Tôhoku Math. J.
50 (1998), 407–418

RIGIDITÉ DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT CONFORMÉMENT PARALLÉLISABLES

MARIE-HÉLÈNE RIGAL

(Received January 3, 1997, revised April 14, 1997)

Abstract. This article is devoted to the study of foliations for which the notion of transverse direction has a global and intrinsic meaning. These foliations are said to be *transversally conformally parallelizable* (TCP). This work is a part of the analysis of bihamiltonian systems defined on odd dimensional manifolds. The dynamics of such a system is linked to the dynamics of a TCP foliation naturally associated with the bihamiltonian system.

Firstly it will be proved that a connection is canonically attached to a TCP foliation. Thus the situation can be locally linearized. However, this connection is geodesically non-complete. Our study allows this difficulty to be overcome and a precise description of TCP foliations is obtained on closed manifolds in every dimension and codimension greater than 1. In particular, this leads to a classification of the TCP flows.

I. Introduction. En analysant d'un point de vue local les systèmes bihamiltoniens en dimension impaire $2n+1$, Gelfand et Zakharevitch [GZ] ont relié leur dynamique à celle de feuilletages de codimension $n+1$ munis d'une structure transverse de *tissu de Veronese*. Leur article est le point de départ de notre travail qui consiste à mieux comprendre la géométrie *globale* de tels systèmes dynamiques.

L'objectif est de mettre en évidence des contraintes topologiques imposées à toute variété fermée de dimension impaire munie d'un système bihamiltonien, puis d'obtenir des descriptions précises en petite dimension. L'étude des feuilletages *transversalement conformément parallélisables*, dont les feuilletages transversalement de Veronese sont des cas particuliers, est une étape intermédiaire. Nous en donnons les résultats principaux dans cet article.

Dans la suite, les données géométriques sont lisses, les variétés sont connexes, orientables et les feuilletages sont transversalement orientables.

DÉFINITION 1. *Soit une variété M de dimension quelconque. Un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension $n+1$, $n\geqslant 1$ sur M est transversalement conformément parallélisable* (TCP) *s'il existe $n+2$ feuilletages de codimension n, $\mathscr{F}^0,\dots,\mathscr{F}^{n+1}$, contenant $\mathscr{F}$ et tels que les $n+2$ directions transverses associées dans $T_xM/T_x\mathscr{F}$ en forment un repère projectif, et ce pour tout x de M.*

Observons qu'un feuilletage TCP est transversalement parallélisable si et seulement s'il est riemannien. En effet, dans ce cas, il existe une métrique g sur le fibré normal $TM/T\mathscr{F}$, invariante par l'holonomie du feuilletage [Mo]. Un parallélisme transverse

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C12; Secondary 57R30, 53C10, 58F07.

adapté $(v^0, \ldots, v^n)$ est déterminé en imposant que v^j soit tangent à $\mathscr{F}^j$, $j=0, \ldots, n+1$, que $v^{n+1}=v^0+\cdots+v^n$ et que v^{n+1} soit unitaire pour g.

D'autres exemples de feuilletages TCP sont donnés par des feuilletages transversalement affines dont la partie linéaire de l'holonomie est formée d'homothéties.

Dans cet article, on montre que ces deux situations sont les seules possibles, quelles que soient la dimension du feuilletage TCP et sa codimension (strictement supérieure à 1).

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage TCP sur une variété fermée. Alors, deux cas (non exclusifs) se présentent*:

– *$\mathscr{F}$ est riemannien.*

– *$\mathscr{F}$ est transversalement affine et la partie linéaire de son holonomie est formée d'homothéties.*

Lorsque $\mathscr{F}$ est de dimension 1, ce théorème permet de décrire tous les flots TCP. En codimension 2, le résultat est déjà connu: il s'agit des *tissus feuilletés*, entièrement classifiés [Gh]. En codimension supérieure, seule une description partielle était obtenue [A] [N]. Nous indiquons ici le résultat général. Il sera détaillé ultérieurement.

Lorsque $\mathscr{F}$ est transversalement parallélisable, les adhérences de ses feuilles sont des tores sur lesquels $\mathscr{F}$ est conjugué à un flot linéaire [Ca].

Lorsque $\mathscr{F}$ est transversalement affine, les arguments utilisés dans [Gh] en codimension 2 pour un flot transversalement affine dont le pseudo-groupe d'holonomie est formé de similitudes se généralisent en toute codimension avec des flots dont le pseudo-groupe d'holonomie est formé d'homothéties et de translations. On observe alors que seuls trois cas se présentent (à conjugaison près). Dans le premier, $\mathscr{F}$ est transversalement parallélisable. Dans le deuxième cas, ses orbites sont toutes compactes et la variété M est une fibration en cercles au-dessus d'une variété munie d'une structure affine dont la partie linéaire est formée d'homothéties. Celle-ci ne peut être que le tore $\boldsymbol{T}^{n+1}$ muni de la structure plate usuelle (et l'on retrouve l'un des cas précédents) ou la variété $S^1 \times S^n$ vue comme quotient de $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par un groupe monogène d'homothéties directes [F]. Le troisième cas correspond au flot suivant $\mathscr{F}$ sur $S^1 \times S^{n+1}$: comme précédemment, on considère $S^1 \times S^{n+1}$ comme quotient de $\boldsymbol{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ par le groupe engendré par une homothétie directe non triviale. Le flot $\mathscr{F}$ est alors le quotient du feuilletage de $\boldsymbol{R}^{n+2}$ par les droites verticales.

Lorsque $\mathscr{F}$ est de dimension strictement supérieure à 1, le théorème ne donne pas une classification de tous les cas possibles. Néanmoins, la première situation correspond aux feuilletages transversalement parallélisables dont la géométrie est bien connue: les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ sont les fibres d'une fibration localement triviale au-dessus d'une variété fermée. Sur chaque fibre, $\mathscr{F}$ induit un feuilletage de Lie à feuilles denses [Mo]. Par contre, concernant les feuilletages transversalement affines, on peut difficilement espérer obtenir des résultats plus précis sans conditions supplémentaires sur $\mathscr{F}$.

