Tohoku Math. J.
52 (2000), 79–94

UNE REMARQUE SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR L'OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL DE PARTIE PRINCIPALE À COEFFICIENTS POLYNOMIAUX

YÛSAKU HAMADA

(Received August 10, 1998)

Abstract. In our preceding article [H2], by applying the results of Bieberbach, Fatou and Picard, we have studied the domain of holomorphy of the solution of the Cauchy problem for the differential operator with coefficients of entire functions. In this article, by employing the results of the modular function and its ordinary differential equation, we give a remark on the domain of holomorphy of the solution of the Cauchy problem for the differential operator of principal part with polynomial coefficients.

Résumé. Dans notre article précédent [H2], en appliquant les résultats de Bieberbach, Fatou et Picard, nous avons étudié le domaine d'holomorphie de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel à coefficients des fonctions entières. Dans cet article, en employant des résultats de la fonction modulaire et son équation différentielle ordinaire, nous donnons une remarque sur le domaine d'holomorphie de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel de partie principale à coefficients polynomiaux.

Introduction. Leray [L] et Gårding, Kotake et Leray [GKL] ont étudié les singularités et un prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy dans le domaine complexe.

[HLT1, 2], [H2], [HT], [P] et [PW] ont étudié des prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel à coefficients des fonctions entières.

Dans cet article, nous donnons une remarque sur le domaine d'holomorphie de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel de partie principale à coefficients polynomiaux. Ceci concerne la fonction modulaire et son équation différentielle ordinaire.

1. Notations et résultats. Soit $x = (x_0, x')$ $[x' = (x_1, x''), x'' = (x_2, \dots, x_n)]$ un point de $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

On considère un opérateur différentiel d'ordre m

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha\,, \quad D^\alpha = D_0^{\alpha_0} \cdots D_n^{\alpha_n}\,, \quad D_i = \partial/\partial x_i\,, \quad 0 \leq i \leq n\,.$$

Sa partie principale est notée $g(x, D)$.

Nous supposons que tous les coefficients de a sont des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$ et que $a_{m,0,\dots,0}(x) = 1$ sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35A20; Secondary 34A20.

Soit S l'hyperplan $x_0 = 0$, donc non caractéristique pour a.

Étudions le problème de Cauchy

$$a(x, D)u(x) = v(x)\,, \quad D_0^h u(0, x') = w_h(x')\,, \quad 0 \leq h \leq m-1\,, \tag{1.1}$$

où $v(x)$ et les $w_h(x')$, $0 \leq h \leq m-1$, sont des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^{n+1}$ et $\boldsymbol{C}^n$ respectivement.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, il existe une unique solution holomorphe au voisinage de S dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

Nous étudions un prolongement analytique de cette solution. En général, comme on a vu dans [H2] et on va voir dans la Section 5, des diverses phénomènes y se passent.

Dans cet article, nous donnons une remarque sur le domaine d'existence de la solution pour l'opérateur différentiel de partie principale à coefficients polynomiaux.

D'abord, nous rappelons un résultat de [HLT2].

THÉORÈME [HLT2]. *Supposons que dans* $g(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, *les* $a_\alpha(x)$ *soient des polynômes de degrés* $k\mu$ *en* x' *pour* $\alpha_0 = m-k$, $0 \leq k \leq m$, μ *étant un entier* ≥ 0. *Notons* $a_\alpha(x) = \sum_{|\beta'| \leq k\mu} a_\alpha^{\beta'}(x_0)x'^{\beta'}$, *pour* $|\alpha| = m$, $\alpha_0 = m-k$, $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $x'^{\beta'} = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ *et* $M(R) = \sup\{|a_\alpha^{\beta'}(x_0)|;\ |x_0| \leq R, |\beta'| \leq k\mu, |\alpha| = m, \alpha_0 = m-k, 0 \leq k \leq m\}$.

Alors il existe une constante C $(0 < C \leq 1)$ *ne dépendant que de* $M(R)$ *telle que la solution du* (1.1) *soit holomorphe sur*

$$\{x;\ |x_0| \leq C \min[(1 + \|x'\|)^{-\max[\mu-1,0]}, R]\}\,,$$

où $\|x'\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

En particulier, si $\mu = 0, 1$, *la solution est holomorphe sur* $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

REMARQUE 1.1. Ce résultat a été déjà obtenu dans [HLT2]. Pour $\mu = 0, 1$, il est aussi démontré dans [P] et [PW].

Aux exemples dans la Section 5, la solution peut se prolonger analytiquement sur le revêtement universel $\mathcal{R}[\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{\text{fini}} K_j]$ d'un domaine $\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{\text{fini}} K_j$, où les K_j sont des surfaces caractéristiques.

Dans la suite, nous donnons des exemples tels que le domaine d'holomorphie de la solution soit plus restrictif.

