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie. Par conséquent nous avons montré le fait suivant:

3.1. Théorème. *Si* $\omega = d\alpha$ *où* $\alpha \equiv (g, M)$ *est une forme symplectique sur* $\mathfrak{g} = \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ *alors* $\mathfrak{g}$ *se décompose comme* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ *où* $\mathfrak{g}_1 = \boldsymbol{K}^n \times C(M)$ *et* $\mathfrak{g}_2 = \{v \in \operatorname{End}(\boldsymbol{K}^n)\,;\, g \circ v = 0\}$ *sont des algèbres symplectiques de* $(\mathfrak{g}, \omega)$. *De plus* $\mathfrak{g}_2$ *est isomorphe à l'algèbre* $\operatorname{aff}(\operatorname{Ker} g)$.

Remarquons que $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Ker}(d\alpha_2)$ et $\mathfrak{g}_2 = \operatorname{Ker}(d\alpha_1)$. Si S_i est le sous-groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, 2$, l'action R_{S_i} de S_i sur $G = GA(\boldsymbol{K}^n)$ définit un feuilletage symplectique invariante à gauche sur G. En fait on a:

3.2. Corollaire. *Le groupe symplectique* $(GA(\boldsymbol{K}^n), dv)$ *est muni de deux feuilletages symplectiques transverses invariants à gauche définis par les sous-algèbres* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *de* $\mathfrak{g} = \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ *du théorème.*

Comme application de 3.1 nous pouvons montrer l'existence sur $G = GA(\boldsymbol{K}^n)$ d'un feuilletage lagrangien invariant à gauche. Pour faire ceci nous prouverons par récurrence sur n que $(\mathfrak{g}, d\alpha)$ avec $\mathfrak{g} = \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ admet une sous-algèbre lagrangienne contenue dans le noyau de α.

Evidemment ce résultat est vrai si $n = 1$. Supposons que $\operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^{n-1})$ et donc $\operatorname{aff}(\operatorname{Ker} g) = \mathfrak{g}_2$ ait une sous-algèbre lagrangienne L_2 incluse dans $\operatorname{Ker} \hat{\alpha}_2$. Considérons d'autre part la sous-algèbre $L_1 = \operatorname{Ker} g \times \boldsymbol{K}\,\mathrm{id}$ où id désigne l'endomorphisme identique de $\boldsymbol{K}^n$.

Il est clair que L_1 est une sous-algèbre lagrangienne de $(\mathfrak{g}_1, \omega_1)$ où $\omega_1 = d\hat{\alpha}_1$ et L_1 est incluse dans $\operatorname{Ker} \hat{\alpha}_1$. De plus le sous-espace $L = L_1 \oplus L_2$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g} = \operatorname{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ car $g \circ v = 0$ pour $v \in \mathfrak{g}_2$. Regardons si L est lagrangienne dans $(\mathfrak{g}, \omega)$. On a pour $a = (x, \lambda\,\mathrm{id}) + (0, v)$ et $a' = (x', \lambda'\,\mathrm{id}) + (0, v')$ dans L:

$$[a, a'] = (\lambda x' + v(x') - \lambda' x - v'(x), [v, v'])$$

et par suite $\omega(a, a') = d\alpha(a, a') = 0$. De plus $L \subset \operatorname{Ker} \alpha$.

Désignons par K le sous-groupe de Lie connexe de $GA(\boldsymbol{K}^n) = G$ d'algèbre de Lie L. D'après le §1 nous savons que R_K définit sur G une feuilletage lagrangien invariant à gauche et comme L_K est hamiltonnienne car $\Omega = d\nu$ et ν est invariant à gauche par G, le théorème 1.1 nous permet d'affirmer que K est fermé dans G. Mais alors le théorème 1.4 implique le résultat suivant:

