

SYSTÈME GÉNÉRATEUR MINIMAL, DIVISEURS ESSENTIELS ET G -DÉSINGULARISATIONS DE VARIÉTÉS TORIQUES

CATHERINE BOUVIER ET GÉRARD GONZALEZ-SPRINBERG

(Received December 13, 1993, revised May 23, 1994)

Abstract. We give a geometric interpretation of the minimal generating system of the semi-group defined by a rational polyhedral cone in any dimension, via a natural bijection with the set of essential divisors of equivariant desingularizations of the toric variety associated to the cone. We prove, for varieties of dimension three, the existence of a desingularization associated to a regular fan whose edges contain the elements of the minimal generating system, its uniqueness for canonical toric varieties of index at least two, and the uniqueness in general up to flops. We give an example of non-existence of such desingularizations in dimension four.

Introduction. L'étude des variétés algébriques munies de l'action d'un tore, entreprise par Demazure [5] en introduisant les éventails et développée ensuite par beaucoup d'autres pour les variétés singulières, repose sur un dictionnaire entre des objets géométriques et combinatoires. Nous poursuivons cette étude avec une interprétation géométrique du système générateur minimal G du semi-groupe défini par un cône polyédral rationnel σ : il existe une bijection naturelle entre G et les diviseurs essentiels des désingularisations équivariantes de la variété torique V_σ associée à σ sur un corps k , en dimension quelconque (théorème 1.10).

En dimension trois on démontre, en utilisant la théorie de Mori, que les diviseurs essentiels équivariants correspondant aux éléments de G sont aussi essentiels pour toute désingularisation de V_σ , non nécessairement équivariante (théorème 2.5).

On appelle G -désingularisation de V_σ une désingularisation équivariante définie par une subdivision de σ en un éventail dont les arêtes portent les éléments de G (G -subdivision régulière), i.e. telle que tout diviseur exceptionnel soit essentiel.

On démontre, en dimension trois, l'existence des G -désingularisations par une méthode constructive à partir d'un modèle terminal minimal (théorème 2.9), une caractérisation des G -subdivisions régulières par la minimalité de leur volume (proposition 2.12), et le fait que toute G -désingularisation domine un modèle terminal minimal (théorème 2.22). Ce dernier résultat et l'unicité de la G -désingularisation d'une variété torique canonique d'indice > 1 (théorème 2.23) impliquent l'unicité en général

Mots-clés: Variétés toriques, diviseurs essentiels, désingularisations, théorie de Mori, systèmes générateurs de semi-groupes.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14E15; Secondary 14L30, 14J30.

à flops près (corollaire 2.24).

En dimension supérieure ou égale à quatre, il n'existe pas nécessairement des G -désingularisations de variétés toriques, comme le montre le contre-exemple 3.1.

Une partie de ces résultats a été annoncée dans [1].

Dans le premier paragraphe on fait des rappels, on donne les définitions sur les éventails et les variétés toriques utilisés dans la suite et on démontre l'interprétation géométrique du système générateur minimal. La deuxième partie porte sur les résultats pour les variétés toriques en dimension trois: les diviseurs essentiels, l'existence et la construction des G -désingularisations, ainsi que les propriétés d'unicité. Le dernier paragraphe est un exemple d'une variété torique terminale d'indice un de dimension quatre qui n'admet pas de G -désingularisation.

Nous remercions Monique Lejeune-Jalabert et Michel Brion pour des discussions fructueuses, Arlette Guttin-Lombard pour la grande qualité de frappe dont elle est coutumière.

Le deuxième auteur remercie l'invitation de JAMS à Ohnuma et du Tokyo Institute of Technology pour un séjour en Août 1993 pendant lequel il a pu faire avancer la rédaction de cet article.

Les éditeurs nous signalent l'existence de recoupements entre certains résultats de cet article et de l'article "An algorithmic desingularization of 3-dimensional toric varieties" de Stefano Aguzzoli et Daniele Mundici à paraître dans cette revue. (The editor's note: It appeared in Tôhoku Math. J. 46, No. 4 (1994), 557–572.)

1. Rappels et définitions. Interprétation géométrique du système générateur minimal. Soit d un entier positif, N un \mathbf{Z} -module libre de rang d et $M = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ son dual. Les \mathbf{Q} -espaces vectoriels $N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ sont notés respectivement $N_{\mathbf{Q}}$ et $M_{\mathbf{Q}}$. Un cône dans $N_{\mathbf{Q}}$ est toujours supposé *convexe* et *polyédral*: pour un tel cône σ , il existe un entier s et des points v_i , $1 \leq i \leq s$ de $N_{\mathbf{Q}}$ tels que σ soit l'ensemble $\langle v_1, \dots, v_s \rangle$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels non négatifs des v_i , $1 \leq i \leq s$. Le cône σ est dit *fortement convexe* s'il admet 0 pour sommet. Son *intérieur* $\hat{\sigma}$ est, par définition, l'ensemble des éléments de σ qui n'appartiennent à aucune de ses faces strictes. Sa *dimension* est celle du sous-espace vectoriel de $N_{\mathbf{Q}}$ qu'il engendre.

DÉFINITION 1.1. Soit σ un cône fortement convexe dans $N_{\mathbf{Q}}$. On appelle *système générateur minimal* de σ l'ensemble

$$G_{\sigma} := \{x \in \sigma \cap N \setminus \{0\} \mid \forall n_1, n_2 \in \sigma \cap N, x = n_1 + n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \text{ ou } n_2 = 0\}$$

des éléments irréductibles du semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$.

PROPOSITION 1.2. L'ensemble G_{σ} engendre le semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ et il est contenu dans tout système générateur de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. En particulier, G_{σ} est fini.

DÉMONSTRATION. Le cône σ étant fortement convexe, il existe un élément m de M tel que σ soit contenu dans le demi-espace $m^{-1}(\mathbf{Q}^+)$ de $N_{\mathbf{Q}}$ et tel que l'intersection de σ avec l'hyperplan $m^{-1}(0)$ soit la face $\{0\}$ de σ . Un élément non nul x de $\sigma \cap N$ est alors somme d'au plus $m(x)$ éléments de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. Soit $x = \sum_{i=1}^p n_i$ une écriture de x comme somme d'éléments de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ avec p maximal. Alors les n_i , $1 \leq i \leq p$, appartiennent à G_{σ} . Par conséquent, G_{σ} engendre le semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. Par ailleurs, un élément de G_{σ} s'écrit d'une seule façon comme somme d'éléments de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ et il appartient donc à tous les systèmes générateurs de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$. Enfin, le semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ est de type fini (lemme de Gordan). Par conséquent, G_{σ} est fini. ■

Chaque face de dimension 1, ou *arête*, d'un cône σ fortement convexe contient un unique vecteur primitif de N . Un tel vecteur est dit *extrémal* pour σ . Il appartient à G_{σ} . Lorsque les vecteurs extrémaux de σ sont linéairement indépendants, le cône σ est dit *simplicial*. Lorsque de plus ils font partie d'une base du réseau N , il est dit *régulier*. Un cône simplicial est régulier si et seulement si son système générateur minimal est réduit à l'ensemble de ses vecteurs extrémaux.

Dans le cas où σ n'est pas un cône régulier, nous étudions ses subdivisions régulières. Rappelons qu'un *éventail* Σ de $N_{\mathbf{Q}}$ est un ensemble fini de cônes de $N_{\mathbf{Q}}$ vérifiant les propriétés suivantes:

- (i) si σ appartient à Σ et τ est une face de σ alors τ appartient également à Σ .
- (ii) si σ_1 et σ_2 sont deux cônes de Σ distincts alors leur intersection est une face de σ_1 et de σ_2 .

Le *support* d'un éventail est la réunion de ses cônes. Une *subdivision* d'un éventail Σ (ou d'un cône) est un éventail Σ' de même support tel que pour tout cône σ' de Σ' , il existe un cône σ de Σ contenant σ' . Une subdivision est dite *régulière* (resp. *simpliciale*) si tous ses cônes le sont.

Chaque cône de dimension 1, ou arête, d'un éventail Σ contient un unique vecteur primitif de N . Un tel vecteur est dit *extrémal* pour Σ . L'ensemble des vecteurs extrémaux de Σ est noté $\text{Sk}^1 \Sigma$.

PROPOSITION 1.3. *Soit σ un cône fortement convexe de $N_{\mathbf{Q}}$. Toute subdivision régulière de σ compte les points de G_{σ} parmi ses vecteurs extrémaux.*

DÉMONSTRATION. Soit Σ une subdivision régulière de σ . Un élément x de G_{σ} appartient à au moins un cône τ de dimension maximale de Σ . Comme Σ est régulière, $\text{Sk}^1 \tau$ est une base de N et x s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls des vecteurs de $\text{Sk}^1 \tau$. Par définition de G_{σ} , x s'identifie alors à l'un des vecteurs de la combinaison. ■

Les subdivisions intermédiaires dans la construction des subdivisions régulières seront celles dont les cônes sont canoniques, terminaux ou simpliciaux. Ces cônes sont introduits dans [19] et [21]. Ils sont *d'indice fini*: pour un tel cône σ il existe un entier r et un élément non nul m de M tels que l'on ait $m(v) = r$ pour chaque vecteur extrémal

v de σ . L'indice de σ est alors le plus petit de ces entiers. On note l_σ la forme linéaire sur le sous-espace vectoriel E_σ de $N_{\mathcal{Q}}$ engendré par σ qui vérifie $l_\sigma|_{\text{Sk}^1 \sigma} = 1$. On appelle *profil* ("shed") de σ le polyèdre convexe $\sigma \cap l_\sigma^{-1}([0; 1])$. Le *profil d'un éventail* dont les cônes sont d'indice fini est la réunion des profils de ses cônes. Un cône d'indice fini σ est dit *canonique* (resp. *terminal*) si l'ensemble $N \cap \sigma \cap l_\sigma^{-1}(]0; 1[)$ est vide (resp. si son profil est un *polyèdre élémentaire*, i.e. ses seuls points communs avec N sont ses sommets).

Pour un cône simplicial σ de vecteurs extrémaux e_i , $1 \leq i \leq s$, on définit le paralléloèdre fondamental de σ .

$$P_\sigma := \left\{ n \in N \mid n = \sum_{i=1}^s \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i < 1, 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Le nombre μ_σ des éléments de P_σ est également l'indice du sous-groupe de $E_\sigma \cap N$ engendré par les vecteurs extrémaux de σ . On désigne par *multiplicité* de σ cet indice. La multiplicité d'une face de σ divise celle de σ .

Aux éventails de $N_{\mathcal{Q}}$ correspondent des variétés munies de l'action d'un tore. Nous rappelons ici l'interprétation, dans la géométrie de ces variétés toriques, des objets que nous venons d'introduire. Nous renvoyons à [3], [12], [16], [17] et [21] pour plus de détails.