L'article se divise en trois parties.

Dans la première, on montre que la structure transverse de $\mathscr{F}$ est rigide. La démarche est analogue à celle utilisée pour les variétés (pseudo)-riemanniennes: des conditions ad hoc déterminent une connexion canonique sur un fibré principal naturellement associé à $(M, \mathscr{F})$.

Précisément, la définition 1 peut être formulée en termes de G-structures. Considérons le fibré $p: B_T \to M$ des repères transverses à $\mathscr{F}$. Un point z_x de B_T au-dessus de x dans M est un isomorphisme linéaire de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ sur $T_x M / T_x \mathscr{F}$. On rappelle que B_T est muni d'un feuilletage $\mathscr{F}_T$ invariant par l'action à droite du groupe structural. Ce feuilletage se projette sur $\mathscr{F}$ et ses feuilles sont des revêtement des feuilles de $\mathscr{F} = p_*(\mathscr{F}_T)$ (cf. [Mo]). Le feuilletage $\mathscr{F}$ est TCP lorsqu'en chaque point x de M, une famille de repères transverses *adaptés* de $T_x M / T_x \mathscr{F}$ est privilégiée: deux d'entre eux diffèrent par une homothétie directe. Ainsi, $\mathscr{F}$ est TCP si et seulement s'il existe un sous-fibré principal E_T, de groupe structural le groupe des homothéties directes de $\boldsymbol{R}^{n+1}$, c'est à dire $(\boldsymbol{R}_+^*, \times)$ et feuilleté par le feuilletage invariant $\mathscr{F}_T$.

Quel que soit z_x dans le fibré E_T, il existe une notion intrinsèque d'espace *vertical* V_{z_x} dans $T_{z_x} E_T$, à savoir, l'espace tangent à la fibre passant par z_x. La donnée d'une connexion linéaire sur E_T équivaut à celle d'une distribution d'hyperplans *horizontaux* supplémentaires, invariante par l'action à droite de $(\boldsymbol{R}_+^*, \times)$. Cela revient à définir une 1-forme ω sur E_T. Dans la première partie, on détermine une telle 1-forme ω projetable le long du feuilletage horizontal $\mathscr{F}_T$.

L'existence de la connexion ω entraîne celle de géodésiques (transverses). Les "géodésiques" dans une direction D correspondent aux projection sur M des trajectoires (paramétrées) de certains champs de vecteurs Y^D définis sur E_T. Comme le groupe structural $\boldsymbol{R}_+^*$ n'est *pas compact*, ces champs ne sont a priori pas complets. Ainsi, une difficulté essentielle que l'on ne peut éviter est celle de la *non complétude* (géodésique) de la connexion ω. Les exemples précédents de flots sur $S^1 \times S^{n+1}$ en sont des illustrations.

A partir des géodésiques on peut ensuite construire une application exponentielle (transverse). Les difféomorphismes transverses qui laissent invariante la structure transverse TCP de $\mathscr{F}$ sont précisément ceux qui commutent avec l'exponentielle. S'ils fixent un point, ils sont entièrement caractérisés par leur différentielle en ce point. Celle-ci préserve $n+1$ directions indépendantes, donc est une homothétie. D'où la:

PROPOSITION 1. *L'holonomie d'un feuilletage TCP est déterminée par sa partie linéaire qui est formée d'homothéties.*

Parmi les feuilletages TCP, les feuilletages transversalement affine pour leur structure TCP sont caractérisés par le fait que la connexion linéaire associée ω est plate (sans courbure ni torsion).

Lorsque $\mathscr{F}$ n'est pas partout transversalement affine, il existe donc un ouvert $\mathscr{U}$ non vide saturé par $\mathscr{F}$ sur lequel la courbure ou la torsion est non nulle. Une normalisation convenable permet alors de construire une métrique riemanienne sur $\mathscr{U}$, constante le long des feuilles de $\mathscr{F}$. D'où le théorème si $\mathscr{U}$ coïncide avec toute la variété.

Le cas intermédiaire où $\mathcal{U}$ est un ouvert propre et non vide de M est plus délicat. Son analyse occupe le reste de l'article.

Dans la deuxième partie, on prouve que $\mathcal{U}$ est saturé non seulement par les feuilles de $\mathcal{F}$, mais aussi par les adhérences de ses feuilles. Celles-ci sont des sous-variétés compactes et sont les fibres d'une fibration de $\mathcal{U}$ au-dessus d'une variété W (cf. [S]). Après avoir observé que cette propriété équivaut à l'existence d'une feuille F_T de $\mathcal{F}_T$ relativement compacte dans E_T, on constate que l'adhérence $\bar{F}_T$ est difféomorphe à $\overline{p(F_T)}$, donc est une sous-variété compacte de E_T. On est ainsi conduit à montrer la:

PROPOSITION 2. *Soient un feuilletage* TCP $\mathcal{F}$ *sur une variété fermée connexe orientable et* $\mathcal{F}_T$ *le feuilletage relevé dans* E_T. *Si* $\mathcal{F}_T$ *possède une feuille relativement compacte dans* E_T, $\mathcal{F}$ *est un feuilletage transversalement parallélisable sur* M.

La première assertion du théorème 1 en est alors une conséquence.

Cette proposition s'interprète comme la stabilité globale des adhérences des feuilles de tout feuilletage TCP. Il en découle en particulier le

COROLLAIRE 1 (stabilité globale). *Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage* TCP *sur une variété fermée connexe orientable. Alors, si* $\mathcal{F}$ *possède une feuille compacte sans holonomie, toutes ses feuilles sont compactes sans holonomie.*

II. Rigidité des feuilletages TCP.

1. *Notations.* Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage TCP de codimension $n+1$ sur une variété M. La feuille de $\mathcal{F}$ passant par un point x est notée F_x. On désigne par $p: E_T \to M$ be fibré principal des repères transverses adaptés. Son groupe structural est $(\boldsymbol{R}_+^*, \times)$. Un point de E_T est noté z_x si $p(z_x)=x$. Quel que soit l'ouvert U de M. $\mathcal{F}_{|U}$ désigne la trace de $\mathcal{F}$ à U et $E_T(U)$ est le sous-fibré principal $p^{-1}(U)$ de E_T.

La variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ est la donnée d'un recouvrement de M par un nombre fini d'ouverts $(U_k)_{k\in K}$ dont les intersections sont connexes et simplement connexes et d'une famille d'applications distinguées $(\pi_k)_{k\in K}$ vérifiant:

– $\pi_k: U_k \to W_k$ est une submersion au-dessus d'un ouvert W_k de $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

– La structure transverse de $\mathcal{F}_{|U_k}$ correspond à la donnée de $n+1$ formes de degré 1 $(\omega_k^0, \ldots, \omega_k^n)$ sur W_k. Leurs images inverses par π_k sont des 1-formes basiques sur U_k. On les note aussi $(\omega_k^0, \ldots, \omega_k^n)$.

– Si $U_k \cap U_{k'} \neq 0$, le difféomorphisme $\varphi_{kk'}$ de $W_k \cap W_{k'}$ tel que $\pi_{k'} = \varphi_{kk'} \circ \pi_k$ vérifie $\varphi_{kk'}^* \omega_{k'}^j = f_{kk'} \cdot \omega_k^j$ où $f_{kk'}$ est une fonction lisse.

Les ouverts U_k sont des ouverts trivialisants pour la fibration $p: E_T \to M$. Sur chaque U_k, la section $s_k = (\omega_k^0, \ldots, \omega_k^n)$ de $E_T(U_k)$ est feuilletée pour $\mathcal{F}_T$.

2. *Connexion canonique associée à un feuilletage* TCP. S'il existe une connexion ω_k sur le sous-fibré principal $p^{-1}(U_k)$ dans E_T, sa torsion est une 2-forme T_k, équivariante pour l'action à droite de $\boldsymbol{R}_+^*$ et à valeurs dans $\boldsymbol{R}^{n+1}$. Elle est déterminée dans la section s_k par

$$s_k^* T_k^j = d\omega_k^j + s_k^* \omega_k \wedge \omega_k^j \qquad j = 0, \ldots, n .$$

La 1-forme $s_k^*\omega_k$ est alors caractérisée de manière *unique* si l'on impose:

– la nullité de la torsion lorsque $\mathscr{F}$ est de codimension 2. Dans ce cas la structure TCP induit un tissu en dimension 2 sur chaque W_k. La 1-forme $s_k^*\omega_k$ est précisément la connexion usuelle associée à un tissu [B].

– les conditions

$$(*) \qquad s_k^* T_k^j \wedge \omega_k^0 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_k^{j-1} \wedge \hat{\omega}_k^j \wedge \cdots \wedge \omega_k^n = 0 \qquad j = 0, \ldots, n \quad (\operatorname{mod} n+1)$$

lorsque la codimension de $\mathscr{F}$ est strictement supérieure à 2.

Si deux sections feuilletées s_k et $s_{k'}$ sont définies au-dessus d'un même ouvert, alors $s_{k'} = f_{kk'} \cdot s_k$ pour une fonction $f_{kk'}$ lisse, strictement positive, basique pour $\mathscr{F}$. Un tel changement de section locale se traduit par la relation

$$s_{k'}^* \omega_{k'} = s_k^* \omega_k + \frac{df_{kk'}}{f_{kk'}} .$$

Qui correspond exactement à l'existence d'une connexion ω *globale* sur E_T telle que $s_k^*\omega$ soit l'unique 1-forme vérifiant $(*)$. Par construction même, ω est basique pour le feuilletage $\mathscr{F}_T$ dans E_T. Rappelons que $\mathscr{F}_T$ est dans ce cas un feuilletage transversalement parallélisable sur E_T (cf. [Mo]).

3. *Feuilletages* TCP *transversalement affines.* La structure TCP détermine une structure transversalement affine si, au voisinage de tout point, il existe une section locale s_k de la forme $(dx^0, \ldots, dx^n)$. La propriété suivante découle des définitions même de la connexion ω et de sa torsion:

PROPOSITION 3. *La connexion ω est plate si et seulement si la structure* TCP *de $\mathscr{F}$ correspond à une structure affine.*

En codimension 2, cela revient à dire que la courbure de ω est nulle.

En codimension supérieure, il suffit que la torsion soit nulle. Dans ce cas, $d\omega_k^j = \omega_k^j \wedge \omega_k$ pour tout j. D'où le fait que ω_k soit fermée. Comme sa courbure est égale à $d\omega$, elle est nulle. Si $s_k^*\omega$ s'identifie (localement) à df, les 1-formes $e^{-f}\omega_k^j$ sont localement exactes et définissent bien une structure affine transverse adaptée à la structure TCP.

4. *Directions transverses.* La structure TCP de $\mathscr{F}$ correspond à la donnée d'un repère projectif transverse dans chaque espace $T_xM/T_x\mathscr{F}$. Il existe ainsi une notion intrinsèque de direction transverse globale sur la variété. D'où une famille (à n paramètres) de feuilletages $\mathscr{F}^D$ qui pivotent autour de $\mathscr{F}$:

DÉFINITION 2. Soit une direction D transverse à $\mathscr{F}$. Alors, $\mathscr{F}^D$ est le feuilletage de codimension n, tangent à la distribution intégrable $\mathscr{E}^D$ donnée en tout point x par $\mathscr{E}_x^D / T_x\mathscr{F} = D$.

Soit D une direction transverse et X^D un champ de vecteurs sur M transverse à $\mathscr{F}$

et tangent à $\mathscr{F}^D$. Son groupe à un paramètre $(\phi_u^D)_{u\in\boldsymbol{R}}$ ne préserve a priori pas le feuilletage $\mathscr{F}$. Cependant, l'existence de la connexion ω va permettre de définir une nouvelle paramétrisation *locale* φ_t^D de ses trajectoires. Ce paramétrage sera *feuilleté* au sens où l'image d'un ouvert U_x d'une feuille F_x est un ouvert de la feuille $\mathrm{F}_{\varphi_t^D(x)}$.