3.3. THÉORÈME. *Si $\Omega = d\nu$ est une forme symplectique invariante à gauche sur $G = GA(\boldsymbol{K}^n)$ on a:*

1. *Il existe un feuilletage lagrangien $\mathfrak{L}$ de (G, Ω) défini par l'action $\boldsymbol{R}_K$ où K est un sous-groupe fermé de G tel que le sous-fibré de TG associé à $\mathfrak{L}$ est inclus dans le noyau de ν.*
2. *Si $\pi: G \to G/K = Q$ est la submersion canonique l'application $\Phi: G \to T^*Q$, $\Phi(\sigma)(\pi_{*,\sigma} X_\sigma) = \nu(\sigma)(X_\sigma)$ est un difféomorphisme de G sur un ouvert de T^*Q qui ne rencontre pas la section nulle. De plus $\Phi^*\nu_0 = \nu$ où ν_0 est la forme de Liouville de T^*Q.*

Il nous reste à prouver que $\Phi(G)$ ne rencontre pas la section nulle de T^*Q et que Φ est injective. D'après 1.4, $\Phi^*\nu_0 = \nu$. D'autre part ν est non nulle en tout point de G tandis que ν_0 s'annule sur la section nulle. Ceci montre la première affirmation.

Supposons maintenant que $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma')$. Ceci implique évidemment que $\pi(\sigma) = \pi(\sigma')$ et donc $\sigma' = \sigma k$ avec $k \in K$. Il faut montrer que $k = \varepsilon$.

Puisque $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma k)$ nous avons,

$$\Phi(\sigma)(\pi_{*\sigma} X_\sigma) = \nu(\sigma)(X_\sigma) = \Phi(\sigma k)(\pi_{*,\sigma k} Y_{\sigma k}) = \nu(\sigma k)(Y_{\sigma k})$$

chaque fois que l'on a

$$(*) \qquad \pi_{*,\sigma}(X_\sigma) = \pi_{*,\sigma k}(Y_{\sigma k}) .$$

Prenons $X_\sigma = X^+(\sigma)$, $Y_{\sigma k} = Y^+(\sigma k)$ où $X, Y \in T_\varepsilon(G)$.

La condition $(*)$ s'écrit alors

$$(\pi \circ L_\sigma)_{*,\varepsilon} X = (\pi \circ L_\sigma \circ L_k)_{*,\varepsilon} Y$$

et elle implique

$$(**) \qquad \nu_\varepsilon(X) = \nu_\varepsilon(Y) .$$

Pour $\sigma \in G$ notons $\tilde{L}_\sigma: Q \to Q$, $[\tau] \mapsto [\sigma\tau]$ et rappelons que $\pi \circ L_\sigma = \tilde{L}_\sigma \circ \pi$ et $\pi \circ R_k^{-1} = \pi$.

Alors $(**)$ devient

$$(\tilde{L}_\sigma \circ \pi)_{*,\varepsilon} X = (\pi \circ L_\sigma)_{*,k}((L_k)_{*,\varepsilon} Y) = (\tilde{L}_\sigma \circ \pi)_{*,k}((L_k)_{*,\varepsilon} Y)$$

ou ce qui est de même

$$(\tilde{L}_\sigma)_{*,\pi(\varepsilon)}(\pi_{*,\varepsilon}X)=(\tilde{L}_\sigma)_{*,\pi(k)}\pi_{*,k}((L_\sigma)_{*,\varepsilon}Y)=(\tilde{L}_\sigma)_{*\pi(k)}((\pi\circ L_k)_{*,\varepsilon}Y)$$
$$=(\tilde{L}_\sigma)_{*\pi(k)}\{(\pi\circ R_k^{-1}\circ L_k)_{*,\varepsilon}Y\}=(\tilde{L}_\sigma)_{*\pi(k)}\{\pi_{*,\varepsilon}(\mathrm{Ad}(k)Y)\}$$

ce qui entraîne:

$$\pi_{*\varepsilon}X=\pi_{*,\varepsilon}(\mathrm{Ad}(k)Y)$$

c'est-à-dire

(3) $\qquad X=\mathrm{Ad}(k)Y+Z$ où $Z\in L(K)$, $L(K)$ étant l'algèbre de Lie de K.