Rappelons les définitions d'un domaine de Riemann (Ω, π), c'est-à-dire, un domaine étalé au-dessus de $\boldsymbol{C}^n$ et d'un point frontière de Ω: Ω est un espace topologique connexe, séparé, π est une application continue de Ω dans $\boldsymbol{C}^n$, qui est localement un homéomorphisme, et le point $\underline{p} = \pi(p)$, $p \in \Omega$ est appelé la projection de p. (Voir [BT], [C], [G] et [N]).

Soit dans Ω une suite des points $\{p^{(i)}\}_{i=1,2,\ldots}$ qui n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Supposons que la suite $\{\underline{p}^{(i)}\}$ converge vers un point $\underline{p}$ de $\boldsymbol{C}^n$ et que pour tout voisinage $\underline{V}$ de $\underline{p}$ dans $\boldsymbol{C}^n$, il existe un entier $m > 0$ tel que $p^{(i)}$, $p^{(j)}$ $(i, j \geq m)$ sont joints par une courbe continue γ dans Ω vérifiant $\underline{\gamma} \subset \underline{V}$. Alors on appelle $p = \{p^{(i)}\}_{i=1,2,\ldots}$ un point frontière de Ω et $\underline{p} = \pi(p)$.

Soient p un point frontière de Ω et (A) la condition suivante:

(A) *Il existe une constante* $\delta_0 > 0$ *telle que pour tout polydisque* $\underline{V}_\delta$ $(0 < \delta \leq \delta_0)$ *de centre* $\underline{p}$ *et de rayon* δ *dans* $\boldsymbol{C}^n$, *la projection* $\pi(V_\delta)$ *de la composante connexe* V_δ *de* $\pi^{-1}(\underline{V}_\delta)$, *ayant p comme un point frontière, a l'extérieur non vide dans* $\underline{V}_\delta$.

Si un domaine étalé a au moins un point frontière satisfaisant la condition (A), nous disons que ce domaine possède la propriété (E).

Soient $\omega^{(0)}$ un point de base de Ω et $\tilde{\gamma}$ un chemin d'origine $\omega^{(0)}$ tel que $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$, où γ est un chemin dans $\boldsymbol{C}^n$ d'origine $\pi(\omega^{(0)})$. $\tilde{\gamma}$ est applé le relèvement de γ.

Considérons le problème de Cauchy

$$
(1.2)\quad
\begin{aligned}
&\left\{D_0 - X_1^2 A_1(x'')D_{X_1} + \sum_{i=2}^{4} A_i(x'')D_i\right\} D_0 U(x_0, X_1, x'') = 0\,,\\
&U(0, X_1, x'') = 0\,, \quad D_0 U(0, X_1, x'') = X_1\,,\\
&\qquad\qquad [(x_0, X_1, x'') \in \boldsymbol{C}^5, x'' = (x_2, x_3, x_4)]\,,
\end{aligned}
$$

où

$$
(1.3)\quad
\begin{aligned}
A_1(x'') &= x_2^2(1 - x_2)^2 x_3\,,\\
A_2(x'') &= x_2^2(1 - x_2)^2 x_3^2\,,\\
A_3(x'') &= x_2^2(1 - x_2)^2 x_3 x_4\,,\\
A_4(x'') &= \frac{3}{2}x_2^2(1 - x_2)^2 x_4^2 - \frac{1}{2}(1 - x_2 + x_2^2)x_3^4\,.
\end{aligned}
$$

Nous avons

PROPOSITION 1.1. *Le domaine d'holomorphie de* $U(x_0, X_1, x'')$ *est un domaine étalé* (Ω, π), *où* $\pi(\Omega)$ *est un domaine de* $\boldsymbol{C}^5$. *Ce domaine* Ω *possède la propriété* (E).

Dans le problème (1.2), l'opérateur différentiel est d'ordre 2. Pour un opérateur différentiel du premier ordre, nous considérons

$$
(1.4)\quad
\begin{aligned}
&\left\{D_0 - X_1^2 A_1(x'')D_{X_1} + \sum_{i=2}^{4} A_i(x'')D_i + X_1 D_5\right\} U_1(x_0, X_1, x'', x_5) = 0\,,\\
&U_1(0, X_1, x'', x_5) = x_5\,, \quad [(x_0, X_1, x'', x_5) \in \boldsymbol{C}^6\,, \quad x'' = (x_2, x_3, x_4)]\,.
\end{aligned}
$$

Nous avons alors

PROPOSITION 1.2. *Le domaine d'holomorphie de* $U_1(x_0, X_1, x'', x_5)$ *est un domaine étalé* (Ω_1, π_1), *où* $\pi_1(\Omega_1)$ *est un domaine de* $\boldsymbol{C}^6$. Ω_1 *possède la propriété* (E).