Soit k un corps. À un cône σ de $N_{\mathcal{Q}}$ est associée la *variété torique affine* $V_\sigma := \text{Spec} k[\check{\sigma} \cap M]$, pour le tore $T = \text{Spec} k[M]$. D'un éventail Σ de $N_{\mathcal{Q}}$, on déduit une variété torique V . Une telle variété est non singulière (resp. a des singularités terminales, canoniques, \mathcal{Q} -factorielles) si et seulement si les cônes de l'éventail Σ sont réguliers (resp. terminaux, canoniques, simpliciaux). Les morphismes équivariants, propres et birationnels d'une variété torique V' sur V correspondent aux subdivisions de Σ . Parmi eux, les désingularisations équivariantes de V proviennent des subdivisions régulières. À un vecteur extrémal v de Σ , on associe un diviseur D_v stable sous l'action de T . On obtient une bijection de $\text{Sk}^1 \Sigma$ sur l'ensemble des diviseurs intègres T -stables de V .

Pour un éventail Σ et un point x du support de Σ on définit la *subdivision élémentaire* Σ' de Σ centrée en x ainsi. Si σ est un cône de Σ ne contenant pas x alors σ appartient encore à Σ' . Sinon, σ est remplacé par l'ensemble des cônes $\langle \tau, x \rangle$ pour les faces τ de σ qui ne contiennent pas x . À la subdivision Σ' est associé un morphisme propre et birationnel, et si x n'est pas un vecteur extrémal de Σ , alors le diviseur D_x est le lieu exceptionnel de ce morphisme (i.e. son complémentaire est le plus grand ouvert sur lequel la restriction du morphisme soit un isomorphisme).

DÉFINITION 1.4. Soit V une variété associée à un éventail Σ . Nous appellerons *éclatement élémentaire* le morphisme $\pi: X \rightarrow V$ associé à une subdivision élémentaire centrée en un point x du support de Σ .

REMARQUE 1.5. Au point x est associée une valuation divisorielle v_x de $k(V)$. D'autre part, il existe un entier ρ tel que ρD_x soit un diviseur de Cartier sur X . L'opposé

de ce diviseur est alors π -ample. Soit σ un cône de Σ contenant x . L'ensemble des fonctions de $k(V)$ régulières sur l'ouvert affine V_σ de V , dont l'image par la valuation v_x est un entier supérieur ou égal à ρ , est un idéal de l'anneau $\Gamma(V_\sigma, \mathcal{O}_V)$ des fonctions régulières sur V_σ . On définit ainsi sur V un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I} = \pi_*(\mathcal{O}_X(-\rho D_x))$, dont l'éclatement normalisé donne le morphisme π .

Soit σ un cône fortement convexe de $N_{\mathcal{Q}}$. On lui associe l'enveloppe convexe C des points de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ et l'ensemble Λ des points de N appartenant aux faces bornées de C .

PROPOSITION 1.6. *Les points de Λ appartiennent au système générateur minimal G_σ .*

DÉMONSTRATION. Un hyperplan d'appui pour C dont l'intersection avec C est une face bornée F ne contient pas 0. Pour une telle face F , il existe une forme linéaire l_F sur $N_{\mathcal{Q}}$ telle que $C \subset l_F^{-1}([1; +\infty[)$ et $F = l_F^{-1}(1) \cap C$. Si v est un point de $F \cap N$ alors on a $l_F(v) = 1$ et, pour tout point n de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$, $l_F(n) \geq 1$. Par conséquent, v appartient à G_σ . ■

REMARQUE 1.7. La variété V associée à σ possède un modèle canonique V_{can} , associé à la subdivision Σ_C de σ dont les cônes sont engendrés par les faces de C . De plus, les modèles \mathcal{Q} -factoriels terminaux minimaux de V correspondent aux subdivisions de Σ_C en cônes terminaux simpliciaux dont les vecteurs extrémaux appartiennent aux faces bornées de C . Les vecteurs extrémaux d'une telle subdivision simpliciale terminale minimale sont exactement les points de Λ (voir [7], [21]).

Pour un cône de dimension 2, il existe une unique subdivision terminale minimale. De plus, on a:

PROPOSITION 1.8. ([6], [12]). *Si σ est un cône de dimension 2, alors la subdivision Σ_Λ de σ dont les vecteurs extrémaux sont les points de Λ est régulière et on a $G_\sigma = \Lambda$. Le morphisme associé à Σ_Λ est donc une désingularisation de V_σ et si $\dim V_\sigma = 2$ alors c'est sa désingularisation minimale.*

En dimension supérieure à 2, cette caractérisation du système générateur minimal ne subsiste pas. L'inclusion de Λ dans G est souvent stricte. De plus, il n'y a pas, en général, unicité d'une désingularisation minimale, comme c'est le cas en dimension 2, ni même de l'ensemble des vecteurs extrémaux d'une telle désingularisation minimale. Par exemple, le cône σ de \mathcal{Q}^3 engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $e_4 = (1, 1, -2)$ admet deux subdivisions régulières Σ_1 et Σ_2 , telles que les désingularisations correspondantes π_1 et π_2 de la variété V associée à σ soient minimales au sens suivant: s'il existe une factorisation $\pi_i = \rho_i \circ h_i$ de π_i par une désingularisation équivariante ρ_i de V , alors h_i est un isomorphisme ($i = 1, 2$) (voir figure 1).

Pourtant, le système générateur minimal de σ , qui coïncide ici avec l'ensemble des vecteurs extrémaux de σ , ou encore avec l'ensemble Λ , ne contient pas le vecteur extrémal $e_5 = (e_1 + e_2 + e_4)/2$ de la subdivision Σ_2 .

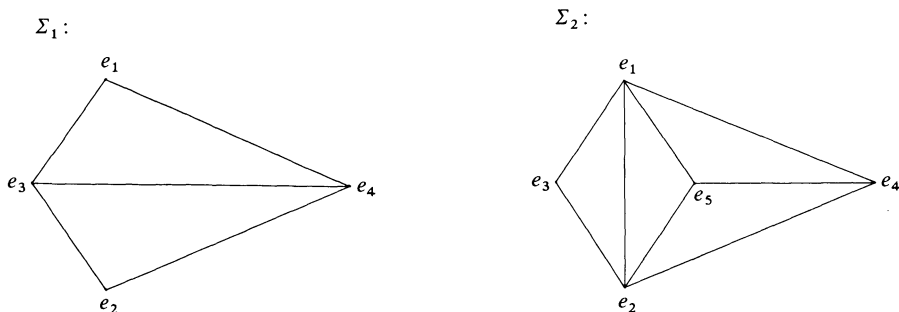


FIGURE 1.

Nous montrons que le système générateur minimal d'un cône fortement convexe garde néanmoins en toute dimension une interprétation géométrique naturelle en terme des désingularisations équivariantes de la variété torique associée.

DÉFINITION 1.9. Soient $\pi_i: X_i \rightarrow V$, $i=1, 2$, deux désingularisations d'une même variété V (où une désingularisation de V est un morphisme propre et birationnel $f: X \rightarrow V$ tel que X soit non singulière). Des diviseurs intègres $D_i \subset X_i$ sont *birationnellement équivalents relativement* à V si l'application birationnelle $\pi_2^{-1} \circ \pi_1: X_1 \dashrightarrow X_2$ envoie le point générique de D_1 sur celui de D_2 . Par *diviseur essentiel* (resp. *essentiel équivariant*) *relativement* à V , nous désignons un diviseur intègre, défini à équivalence birationnelle relative à V près, qui possède un représentant dans toute désingularisation de V (resp. dans toute désingularisation équivariante de V).

THÉORÈME 1.10. Soit σ un cône fortement convexe. Le système générateur minimal G_σ est en bijection avec l'ensemble des diviseurs essentiels équivariants relativement à la variété torique V_σ . Plus précisément, un vecteur primitif x de $\sigma \cap N$ appartient à G_σ si et seulement si c'est un vecteur extrémal de toute subdivision régulière de σ . Le diviseur D_x est alors essentiel équivariant.

DÉMONSTRATION. Un point de G_σ est un vecteur extrémal de toute subdivision régulière de σ (proposition 1.3) et définit donc un diviseur essentiel équivariant. Nous montrons que, réciproquement, si x est un vecteur primitif de $\sigma \cap N$ qui n'appartient pas à G_σ alors il existe une subdivision régulière Σ_r de σ qui ne contient pas la demi-droite engendrée par x .

Pour un tel point x , il existe deux éléments non nuls n_1 et n_2 de $\sigma \cap N$ tels que $x = n_1 + n_2$. Le cône $\langle n_1, n_2 \rangle$ est de dimension 2 car x est primitif. Soit Σ_A sa subdivision régulière minimale (proposition 1.8). L'un au moins des cônes de dimension 2 de Σ_A contient x . Soient v_1 et v_2 ses vecteurs extrémaux. Alors la droite joignant v_1 et v_2 est une droite d'appui de l'enveloppe convexe de $\langle n_1, n_2 \rangle \cap N \setminus \{0\}$ qui sépare 0 des points non nuls de $\langle n_1, n_2 \rangle \cap N$. Le point $x = n_1 + n_2$ n'appartient donc pas à cette droite, et par conséquent, il n'appartient à aucune face stricte du cône $\langle v_1, v_2 \rangle$.

On construit une subdivision régulière Σ_r de σ qui contient le cône $\langle v_1, v_2 \rangle$. Le point x n'est pas un vecteur extrémal de Σ_r . Sinon, $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap \langle v_1, v_2 \rangle$ serait une face de $\langle v_1, v_2 \rangle$. On obtient Σ_r à partir de σ en faisant des subdivisions élémentaires centrées successives.