Ainsi nous avons que (3) entraîne

$$v_\varepsilon(\mathrm{Ad}(k)Y)=v(Y)\,. \tag{4}$$

Montrons que (4) implique $k=\varepsilon$.

Ecrivons $k=(x,P)\in GA(\boldsymbol{K}^n)$ $Y=(y,u)\in\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$.

On a $\mathrm{Ad}(k)Y=(Py-PuP^{-1}x,\ PuP^{-1})$ et donc (4) s'écrit

$$g((P-\mathrm{id})y-PuP^{-1}x)+\mathrm{Tr}\,M(PuP^{-1}-u)=0 \tag{5}$$

pour tout $Y=(y,u)\in\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$.

En particulier pour $u=0$ on obtient $g((P-\mathrm{id})(y))=0$ c'est-à-dire $g\circ P=g$.

Notons $v=uP^{-1}$. Alors (5) devient,

$$g((P-\mathrm{id})y-vx)+\mathrm{Tr}\,M[P-\mathrm{id},v]=0$$

pour tout $(y,v)\in\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$, ou ce qui est de même

$$\omega((x,P-\mathrm{id}),(y,v))=0$$

quel que soit $(y,v)\in\mathrm{aff}(\boldsymbol{K}^n)$ ce qui implique $x=0$ et $P=\mathrm{id}$ c'est-à-dire $k=(x,P)=(0,\mathrm{id})=\varepsilon$. Ceci achève la preuve du théorème.

Pour finir étudions un cas particulier simple et intéressant du théorème 3.3. Pour ceci prenons $M\in\mathrm{End}(\boldsymbol{R}^n)$ nilpotent d'ordre n; il existe alors $x\in\boldsymbol{R}^n$ tel que $\{x, M(x),\dots,M^{n-1}(x)\}$ soit une base de $\boldsymbol{R}^n$. Considérons $\alpha\equiv(g,M)$ à orbite ouverte pour la représentation co-adjointe de $G=GA(\boldsymbol{R}^n)$. D'après 2.5, l'élément $g\in(\boldsymbol{R}^n)^*$ doit vérifier $g\circ M^{n-1}(x)\neq 0$ et $(g\circ M^k)(x)=0$ si $0\le k\le n-2$. Soit $e_{n-k}=M^k(x)$ pour $0\le k\le n-1$; il est alors clair que $\alpha\equiv(g,M)$ avec $g=e_1^*$ est à orbite ouverte. Soit le groupe symplectique (G_0,dv) où $v_\varepsilon=\alpha$ et $G_0=\boldsymbol{R}^n\times GL_+(\boldsymbol{R}^n)$. Prouvons que (G_0,v) s'étale symplectiquement sur la variété $(T^*SO(n),dv_0)$ au moyen d'une application Φ vérifiant $\Phi^*v_0=v$. Pour le faire identifions d'abord G_0 à un groupe de matrices carrées d'ordre $n+1$ à l'aide de la base (e_i) de $\boldsymbol{R}^n$ ci-dessus introduite. Soit B le sous-groupe de Borel de $GL_+(\boldsymbol{R}^n)$, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires à coefficients positifs sur la diagonale, $\mathfrak{b}$ son algèbre de Lie. Ceci étant on a:

3.4. Proposition. 1. *$L=G_0\times\mathfrak{b}$ est un sous-fibré lagrangien de TG_0 dont les fibres* *sont incluses dans* $\operatorname{Ker} v$ *et dont la feuille du feuilletage* $\mathfrak{L}$, *associé à* L, *passant par* $(x, U) \in G_0$ *est* (x, UB).