Par le changement de variable $X_1 = 1/x_1$, les problèmes (1.2) et (1.4) se transforment en les problèmes respectifs (1.5) et (1.6):

$$(1.5)\quad \begin{aligned} &\left\{D_0 + \sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i\right\} D_0U_2(x) = 0\,, \\ &U_2(0, x') = 0\,, \quad D_0U_2(0, x') = 1/x_1\,, \\ &\qquad [x = (x_0, x') \in \boldsymbol{C}^5, x' = (x_1, x''), x'' = (x_2, x_3, x_4)]\,, \end{aligned}$$

et

$$(1.6)\quad \begin{aligned} &\left\{D_0 + \sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i + \frac{1}{x_1}D_5\right\} U_3(x, x_5) = 0\,, \\ &U_3(0, x', x_5) = x_5\,, \\ &\qquad [(x, x_5) \in \boldsymbol{C}^6, x = (x_0, x'), x' = (x_1, x''), x'' = (x_2, x_3, x_4)]\,. \end{aligned}$$

Comme on le voit facilement dans la Section 2, au voisinage de $S \setminus \{x_1 = 0\}$ dans $\boldsymbol{C}^6$, où $S = \{x_0 = 0\}$, les $U_2(x)$ et $U_3(x, x_5)$ sont holomorphes et

$$(1.7)\qquad U_3(x, x_5) = x_5 - U_2(x)\,.$$

Nous avons alors

PROPOSITION 1.3. *Les domaines d'holomorphie de* U_i, $i = 2, 3$, *sont des domaines étalés* (Ω_i, π_i), $i = 2, 3$, *où* $\pi_2(\Omega_2)$ *et* $\pi_3(\Omega_3)$ *sont des domaines de* $\boldsymbol{C}^5$ *et* $\boldsymbol{C}^6$ *respectifs. Les* Ω_i, $i = 2, 3$ *possèdent la propriété* (E).

Remarquons que par le changement de variable $X_1 = 1/x_1$, les Propositions 1.1 et 1.2 résultent de la Proposition 1.3.

[L], [GKL] et [H1] ont précisé des ramifications des solutions des problèmes de Cauchy, lorsque la surface initiale a des points caractéristiques. Le problème de Cauchy suivant, dans des cas exceptionnels de [L] et [GKL], concerne les Propositions 1.1, 1.2 et 1.3:

$$(1.8)\quad \begin{aligned} &\left\{\sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i\right\} \Delta_j(x') = 0\,, \quad \Delta_j(0, x'') = x_{j+1}\,, \quad j = 1, 2\,, \\ &\qquad x' = (x_1, x'') \in \boldsymbol{C}^4\,, \quad x'' = (x_2, x_3, x_4)\,. \end{aligned}$$

La surface initiale $x_1 = 0$ a des points caractéristiques $\{x''; x_2 = 0, 1\} \cup \{x''; x_3 = 0\}$.

Nous avons

PROPOSITION 1.4. *Les domaines d'holomorphie de* $\Delta_j(x')$, $j = 1, 2$, *sont des domaines étalés* $(\Omega_{j+3}, \pi_{j+3})$, *où les* $\pi_{j+3}(\Omega_{j+3})$ *sont des domaines de* $\boldsymbol{C}^4$. *Les* Ω_{j+3} *possèdent la propriété* (E).

Nous démontrons ces Propositions dans la Section 4. Dans la Section 2, nous donnons quelques préliminaires sur des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Dans la Section 3, nous rappelons des résultats de la fonction modulaire et son équation différentielle ordinaire. Dans la Section 5, nous donnons quelques exemples.

2. Sur une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Soit $(x, x_{n+1}) \in \boldsymbol{C}^{n+2}$, $x = (x_0, x')$, $x' = (x_1, x'')$, $x'' = (x_2, \dots, x_n)$.

On considère un opérateur différentiel du premier ordre

$$\mathcal{L} = D_0 + \mathcal{M}\,, \quad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x')D_i\,, \tag{2.1}$$

où les $a_i(x')$ sont des fonctions entières en x'.

Étudions le problème de Cauchy

$$(\mathcal{L} + a_{n+1}(x')D_{n+1})U(x, x_{n+1}) = 0\,, \quad U(0, x', x_{n+1}) = x_{n+1}\,, \tag{2.2}$$

où $a_{n+1}(x')$ est une fonction rationnelles non identiquement nulle en x' et holomorphe au voisinage d'un point $x'^{(0)}$ de $\boldsymbol{C}^n$. Le problème (2.2) possède une unique solution $U(x, x_{n+1})$ holomorphe au voisinage de $(0, x'^{(0)}, 0)$:

$$U(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - u(x)\,, \tag{2.3}$$

où $u(x)$ est la solution du problème

$$\mathcal{L}u(x) = a_{n+1}(x')\,, \quad u(0, x') = 0\,. \tag{2.4}$$

D'autre part, on a

$$u(x) = \int_0^{x_0} \hat{u}(\sigma, x')d\sigma\,, \tag{2.5}$$

où $\hat{u}(x)$ est la solution holomorphe au voisinage de $(0, x'^{(0)})$ du problème

$$\mathcal{L}\hat{u}(x) = 0\,, \quad \hat{u}(0, x') = a_{n+1}(x')\,. \tag{2.6}$$

Donc on a

$$U(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - \int_0^{x_0} \hat{u}(\sigma, x')d\sigma\,. \tag{2.7}$$

REMARQUE 2.1. $u(x)$ est la solution du problème

$$\mathcal{L}D_0u(x) = 0\,, \quad u(0, x') = 0\,, \quad D_0u(0, x') = a_{n+1}(x')\,. \tag{2.8}$$

En particulier, dans l'équation (2.2), nous prenons $a_{n+1}(x') = 1/x_1$, $x'^{(0)} = (x_1^{(0)}, x''^{(0)})$, $(x_1^{(0)} \neq 0)$ un point au voisinage de 0 dans $\boldsymbol{C}^n$.