5. *Paramétrage géodésique dans la direction D.* La donnée de X_x^D et d'un relevé z_x au-dessus de x dans E_T détermine un unique champ de vecteurs Y^D sur E_T, horizontal pour ω et feuilleté pour $\mathscr{F}_T$.

Notons $\bar{X}_x^D$ le représentant transverse de X_x^D dans $T_xM/T_x\mathscr{F}$ et $\bar{Y}^D$ celui associé à Y^D dans $TE_T/T\mathscr{F}_T$. Alors, le champ Y^D est caractérisé par:

– $\bar{Y}_{z_y}^D = z_y \circ z_x^{-1}(\bar{X}_x^D)$ en tout point z_y de E_T.

– $\pi_* Y_{z_x}^D = X_x^D$ et pour tout y de M, $\pi_* Y_{z_y}^D = \lambda(z_y)X_y^D$, λ dans $C^\infty(E_T)$.

Comme le fibré E_T n'est pas compact, Y^D n'est a priori pas complet et l'on note $\hat{\varphi}_t^D$ son groupe *local* à un paramètre. Par construction, celui-ci préserve le feuilletage $\mathscr{F}_T$.

Soit un ouvert distingué U_k contenant x. La structure TCP $(M, \mathscr{F})$ correspond à un fibré principal E_k de groupe structural $(\boldsymbol{R}_+^*, \times)$ au-dessus de la base locale W_k. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_T(U_k) & \xrightarrow{\pi_k^T} & E_k \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ U_k & \xrightarrow[\pi_k]{} & W_k \end{array}$$

permet alors de justifier l'existence d'une petite sous-variété $\mathscr{T}_{z_x}$ dans E_T, contenant z_x transverse au champ Y^D ainsi qu'à la fibration p et tangente à $\mathscr{F}$. Restreint à $\mathscr{T}_{z_x}$, p est un difféomorphisme sur une sous-variété $\mathscr{T}_x$ de M tangente à $\mathscr{F}_T$ et transverse à X^D. Les trajectoires (non paramétrées) de Y^D partant de $\mathscr{C}_{z_x}$ se projettent sur celles de X^D partant de $\mathscr{T}_x$. L'application lisse définie par $\varphi_{|\mathscr{T}_x}^D = p \circ \hat{\varphi}_{|\mathscr{T}_{z_x}}^D$ détermine un paramétrage feuilleté φ_t^D des trajectoires de X^D au voisinage de x.

DÉFINITION 3. Ce paramétrage est appelé le paramétrage géodésique dans la direction D.

III. Feuilletages TCP **non transversalement affines.** Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas transversalement affine. Le but est de montrer que $\mathscr{F}$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.

On raisonne en codimension strictement supérieure à 2. En codimension 2, les arguments sont analogues, en remplaçant la torsion de la connexion par sa courbure.

1. *Métrique quasi-fibrée sur M associée à $\mathscr{F}$.* Soient un point x de M au-dessus duquel la torsion de ω est non nulle (II.3) et un ouvert distingué U_k pour $\mathscr{F}$ contenant x. Il existe une direction transverse $D = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ telle que la 1-forme $\omega_k^D = \alpha_0\omega_k^0 + \cdots + \alpha_n\omega_k^n$ soit non intégrable sur un voisinage de x. Comme deux 1-formes

(non nulles) proportionnelles sont simultanément intégrables ou non, l'ensemble des points de M en lesquels $d\omega^D \wedge \omega^D$ est non nulle est bien défini. C'est un ouvert non vide, saturé pour le feuilletage $\mathscr{F}$. On note $\mathscr{U}^D$ l'une de ses composantes connexes. Dans tout ouvert distingué U_k qui rencontre $\mathscr{U}^D$, on écrit pour $j<l<m$:

$$d\omega_k^D \wedge \omega_k^D \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_k^j \wedge \hat{\omega}_k^l \wedge \hat{\omega}_k^m \wedge \cdots \wedge \omega_k^n = \varphi_k^{jlm} \cdot \omega_k^0 \wedge \cdots \wedge \omega_k^n ,$$

où les φ_k^{jlm} sont des fonctions basiques pour $\mathscr{F}$ et non toutes nulles. Le tenseur g symétrique et basique pour $\mathscr{F}$

$$g = \varphi^2 \sum_{i=0}^{n} (\omega_k^i)^2 , \quad \varphi^2 = \sum_{j<l<m} (\varphi_k^{jlm})^2$$

est non dégénéré et invariant par changement de carte. D'où un parallélisme transverse adapté $(v_0, \ldots, v_n)$ défini sur $\mathscr{U}^D$ en imposant

$$i \neq j \quad \omega_k^j(v_i) = 0 , \qquad \omega_k^j(v_j) \neq 0 , \quad g(v_j, v_j) = 1 .$$

Lorsque $\mathscr{U}^D$ coïncide avec M, le théorème est démontré.

On suppose donc dans la suite que $\mathscr{U}^D$ est un ouvert propre de M et l'on note $\mathscr{K}$ son complémentaire. Comme g s'annule sur le bord de $\mathscr{U}^D$, on le prolonge par continuité sur M en l'identifiant à 0 sur $\mathscr{K}$. On fixe une métrique riemannienne h sur M. Que l'on remplace par $\bar{h}$ définie comme suit: quel que soit x dans M,

$$T_x M = T_x F_x \oplus T_x^\perp F_x , \qquad \bar{h}_x\big|_{T_x F_x} = h_x\big|_{T_x F_x} , \quad \bar{h}_x\big|_{T_x^\perp F_x} = g .$$

Par construction, $\bar{h}$ est une métrique riemannienne quasi-fibrée sur $\mathscr{U}^D$. Par contre, bien que non nulle le long des feuilles de $\mathscr{F}$, $\bar{h}$ est dégénérée sur $\mathscr{K}$.