On construit d'abord une subdivision initiale Σ_{in} de σ contenant le cône $\langle v_1, v_2 \rangle$. Pour cela, il suffit de prendre la subdivision élémentaire Σ_1 de σ centrée en v_1 , puis de subdiviser Σ_1 en prenant v_2 pour centre. Si Σ_{in} n'est pas régulière, chacune des subdivisions de Σ_{in} que l'on construit ensuite est une subdivision de la précédente centrée en un point n choisi à l'intérieur d'un cône non régulier γ . Comme γ est l'intersection des cônes contenant n , aucun des cônes contenant n n'est régulier et la subdivision centrée en n préserve tous les cônes réguliers. En particulier, toutes les subdivisions de Σ_{in} que l'on construit contiennent le cône $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Si Σ_{in} n'est pas simpliciale, on choisit le centre n de la subdivision à l'intérieur d'un cône γ non simplicial de dimension minimale v . Chaque face τ de γ est alors un cône simplicial, et par suite, le cône $\langle n, \tau \rangle$ l'est aussi. Ainsi le nombre des cônes non simpliciaux de dimension v diminue strictement. On obtient donc, par un nombre fini de telles subdivisions élémentaires, une subdivision simpliciale Σ_s de Σ_{in} qui contient $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Si Σ_s n'est pas régulière, on construit une subdivision régulière Σ_r de Σ_s qui contient le cône $\langle v_1, v_2 \rangle$. On obtient Σ_r à partir de Σ_s par des subdivisions élémentaires centrées successives. Dans chaque étape, on choisit un cône γ de l'éventail précédent Σ de multiplicité maximale μ_Σ . Si Σ n'est pas régulier on a $\mu_\gamma > 1$. On choisit un point n dans $P_\gamma \setminus \{0\}$. Soit γ_0 l'intersection des cônes de Σ qui contiennent n , de sorte que n est à l'intérieur de γ_0 . Alors n appartient à P_{γ_0} . En particulier, γ_0 n'est pas régulier. On prend n pour centre de la subdivision. Le cône γ (de multiplicité maximale μ_Σ) n'appartient pas au nouvel éventail. D'autre part, les nouveaux cônes sont de la forme $\langle \tau', n \rangle$, où τ' est une face d'un cône γ' de Σ contenant n et τ' ne contient pas n , et pour ces cônes, on a $\mu_{\langle \tau', n \rangle} < \mu_\Sigma$. En effet, γ' admet γ_0 pour face et par suite n appartient à $P_{\gamma'}$. De plus, pour l'un au moins des cônes σ' de dimension maximale de la subdivision de γ' centrée en n , le cône $\langle \tau', n \rangle$ est une face de σ' et par suite $\mu_{\langle \tau', n \rangle}$ divise $\mu_{\sigma'}$. Comme n appartient à $P_{\gamma'}$, on a aussi $\mu_{\sigma'} < \mu_{\gamma'}$, d'où le résultat. Au bout d'un nombre fini de telles subdivisions centrées, on obtient donc une subdivision Σ_r de Σ_s dont tous les cônes sont de multiplicité 1, et par conséquent réguliers. ■

DÉFINITION 1.11. Nous appellerons *G-subdivision régulière* de σ une subdivision régulière de σ dont les vecteurs extrémaux sont exactement les éléments de G_σ , et *G-désingularisation* de V le morphisme associé à une *G-subdivision régulière* de σ .

REMARQUE 1.12. Par le théorème précédent, si $\pi: X \rightarrow V$ est une *G-désingularisation* de V , alors les diviseurs intègres équivariants sur X sont exactement les diviseurs essentiels équivariants relativement à V .

2. Diviseurs essentiels des variétés toriques de dimension 3; existence, construction et propriétés d'unicité de leurs G -désingularisations.

PROPOSITION 2.1. *Soit σ un cône terminal simplicial de dimension 3 de vecteurs extrémaux e_1, e_2, e_3 . Soit μ_σ sa multiplicité, l_σ l'élément de $M_{\mathbf{Q}}$ tel que $l_\sigma(e_i) = 1, 1 \leq i \leq 3$ et $P_\sigma = \{n \in N \mid n = \sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i, 0 \leq \lambda_i < 1, 1 \leq i \leq 3\}$ le paralléloétope fondamental de σ .*

(i) *On a*

$$G_\sigma = \{x \in \sigma \cap N \mid 1 \leq l_\sigma(x) < 2\} = \{e_i, 1 \leq i \leq 3\} \cup P_\sigma \setminus \{0\}$$

et par suite $\text{Card}(G_\sigma) = \mu_\sigma + 2$.

(ii) *On a la suite exacte suivante:*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^3 \mathbf{Z}e_i \longrightarrow N \xrightarrow{f} \mathbf{Z}/\mu_\sigma \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

où f est induit par $\mu_\sigma l_\sigma$. Par conséquent, $\mu_\sigma l_\sigma$ fournit une bijection de $G_\sigma \setminus \text{Sk}^1 \sigma$ sur $(\mathbf{Z}/\mu_\sigma \mathbf{Z}) \setminus \{0\}$.

DÉMONSTRATION. (i) Le semi-groupe $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ est engendré par $\{e_1, e_2, e_3\} \cup P_\sigma$. Par conséquent, G_σ est inclus dans $\{e_1, e_2, e_3\} \cup P_\sigma \setminus \{0\}$. Réciproquement, comme σ est terminal et $P_\sigma \cap \sigma$ est invariant par la symétrie de centre $(e_1 + e_2 + e_3)/2$, $\{e_1, e_2, e_3\} \cup P_\sigma \setminus \{0\}$ est inclus dans $\sigma \cap N \cap l_\sigma^{-1}([1; 2[)$. De nouveau parce que σ est terminal, tout point n de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$ vérifie $l_\sigma(n) \geq 1$. Par conséquent, $\sigma \cap N \cap l_\sigma^{-1}([1; 2[)$ est inclus dans G_σ . Finalement, P_σ contient μ_σ éléments, donc G_σ en contient $\mu_\sigma + 2$.

(ii) Par la forme linéaire $\mu_\sigma l_\sigma$, l'image d'un élément de N est entière car μ_σ est en fait le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs e_1, e_2, e_3 dans une base de N . On obtient donc un homomorphisme de groupes $\mu_\sigma l_\sigma$ de N dans \mathbf{Z} . Il induit un homomorphisme f de N dans $\mathbf{Z}/\mu_\sigma \mathbf{Z}$. Le noyau de f se réduit au sous-groupe de N engendré par $\{e_1, e_2, e_3\}$. En effet, si n est un élément du noyau de f alors $l_\sigma(n)$ est un entier et $n - l_\sigma(n)e_1$ appartient à $N \cap \text{Ker } l_\sigma$. Or, le triangle $[e_1; e_2; e_3]$ étant élémentaire, $(e_2 - e_1, e_3 - e_1)$ engendre $N \cap \text{Ker } l_\sigma$, d'où le résultat. Puisque l'indice du sous-groupe $\bigoplus_{i=1}^3 \mathbf{Z}e_i$ de N est μ_σ , f est surjectif.

Finalement, la restriction à P_σ de la surjection $N \rightarrow N / \bigoplus_{i=1}^3 \mathbf{Z}e_i$ est bijective. De plus, par (i) on a $G_\sigma \setminus \text{Sk}^1 \sigma = P_\sigma \setminus \{0\}$. La restriction de l'application f à $G_\sigma \setminus \text{Sk}^1 \sigma$ donne donc une correspondance bijective entre $G_\sigma \setminus \text{Sk}^1 \sigma$ et $\mathbf{Z}/\mu_\sigma \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. ■

PROPOSITION 2.2. *Soit σ un cône fortement convexe de dimension 3 et Σ_t une subdivision simpliciale terminale minimale de σ . On a*

$$G_\sigma = \bigcup_{\tau \in \Sigma_t} G_\tau.$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $G_\sigma \subset \bigcup_{\tau \in \Sigma_t} G_\tau$ est immédiate. Réciproquement, soit τ un cône de Σ_t et v un point de G_τ . Le cône τ est inclus dans un cône γ de dimension 3 de la subdivision canonique Σ_C de σ (1.7). Le cône γ est engendré par une face F de

C dont l'hyperplan d'appui ne contient pas 0. Pour une telle face F , il existe un élément l_F de $M_{\mathbf{Q}}$ tel que $C \subset l_F^{-1}([1; +\infty[$ et $F = l_F^{-1}(\{1\}) \cap C$. Comme les vecteurs extrémaux de τ sont sur F , on a $l_\tau = l_F$. Par ailleurs, on a $l_\tau(v) < 2$. Comme pour tout point n de $\sigma \cap N \setminus \{0\}$, on a $l_F(n) \geq 1$, v appartient à G_σ . ■

Avant d'énoncer un corollaire des deux propositions précédentes nous rappelons la notion de *discordance* ("discrepancy") d'un morphisme (voir [19, appendice 1] et [20, 0.2]). Soit X une variété normale. Soit U un ouvert non singulier de X dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à 2 et i l'inclusion de U dans X . Soit ω_U le faisceau inversible des différentielles régulières sur U . On définit $\omega_X := i_*(\omega_U)$. Sur X , il existe un diviseur de Weil K_X tel que le faisceau $\mathcal{O}_X(K_X)$ soit isomorphe à ω_X . On dit que la variété X est d'indice fini ou encore \mathbf{Q} -Gorenstein s'il existe un entier r tel que rK_X soit un diviseur de Cartier.

DÉFINITION 2.3. Soit X une variété d'indice fini et $f : Y \rightarrow X$ une désingularisation de X . La *discordance* du morphisme f est le \mathbf{Q} -diviseur de Cartier Δ , à support dans le lieu exceptionnel de f , défini par $\Delta = K_Y - f^*K_X$, où K_Y désigne le représentant du diviseur canonique de Y qui vérifie $f^*(\mathcal{O}_X(K_X))|_{Y^0} = \mathcal{O}_Y(K_Y)|_{Y^0}$ pour tout ouvert Y^0 de Y sur lequel la restriction de f est un isomorphisme.

Par exemple, si X est une variété torique associée à un éventail Σ et f une désingularisation de X associée à une subdivision Σ' de Σ alors ω_Y est isomorphe au sous-faisceau $\mathcal{O}_Y(-\sum_{v \in \text{Sk}^1 \Sigma'} D_v)$ de $k(Y)$, la variété X est d'indice fini si et seulement si tous les cônes de Σ le sont, et la discordance de f est le diviseur $\Delta = K_Y - f^*K_X$ où $K_X = -\sum_{v \in \text{Sk}^1 \Sigma} D_v$ et $K_Y = -\sum_{v \in \text{Sk}^1 \Sigma'} D_v$.

COROLLAIRE 2.4. Soit V une variété associée à un cône de dimension 3 fortement convexe σ dans $N_{\mathbf{Q}}$ et x un point du système générateur minimal G_σ . Pour toute désingularisation $w : W \rightarrow V_{\text{can}}$ associée à une subdivision régulière Σ de la subdivision canonique Σ_C de σ telle que x soit un vecteur extrémal de Σ , le coefficient du diviseur D_x dans la discordance du morphisme w est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $[0; 1[$.

DÉMONSTRATION. Notons l l'application définie sur σ , à valeurs dans \mathbf{Q} , qui coïncide avec la forme linéaire l_γ sur chaque cône γ de la subdivision canonique Σ_C de σ . Alors on a

$$K_{V_{\text{can}}} = - \sum_{v \in \text{Sk}^1 \Sigma_C} l(v) D_v$$

et

$$K_W - w^*K_{V_{\text{can}}} = \sum_{v \in \text{Sk}^1 \Sigma} (l(v) - 1) D_v .$$

Si x est un point de G_σ alors $l(x)$ appartient à l'intervalle $[1; 2[$, d'où la conclusion. ■

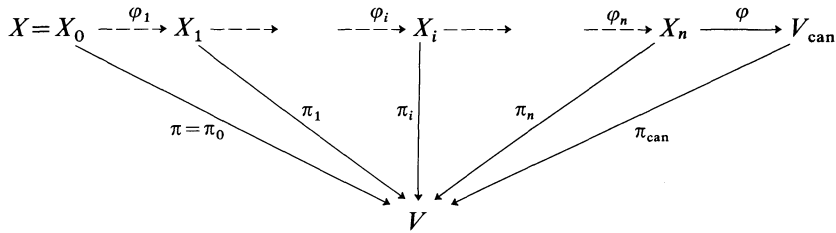
Les points du système générateur minimal G_σ définissent des diviseurs essentiels équivariants relativement à V (théorème 1.10). Nous considérons maintenant des désingularisations non nécessairement équivariantes de V . Pour le résultat suivant on suppose que le corps de base est \mathbb{C} .