Soit $\varphi(x)$ la solution holomorphe au voisinage de $S = \{x_0 = 0\}$ dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$ du problème

$$\mathcal{L}\varphi(x) = 0\,, \quad \varphi(0, x') = x_1\,. \tag{2.9}$$

Notons que $D_0\varphi(0, x') = -a_1(x')$. Alors le problème

$$\mathcal{L}u(x) = 1/x_1\,, \quad u(0, x') = 0\,, \tag{2.10}$$

possède une unique solution holomorphe au voisinage de $S \setminus \{x_1 = 0\}$ dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$:

$$u(x) = \int_0^{x_0} \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma, x')}\,. \tag{2.11}$$

La fonction

$$U(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - \int_0^{x_0} \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma, x')} \tag{2.12}$$

est la solution du problème

$$\left(\mathcal{L} + \frac{1}{x_1} D_{n+1}\right) U(x, x_{n+1}) = 0\,, \quad U(0, x', x_{n+1}) = x_{n+1}\,. \tag{2.13}$$

Supposons qu'il existe un point $x''^{(0)}$ au voisinage de 0 dans $\boldsymbol{C}^{n-1}$ tel que

$$a_1(0, x''^{(0)}) \neq 0\,. \tag{2.14}$$

Vu que $\varphi(x) = x_1 + \eta(x)x_0$, $\eta(x)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de 0 et que $\varphi(0, 0, x'') = 0$ et $D_0\varphi(0, 0, x''^{(0)}) = -a_1(0, x''^{(0)}) \neq 0$, il existe une unique fonction $\delta(x')$ holomorphe au voisinage de $(0, x''^{(0)})$ dans $\boldsymbol{C}^n$ telle que

$$\varphi(\delta(x'), x') = 0 \quad \text{et} \quad \delta(0, x'') = 0\,. \tag{2.15}$$

Prenons un point $x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x'^{(0)})$ au voisinage de 0 dans $\boldsymbol{C}^{n+1}$ tel que

$$x_0^{(0)} = \delta(x'^{(0)}) \quad \text{et} \quad x_1^{(0)} \neq 0 \quad \text{voisin de } 0\,. \tag{2.16}$$

Remarquons que la fonction $D_0\varphi(\delta(x'), x')$ n'est pas nulle au voisinage de $x'^{(0)}$. Notons

$$\Gamma(x') = 1/D_0\varphi(\delta(x'), x')\,. \tag{2.17}$$

Pour x' voisin de $x'^{(0)}$, définissons $\gamma(x') = \{x; x_0 = \gamma(t; x'), t \in [0, 1]\}$ un chemin fermé d'origine et d'éxtremité $(0, x')$ qui fait un tour autour du point $(\delta(x'), x')$, où $\gamma(t; x')$ est une fonction continue de $t \in [0, 1]$ et de x' voisin de $x'^{(0)}$, et $\gamma(0; x') = \gamma(1; x') = 0$. La fonction $u(x)$ dans (2.11) peut se prolonger analytiquement le long de $\gamma(x')$. Elle est multiforme et son germe $u^1(x)\,|_{(0,x')}$ au point d'extrémité de $\gamma(x')$ est égal à son germe $u^0(x)\,|_{(0,x')}$ au point d'origine de $\gamma(x')$ augmenté du germe $2\pi i\,\Gamma(x')\,|_{x'}$ de la fonction $2\pi i\,\Gamma(x')$ au point x':

$$\begin{aligned} u^1(x)\,|_{(0,x')} &= u^0(x)\,|_{(0,x')} + 2\pi i\,\Gamma(x')\,|_{x'}\,, \\ \Gamma(x') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(x')} \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma, x')}\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

On a alors

LEMME 2.1. *Supposons* (2.14). *Alors au voisinage de* $(0, x''^{(0)})$, *la fonction* $\Gamma(x')$ *est la solution du problème*

$$\mathcal{M}\Gamma(x') = 0\,, \quad \Gamma(0, x'') = -1/a_1(0, x'')\,. \tag{2.19}$$