2. *Distance à $\mathscr{K}$.* Soient x et y dans M et $\mathscr{C}_{x,y}$ l'ensemble des chemins $\mathscr{C}^1$ par morceaux $\gamma: [0, 1] \to M$ d'extrémités x, y. La longueur l^γ de γ est $\int_0^1 \sqrt{\bar{h}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}dt$ et l'on définit une application $d: M \times M \to \boldsymbol{R}_+$ par

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathscr{C}_{x,y}} l^\gamma .$$

On vérifie aisément que d est une pseudo-distance continue sur M.

DÉFINITION 4. La (pseudo) distance à $\mathscr{K}$ est l'application $\mathrm{d}_{\mathscr{K}}: M \to \boldsymbol{R}^+$ définie par $d_{\mathscr{K}}(x) = \inf_{y \in \mathscr{K}} d(x, y)$.

Par construction, $d_{\mathscr{K}}$ est nulle sur $\mathscr{K}$ et coïncide avec la distance riemannienne associée à $\bar{h}$ sur $\mathscr{U}^D$.

LEMME 1. *Pour tout x de $\mathscr{U}^D$, il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \to M$ vérifiant: $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1)$ est dans $\mathscr{K}$, $\gamma|_{[0,1[}$ est contenu dans $\mathscr{U}^D$ et $\gamma|_{[0,1[}$ est une géodésique de longueur $d_{\mathscr{K}}(x)$ pour $\bar{h}$, perpendiculaire à $\mathscr{F}$.*

PREUVE DU LEMME 1. Soit un chemin $\gamma: [0, 1] \to M$ d'origine x et tel que $\gamma(1)$ soit dans $\mathscr{K}$. En particulier, γ rencontre $\partial\mathscr{U}^D$. Quitte à restreindre le domaine de définition de γ puis à faire un changement de paramètre, on peut supposer que $\gamma|_{[0,1[}$ est contenu dans $\mathscr{U}^D$ et que $\gamma(1)$ se trouve dans $\partial\mathscr{U}^D$.

Construction de la géodésique γ: par construction de $d_{\mathscr{K}}$, quel que soit $m>0$, il existe un chemin γ_1^m: $[0, 1]\to M$ de classe $\mathscr{C}^1$, tel que:

$$\gamma_1^m|_{[0,1[}\subset\mathscr{U}^D, \quad \gamma_1^m(1)=z_1^m\in\partial\mathscr{U}^D \quad \text{et} \quad d_{\mathscr{K}}(x)<l^{\gamma_1^m}\leqslant d_{\mathscr{K}}(x)+\frac{1}{m}.$$

Soit y_m le milieu de γ_1^m:

$$d(x, y_m)\leqslant(d_{\mathscr{K}}(x)+1/m)/2 \quad \text{et} \quad d(y_m, z_1^m)\leqslant(d_{\mathscr{K}}(x)+1/m)/2.$$

Notons $\gamma(1/2)$ un point d'accumulation de $(y_m)_{m\in N}$ dans le compact $\overline{\mathscr{U}^D}$ et z_1 un point d'accumulation de $(z_1^m)_{m\in N}$ dans $\partial\mathscr{U}^D$. La continuité de d entraîne que $d(x, \gamma(1/2))=d_{\mathscr{K}}(x)/2$ et $d_{\mathscr{K}}(\gamma(1/2))=d_{\mathscr{K}}(x)/2$. On réitère ce procédé. Pour tous p et n avec $0\leqslant p\leqslant 2^n$, on obtient ainsi par induction un point $\gamma(p/2^n)$ vérifiant:
pour tous p, p', n, n' avec $0\leqslant p\leqslant 2^n$ et $0\leqslant p'\leqslant 2^{n'}$,

$$d(\gamma(p/2^n), \gamma(p'/2^{n'}))=|p/2^n-p'/2^{n'}|d_{\mathscr{K}}(x).$$

Puisque $\{p/2^q\}_{p,q\in N}$ est dense dans $[0, 1]$, il existe un unique chemin continu γ reliant x à z et passant par tous les x_q^p. Par construction, pour tous $x_1=\gamma_{t_1}$ et $x_2=\gamma_{t_2}$, t_1, $t_2\in[0, 1[$, $d(x_1, x_2)=|t_1-t_2|d_{\mathscr{K}}(x)$. Cette condition entraîne que $\gamma|_{[0,1[}$ est une géodésique pour $\bar{g}$ dans $\mathscr{U}^D$, reliant x_1 et x_2. En particulier, γ est $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

γ est orthogonal à $\mathscr{F}$ en tout point. Puisque $\gamma|_{[0,1[}$ est une géodésique pour la métrique quasi-fibrée $\bar{h}$ sur $\mathscr{U}^D$, si elle est orthogonale en un point à $\mathscr{F}$, elle l'est en tout point [Mo]. On constate alors aisément qu'une courbe γ qui n'est perpendiculaire en aucun point ne peut être de longueur minimale, d'où le lemme. □

Comme $d_{\mathscr{K}}$ est localement constante le long de chaque feuille de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{U}^D$, on a le:

COROLLAIRE 2. *$d_{\mathscr{K}}$ est strictement positive sur $\mathscr{U}^D$, continue et basique sur M.*

On en déduit aussi le:

COROLLAIRE 3. *L'adhérence de toute feuille de $\mathscr{F}$ contenue dans $\mathscr{U}^D$ est aussi incluse dans $\mathscr{U}^D$.*

Alors, $\mathscr{F}$ satisfait bien l'hypothèse de la proposition 2. En effet, dans ce cas, les feuilles incluses dans $\mathscr{U}_T^D=\pi^{-1}(\mathscr{U}^D)$ sont relativement compactes dans $\mathscr{U}_T^D$: l'ouvert $\mathscr{U}^D$ étant saturé par les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$, la section feuilletée de E_T associée au parallélisme transverse adapté établit un difféomorphisme entre les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ et celles de $\mathscr{F}_T$ restreint à $\mathscr{U}_T^D$.