2. *La variété quotient* $Q = G_0/\mathfrak{L}$ *et la projection canonique* $\pi: G_0 \to Q$ *s'identifient respectivement à la variété sous-jacente au groupe euclidien* $E = \boldsymbol{R}^n \times SO(n)$ *et à l'application* $(x, kb) \mapsto (x, k)$ *où* $(k, b) \mapsto kb$ *est la décomposition d'Iwasawa de* $GL_+(\boldsymbol{R}^n)$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que $G_0 \times \mathfrak{b}$ est un sous-fibré intégrable de TG_0 de rang $n(n+1)/2$. Puisque $\operatorname{Tr}(N_1 N_2) = 0$ pour des matrices triangulaires supérieures alors chaque fibre de $G_0 \times b$ est incluse dans le noyau de v et par conséquent $G_0 \times \mathfrak{b}$ est un sous-fibré intégrable lagrangien de (TG_0, dv). Aussi il est évident que la feuille de $\mathfrak{L}$ passant par (x, U) est (x, UB). De plus $Q = G_0|_{\mathfrak{L}}$ est une variété différentiable.

D'autre part l'application d'Iwasawa $SO(n) \times B \to SO(n)B \cong GL_+(\boldsymbol{R}^n)$, $(k, b) \mapsto kb$ étant un difféomorphisme, la projection $GL_+(\boldsymbol{R}^n) \to SO(n) \cong GL_+(\boldsymbol{R}^n)/B$, $(k, b) \mapsto k$ est une submersion surjective et par suite: $\pi: G_0 \to Q$ s'identifie à $\pi: \boldsymbol{R}^n \times GL_+(\boldsymbol{R}^n) \to (\boldsymbol{R}^n \times GL_+(\boldsymbol{R}^n))/B \cong \boldsymbol{R}^n \times SO(n)$ $(x, kb) \mapsto (x, k)$. Par ailleurs 3.3 implique que Φ: $G_0 \to T^*E$, $\Phi(\sigma)(\pi_{*,\sigma}) = v(\sigma)(X_\sigma)$ est un difféomorphisme symplectique non surjectif.

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] R. ABRAHAM ET J. E. MARSDEN, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings Pub., Princeton, N.J., 1978.

[B-V] O. BABELON ET C. M. VIALLET, Integrable models, Yang-Baxter equation and quantum groups, Part I, Ref S.I.S.A. 54 EP, May 89 (preprint Trieste).

[B] M. BORDEMANN, Generalized Lax Pairs, the modified classical Yang-Baxter Equation and Affine geometry of Lie groups, Comm. Math. Physics 135 (1990), 201–216.

[D-M] J. M. DARDIE ET A. MEDINA, Groupes de Lie à structure symplectique invariante, Séminaire Géom. Montpellier (1990–1991).

[H] S. HELGASON, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.

[L] A. LICHNEROWICZ, Les groupes kähleriens, Symplectic Geometry and Mathematical Physics (P. Donato, ed.), Birkhäuser, Boston, 1991.

[L-M] A. LICHNEROWICZ ET A. MEDINA, On Lie groups with left invariant symplectic or kählerian structures, Lett. Math. Phys. 16 (1988), 225–235.

[Lu] D. LUCON, Commutation avec un endomorphisme, Revue de Math. Spé. n°8, Vuibert, 1983.

[L-W] J. H. LU ET A. WEINSTEIN, Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions, J. Differential Geom. 31 (1990), 501–526.

[M] A. MEDINA, Structures de Poisson affines, Symplectic Geometry and Mathematical Physics (P. Donato, ed.), Birkhäuser, Boston, 1991, 288–302.

[M-R] A. MEDINA ET PH. REVOY, Groupes de Lie à structure symplectique invariante, Groupoids and Integrable Systems, M.S.R.I. Publications, Berkeley, 1991, 247–266.

[R] M. RAÏS, La représentation co-adjointe du groupe affine, Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 207–237.

Martin Bordemann
Fakultät für Physik
der Universität Freiburg
Hermann-Herder-Strasse 3
D-7800 Freiburg i.Br.
Germany

Alberto Medina
G.D.R. 144 UA 1407 du C.N.R.S.
Université d'Avignon
Département de Mathématiques
33 rue Louis Pasteur
84000 Avignon
France

Ali Ouadfel
Université de Montpellier II
Département de Mathématiques
Case 051 Place E. Bataillon
34095 Montpellier Cédex 5
France