PREUVE. Vu que $\varphi(\delta(x'), x') = 0$, on a

$$D_0\varphi(\delta(x'), x')D_i\delta(x') + D_i\varphi(\delta(x'), x') = 0\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}[D_0\varphi(\delta(x'), x')] \\
&\quad = D_0^2\varphi(\delta(x'), x')\mathcal{M}(\delta(x')) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x')(D_0 D_i\varphi)(\delta(x'), x') \\
&\quad = -D_0^2\varphi(\delta(x'), x')\mathcal{M}\varphi(\delta(x'), x')[D_0\varphi(\delta(x'), x')]^{-1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} a_i(x')(D_0 D_i\varphi)(\delta(x'), x') \\
&\quad = D_0^2\varphi(\delta(x'), x') + \sum_{i=1}^{n} a_i(x')(D_0 D_i\varphi)(\delta(x'), x') = 0\,.
\end{aligned}$$

Vu (2.17), on a donc $\mathcal{M}\Gamma(x') = 0$. Vu (2.17) et que $\delta(0, x'') = 0$ dans (2.15), on a $\Gamma(0, x'') = 1/D_0\varphi(0, 0, x'') = -1/a_1(0, x'')$. Ceci démontre le Lemme 2.1. C.Q.F.D.

3. La fonction modulaire et son équation différentielle ordinaire. Soit $w = \lambda(z)$ la fonction modulaire. Son domaine d'holomorphie est le demi-plan $\{z; \operatorname{Im} z > 0\}$, elle a la frontière naturelle $\{z; \operatorname{Im} z = 0\}$ et $\lambda'(z) \neq 0$ sur $\{z; \operatorname{Im} z > 0\}$, où $\lambda'(z) = d\lambda/dz$. Sa fonction inverse $\nu(w)$ est holomorphe au voisinage d'un point $w^{(0)} \in \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}$ et elle se prolonge analytiquement sur le revêtement universel $\mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}]$ du domaine $\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}$. Elle donne une représentation conforme de $\mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}]$ sur $\{z; \operatorname{Im} z > 0\}$.

On sait que la $\lambda(z)$ satisfait l'équation différentielle ordinaire (voir [Hi]):

$$\{w, z\} = -R(w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2, \tag{3.1}$$

où $\{w, z\}$ est la dérivée de Schwarz:

$$\{w, z\} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\Big/\frac{dw}{dz}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\Big/\frac{dw}{dz}\right)^2 \quad \text{et} \quad R(w) = \frac{1 - w + w^2}{2w^2(1 - w)^2}\,.$$

L'équation (3.1) s'écrit sous la forme

$$\frac{d^3w}{dz^3} = \frac{3}{2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)^2\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1} - \frac{1 - w + w^2}{2w^2(1 - w)^2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^3 \tag{3.2}$$

La dérivée de Schwarz est invariante sous des transformations

$$z = \frac{at + b}{ct + d}\,, \tag{3.3}$$

où a, b, c, d sont des constantes telles que $ad - bc = 1$. L'équation

$$\{W, t\} = -R(W)\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 \tag{3.4}$$

possède donc une intégrale générale

$$W(t) = \lambda\left(\frac{at+b}{ct+d}\right), \tag{3.5}$$

avec trois constantes quelconques.

Nous avons

LEMME 3.1. *Par une transformation* (3.3), (C) *un cercle ou une droite dans le plan de variable t se transforme en l'axe réel dans le plan de variable z.*

Pour $\mathrm{Im}(a\bar{c}) \neq 0$, (C) *est le cercle*:

$$\left| t - \frac{\bar{a}d - b\bar{c}}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right| = \frac{|ad - bc|}{|a\bar{c} - \bar{a}c|},$$

et pour $\mathrm{Im}(a\bar{c}) = 0$, (C) *est la droite*:

$$(a\bar{d} - \bar{b}c)t - (\bar{a}d - b\bar{c})\bar{t} + b\bar{d} - \bar{b}d = 0\,.$$

Supposons $\mathrm{Im}(b\bar{d}) > 0$.

(i) *Si* $\mathrm{Im}(a\bar{c}) > 0$, *l'extérieur de* (C) *contenant* $t = 0$ *se transforme en le demi-plan supérieur* $\{z;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *par* (3.3).

(ii) *Si* $\mathrm{Im}(a\bar{c}) < 0$, *l'intérieur de* (C) *contenant* $t = 0$ *se transforme en* $\{z;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *par* (3.3).

(iii) *Si* $\mathrm{Im}(a\bar{c}) = 0$, *le demi-plan* $\{t;\, \mathrm{Im}[(a\bar{d} - \bar{b}c)t + b\bar{d}] > 0\}$ *contenant* $t = 0$ *dont la frontière est* (C), *se transforme en* $\{z;\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ *par* (3.3).

Le domaine d'holomorphie de $W(t)$ a un cercle ou une droite (C) comme une frontière naturelle.

