Tôhoku Math. J.
50 (1998), 133–138

UNE REMARQUE SUR LE DOMAINE D'EXISTENCE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL À COEFFICIENTS DES FONCTIONS ENTIÈRES

YÛSAKU HAMADA

(Received June 21, 1996, revised August 21, 1996)

Résumé. Bieberbach, Fatou et Picard avaient étudié une application biholomorphe de l'espace entier de n variables complexes sur son domaine qui a un point extérieur. En appliquant ces résultats au problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel à coefficients des fonctions entières, nous donnons une remarque sur le domaine d'holomorphie de la solution.

Abstract. Bieberbach, Fatou and Picard studied a biholomorphic map from the entire space of n complex variables onto its domain that has an exterior point. By applying these results to the Cauchy problem for the differential operator with coefficients of entire functions, we give a remark on the domain of holomorphy of the solution.

Introduction. Leray [L] a étudié les singularités et un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy dans le domaine complexe.

[HLT1, 2], [HT], [P] et [PW] ont étudié des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel à coefficients des fonctions entières.

Dans cet article, nous donnons une remarque sur le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy. Elle est un résultat immédiat des études [B], [F] et [Pi].

Je remercie vivement Toshio Nishino de ses suggestions très précieuses.

1. Notations et résultats. Soit $x=(x_0, x')$, $x'=(x_1, \dots, x_n)$ un point de $\boldsymbol{C}^{n+1}$. On considère un opérateur différentiel d'ordre m

$$a(x, D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha\,, \quad D^\alpha=D_0^{\alpha_0}\cdots D_n^{\alpha_n}\,, \quad D_i=\partial/\partial x_i\,, \qquad 0\leq i\leq n\,.$$

Nous supposons que tous les coefficients de a sont des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$ et que $a_{m,0,\dots,0}(x)=1$ sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

Soit S l'hyperplan $x_0=0$, donc non caractéristique pour a.

Étudions le problème de Cauchy

$$a(x, D)u(x)=v(x)\,, \quad D_0^h u(0, x')=w_h(x')\,, \qquad 0\leq h\leq m-1\,, \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A20; Secondary 32H02.

où $v(x)$ et les $w_h(x')$, $0 \leq h \leq m-1$, sont des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$ et $\boldsymbol{C}^n$ respectivement.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, il existe une unique solution holomorphe au voisinage de S dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

Nous étudions un prolongement analytique de cette solution. En général, des diverses phénomènes y se passent.

Dans cet article, nous donnons un exemple tel que le domaine d'existence de la solution a un point extérieur dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$. Cet exemple est essentiellement dû à un résultat de [B] (aussi voir [F], [Pi] et [N]).

[B] a construit des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^2$, $f_i(x_1, x_2)$, $i=1, 2$, vérifiant la condition suivante:

Condition A. (i) Le déterminant fonctionnel satisfait

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 1 \qquad \text{sur} \quad \boldsymbol{C}^2 .$$

$$f_i(0, 0) = 0 , \qquad i = 1, 2 .$$

(ii) Notons T l'application $u_1 = f_1(x_1, x_2)$, $u_2 = f_2(x_1, x_2)$ de $\boldsymbol{C}^2$ dans $\boldsymbol{C}^2$. L'image $\Delta = T(\boldsymbol{C}^2)$ de $\boldsymbol{C}^2$ par T a un point extérieur dans $\boldsymbol{C}^2$. T est une application biholomorphe de $\boldsymbol{C}^2$ sur Δ. T^{-1} est son application inverse $x_1 = g_1(u_1, u_2)$, $x_2 = g_2(u_1, u_2)$ de Δ sur $\boldsymbol{C}^2$. Δ est un domaine pseudoconvexe.

Soit $H(u_1, u_2)$ une fonction holomorphe dont le domaine d'holomorphie est Δ, c'est-à-dire que $H(u_1, u_2)$ ne peut pas se prolonger analytiquement au delà de $\partial\Delta$; $\partial\Delta$ est la frontière naturelle de $H(u_1, u_2)$.

Étudions le problème de Cauchy

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} LU(x) = (D_0 + D_2 f_2(x_1, x_2) D_1 - D_1 f_2(x_1, x_2) D_2) U(x) = 0 , \\ U(0, x_1, x_2) = H(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) . \end{cases}$$

Les coefficients de l'opérateur L et la donnée de Cauchy $H(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ sont des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^3$et $\boldsymbol{C}^2$ respectivement.