IV. Existence d'un parallélisme transverse adapté. Cette partie est consacrée à la démonstration de la proposition 2.

1. *Notions préliminaires—esquisse de preuve.* Dans la suite, $\mathscr{F}$ désigne un

feuilletage TCP vérifiant les hypothèses de la proposition 2. Puisque $\mathscr{F}_T$ est transversalement parallélisable, s'il existe une feuille de $\mathscr{F}_T$ relativement compacte dans E_T il existe aussi un ouvert connexe Ω_T constitué de feuilles relativement compactes et saturé par leurs adhérences qui sont des sous-variétés de E_T (cf. [S]). Ces adhérences sont les fibres d'une fibration localement triviale au-dessus d'une variété connexe orientable W_T. De plus, l'adhérence d'une feuille F_T de Ω_T se projette par π sur l'adhérence de la feuille projetée $F=\pi(F_T)$. Comme $\mathscr{F}_T$ est invariant par l'action à droite de $\boldsymbol{R}_+^*$, $\bar{F}_T$ est un sous-fibré de E_T au-dessus de $\bar{F}$ de groupe structural un sous-groupe compact de $(\boldsymbol{R}_+^*, \times)$, c'est à dire $\{1\}$. Par conséquent, $\bar{F}_T$ est difféomorphe à $\bar{F}$ qui est une sous-variété de M. L'ouvert $\Omega=\pi(\Omega_T)$ est un ouvert connexe saturé par les adhérences de ses feuilles qui sont les fibres d'une fibration propre $p: \Omega \to W$ au-dessus d'une variété connexe W. Ce feuilletage vertical par les adhérences des feuilles de $\mathscr{F}$ sur Ω est noté $\bar{\mathscr{F}}$ et ses feuilles sont appellées les *adhérences régulières*. Par ailleurs, W_T est in fibré orienté en droites au-dessus de W, donc admet une section globale σ. Puisque π est un difféomorphisme de chaque adhérence $\bar{F}_T$ sur $\overline{\pi(F_T)}$, σ induit une section globale feuilletée de Ω dans Ω_T. Ce qui signifie que $\mathscr{F}$ est transversalement parallélisable sur Ω. Restreint à une adhérence régulière $\bar{F}$, le feuilletage $(\bar{F}, \mathscr{F})$ reste alors transversalement parallélisable [Mo].

Le théorème est trivialement vérifié si le bord $\partial\Omega$ est vide. Dans la suite, on raisonne par l'absurde en supposant que $\partial\Omega$ est *non vide*. Il existe ainsi une direction transverse D et une feuille F dans Ω telles que la feuille F^D de $\mathscr{F}^D$ contenant F rencontre le bord de Ω.

Soient F une telle feuille et X^D un champ de vecteurs sur M, tangent à $\mathscr{F}^D$, transverse à $\mathscr{F}$, de flot $(\phi_u^D)_{u\in\boldsymbol{R}}$. A priori, seules certaines de ses trajectoires partant de F atteignent aussi $\partial\Omega$ en des temps que l'on suppose positifs quitte à inverser l'orientation de X^D. Observons toutefois que ces trajectoires se projettent toutes sur le même chemin de $W=\Omega/\bar{\mathscr{F}}$, d'où le

LEMME 2. *Les trajectoires de X^D partant de F rencontrent toutes les mêmes adhérences régulières incluses dans Ω.*

Soit x un point de F dont la trajectoire $(\phi_u^D(x))_{u\in\boldsymbol{R}}$ rencontre $\partial\Omega$. On fixe arbitrairement une métrique riemanienne h sur M. On choisit un réel strictement positif R inférieur au rayon d'injectivité de h tel que la boule fermée B_x^R de centre x et de rayon R soit incluse dans Ω. Il existe un temps $u_y>0$ et un point $y=\phi_{u_y}^D(x)$, pour lesquels la boule fermée B_y^R rencontre $\partial\Omega$, son intérieur est contenu dans Ω et $B_{\phi_u(x)}^R$ est incluse dans Ω pour tout u de $[0, u_y[$. Soient x_0 un point de l'intersection $B_y^R \cap \partial\Omega$ et V_T l'ouvert de directions transverses dont les représentants ne sont pas tangents au bord de B_y^R en x_0. Quelle que soit D' dans V_T, les feuilles $F_{x_0}^{D'}$ rencontrent Ω et $\partial\Omega$. Quitte à changer de feuille, on suppose dans la suite que F contient un point x de B_y^R de sorte que la trajectoire de X^D partant de x atteigne précisément x_0.

Il s'agit alors de montrer l'existence d'une sous-variété $\mathscr{B}_{x_0}$ passant par x_0 et vérifiant les propriétés suivantes: $\mathscr{B}_{x_0}$ est la limite du feuilletage $\bar{\mathscr{F}}$ de Ω par les adhérences régulières. Elle est saturée par le feuilletage $\mathscr{F}$ et la feuille F_{x_0} contenue dans $\mathscr{B}_{x_0}$ n'est pas relativement compacte dans $\mathscr{B}_{x_0}$. Si z est un point de $\bar{F}_{x_0} \setminus F_{x_0}$ on montre l'existence d'un ouvert de F_z^D (pour sa topologie de feuille) contenant z et inclus dans $\partial\Omega$ quelle que soit la direction D de l'ouvert V_T. Le bord $\partial\Omega$ est donc d'intérieur non vide, d'où la contradiction cherchée.