En introduisant comme les inconnues, $W(t)$ et ses dérivées de $W(t)$ dans (3.4), $w_1 = W$, $w_2 = dW/dt$, $w_3 = d^2W/dt^2$, on obtient un système d'équations équivalent à (3.4):

$$\frac{dw_1}{dt} = w_2\,, \quad \frac{dw_2}{dt} = w_3\,, \quad \frac{dw_3}{dt} = \frac{3w_3^2}{2w_2} - \frac{(1 - w_1 + w_1^2)w_2^3}{2w_1^2(1 - w_1)^2}\,, \tag{3.6}$$

avec les données

$$w_i(0) = \alpha_i\,, \quad 1 \le i \le 3\,, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \boldsymbol{C}^3\,. \tag{3.7}$$

On obtient donc la solution du problème (3.6) et (3.7):

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(t,\alpha) = \lambda\left(\frac{a(\alpha)t + b(\alpha)}{c(\alpha)t + d(\alpha)}\right), \\ w_2 &= w_2(t,\alpha) = \lambda'\left(\frac{a(\alpha)t + b(\alpha)}{c(\alpha)t + d(\alpha)}\right)\frac{1}{(c(\alpha)t + d(\alpha))^2}, \\ w_3 &= w_3(t,\alpha) = \lambda''\left(\frac{a(\alpha)t + b(\alpha)}{c(\alpha)t + d(\alpha)}\right)\frac{1}{(c(\alpha)t + d(\alpha))^4} \\ &\qquad - \lambda'\left(\frac{a(\alpha)t + b(\alpha)}{c(\alpha)t + d(\alpha)}\right)\frac{2c(\alpha)}{(c(\alpha)t + d(\alpha))^3}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\lambda'(z) = d\lambda/dz$, $\lambda''(z) = d^2\lambda/dz^2$ et $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $d(\alpha)$ sont des fonctions de α, $a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = 1$.

Vu (3.7), on a

$$\begin{gathered}\lambda\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right) = \alpha_1\,, \quad \lambda'\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{1}{d(\alpha)^2} = \alpha_2\,,\\ \lambda''\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{1}{d(\alpha)^4} - \lambda'\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{2c(\alpha)}{d(\alpha)^3} = \alpha_3\,.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Le système (3.8) d'inconnue α a la solution

$$\alpha_i = \alpha_i(t, w)\,, \quad 1 \le i \le 3\,, \qquad w = (w_1, w_2, w_3)\,. \tag{3.10}$$

Vu (3.8), on a donc

$$\begin{aligned} &\left.\frac{a(\alpha)t + b(\alpha)}{c(\alpha)t + d(\alpha)}\right|_{\alpha=\alpha(t,w)} = \nu(w_1)\,,\\ &(c(\alpha)t + d(\alpha))\,|_{\alpha=\alpha(t,w)} = (\lambda'(\nu(w_1))/w_2)^{1/2}\,,\\ &c(\alpha(t,w)) = \frac{\lambda''(\nu(w_1))w_2^{1/2}}{2\lambda'(\nu(w_1))^{3/2}} - \frac{\lambda'(\nu(w_1))^{1/2}w_3}{2w_2^{3/2}}\,,\\ &d(\alpha(t,w)) = \frac{\lambda'(\nu(w_1))^{1/2}}{w_2^{1/2}} - \left(\frac{\lambda''(\nu(w_1))w_2^{1/2}}{2\lambda'(\nu(w_1))^{3/2}} - \frac{\lambda'(\nu(w_1))^{1/2}w_3}{2w_2^{3/2}}\right)t\,.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Vu que

$$a(\alpha) = \frac{1 + b(\alpha)c(\alpha)}{d(\alpha)}\,,$$

donc que

$$\left.\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)} + \frac{t}{d(\alpha)(c(\alpha)t + d(\alpha))}\right|_{\alpha=\alpha(t,w)} = \nu(w_1)$$

et (3.11), on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_1(t,w) &= \lambda\left.\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\right|_{\alpha=\alpha(t,w)}\\ &= \lambda\left(\nu(w_1) - \frac{2w_2^2\lambda'(\nu(w_1))t}{2\lambda'(\nu(w_1))^2w_2 - \{\lambda''(\nu(w_1))w_2^2 - \lambda'(\nu(w_1))^2w_3\}t}\right)\,,\\ \alpha_2(t,w) &= \lambda'\left.\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{1}{d(\alpha)^2}\right|_{\alpha=\alpha(t,w)}\\ &= \lambda'\left(\nu(w_1) - \frac{2w_2^2\lambda'(\nu(w_1))t}{2\lambda'(\nu(w_1))^2w_2 - \{\lambda''(\nu(w_1))w_2^2 - \lambda'(\nu(w_1))^2w_3\}t}\right)\\ &\qquad \times d(\alpha(t,w))^{-2}\,,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3(t,w) &= \lambda''\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{1}{d(\alpha)^4} - \lambda'\left(\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}\right)\frac{2c(\alpha)}{d(\alpha)^3}\bigg|_{\alpha=\alpha(t,w)} \\ &= \lambda''\left(\nu(w_1) - \frac{2w_2^2\lambda'(\nu(w_1))t}{2\lambda'(\nu(w_1))^2 w_2 - \{\lambda''(\nu(w_1))w_2^2 - \lambda'(\nu(w_1))^2 w_3\}t}\right) \\ &\quad \times d(\alpha(t,w))^{-4} \\ &\quad - \lambda'\left(\nu(w_1) - \frac{2w_2^2\lambda'(\nu(w_1))t}{2\lambda'(\nu(w_1))^2 w_2 - \{\lambda''(\nu(w_1))w_2^2 - \lambda'(\nu(w_1))^2 w_3\}t}\right) \\ &\quad \times 2c(\alpha(t,w))d(\alpha(t,w))^{-3}.\end{aligned}$$