THÉOREME 2.5. *Soit V une variété de dimension 3 associée à un cône σ fortement convexe. Tout point x du système générateur minimal G_σ définit un diviseur essentiel relativement à V .*

DÉMONSTRATION. Notons $\rho: V_{\langle x \rangle} \rightarrow V$ le morphisme birationnel équivariant défini par l'inclusion $\langle x \rangle \subset \sigma$. Si $\pi: X \rightarrow V$ est une désingularisation de V , alors l'application birationnelle $\pi^{-1} \circ \rho$ est définie au point générique de $\mathcal{O}_{\langle x \rangle}$, par le critère valuatif de propreté appliqué à π . La valuation v_x de $k(V)$ définie par le diviseur $\mathcal{O}_{\langle x \rangle}$ est donc centrée sur X . Il s'agit de montrer que la codimension de ce centre est 1.

Il suffit de considérer le cas où π est un morphisme projectif. En effet, s'il existait une désingularisation $\pi: X \rightarrow V$ tel que le centre de v_x sur X soit de codimension strictement supérieure à 1, on pourrait construire une désingularisation $\pi': X' \rightarrow V$ projective ainsi: soit U un ouvert affine de X contenant le point générique du centre de v_x , il existe une immersion ouverte $i: U \rightarrow Z$ et un morphisme projectif $f: Z \rightarrow V$ tels que $\pi|_U = f \circ i$, ensuite on désingularise Z par une suite finie d'éclatements dont les centres ne rencontrent pas $i(U)$. Le centre de v_x sur X' serait lui-aussi de codimension strictement supérieure à 1.

Supposons que le morphisme π est projectif. Alors (cf. [14, théorèmes 0.3.5, 0.3.10 et 0.3.12]) on a un diagramme commutatif



où chaque variété X_i a au plus des singularités \mathbf{Q} -factorielles terminales, chaque morphisme π_i est projectif et birationnel, chaque application birationnelle φ_i est soit une contraction divisorielle élémentaire (c'est-à-dire le morphisme de contraction déterminé par une arête extrémale du cône des courbes $NE(X_{i-1}/V)$ au sens de [11, 3.2.3 et 5.1.6]), soit un flip dirigé (au sens de [11, 5.1.10]). La variété X_n est un modèle terminal minimal de V et φ est le morphisme déterminé par le système linéaire $|\mu K_{X_n}|$ pour un entier μ suffisamment grand.

Chaque variété X_i étant d'indice fini, la discordance d'une désingularisation de X_i est bien définie. D'autre part, il existe une désingularisation $g_i: Z_i \rightarrow X_i$ telle que le centre

de la valuation v_x sur Z_i soit une sous-variété D_i de codimension 1 (on l'obtient au besoin en éclatant le centre de v_x sur Z_i après l'avoir désingularisé et en répétant ce procédé). Le coefficient a_i de D_i dans la discordance du morphisme g_i est alors indépendant de la désingularisation de X_i considérée. Par contre, pour $1 \leq i \leq n$, on a $a_{i-1} \leq a_i$. La croissance du coefficient de discordance a_i lors d'un flip dirigé $\varphi_i: X_{i-1} \dashrightarrow X_i$ est établie dans [11, proposition 5.1.11]. Si l'on passe de X_{i-1} à X_i par la contraction $\varphi_i: X_{i-1} \rightarrow X_i$ d'un diviseur intègre F elle résulte de la positivité du coefficient de F dans la discordance du morphisme φ_i , puisque les singularités de X_i sont terminales. Finalement on a $a_0 \leq a_n$.

Puisque x est un élément de G_σ , le coefficient de D_n dans la discordance du morphisme $\varphi \circ g_n$ est un rationnel de l'intervalle $[0; 1[$. La discordance du morphisme φ étant nulle, ce coefficient est encore a_n . Or le coefficient a_0 du diviseur D_0 dans la discordance de g_0 est un entier positif, parce que X est lisse. De plus, il est inférieur ou égal à a_n . Il est donc nul et toujours parce que X est lisse, l'image de D_0 sur X est de codimension 1. ■

PROPOSITION 2.6. *Soit σ un cône terminal simplicial de dimension 3 non régulier, de multiplicité μ_σ et soit l_σ l'élément de $M_{\mathbb{Q}}$ défini dans la proposition 2.1.*

(i) *Il existe un unique point x_σ de $\sigma \cap N$ dans $l_\sigma^{-1}(]1; 1 + 1/\mu_\sigma])$ et on a*

$$l_\sigma(x_\sigma) = 1 + \frac{1}{\mu_\sigma} .$$

En particulier, x_σ appartient à G_σ .

(ii) *Pour toute subdivision élémentaire Σ de σ centrée en un point x de $\sigma \cap N$ primitif, non extrémal, on a*

$$\sum_{\tau \in \Sigma^{(3)}} \mu_\tau \geq \mu_\sigma + 1$$

où $\Sigma^{(3)}$ désigne l'ensemble des cônes de dimension 3 de Σ .

On a égalité si et seulement si $x = x_\sigma$.

DÉMONSTRATION. (i) Par la proposition 2.1, $P_\sigma \setminus \{0\}$ est inclus dans $l_\sigma^{-1}(]1; 2[)$, et $P_\sigma \setminus \{0\}$ contient $\mu_\sigma - 1$ points x_k , $1 \leq k \leq \mu_\sigma - 1$ vérifiant

$$l_\sigma(x_k) = 1 + \frac{k}{\mu_\sigma} , \quad 1 \leq k \leq \mu_\sigma - 1 .$$

Puisque de plus on a $l_\sigma^{-1}(]1; 2[) \cap \sigma \cap N = P_\sigma \setminus \{0\}$, x_1 est l'unique point de $\sigma \cap N$ appartenant à $l_\sigma^{-1}(]1; 1 + 1/\mu_\sigma])$, on le notera x_σ .

(ii) Soit x un vecteur primitif de $\sigma \cap N$, et Σ la subdivision élémentaire de σ centrée en x . Alors on a

$$\sum_{\tau \in \Sigma^{(3)}} \mu_\tau = \mu_\sigma l_\sigma(x) .$$

Or d'après (i), si x n'est pas un vecteur extrémal de σ alors on a $l_\sigma(x) \geq 1 + 1/\mu_\sigma$, et l'égalité n'a lieu que si $x = x_\sigma$. ■

LEMME 2.7. *Soit σ un cône terminal simplicial de dimension 3, non régulier. Soit x_σ l'élément de G_σ vérifiant $l_\sigma(x_\sigma) = 1 + 1/\mu_\sigma$. La subdivision élémentaire de σ centrée en x_σ est formée de cônes terminaux simpliciaux. En itérant pour chaque tel cône terminal simplicial non régulier la subdivision centrée du type précédent, on obtient en un nombre fini de pas une G -subdivision régulière de σ .*

DÉMONSTRATION. Le tétraèdre de sommets e_1, e_2, e_3, x_σ est élémentaire par la proposition précédente. Par conséquent, tous les cônes de la subdivision de σ centrée en x_σ sont terminaux. Comme les faces de σ sont simpliciales, ils sont également simpliciaux. On peut donc itérer la construction pour chaque cône σ' non régulier (de dimension 3) obtenu. Comme x_σ appartient à l'intérieur de σ' , la subdivision élémentaire de σ' centrée en x_σ préserve les faces de σ' . On obtient donc une nouvelle subdivision de σ en remplaçant σ' par les nouveaux cônes de sa subdivision élémentaire centrée en x_σ .

Une subdivision régulière de σ contient au moins $\text{Card}(G_\sigma) = \mu_\sigma + 2$ arêtes. Dans chaque subdivision élémentaire centrée, on ajoute une seule arête. Puisqu'au départ on a trois arêtes, il faut au moins $\mu_\sigma - 1$ subdivisions élémentaires centrées pour obtenir une subdivision régulière de σ .

Dans chaque subdivision, on ajoute deux cônes de dimension 3, car le centre de la subdivision élémentaire appartient à l'intérieur du cône que l'on subdivise. Au bout de $\mu_\sigma - 1$ subdivisions élémentaires centrées, on obtient donc une subdivision Σ de σ qui contient $1 + 2(\mu_\sigma - 1)$ cônes de dimension 3. Par la proposition 2.6 (ii), on a aussi, pour une subdivisions Σ ainsi construite,

$$\sum_{\tau \in \Sigma^{(3)}} \mu_\tau = \mu_\sigma + (\mu_\sigma - 1).$$

Par conséquent, le nombre des cônes de dimension 3 de Σ est égal à la somme des multiplicités de ces cônes. Comme chacune des multiplicités est un entier strictement positif, chaque cône a pour multiplicité 1 et Σ est régulière.

En particulier, les $\mu_\sigma + 2$ points de G_σ figurent parmi les vecteurs extrémaux de Σ et, puisque Σ contient exactement $\mu_\sigma + 2$ arêtes, c'est une G -subdivision régulière de σ . ■

REMARQUE 2.8. La G -subdivision régulière de σ précédente ne dépend d'aucun choix à cause de l'unicité du point x_σ (proposition 2.6 (i)) et de l'indépendance des différentes subdivisions élémentaires de cette construction.

THÉORÈME 2.9. *Soit V une variété torique affine de dimension 3, et V_1 un modèle \mathbf{Q} -factoriel terminal minimal torique de V . On obtient une G -désingularisation de V à partir de V_1 par des éclatements élémentaires successifs.*

DÉMONSTRATION. Soit σ un cône fortement convexe de dimension 3 et Σ_1 une

subdivision simpliciale terminale minimale de σ . On construit une G -subdivision régulière de σ à partir de Σ_τ comme suit.

Pour chaque cône non régulier τ de Σ_τ , on obtient une G -subdivision régulière de τ en effectuant des subdivisions centrées successives en des points de N intérieurs à τ (lemme 2.7). Comme ces subdivisions n'affectent pas les faces de τ , on peut appliquer cette construction simultanément à tous les cônes non réguliers de Σ_τ . On désigne par Σ_τ la subdivision régulière qui en résulte. Alors on a, par le lemme 2.7 et la proposition 2.6 (i),

$$\text{Sk}^1 \Sigma_\tau = \bigcup_{\tau \in \Sigma_\tau} G_\tau$$

et par la proposition 2.2

$$\text{Sk}^1 \Sigma_\tau = G_\sigma .$$

■

REMARQUE 2.10. Si V est une variété torique de dimension 3 qui n'a que des singularités terminales \mathbf{Q} -factorielles, alors sa G -désingularisation est unique. En effet, les cônes terminaux simpliciaux non réguliers de dimension 3 sont d'indice > 1 par la proposition 2.14 (i) plus loin, et l'unicité de leur G -subdivision régulière résulte du théorème 2.23. La G -subdivision régulière d'un éventail terminal simplicial que nous construisons ici coïncide donc avec la subdivision minimale obtenue par Danilov dans [4], dont la construction repose sur le théorème de White [23]. Ce résultat de White sur les tétraèdres élémentaires n'est pas utilisé dans la démonstration précédente.