Soit

$$J: \quad u_1 = f_1(x_1, x_2) - x_0 , \quad u_2 = f_2(x_1, x_2) ,$$

une application de $\boldsymbol{C}^3$ dans $\boldsymbol{C}^2$.

Notons $\mathscr{D}$ la composante connexe contenant l'origine O de l'ouvert

$$J^{-1}(\Delta) = \{x = (x_0, x_1, x_2); (f_1(x_1, x_2) - x_0, f_2(x_1, x_2)) \in \Delta\} ; S \subset \mathscr{D} .$$

Alors nous avons:

Proposition 1. *Le domaine d'holomorphie de la solution $U(x)$ du problème* (2) *est $\mathscr{D}$.*

$\mathscr{D}$ a un point extérieur dans $\boldsymbol{C}^3$.

La fonction $U(x)$ ne peut pas se prolonger analytiquement au delà de $\partial\mathscr{D}$, c'est-à-dire que $\partial\mathscr{D}$ est la frontière naturelle de $U(x)$.

Pour démontrer cette Proposition, nous avons d'abord:

LEMME 1. (i) *$\mathscr{D}^e \supset J^{-1}(\Delta^e)$, où $\mathscr{D}^e$ et Δ^e sont les extérieurs respectifs de $\mathscr{D}$ et Δ.*
(ii) *Le domaine $\mathscr{D}$ a un point extérieur dans $\boldsymbol{C}^3$.*
(iii) $J(\partial\mathscr{D}) \subset \partial\Delta$.

PREUVE DU LEMME 1. (i) et (iii) sont évidents. (ii) $\Delta^e \neq \varnothing$. Prenons un point $(u_1, u_2) \in \Delta^e$. En déplaçant u_2 voisin si nécessaire, on peut supposer qu'il existe $(y_1, y_2) \in \boldsymbol{C}^2$ tel que $f_2(y_1, y_2) = u_2$. Pour $y = (y_0, y_1, y_2) \in \boldsymbol{C}^3$, $y_0 = f_1(y_1, y_2) - u_1$, on a $J(y) = (u_1, u_2)$. Donc $\mathscr{D}^e \supset J^{-1}(\Delta^e) \neq \varnothing$. C.Q.F.D.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1. La solution $U(x)$ du problème (2) est

$$U(x) = H(f_1(x_1, x_2) - x_0, f_2(x_1, x_2)) \quad \text{dans } \mathscr{D}\,. \tag{3}$$

Cette fonction est uniforme et holomorphe dans $\mathscr{D}$.

Nous allons démontrer que $U(x)$ ne peut pas se prolonger analytiquement au delà de $\partial\mathscr{D}$.

Supposons $U(x)$ holomorphe à un point $y = (y_0, y_1, y_2) \in \partial\mathscr{D}$. Prenons un voisinage V de $(v_1, v_2) = J(y) \in \partial\Delta$, $v_1 = f_1(y_1, y_2) - y_0$, $v_2 = f_2(y_1, y_2)$, dans $\boldsymbol{C}^2$ tel que $\{(u_1 + y_0, u_2);\ (u_1, u_2) \in V\} \subset \Delta$.

D'après la condition A, pour $\varepsilon > 0$ et V suffisamment petit,

$$W = \left\{ \begin{aligned} &(x_0, x_1, x_2); \quad |x_0 - y_0| < \varepsilon, \quad x_1 = g_1(u_1 + x_0, u_2)\,, \\ &\qquad\qquad\qquad x_2 = g_2(u_1 + x_0, u_2)\,, \quad (u_1, u_2) \in V \end{aligned} \right\}$$

est un voisinage de y dans $\boldsymbol{C}^3$.

Nous pouvons supposer que $U(x)$ soit holomorphe sur W, en diminuant V si nécessaire.

Posons

$$\hat{H}(u_1, u_2) = U(y_0, g_1(u_1 + y_0, u_2), g_2(u_1 + y_0, u_2)) \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in V\,.$$

La fonction $\hat{H}(u_1, u_2)$ est holomorphe sur V. Vu que $y \in \partial\mathscr{D}$, il existe un point $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathscr{D} \cap W$ et donc on a $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = J(\tilde{x}) \in \Delta \cap V$; $\tilde{u}_1 = f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{x}_0$, $\tilde{u}_2 = f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Il existe alors $\tilde{V}$ un voisinage connexe de $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ dans $\boldsymbol{C}^2$ tel que $\tilde{V} \subset \Delta \cap V$ et

$$\tilde{W} = \left\{ \begin{aligned} &(x_0, x_1, x_2); \quad |x_0 - y_0| < \varepsilon\,, \quad x_1 = g_1(u_1 + x_0, u_2)\,, \\ &\qquad\qquad\qquad x_2 = g_2(u_1 + x_0, u_2)\,, \quad (u_1, u_2) \in \tilde{V} \end{aligned} \right\} \subset J^{-1}(\Delta)\,.$$