4. Une équation aux dérivées partielles particulière. Considérons l'équation

$$\left\{D_0 + \sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i\right\}u(x) = 0, \tag{4.1}$$

où $x = (x_0, x') \in \boldsymbol{C}^5$, $x' = (x_1, x'')$, $x'' = (x_2, x_3, x_4)$, et les $A_i(x'')$, $1 \le i \le 4$, satisfont (1.3). Ceci est équivalent à l'équation

$$\left\{B_0(x'')D_0 + D_1 + \sum_{i=2}^{4} B_i(x'')D_i\right\}u(x) = 0, \tag{4.2}$$

où

$$\begin{aligned} &B_0(x'') = \frac{1}{x_2^2(1-x_2)^2x_3}, \quad B_2(x'') = x_3, \quad B_3(x'') = x_4, \\ &B_4(x'') = \frac{3x_4^2}{2x_3} - \frac{(1-x_2+x_2^2)x_3^3}{2x_2^2(1-x_2)^2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'équation de sa courbe bicaractéristique est

$$\frac{dx_0}{d\tau} = B_0(x''), \quad \frac{dx_1}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx_i}{d\tau} = B_i(x''), \quad 2 \le i \le 4, \tag{4.4}$$

avec les données $x_0(0) = 0$, $x_i(0) = y_i$, $1 \le i \le 4$. On a d'abord

$$x_1 = \tau + y_1, \quad x_i = x_i(\tau, y''), \quad 2 \le i \le 4, \quad y'' = (y_2, y_3, y_4) \in \boldsymbol{C}^3. \tag{4.5}$$

En résolvant ce système (4.5), d'inconnue $y' = (y_1, \ldots, y_4)$, on a

$$y_1 = x_1 - \tau, \quad y_i = y_i(\tau, x''), \quad 2 \le i \le 4, \quad x'' = (x_2, x_3, x_4). \tag{4.6}$$

Puis, de (4.4) et (4.5), il résulte

$$x_0 = x_0(\tau, y'') = \int_0^\tau \frac{d\sigma}{x_2(\sigma, y'')^2(1 - x_2(\sigma, y''))^2 x_3(\sigma, y'')}. \tag{4.7}$$

En résolvant l'équation $x_0 = x_0(\tau, y''(\tau, x''))$ d'inconnue τ, et vu (4.6) on obtient

$$\begin{aligned} &\tau = T(x_0, x''), \quad y_1 = x_1 - T(x_0, x''), \\ &y_i = y_i(T(x_0, x''), x''), \quad 2 \le i \le 4, \quad T(0, x'') = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Soit $\Phi(x)$ la solution de l'équation (4.1) avec la donnée

$$\Phi(0, x') = x_1 . \tag{4.9}$$

On a alors

$$\Phi(x) = x_1 - T(x_0, x'') . \tag{4.10}$$

La fonction $\Phi(x)$ est holomorphe au voisinage de $S = \{x_0 = 0\}$ dans $\boldsymbol{C}^5$. On voit que $\{D_0 + \sum_{i=2}^4 A_i(x'')D_i\}T(x_0, x'') = A_1(x'')$ et que $T(0, x'') = 0$. Par suite, $D_0\Phi(0, x') = -D_0T(0, x'') = -A_1(x'')$. La fonction $D_0\Phi(0, x')$ n'est pas identiquement nulle. Puisque $D_1\Phi(x) = 1$, la surface $\Phi(x) = 0$ est régulière au voisinage de $x = 0$. Comme dans la Section 2, il existe un point $x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x'^{(0)})$, $(x_1^{(0)} \neq 0)$ au voisinage de $x = 0$ tel que

$$\Phi(x^{(0)}) = 0 , \quad D_0\Phi(x^{(0)}) \neq 0 \quad \text{et} \quad A_1(x''^{(0)}) \neq 0 . \tag{4.11}$$

Il existe alors une fonction $\delta(x')$ holomorphe au voisinage de $x'^{(0)}$ telle que $\Phi(\delta(x'), x') = 0$, $x_0^{(0)} = \delta(x'^{(0)})$ et $\delta(0, x'') = 0$, car $\Phi(0, 0, x'') = 0$. Remarquons que la fonction $D_0\Phi(\delta(x'), x')$ n'est pas nulle au voisinage de $x'^{(0)}$.