DÉFINITION 2.11. Soit Σ un éventail simplicial de $N_{\mathbf{Q}}$. On définit le *volume* $v(\Sigma)$ de Σ :

$$v(\Sigma) := \sum_{\tau \in \Sigma^{(d)}} \mu_\tau$$

où $d = \dim_{\mathbf{Q}} N_{\mathbf{Q}}$, $\Sigma^{(d)}$ désigne l'ensemble des cônes de dimension d de Σ et μ_τ la multiplicité du cône τ .

Dans la construction du lemme 2.7, on a effectué les subdivisions centrées d'un éventail simplicial terminal donné qui augmentent le volume du profil de façon minimale (proposition 2.6 (ii)). En fait, une G -subdivision régulière d'un cône de dimension 3 vérifie les propriétés de minimalité suivantes:

PROPOSITION 2.12. Soit σ un cône fortement convexe de dimension 3 et Σ une G -subdivision régulière de σ .

(i) Si Σ' est une subdivision régulière de σ alors on a $v(\Sigma') \geq v(\Sigma)$ et on a égalité si et seulement si Σ' est une G -subdivision régulière de σ .

(ii) Si Σ' est une subdivision simpliciale de σ telle que $\text{Sk}^1 \Sigma' = G_\sigma$ alors on a $v(\Sigma') \geq v(\Sigma)$ et on a égalité si et seulement si Σ' est régulière.

En particulier, toutes les G -subdivisions régulières de σ ont le même volume.

DÉMONSTRATION. Le nombre des cônes de dimension 3 d'une subdivision simpliciale de σ ne dépend que du nombre de ses vecteurs extrémaux et du nombre de ceux parmi eux qui appartiennent à l'intérieur δ de σ . En effet, chaque subdivision simpliciale Σ de σ induit une triangulation $\mathcal{F}(\Sigma)$ de la sphère qui porte 0, de centre un point de l'intérieur de σ . Les $s(\Sigma)$ sommets de $\mathcal{F}(\Sigma)$ correspondent à 0 d'une part et aux vecteurs extrémaux de Σ d'autre part. On a donc

$$s(\Sigma) = \text{Card}(\text{Sk}^1 \Sigma) + 1 .$$

Les $f(\Sigma)$ faces de dimension 2 de $\mathcal{F}(\Sigma)$ sont données d'une part par les cônes de dimension 3 de Σ , d'autre part par les cônes de dimension 2 de Σ contenus dans les faces strictes de σ . Le nombre de ces derniers est égal au nombre des vecteurs extrémaux de Σ appartenant aux faces strictes de σ . On a donc

$$\text{Card}(\Sigma^{(3)}) + \text{Card}(\text{Sk}^1 \Sigma \setminus (\delta \cap \text{Sk}^1 \Sigma)) = f(\Sigma) .$$

Si $a(\Sigma)$ désigne le nombre des arêtes de $\mathcal{F}(\Sigma)$, on a

$$f(\Sigma) - a(\Sigma) + s(\Sigma) = \chi(S^2) = 2 .$$

Comme chaque arête de $\mathcal{F}(\Sigma)$ est contenue dans deux faces de $\mathcal{F}(\Sigma)$ et chaque face contient trois arêtes, on a $a(\Sigma) = 3f(\Sigma)/2$, d'où $f(\Sigma) = 2s(\Sigma) - 4$, puis

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Sigma^{(3)}) &= 2 \text{Card}(\text{Sk}^1 \Sigma) - \text{Card}(\text{Sk}^1 \Sigma \setminus (\delta \cap \text{Sk}^1 \Sigma)) - 2 \\ &= \text{Card}(\text{Sk}^1 \Sigma) + \text{Card}(\delta \cap \text{Sk}^1 \Sigma) - 2 . \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit alors de savoir qu'un cône simplicial est régulier si et seulement si sa multiplicité est 1. ■

DÉFINITION 2.13. Soit γ un cône canonique. Son profil coïncide avec celui de l'une quelconque de ses subdivisions terminales minimales Σ_γ . On définit son volume

$$v(\gamma) := v(\Sigma_\gamma) .$$

Il est bien défini car $v(\Sigma_\gamma)$ ne dépend que de $\text{Card}(G_\gamma)$ et de $\text{Card}(\Sigma_\gamma^{(3)})$ (par les propositions 2.1 (i) et 2.2), et le dernier est déterminé par \mathcal{A}_γ (remarque 1.7) par la démonstration précédente.

Soit σ un cône fortement convexe et Σ_C sa subdivision canonique. On définit son volume

$$v(\Sigma_C) := \sum_{\gamma \in \Sigma_C^{(3)}} v(\gamma) .$$

C'est le volume de l'une quelconque des subdivisions simpliciales terminales minimales de σ .

PROPOSITION 2.14. (i) Soit γ un cône canonique de dimension 3 d'indice ρ et Σ_γ une subdivision simpliciale terminale minimale de γ . Alors les cônes de dimension 3 de Σ_γ

sont tous de multiplicité ρ , donc réguliers si $\rho=1$. Par suite on a

$$v(\gamma) = \rho \text{ Card}(\Sigma_i^{(3)}).$$

(ii) Soit σ un cône fortement convexe de dimension 3 et Σ_C sa subdivision canonique. Soit Σ une G -subdivision régulière de σ . Alors on a

$$v(\Sigma) = \sum_{\gamma \in \Sigma_C^{(3)}} v(\gamma) \frac{2\rho(\gamma) - 1}{\rho(\gamma)}$$

où, pour chaque cône γ de dimension 3 de Σ_C , $\rho(\gamma)$ désigne l'indice de γ .

DÉMONSTRATION. (i) Les vecteurs extrémaux d'un cône τ d'une subdivision simpliciale terminale minimale Σ_i de γ appartiennent à la face $l_\gamma^{-1}(\{1\}) \cap \gamma$ du profil de γ . Pour un tel cône τ de dimension 3 on a donc $l_\tau = l_\gamma$. Comme $\mu_\tau l_\tau$ est un élément de M , μ_τ est un multiple de ρ . Par ailleurs, pour le point x_τ de $\tau \cap N$ on a (proposition 2.6)

$$1 + \frac{1}{\mu_\tau} = l_\tau(x_\tau) = l_\gamma(x_\tau).$$

Comme $\rho l_\gamma(x_\tau)$ est un entier, ρ est un multiple de μ_τ . Finalement, on a $\rho = \mu_\tau$.

(ii) Soit Σ_τ une G -subdivision régulière de σ construite à partir d'une subdivision simpliciale terminale minimale Σ_i de Σ_C selon le procédé décrit par le théorème 2.9. La subdivision Σ_τ induit une subdivision $\Sigma_{\tau|_\tau}$ de chaque cône τ de Σ_i . Si τ est un cône de dimension 3 de Σ_i non régulier, elle est décrite par le lemme 2.7 et on a

$$v(\Sigma_{\tau|_\tau}) = 2\mu_\tau - 1.$$

Cette égalité est encore vraie si τ est régulier de dimension 3.

Par conséquent, en utilisant (i) on a

$$\begin{aligned} v(\Sigma_\tau) &= \sum_{\gamma \in \Sigma_C^{(3)}} \text{Card}(\Sigma_i^{(3)}|_\gamma) (2\rho(\gamma) - 1) \\ &= \sum_{\gamma \in \Sigma_C^{(3)}} \frac{v(\gamma)}{\rho(\gamma)} (2\rho(\gamma) - 1) \end{aligned}$$

où $\Sigma_i|_\gamma$ désigne la subdivision de γ induite par Σ_i .

Ensuite, pour toute G -subdivision régulière Σ de σ on a $v(\Sigma) = v(\Sigma_\tau)$, par la proposition précédente. ■

COROLLAIRE 2.15. *Si γ est un cône de dimension 3 d'indice 1 et V_γ la variété affine associée alors γ est canonique et les modèles \mathcal{Q} -factoriels terminaux minimaux de V_γ sont ses G -désingularisations.*

DÉMONSTRATION. Les points entiers non nuls du profil de γ appartiennent à l'hyperplan $l_\gamma^{-1}(1)$. Le cône γ est donc canonique. Soit Σ_i une subdivision simpliciale terminale minimale de γ . Les cônes de Σ_i sont tous de multiplicité 1 par la proposition

2.14 et donc réguliers. De plus, les vecteurs extrémaux de Σ_t appartiennent à G_γ par la proposition 1.6. Par conséquent Σ_t est une G -subdivision régulière de γ et G_γ est réduit à l'ensemble des vecteurs extrémaux de Σ_t . On a donc $G_\gamma = l_\gamma^{-1}(1) \cap \gamma \cap N$ et toute G -subdivision régulière de γ est une subdivision simpliciale terminale minimale de γ . ■

DÉFINITION 2.16. Nous appellerons *transformation élémentaire* un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & \bar{X} & \end{array}$$

où X , X' et \bar{X} sont des variétés toriques de dimension 3 associées respectivement à des éventails Σ , Σ' et $\bar{\Sigma}$ vérifiant les conditions suivantes:

- les éventails Σ et Σ' sont terminaux simpliciaux;
- l'éventail Σ contient un cône de dimension 2, $w = \langle e_1, e_2 \rangle$ tel que les vecteurs extrémaux e_1, e_2, e_3, e_4 des deux cônes de dimension 3 qui ont w pour face vérifient $e_1 + e_2 = e_3 + e_4$.
- l'éventail $\bar{\Sigma}$ (resp. Σ') est obtenu à partir de Σ en remplaçant les cônes $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, $\langle e_1, e_2, e_4 \rangle$, $\langle e_1, e_2 \rangle$ de Σ par le cône $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ (resp. par les cônes $\langle e_1, e_3, e_4 \rangle$, $\langle e_2, e_3, e_4 \rangle$, $\langle e_3, e_4 \rangle$).

On vérifie facilement qu'une telle transformation élémentaire est un D_{e_1} -flop tel qu'il est défini dans [13], puis que tous les flops d'une variété torique \mathbf{Q} -factorielle terminale de dimension 3 sont de ce type.

Le résultat obtenu par Danilov dans [4 lemme 2.1] pour des éventails réguliers s'étend de façon immédiate à des éventails simpliciaux terminaux:

PROPOSITION (Danilov). Soient Σ et Σ' deux éventails terminaux simpliciaux de dimension 3, et X et X' les variétés associées à Σ et Σ' . Si Σ et Σ' ont le même profil, alors X et X' sont reliées par une suite finie de transformations élémentaires.