2. *Paramétrage géodésique à partir d'une adhérence régulière.* Dans la suite, F_T représente une feuille relevée de la feuille F. On note encore $\hat{\varphi}_t^D$ le groupe à un paramètre local associé au champ de vecteurs Y^D sur E_T (II.5). Par compacité de $\bar{F}_T$ il existe un ouvert maximal U de $\boldsymbol{R} \times \bar{F}_T$ dans E_T sur lequel $\hat{\varphi}^D$ est bien défini. Il existe aussi un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\hat{\varphi}^D$ soit défini sur $]-\varepsilon, \varepsilon[\times \bar{F}_T$ et que son image reste dans Ω_T. Puisque π est un difféomorphisme de $\bar{F}_T$ sur $\bar{F}$, le paramétrage géodésique $\varphi^D = \pi \circ \hat{\varphi}^D$ dans la direction D (II.5) est défini sur les trajectoires de X^D qui partent de $\bar{F}$. Avec un raisonnement analogue à celui déjà utilisé, on observe en fait qu'il est défini sur un voisinage de $\bar{F}$ saturé par les adhérences régulières.

Par construction, la trajectoire de Y^D d'origine z_x rencontre $\partial\Omega_T$, d'où l'existence de réels t (positifs par hypothèse) pour lesquels $\hat{\varphi}_t^D(z_x)$ est dans $\partial\Omega_T$. Notons s le plus petit d'entre eux, $s > 0$. Observons que $\hat{\varphi}_s^D$ n'est pas défini sur $\bar{F}_T$, par construction de Ω_T. Les propriétés du flot géodésique jointes au fait que les trajectoires de X^D partant de $\bar{F}$ rencontrent toutes les mêmes adhérences de feuilles dans Ω entraînent alors

LEMME 3. *Il existe s réel strictement positif tel que:*

– *pour tout $t < s$, φ_t^D est défini sur $\bar{F}$ et $\varphi_t^D(\bar{F})$ est inclus dans Ω.*

– *pour tout point y de $\bar{F}$ pour lequel $\varphi_s^D(y)$ est défini, $\varphi_s^D(y)$ est dans $\partial\Omega$.*

De plus, si φ_s^D est défini en y, φ_t^D l'est aussi sur un voisinage V_y de y dans $\bar{F}$ et pour des temps t strictement supérieurs à s.

3. *Limite $\mathscr{B}_{x_0}$ des adhérences régulières en x_0.* D'après le lemme précédent, l'ensemble $\mathscr{B}^D = \{y \in \bar{F} \mid \varphi_s^D(y) \text{ existe}\}$ est un ouvert de $\bar{F}$. C'est même un ouvert strict de $\bar{F}$. Sinon, φ_s^D serait défini sur $\bar{F}$ et $\varphi_s^D(\bar{F})$ serait une adhérence régulière contenue dans Ω, d'où une contradiction.

On note $\mathscr{B}_x^D$ la composante connexe de $\mathscr{B}^D$ contenant x et $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}}$ le sous-ensemble de $\partial\Omega$ formé des points atteints à partir de $\mathscr{B}_x$ au temps s. Par construction, $x_0 = \varphi_s^D(x)$ et $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}}$ est difféomorphe à $\mathscr{B}_x^D$, donc est une sous variété plongée contenue dans $\partial\Omega$ et de même dimension que $\bar{F}$. A priori, $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}}$ ne dépend que de x_0 et de la direction transverse D.

On appelle *feuille limite dans la direction D* toute feuille de $\mathscr{F}$ passant par un point de $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}}$.

LEMME 4. *La sous-variété $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}}$ est une réunion de feuilles limites dans la direction D.*

Sa preuve se fait à l'aide du lemme 2.

LEMME 5. *Pour toutes directions transverses D et D' de V_T, $\mathscr{B}_{x_0}^{D_{\lim}} = \mathscr{B}_{x_0}^{D'_{\lim}}$.*

Preuve du lemme 5. Quelle que soit la direction transverse D de V_T, le point x_0 est un point limite $\varphi^D_{s_D}(y_D)$ où y_D se trouve dans une adhérence régulière $\bar{F}_D$ incluse dans Ω. Comme le paramétrage géodésique est en fait défini sur un voisinage de $\bar{F}_D$ saturé par $\bar{\mathscr{F}}$, x_0 se trouve dans un ouvert $\mathscr{V}_D$ connexe maximal qui est la composante connexe contenant x_0 de la réunion des traces des orbites de X^D. On note $\mathscr{W}_D$ son intersection avec Ω. En transportant par φ^D_t, $t \geqslant s_D$, le feuilletage $\bar{\mathscr{F}}$ restreint à un voisinage de y_D suffisamment petit, on constate qu'il existe sur $\mathscr{V}_D$ un prolongement continu du feuilletage de $\mathscr{W}_D$ par $\bar{\mathscr{F}}$ dont la feuille en x_0 est un ouvert de $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$.

Puisque la restriction de $\bar{\mathscr{F}}$ à $\mathscr{W}_D \cap \mathscr{W}_{D'}$ admet au plus un prolongement continu sur son bord, les feuilletages prolongés dans les directions D et D' ont mêmes plaques en les points de $\partial\Omega \cap \mathscr{V}_D \cap \mathscr{V}_{D'}$: $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$ et $\mathscr{B}^{D'_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$ ont même germe en x_0. Par conséquent, les orbites négatives de $X^{D'}$ partant des points voisins de x_0 dans $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$ rencontrent les mêmes adhérences régulières car elles se projettent toutes sur un même chemin dans $W = \Omega/\bar{\mathscr{F}}$. Par connexité de $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$, les orbites négatives de $X^{D'}$ partant de $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$ ont toutes la même projection. Elles rencontrent donc une même adhérence régulière $\bar{F}_{x'}$. Ainsi, les feuilles de $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$ sont des feuilles limites dans la direction D' provenant de $\bar{F}_{x'}$, d'où l'inclusion $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0} \subset \mathscr{B}^{D'_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$. De manière analogue $\mathscr{B}^{D'_{\mathrm{lim}}}_{x_0} \subset \mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$, d'où le résultat. □

On note à présent $\mathscr{B}_{x_0}$ au lieu de $\mathscr{B}^{D_{\mathrm{lim}}}_{x_0}$.