$\tilde{W}$ est un ouvert connexe et $\tilde{x} \in \tilde{W}$. Le point $\tilde{x}$ est joint à O par un arc dans $J^{-1}(\Delta)$, d'où $\tilde{W} \subset W \cap \mathscr{D}$. Sur $\tilde{W}$, $U(x)$ est de la forme (3), donc

$$H(u_1, u_2) = U(y_0, g_1(u_1 + y_0, u_2), g_2(u_1 + y_0, u_2)) \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in \tilde{V}.$$

Il en résulte que

$$\hat{H}(u_1, u_2) = H(u_1, u_2) \quad \text{sur } \tilde{V}.$$

Alors $H(u_1, u_2)$ se prolonge analytiquement à (v_1, v_2). Ceci est contradictoire à l'hypothèse que le domaine d'holomorphie de $H(u_1, u_2)$ est Δ. C.Q.F.D.

Pour les fonctions g_1 et g_2 dans la Condition A, nous avons:

PROPOSITION 2. *Les domaines d'holomorphie de g_1 et g_2 sont Δ.*

PREUVE. L'idée de cette preuve est due à Toshio Nishino.

(i) Soit (v_1, v_2) un point quelconque de $\partial\Delta$. Vu que T est une application biholomorphe de $\boldsymbol{C}^2$ sur Δ, lorsqu'un point (u_1, u_2) de Δ tend vers (v_1, v_2), $|g_1(u_1, u_2)| + |g_2(u_1, u_2)|$ tend vers $+\infty$.

(ii) Supposons que la fonction g_1 puisse se prolonger analytiquement à un point $(u_1^0, u_2^0) \in \partial\Delta$. Alors il existe une boule Q de centre (u_1^0, u_2^0) et de rayon ρ (>0) telle que la g_1 soit holomorphe et bornée dans Q.

Notons $s_a = \{(u_1, u_2) \in Q\,;\, g_1(u_1, u_2) = a\}$, où $a = g_1(u_1^0, u_2^0)$.

On a alors:

LEMME 2. *Tous les points de $s_a \cap \partial\Delta$ sont isolés.*

PREUVE DU LEMME 2. Vu (i) et que la g_1 est bornée dans Q, lorsqu'un point de $\Delta \cap Q$ tend vers un point de $\partial\Delta \cap Q$, g_2 tend vers ∞. Pour ρ (>0) suffisamment petit, posons

$$G_2(u_1, u_2) = \begin{cases} g_2(u_1, u_2)^{-1} & \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in \Delta \cap Q\,, \\ 0 \quad \text{pour} \quad (u_1, u_2) \in \Delta^c \cap Q\,. \end{cases}$$

$G_2(u_1, u_2)$ est une fonction continue dans Q et holomorphe dans $Q \setminus \{(u_1, u_2) \in Q\,;\, G_2(u_1, u_2) = 0\}$.

D'après le théorème de Radó (cf. [G], [N]), la fonction $G_2(u_1, u_2)$ est holomorphe dans Q et l'on a $\partial\Delta \cap Q \subset \{(u_1, u_2) \in Q\,;\, G_2(u_1, u_2) = 0\}$. L'ensemble $s_a \cap \partial\Delta$ dans Q est contenu dans

$$\{(u_1, u_2) \in Q\,;\, g_1(u_1, u_2) = a,\ G_2(u_1, u_2) = 0\}\,.$$

Ceci implique que tous les points de $s_a \cap \partial\Delta$ dans Q sont isolés. C.Q.F.D.

Fin de la Preuve de la Proposition 2. En prenant ρ (>0) suffisamment petit, on a $s_a \cap \partial\Delta = \{(u_1^0, u_2^0)\}$.

L'application $x_2 = G_2(u_1, u_2)$ applique s_a sur un voisinage de O dans le plan de la variable complexe x_2 de façon biunivoque. Par la définition de $G_2(u_1, u_2)$, en prenant $M(>0)$ suffisamment grand, on a

$$\{x_2 \in \boldsymbol{C}\,;\, (f_1(a, x_2), f_2(a, x_2)) \in Q\} \supset \{x_2 \in \boldsymbol{C}\,;\, |x_2| > M\}\,.$$

Alors les fonctions $f_i(a, x_2)$, $i=1, 2$, sont bornées dans $\boldsymbol{C}$, donc elles égalent identiquement des constantes. C'est contradictoire à la Condition A. C.Q.F.D.