En particulier, deux modèles \mathbf{Q} -factoriels terminaux minimaux d'une même variété V associée à un cône σ sont reliés par une suite finie de flop. Le profil de l'une quelconque des subdivisions simpliciales terminales minimales de σ est en effet celui de sa subdivision canonique.

Nous envisageons maintenant le cas des cônes canoniques d'indice strictement supérieur à 1. Nous reprenons l'étude faite dans [9] par Ishida et Iwashita. Les démonstrations que nous indiquons ici utilisent la description du système générateur minimal d'un cône terminal simplicial donnée dans la proposition 2.1.

PROPOSITION 2.17. Soit V une variété associée à un cône canonique γ de dimension

3 d'indice > 1 . Il n'existe pas de transformation élémentaire d'un modèle \mathcal{Q} -factoriel terminal minimal de V . La variété V a donc un unique modèle \mathcal{Q} -factoriel terminal minimal.

DÉMONSTRATION. Soit γ un cône canonique d'indice $\rho > 1$ de dimension 3. Supposons que le polygone $\gamma \cap l_\gamma^{-1}(\{1\})$ contienne un parallélogramme élémentaire $P = [x_1; x_2; x_3; x_4]$ dont les sommets sont dans N et les diagonales distinctes. Les cônes $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ et $\langle x_1, x_4, x_3 \rangle$ sont alors terminaux simpliciaux de multiplicité ρ (proposition précédente (i)). Par la proposition 2.1, chacun des triangles

$$T_2 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \cap l_\gamma^{-1} \left(\left\{ 2 - \frac{1}{\rho} \right\} \right)$$

et

$$T_4 = \langle x_1, x_4, x_3 \rangle \cap l_\gamma^{-1} \left(\left\{ 2 - \frac{1}{\rho} \right\} \right)$$

contient exactement un point du réseau N et leur réunion $T_4 \cup T_2 = \square_{2\rho-1}$ en contient exactement deux.

En fait, par des considérations élémentaires sur les réseaux, on trouve quatre points de N distincts dans le parallélogramme $\square_{2\rho-1}$. Le triangle $[x_1; x_2; x_4]$ est élémentaire. Son translaté $[0; x_2 - x_1, x_4 - x_1]$ l'est donc aussi et $(x_2 - x_1, x_4 - x_1)$ se complète en une base $(x_0, x_2 - x_1, x_4 - x_1)$ de N . La première coordonnée de x_1 dans cette base est la multiplicité ρ du cône $\langle x_1, x_2, x_4 \rangle$. Soient b et d les deux autres, de sorte que l'on a

$$x_1 = \rho x_0 + b(x_2 - x_1) + d(x_4 - x_1), \quad b, d \in \mathbf{Z}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \square_{2\rho-1} &= \left\{ \left(2 - \frac{1}{\rho} \right) x_1 + \left(2 - \frac{1}{\rho} \right) \beta (x_2 - x_1) + \left(2 - \frac{1}{\rho} \right) \delta (x_4 - x_1); 0 \leq \beta, \delta \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (2\rho - 1)x_0 + \left(2 - \frac{1}{\rho} \right) (b + \beta)(x_2 - x_1) + \left(2 - \frac{1}{\rho} \right) (\delta + d)(x_4 - x_1); 0 \leq \beta, \delta \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

On définit quatre entiers $\mu_i, i = 1, 2$ et $\nu_j, j = 1, 2$ par

$$0 \leq \mu_1 \leq \rho - 1 \quad \text{et} \quad \mu_1 \equiv b(\rho)$$

$$0 \leq \nu_1 \leq \rho - 1 \quad \text{et} \quad \nu_1 \equiv d(\rho)$$

$$\mu_2 = \mu_1 + \rho$$

$$\nu_2 = \nu_1 + \rho.$$

Soient $\beta_i = \mu_i / (2\rho - 1), i = 1, 2$, et $\delta_j = \nu_j / (2\rho - 1), j = 1, 2$, alors les couples (β_i, δ_j) pour $i, j = 1, 2$ définissent quatre points distincts de N dans le parallélogramme $\square_{2\rho-1}$. D'où une contradiction. ■

LEMME 2.18. *Soit γ un cône canonique de dimension 3 d'indice > 1 de $N_{\mathbf{Q}}$. Si le polygone $\gamma \cap l_{\gamma}^{-1}(\{1\})$ contient deux segments élémentaires $[e_1; e_2]$ et $[e'_1; e'_2]$ avec $e_1, e_2, e'_1, e'_2 \in N$ et $e_1 + e_2 = e'_1 + e'_2$, alors on a $[e_1; e_2] = [e'_1; e'_2]$.*

DÉMONSTRATION. On considère l'ensemble A des parallélogrammes contenus dans $[e_1; e'_1; e_2; e'_2]$ dont les sommets appartiennent à N , dont le centre est $(e_1 + e_2)/2$ et dont les diagonales ne sont pas portées par une même droite.

Supposons que A soit non vide. Comme A est un ensemble fini, l'un de ses éléments est alors minimal pour l'inclusion. Un tel parallélogramme P_0 est élémentaire. En effet, son centre n'appartient pas à N car le segment $[e_1; e_2]$ est élémentaire. Donc si P_0 contenait un point x de N autre que ses sommets, son symétrique x' par rapport au centre $(e_1 + e_2)/2$ serait un point de P_0 distinct de x . D'où un parallélogramme appartenant à A , de sommets x, x' et deux des sommets opposés de P_0 , contenu dans P_0 et strictement plus petit que P_0 . Ce qui contredit la minimalité de P_0 .

Or, par la proposition précédente, le polygone $\gamma \cap l_{\gamma}^{-1}(\{1\})$ ne contient pas de parallélogramme élémentaire à sommets dans N dont les diagonales sont distinctes. Par suite A est vide. En particulier le parallélogramme $[e_1; e'_1; e_2; e'_2]$ n'appartient pas à A . Les points e_1, e'_1, e_2, e'_2 sont donc alignés et comme les segments $[e_1; e_2]$ et $[e'_1; e'_2]$ sont élémentaires, on a bien $[e_1; e_2] = [e'_1; e'_2]$. ■

DÉFINITION 2.19. Soit Σ un éventail de $N_{\mathbf{Q}}$ et σ un cône de $N_{\mathbf{Q}}$. On note $\Sigma|_{\sigma}$ l'ensemble des cônes de Σ contenus dans σ .

REMARQUE 2.20. L'ensemble de cônes $\Sigma|_{\sigma}$ ainsi défini est encore un éventail. C'est une subdivision de σ si et seulement si son support $\bigcup_{\tau \in \Sigma|_{\sigma}} \tau$ est σ tout entier.

LEMME 2.21. *Soient Σ et Σ' deux éventails de $N_{\mathbf{Q}}$ dont les supports sont confondus et de dimension pure d . L'éventail Σ' est une subdivision de Σ si et seulement si pour chaque cône w de codimension 1 (ou mur) de Σ l'éventail $\Sigma'|_w$ est une subdivision de w .*

DÉMONSTRATION. Si Σ' est une subdivision de Σ alors pour tout cône σ' de Σ' et tout mur w de Σ , $\sigma' \cap w$ est une face de σ' et appartient donc à $\Sigma'|_w$. Par conséquent $\Sigma'|_w$ est une subdivision de w .

Réciproquement, soit σ' un cône de Σ' distinct de $\{0\}$. On considère un point v appartenant à l'intérieur $\mathring{\sigma}'$ de σ' , et un cône σ de dimension maximale d de Σ qui contient v . Alors σ contient σ' . Sinon, il existerait un point v' de σ' hors de σ et le segment $[v; v']$ couperait une face w de codimension 1 de σ en un point P distinct de v' . L'éventail $\Sigma'|_w$ a pour support w donc l'un des cônes de dimension maximale de $\Sigma'|_w$, w' , contient P . Le cône $w' \cap \sigma'$ est une face de σ' qui contient P . Comme v' n'appartient pas à w' , $w' \cap \sigma'$ est une face stricte de σ' . Cette face de σ' ne contient donc ni v , ni v' , et elle est donnée par un élément l de $M_{\mathbf{Q}}$ tel que $l(P) = 0$, $l(v') > 0$ et $l(v) > 0$. Comme P appartient au segment $[v; v']$, on obtient là une contradiction. ■

THÉORÈME 2.22. *Toute G -désingularisation d'une variété V associée à un cône*

fortement convexe de dimension 3 domine un modèle \mathbf{Q} -factoriel terminal minimal de V .

DÉMONSTRATION. Soit σ un cône de dimension 3 fortement convexe et Σ une G -subdivision régulière de σ . On vérifie tout d'abord que Σ est une subdivision de Σ_C . Pour cela, on montre que si w est un mur de Σ_C et W sa subdivision régulière minimale (proposition 1.8) alors chaque cône de W appartient à Σ . On conclut grâce au lemme 2.21.

Soit $\langle e_1, e_2 \rangle$ un cône de la subdivision régulière minimale W d'un mur $w = \langle n_1, n_2 \rangle$ de Σ_C , où e_1, e_2, n_1, n_2 sont primitifs. Le point $e_1 + e_2$ appartient à un cône de dimension 3 de Σ dont les vecteurs extrémaux $v_i, 1 \leq i \leq 3$, forment une base de N , et donc au semi-groupe engendré par v_1, v_2 et v_3 . On note a, b, c les entiers tels que $e_1 + e_2 = av_1 + bv_2 + cv_3$. On peut supposer $a \geq b \geq c$.

Comme le segment $[n_1; n_2]$ est une face de $C = \text{Conv}(\sigma \cap N \setminus \{0\})$, il existe une forme linéaire l_w de $M_{\mathbf{Q}}$ telle que $C \cap l_w^{-1}(\{1\}) = [n_1; n_2]$ et $l_w(C) \subset [1; +\infty[$. Comme e_1 et e_2 appartiennent au segment $[n_1; n_2]$ on a $l_w(e_1 + e_2) = 2$. D'autre part $l_w(av_1 + bv_2 + cv_3) \geq a + b + c$, d'où $a + b + c \leq 2$ et $c = 0$. De plus, b n'est pas nul. Sinon, $\langle e_1 + e_2 \rangle = \langle v_1 \rangle$ serait une arête de Σ et comme $\langle e_1, e_2 \rangle$ est régulier, $e_1 + e_2$ serait extrémal pour Σ , ce qui est impossible puisqu'il n'appartient pas à G_{σ} . Il vient $e_1 + e_2 = v_1 + v_2$ et $l_w(v_i) = 1, i = 1, 2$. Par conséquent v_1 et v_2 appartiennent au segment $[n_1; n_2]$, et $e_1 = v_1$ ou $e_2 = v_1$.

Soit F une face de C . Alors Σ induit une subdivision régulière $\Sigma|_{\langle F \rangle}$ du cône $\langle F \rangle$ engendré par F . Par conséquent, $G_{\sigma} \cap \langle F \rangle$ contient $G_{\langle F \rangle}$ et comme l'inclusion inverse est évidemment vraie, on a $G_{\langle F \rangle} = G_{\sigma} \cap \langle F \rangle$ et $\Sigma|_{\langle F \rangle}$ est en fait une G -subdivision régulière de $\langle F \rangle$.