Lemme 6. *Le feuilletage $(\mathscr{B}_{x_0}, \mathscr{F})$ induit par $\mathscr{F}$ sur la sous-variété $\mathscr{B}_{x_0}$ est transversalement parallélisable et aucune de ses feuilles n'est relativement compacte dans $\mathscr{B}_{x_0}$.*

Preuve du lemme 6. Puisque $(\bar{F}, \mathscr{F})$ est transversalement parallélisable, que $\mathscr{B}_{x_0} = \varphi^D_s(\mathscr{B}^D_x)$ et que le flot local φ^D_t est feuilleté, on déduit le premier point.

S'il existe une feuille F_z relativement compacte dans $\mathscr{B}_{x_0}$, $\bar{F}_z$ est une sous variété compacte de $\mathscr{B}_{x_0}$, saturée de feuilles de $\mathscr{F}$ (cf. [S]). Sans perte de généralité ($\mathscr{B}_z = \mathscr{B}_{x_0}$), on suppose que $z = x_0$. Alors, $(\varphi^D_s)^{-1}(\bar{F}_{x_0})$ est une sous variété compacte de $\bar{F}$, saturée par $\mathscr{F}$ donc coïncide avec $\bar{F}$: $\mathscr{B}^D_x$ s'identifie à $\bar{F}$, $\mathscr{B}_{x_0}$ à $\bar{F}_{x_0}$ et φ^D_s est défini sur $\bar{F}$ toute entière. D'où une contradiction. □

On choisit alors un point z de $\bar{F}_{x_0} \setminus F_{x_0}$ en dehors de $\mathscr{B}_{x_0}$. Soient $(z_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite de points de F_{x_0} qui tend vers z et D une direction transverse de V_T. On écrit que $z_n = \phi^D_{u_n}(x_n)$ où x_n est dans F et u_n dans $\boldsymbol{R}$.

Lemme 7. *La suite $(u_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ est non bornée.*

Preuve du lemme 7. Par compacité de $\bar{F}$, la suite $(y_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ peut être supposée convergente vers y dans $\bar{F}$. Si $(u_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ est bornée, on en extrait une sous suite $(v_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ convergeant vers un réel u. La suite $(\phi^D_{v_n}(y_{v_n}))_{n \in \boldsymbol{N}}$ tend alors vers le point $\phi^D_u(y)$ de $\mathscr{B}_{x_0}$. Et ceci est exclu par hypothèse. □

Avec les notations de la démonstration précédente:

LEMME 8. *La trajectoire* $(\phi^D_{-u}(z))_{u\geqslant 0}$ *est incluse dans* $\partial\Omega$, *quelle que soit la direction transverse* D *de* V_T.

PREUVE DU LEMME 8. Soient un réel positif t et $\alpha^t_{z_n}=\{\phi^D_{-u}(z_n), t\geqslant u\geqslant 0\}$ la trajectoire de X^D d'origine $\phi^D_{-t}(z_n)$ et d'extrémité z_n.

Soit $(K_m)_{m\in N}$ une suite exhaustive de compacts de la variété $W=\Omega/\bar{\mathscr{F}}$. On note $\hat{K}_m$ l'adhérence du complémentaire de l'image réciproque de K_m dans M. Les compacts $\hat{K}_m$ sont saturés pour $\bar{\mathscr{F}}$ et forment un système fondamental de voisinages du complémentaire $\mathscr{K}$ de Ω. Comme toutes les trajectoires de X^D partant de $\bar{F}$ rencontrent $\hat{K}_m$, le temps mis pour atteindre $\hat{K}_m$ à partir de $\bar{F}$ est borné. Ainsi, quel que soit m, les $\alpha^t_{z_n}$ sont tous contenu dans K_m pour n assez grand puisque la suite $(u_n)_{n\in N}$ n'est pas bornée. Ce raisonnement entraîne que le point d'accumulation $\phi^D_{-t}(z)=\lim_{n\to\infty}\phi^D_{-t}(z_n)$ se trouve dans $\hat{K}_m$ quels que soient m et t. Par conséquent, $\phi^D_{-t}(z)$ est dans $\partial\Omega$ puisque simultanément dans $\bar{\Omega}$ et dans $\mathscr{K}=\bigcap_m \hat{K}_m$. □

Le saturé pour $\mathscr{F}$ de la trajectoire $(\phi^D_{-u}(z))_{u\geqslant 0}$ passant par z est donc un ouvert de F^D_z inclus dans $\partial\Omega$ pour toute direction transverse D de V_T. On en déduit que $\partial\Omega$ a un intérieur non vide, d'où la contradiction cherchée, ainsi que la proposition. Et le théorème qui en est un corollaire.

REFERENCES

[A] T. ASUKE, On transversely flat conformal foliations with good measures, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1939–1958.

[B] A. BEAUVILLE, Géométrie des tissus (d'après Chern-Griffiths), Séminaire Bourbaki 531 (1978–79).

[Ca] Y. CARRIERE, Flots riemanniens, Astérisque 116 (1984), 31–52.

[F] D. FRIED, Closed Similarity manifolds, Comment. Math. Helv. 55 (1980), 576–582.

[GZ] I. M. GELFAND ET I. ZAKHAREVITCH, Webs, Veronese curves and bihamiltonian systems, J. Funct. Anal. 99 (1991), 150–178.

[Gh] E. GHYS, Flots transversalement affines et tissus feuilletés, Mém. Soc. Math. France 46 (1991), 123–150.

[Mo] P. MOLINO, Riemannian foliations, Progress in Mathematics, 1988.

[N] T. NISHIMORI, A note on the classification of non singular flows with transverse similarity structures, Hokkaido, Math. J. 21 (1992), 381–393.

[R] M. H. RIGAL, Géométrie globale des systèmes bihamiltoniens en dimension impaire, Thèse Université Montpellier II, 1996.

[S] H. J. SÜSSMANN, A generalization of the closed subgroup theorem to quotient of arbitrary manifolds, J. Differential Geom. 101 (1975), 151–166.

UNITÉ DE MATHÉMATIQUES C.N.R.S. UMR 128
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
46, ALLÉE D'ITALIE
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE

E-mail address: mrigal@umpa.ens-lyon.fr