COROLLAIRE. *Dans le problème* (2), *choisissons la donnée de Cauchy* $U(0, x_1, x_2)=x_j$, $j=1, 2$. *Alors le domaine d'holomorphie de la solution a un point extérieur dans* $\boldsymbol{C}^3$.

PREUVE. En effet, choisissons $g_j(u_1, u_2)$, $j=1, 2$ pour $H(u_1, u_2)$. Vu les Propositions 1, 2, la solution $U(x)=g_j(f_1(x_1, x_2)-x_0, f_2(x_1, x_2))$, $j=1, 2$, satisfait la condition du corollaire. C.Q.F.D.

REMARQUE 1. Par le changement de coordonnées $u_1=f_1(x_1, x_2)$, $u_2=f_2(x_1, x_2)$, le problème (2) se transforme en le problème

$$(D_0+D_{u_1})G(x_0, u_1, u_2)=0\,, \quad G(0, u_1, u_2)=H(u_1, u_2)\,.$$

REMARQUE 2. La courbe bicaractéristique de l'équation $LU(x)=0$ issue d'un point $(0, y_1, y_2)$, $(y_1, y_2)\in \boldsymbol{C}^2$ est définie par l'équation

$$f_1(x_1, x_2)-x_0=f_1(y_1, y_2)\,, \quad f_2(x_1, x_2)=f_2(y_1, y_2)\,, \tag{4}$$

ou bien

$$\begin{cases} x_0=t\,, \\ x_1=g_1(f_1(y_1, y_2)+t, f_2(y_1, y_2))\,, \\ x_2=g_2(f_1(y_1, y_2)+t, f_2(y_1, y_2))\,, \end{cases} \tag{5}$$

(5) est la solution du système des équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_0}{dt}=1\,, \quad \frac{dx_1}{dt}=D_2f_2(x_1, x_2)\,, \quad \frac{dx_2}{dt}=-D_1f_2(x_1, x_2)\,, \tag{6}$$

avec les données de Cauchy $x_0(0)=0$, $x_1(0)=y_1$, $x_2(0)=y_2$.

Le domaine d'existence de la solution du système (6) est la composante connexe contenant $t=0$ de l'ouvert

$$\{t\in \boldsymbol{C};\, (f_1(y_1, y_2)+t, f_2(y_1, y_2))\in \Delta\}\,.$$

Ainsi, la solution du système (6) a la frontière naturelle mobile dans $\{t\in \boldsymbol{C}\}$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAFIQUES

[B] L. BIEBERBACH, Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung der R_4 auf einen Teil seiner selbst vermitteln, S. B. preuss. Akad. Wiss. (1933), 476–479.

[F] P. FATOU, Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C. R. Acad. Sc. Paris, 175 (1922), 862–865; Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, C. R. Acad. Sc. Paris, 175 (1922), 1030–1033.

[G] R. C. GUNNING, Introduction to holomorphic functions of several variables, vol. I, Wadsworth &

Brooks/Cole, 1991.

[HLT1] Y. Hamada, J. Leray et A. Takeuchi, Sur le domaine d'existence de la solution de certains problèmes de Cauchy, C. R. Acad. Sc. Paris, 294, Série I, (1982), 27–30.

[HLT2] Y. Hamada, J. Leray et A. Takeuchi, Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire, J. Math. pures et appl. 64 (1985), 257–319.

[HT] Y. Hamada et A. Takeuchi, Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy, C. R. Acad. Sc. Paris, 295, Série I, (1982), 329–332.

[H] E. Hille, Ordinary differential equations in the complex domain, John Wiley, 1976.

[L] J. Leray, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 389–429.

[N] T. Nishino, Theory of Functions of Several Complex Variables [Tahensu Kansu Ron] (en japonais), University of Tokyo Press, 1996.

[P] J. Persson, On the local and global non-characteristic Cauchy problem when the solutions are holomorphic functions or analytic functionals in the space variables, Arkiv för matematik, 9 (1971), 171–180.

[Pi] E. Picard, Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, 139 (1904), 5–9.

[PW] P. Pongérard et C. Wagschal, Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières, J. Math. pures et appl. 75, (1996), 409–418.

61–36 Tatekura-cho
Shimogamo, Sakyo-ku, Kyoto 606–0806
Japan