Si $\langle F \rangle$ est un cône d'indice 1 de Σ_C , alors ses G -subdivisions régulières sont exactement ses subdivisions simpliciales terminales minimales (corollaire 2.15).

Si $\langle F \rangle$ est un cône d'indice > 1 de Σ_C alors toute G -subdivision régulière Σ' de $\langle F \rangle$ est une subdivision de l'unique subdivision simpliciale terminale minimale $\Sigma_{t,F}$ de $\langle F \rangle$ (proposition 2.17).

En effet, soit w un mur de $\Sigma_{t,F}$, de vecteurs extrémaux e_1 et e_2 . Alors $e_1 + e_2$ appartient à un cône de dimension 3 de Σ' de vecteurs extrémaux $v_i, 1 \leq i \leq 3$. On a $e_1 + e_2 = av_1 + bv_2 + cv_3$ avec $a, b, c \in \mathbf{N}$ et $a \geq b \geq c \geq 0$. Par ailleurs, $l_F(e_1) = l_F(e_2) = 1$ et $l_F(v_i) \geq 1, 1 \leq i \leq 3$. D'où $a + b + c \leq 2$ et $c = 0$. Le cône w est terminal de dimension 2, il est donc régulier et $e_1 + e_2$ est primitif. Comme le vecteur $e_1 + e_2$ n'appartient pas à $G_{\langle F \rangle}$ il n'est pas extrémal pour Σ' . Par conséquent b n'est pas nul. On en déduit que $e_1 + e_2 = v_1 + v_2$ et que v_1 et v_2 appartiennent à F . Par les lemmes 2.18 et 2.21, les cônes $\langle e_1, e_2 \rangle$ et $\langle v_1, v_2 \rangle$ sont confondus, w est un mur de Σ' , et Σ' est une subdivision de $\Sigma_{t,F}$.

Comme un mur de Σ_C n'a qu'une subdivision terminale minimale (sa subdivision régulière minimale), les subdivisions terminales minimales des cônes $\langle F \rangle$ pour les différentes faces F de C coïncident sur les murs de Σ_C . Par conséquent, la réunion des éventails $\Sigma|_{\langle F \rangle}$ pour les cônes $\langle F \rangle$ d'indice 1 de Σ_C et des éventails $\Sigma_{t,F}$ pour les cônes $\langle F \rangle$ de Σ_C d'indice > 1 est une subdivision simpliciale terminale minimale Σ_t de σ dont

Σ est une subdivision. ■

THÉORÈME 2.23. *Soit V une variété affine associée à un cône de dimension 3 canonique d'indice > 1 . Alors V a une G -désingularisation unique.*

DÉMONSTRATION. Soit γ un cône canonique de dimension 3, d'indice > 1 , et Σ une G -subdivision régulière de γ . Soit Σ_t la subdivision simpliciale terminale minimale de γ (proposition 2.17) et Σ_r la G -subdivision régulière de γ construite à partir de Σ_t selon le procédé décrit dans la démonstration du théorème 2.9. Il suffit de montrer que Σ est une subdivision de Σ_r .

Nous savons par la proposition 2.17 et le théorème 2.22 que Σ et Σ_r sont des subdivisions de Σ_t . Donc pour chaque cône terminal simplicial τ de Σ_t elles induisent des subdivisions régulières $\Sigma|_\tau$ et $\Sigma_r|_\tau$ de τ . Il s'agit de montrer que pour chaque cône τ de Σ_t , $\Sigma|_\tau$ est une subdivision de $\Sigma_r|_\tau$.

Pour cela, il suffit de remarquer que si δ est un cône terminal simplicial non régulier sur lequel Σ induit une subdivision $\Sigma|_\delta$, alors l'éventail $\Sigma|_\delta$ est également une subdivision de la subdivision élémentaire de δ centrée en x_δ (voir proposition 2.6). La subdivision $\Sigma_r|_\tau$ est en effet construite à partir de τ par itération de telles subdivisions élémentaires centrées.

On suppose donc que Σ induit une subdivision $\Sigma|_\delta$ d'un tel cône terminal simplicial non régulier δ , et on montre que chaque mur de la subdivision élémentaire de δ centrée en x_δ est également un mur de $\Sigma|_\delta$. Un tel mur est soit une face de δ , et alors il appartient à $\Sigma|_\delta$, car les faces de δ sont régulières et Σ est une G -subdivision régulière de γ , soit un cône $\langle x_\delta, v \rangle$ pour un vecteur extrémal v de δ .

Comme l'éventail $\Sigma|_\delta$ est une subdivision de δ , le point $x_\delta + v$ appartient à un cône de dimension 3 de $\Sigma|_\delta$, de vecteurs extrémaux v_i , $1 \leq i \leq 3$. On a $x_\delta + v = av_1 + bv_2 + cv_3$ avec $a, b, c \in \mathbb{N}$ et $a \geq b \geq c$. Comme v_1, v_2 et v_3 appartiennent à δ , on a $l_\delta(v_i) \geq 1$, $1 \leq i \leq 3$. D'autre part, on a (proposition 2.6 (i))

$$l_\delta(x_\delta + v) = 2 + \frac{1}{\mu_\delta}.$$

D'où $a + b + c \leq 2 + 1/\mu_\delta$ et $c = 0$. Comme $\langle x_\delta, v \rangle$ est régulier et v_1 appartient à G_γ , b est non nul, et on a $x_\delta + v = v_1 + v_2$ et $l_\delta(v_1) + l_\delta(v_2) = 2 + 1/\mu_\delta$. Si n est un élément de $\delta \cap N$ distinct de x_δ , non nul et non extrémal pour δ , alors on a $l_\delta(n) > 1 + 1/\mu_\delta$. Donc l'un des vecteurs v_1 ou v_2 est égal à x_δ et par suite on a $\langle x_\delta, v \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Nous avons donc vérifié que Σ est une subdivision de Σ_r . Comme par ailleurs Σ_r est un éventail simplicial qui a les mêmes vecteurs extrémaux que Σ , les subdivisions Σ et Σ_r sont confondues. Donc toute G -subdivision régulière de γ coïncide avec l'éventail Σ_r . ■

COROLLAIRE 2.24. *Si $\pi_1 : X_1 \rightarrow V$ et $\pi_2 : X_2 \rightarrow V$ sont deux G -désingularisations d'une variété torique affine V de dimension 3 alors l'application birationnelle $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$*

est une composition de transformations élémentaires.

DÉMONSTRATION. Deux G -subdivisions régulières d'un cône σ de dimension 3 ont le même profil. En effet, ce sont des subdivisions de la subdivision canonique Σ_C de σ , par le théorème 2.22. Elles coïncident sur chaque cône de Σ_C d'indice > 1 (théorème 2.23). Sur un cône de Σ_C d'indice 1, elles induisent deux subdivisions simpliciales terminales minimales qui ont le même profil et par suite $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$ est une composition de transformations élémentaires par le résultat de Danilov. ■

3. Un contre-exemple en dimension quatre. Une variété associée à un cône de dimension 4 n'admet pas nécessairement de G -désingularisation.

EXEMPLE 3.1. Soit σ le cône simplicial de \mathbf{Q}^4 engendré par $e_1=(1, 0, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, 0)$, $e_3=(0, 0, 1, 0)$, $e_4=(1, 3, 4, 7)$. Alors le système générateur minimal G_σ de σ est $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \cup P_\sigma \setminus \{0\}$. Le cône σ est terminal d'indice 1 et n'admet pas de G -subdivision régulière.

Le cône σ n'est pas régulier. Le parallélogramme fondamental P_σ contient six points non nuls x_k , $1 \leq k \leq 6$ avec

$$x_k = \left(\left\lceil \frac{k}{7} \right\rceil - \frac{k}{7} \right) e_1 + \left(\left\lceil \frac{3k}{7} \right\rceil - \frac{3k}{7} \right) e_2 + \left(\left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil - \frac{4k}{7} \right) e_3 + \frac{k}{7} e_4$$

où, pour un rationnel λ , $\lceil \lambda \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à λ . Ces six points se trouvent dans le plan π qui contient $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$, $e_4 + e_2$, $e_4 + e_3$. Ils appartiennent tous au système générateur minimal de σ . Pour chaque k , $1 \leq k \leq 6$ on a $l_\sigma(x_k) = 2$, ce qui montre que σ est terminal d'indice 1. Dans le plan π , on a la disposition de la figure 2.

Par ailleurs, dans l'hyperplan $H = l_\sigma^{-1}(\{2\})$ de \mathbf{Q}^4 , le plan π sépare les points $2e_1$ et $2e_4$ d'une part des points $2e_2$ et $2e_3$ d'autre part. Le parallélogramme $[e_1 + e_3; e_1 + e_2; e_4 + e_2; e_4 + e_3]$ est la trace sur π du tétraèdre $T = H \cap \sigma$.

À partir des faces de σ et des éléments de G_σ on détermine des cônes qui appartiennent

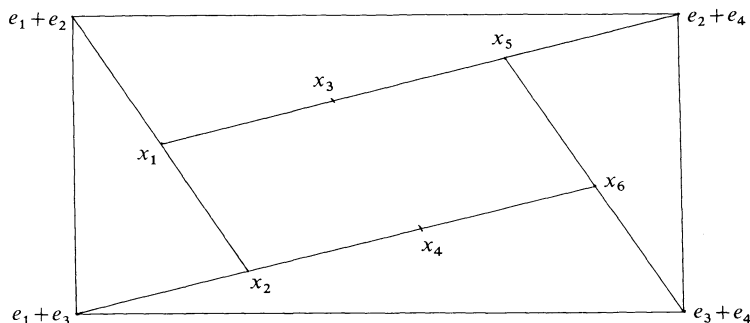


FIGURE 2.

nécessairement à toute G -subdivision régulière de σ :

Par un calcul élémentaire, on trouve, pour k et k' entiers, $1 \leq k, k' \leq 6$

$$\det(e_1, e_2, e_3, x_k) = k$$

$$\det(x_k, e_2, e_3, x_{k'}) = k' - k$$

$$\det(x_k, e_2, e_3, e_4) = 7 - k$$

puis

$$\det(e_1, x_k, e_3, e_4) = 7 + 4k - 7 \left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil$$

$$\det(e_1, x_k, x_{k'}, e_4) = 7 \left(\left\lceil \frac{4k'}{7} \right\rceil - \left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil \right) - 4(k' - k)$$

$$\det(e_1, e_2, x_k, e_4) = 7 \left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil - 4k.$$

De plus, pour tout entier i , $1 \leq i \leq 6$, il existe un unique entier k_i , $1 \leq k_i \leq 6$, tel que l'on ait $k_i \equiv 5i \pmod{7}$. Pour cet entier k_i on a $-4k_i \equiv i \pmod{7}$, puis

$$7 \left\lceil \frac{4k_i}{7} \right\rceil - 4k_i = i.$$

Supposons maintenant qu'il existe une G -subdivision régulière Σ de σ . Alors la trace de Σ sur π contient les segments représentés dans la figure 3.

En effet, comme le cône $\langle e_1, e_2, e_4 \rangle$ est régulier, Σ contient un cône de dimension 4 qui a $\langle e_1, e_2, e_4 \rangle$ pour face. C'est un cône $\langle e_1, e_2, x_k, e_4 \rangle$ pour un élément x_k de P_σ tel que $\det(e_1, e_2, x_k, e_4) = 1$. Comme $\det(e_1, e_2, x_k, e_4) = 7 \lceil 4k/7 \rceil - 4k$, on doit avoir $-4k \equiv 1 \pmod{7}$ et donc $k = k_1 = 5$. Par conséquent, Σ contient le cône $\langle e_1, e_2, x_5, e_4 \rangle$. Ensuite, Σ contient deux cônes de dimension 4 ayant $\langle e_1, e_4, x_5 \rangle$ pour face. Puisque $\det(e_1, x_5, e_2, e_4) = -1$ et $\det(e_1, x_5, e_3, e_4) = 6$, ces cônes sont $\langle e_1, x_5, e_2, e_4 \rangle$ et

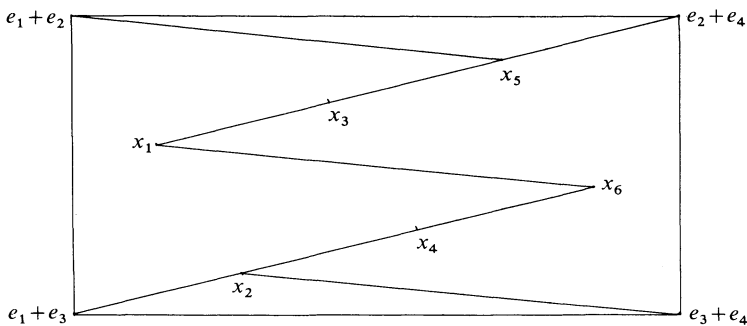


FIGURE 3.

$\langle e_1, x_5, x_k, e_4 \rangle$ pour un point x_k de P_σ tel que $\det(e_1, x_5, x_k, e_4) = 1$. Or on a

$$\det(e_1, x_5, x_k, e_4) = -7 \left\lceil \frac{4k_1}{7} \right\rceil + 4k_1 + 7 \left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil - 4k = -1 + 7 \left\lceil \frac{4k}{7} \right\rceil - 4k.$$

Donc $7 \lceil 4k/7 \rceil - 4k = 2$ et $k = k_2 = 3$. Par conséquent Σ contient le cône $\langle e_1, x_{k_1}, x_{k_2}, e_4 \rangle = \langle e_1, x_5, x_3, e_4 \rangle$.

De même, si Σ contient le cône $\langle e_1, x_{k_{i-1}}, x_{k_i}, e_4 \rangle$ pour un entier i avec $2 \leq i \leq 5$ alors l'un des deux cônes de dimension 4 de Σ ayant $\langle e_1, x_{k_i}, e_4 \rangle$ pour face est $\langle e_1, x_{k_{i-1}}, x_{k_i}, e_4 \rangle$ et comme $\det(e_1, x_{k_i}, x_{k_{i-1}}, e_4) = -1$ et $\det(e_1, x_{k_i}, e_3, e_4) = 7 - i$, le deuxième est $\langle e_1, x_{k_i}, x_k, e_4 \rangle$ pour un point x_k de P_σ tel que $\det(e_1, x_{k_i}, x_k, e_4) = 1$, c'est-à-dire $7 \lceil 4k/7 \rceil - 4k = i + 1$ ou encore $k = k_{i+1}$. Par conséquent, Σ contient également le cône $\langle e_1, x_{k_i}, x_{k_{i+1}}, e_4 \rangle$. Enfin, comme on a $\det(e_1, x_{k_i}, e_3, e_4) = 7 - i$, $1 \leq i \leq 6$, Σ contient le cône $\langle e_1, x_{k_6}, e_3, e_4 \rangle = \langle e_1, x_2, e_3, e_4 \rangle$.

En particulier, Σ contient le cône $\langle x_{k_3}, x_{k_4} \rangle = \langle x_1, x_6 \rangle$ puisque c'est une face de $\langle e_1, x_{k_3}, x_{k_4}, e_4 \rangle$.

De façon analogue, on montre que Σ contient les cônes $\langle e_1, e_2, e_3, x_1 \rangle$, $\langle x_k, e_2, e_3, x_{k+1} \rangle$, $1 \leq k \leq 5$, et $\langle x_6, e_2, e_3, e_4 \rangle$. D'où le dessin partiel 4 pour $\Sigma \cap \pi$.

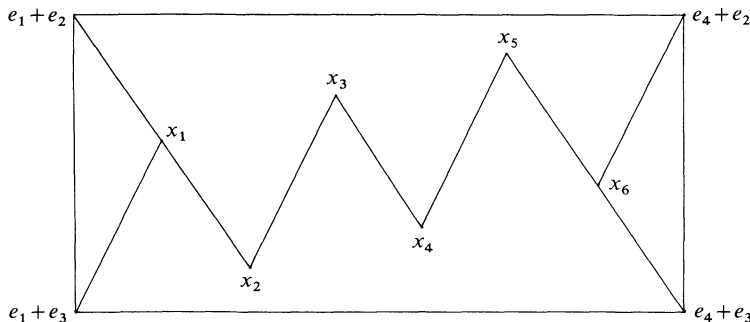


FIGURE 4.

En particulier, Σ contient le cône $\langle x_3, x_4 \rangle$ puisque c'est une face de $\langle x_3, e_2, e_3, x_4 \rangle$.

Or l'intersection des cônes $\langle x_3, x_4 \rangle$ et $\langle x_1, x_6 \rangle$ est la demi-droite engendrée par $e = x_1 + x_6 = x_3 + x_4 = \sum e_i, 1 \leq i \leq 4$. Comme les cônes $\langle x_1, x_6 \rangle$ et $\langle x_3, x_4 \rangle$ appartiennent tous deux à Σ , le vecteur primitif e est un vecteur extrémal de Σ . D'où une contradiction, puisque e n'appartient pas à G_σ . ■

REMARQUES 3.2. (a) Si σ est un cône terminal simplicial de dimension 4, on ne peut pas en général caractériser les points de G_σ par la valeur que prend la forme linéaire l_σ sur ces points, comme on l'a fait pour les cônes de dimension 3 (proposition 2.1). Soit par exemple le cône simplicial σ de vecteurs extrémaux $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (5, 6, 9, 16)$ dans \mathbb{Q}^4 . C'est un cône terminal. Le point $g = (2, 2, 3, 4)$ appartient à G_σ et l'on a $l_\sigma(g) = 2 + 1/4$ et le point $x = (4, 4, 6, 10)$ n'appartient pas à G_σ .

alors que l'on a $l_\sigma(x) = 2 + 1/8$.

(b) Les résultats du paragraphe 2 et l'exemple 3.1 montrent une différence importante, au sujet des G -subdivisions régulières et des diviseurs exceptionnels de désingularisations, entre les variétés toriques de dimension 3 et celles de dimension supérieure. Pour ces dernières il y a de nouvelles questions naturelles, par exemple:

– lorsqu'elles existent, les G -subdivisions régulières d'un cône de dimension 4 ont-elles toutes le même volume?

– comment se traduit, dans la géométrie du cône σ , le nombre minimum de diviseurs exceptionnels intervenant dans une désingularisation de la variété V_σ ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BOUVIER ET G. GONZALEZ-SPRINBERG, G -désingularisation des variétés toriques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315 (1992), 817–820.
- [2] M. BRION, Variétés sphériques et théorie de Mori, Duke Math. J. 72 (1993), 369–404.
- [3] V. I. DANILOV, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys 33 (1978), 97–154.
- [4] V. I. DANILOV, The birational geometry of toric 3-folds, Math. USSR-Izv 21 (1983), 269–280.
- [5] M. DEMAZURE, Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4, (3) (1970), 507–588.
- [6] G. GONZALEZ-SPRINBERG, Éventails en dimension 2 et transformée de Nash, Publications de l'E.N.S. Paris, 1977.
- [7] G. GONZALEZ-SPRINBERG ET M. LEJEUNE-JALABERT, Modèles canoniques plongés I, Kodai Math. J. 14 (1991), 194–209.
- [8] G. GONZALEZ-SPRINBERG ET M. LEJEUNE-JALABERT, Sur l'espace des courbes tracées sur une singularité, Prépublication de l'Institut Fourier n° 210, Grenoble, 1992 (à paraître dans la publication du Congrès de La Rabida 1992).
- [9] M. N. ISHIDA ET N. IWASHITA, Canonical cyclic quotient singularities of dimension three, Adv. Studies in Pure Math. 8 (1986), Complex analytic singularities, 135–151.
- [10] Y. KAWAMATA, Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces, Ann. of Math. 127 (1988), 93–163.
- [11] Y. KAWAMATA, K. MATSUDA AND K. MATSUKI, Introduction to the minimal model problem, Advanced Studies in Pure Mathematics 10 (1987), algebraic geometry Sendai (1985), 283–360.
- [12] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD AND B. SAINT-DONAT, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Mathematics, 339, 1973.
- [13] J. KOLLAR, Flops, Nagoya Math. J. 113 (1989), 15–36.
- [14] S. MORI, Flip theorem and the existence of minimal models for threefolds, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 117–253.
- [15] D. R. MORRISON AND G. STEVENS, Terminal quotient singularities in dimensions 3 and 4, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984), 15–20.
- [16] T. ODA, Torus embeddings and applications, Tata Inst. Fund. Res., Bombay Springer-Verlag, 1978.
- [17] T. ODA, Convex bodies and algebraic geometry, Ergebnisse der Math., 15, Springer-Verlag, 1988.
- [18] M. OKA, On the resolution of hypersurfaces singularities, Adv. Studies in Pure Math. 8 (1986), 405–436.
- [19] M. REID, Canonical 3-folds, Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (1979), Noordhoff (1980), 273–310.
- [20] M. REID, Minimal models of canonical 3-folds, Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Adv. Studies in Pure Math. 1 (1983), 131–180.

- [21] M. REID, Decomposition of toric morphisms, Arithmetic and Geometry, Papers dedicated to I. R. Shafarevich on the occasion of his 60th birthday, Progress in Math. 36, Birkhäuser (1983), 395–418.
- [22] M. REID, Young person's guide to canonical singularities, Proc. Sympos. Pure Math. (Algebraic Geometry Bowdoin College 1985), Amer. Math. Soc.
- [23] G. K. WHITE, Lattice tetrahedra, Canad. J. Math. 16 (1964), 389–396.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
INSTITUT FOURIER
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES
ASSOCIÉ AU CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX
FRANCE

E-mail address: bouvier@fourier.grenet.fr
gonsprin@fourier.grenet.fr