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \left\{D_0 + \sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i + \dfrac{1}{x_1}D_5\right\} U_3(x, x_5) = 0 , \\ U_3(0, x', x_5) = x_5 , \\ \qquad [(x, x_5) \in \boldsymbol{C}^6, x = (x_0, x'), x' = (x_1, x''), x'' = (x_2, x_3, x_4)] . \end{cases} \tag{1.6}$$

D'après le résultat de la Section 2 et (1.5), (1.6), (1.7), on a

$$U_3(x, x_5) = x_5 - \int_0^{x_0} \frac{d\sigma}{\Phi(\sigma, x')} = x_5 - U_2(x) . \tag{4.12}$$

Posons

$$\Theta(x') = \frac{1}{D_0\Phi(\delta(x'), x')} . \tag{4.13}$$

Comme dans la Section 2, pour x' voisin de $x'^{(0)}$, définissons $\gamma(x') = \{x; x_0 = \gamma(t; x'), t \in [0, 1]\}$ un chemin fermé d'origine et d'extrémite $(0, x')$ qui fait un tour autour du point $(\delta(x'), x')$, où $\gamma(t; x')$ est une fonction continue de $t \in [0, 1]$ et de x' voisin de $x'^{(0)}$, et $\gamma(0; x') = \gamma(1; x') = 0$. La fonction $U_2(x)$ dans (4.12) peut se prolonger analytiquement le long de $\gamma(x')$. Elle est multiforme et son germe $U_2^1(x)\,|_{(0,x')}$ au point d'extrémité de $\gamma(x')$ est égal à son germe $U_2^0(x)\,|_{(0,x')}$ au point d'origine de $\gamma(x')$ augmenté du germe $2\pi i\Theta(x')\,|_{x'}$ de $2\pi i\Theta(x')$ au point x':

$$\begin{aligned} &U_2^1(x)\,|_{(0,x')} = U_2^0(x)\,|_{(0,x')} + 2\pi i\Theta(x')\,|_{x'} , \\ &\Theta(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(x')} \frac{d\sigma}{\Phi(\sigma, x')} . \end{aligned} \tag{4.14}$$

D'après le Lemme 2.1 et (4.13), la fonction $\Theta(x')$ vérifie

$$\left\{\sum_{i=1}^{4} A_i(x'')D_i\right\}\Theta(x')=0\,,\quad \Theta(0,x'')=-1/A_1(x'')\,. \tag{4.15}$$

Nous avons

LEMME 4.1. *Au voisinage de* $(0,x''^{(0)})$, *on a*

$$\Theta(x')=-1/y_2(x')^2(1-y_2(x'))^2y_3(x')\,,$$

où l'on a noté $y_i(x')=y_i(x_1,x'')$, $2\le i\le 4$, *dans* (4.6). *En fait, on a*

$$\begin{aligned}
y_2(x')=&\lambda\left(\frac{p(x'')x_1+q(x'')}{r(x'')x_1+s(x'')}\right),\\
y_3(x')=&\lambda'\left(\frac{p(x'')x_1+q(x'')}{r(x'')x_1+s(x'')}\right)\\
&\times 4\lambda'(\nu(x_2))^3x_3^3(2\lambda'(\nu(x_2))^2x_3-\{\lambda''(\nu(x_2))x_3^2-\lambda'(\nu(x_2))^2x_4\}x_1)^{-2}\,,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
p(x'')&=-\nu(x_2)\{\lambda''(\nu(x_2))x_3^2-\lambda'(\nu(x_2))^2x_4\}-2\lambda'(\nu(x_2))x_3^2\,,\\
q(x'')&=2\lambda'(\nu(x_2))^2\nu(x_2)x_3\,,\\
r(x'')&=-\{\lambda''(\nu(x_2))x_3^2-\lambda'(\nu(x_2))^2x_4\}\,,\\
s(x'')&=2\lambda'(\nu(x_2))^2x_3\,;
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
&p(x'')=\nu(x_2)r(x'')-2\lambda'(\nu(x_2))x_3^2\,,\quad q(x'')=\nu(x_2)s(x'')\,,\\
&p(x'')s(x'')-q(x'')r(x'')=-4\lambda'(\nu(x_2))^3x_3^3\,.
\end{aligned}$$

REMARQUE 4.1. Abusivement $x_2^{(0)}$ $(\neq 0,1)$ est considéré comme un point de base $\tilde{x}_2^{(0)}$ de $\mathcal{R}[\boldsymbol{C}\setminus\{0,1\}]$. Un voisinage de $x_2^{(0)}$ s'identifie à un voisinage de $\tilde{x}_2^{(0)}$ dans $\mathcal{R}[\boldsymbol{C}\setminus\{0,1\}]$.

PREUVE. L'équation (4.15) est équivalente à

$$\left\{D_1+\sum_{i=2}^{4} B_i(x'')D_i\right\}\Theta(x')=0\,,\quad \Theta(0,x'')=-1/A_1(x'')\,. \tag{4.16}$$

L'équation de sa courbe bicaractéristique est

$$\frac{dx_1}{d\tau}=1\,,\quad \frac{dx_i}{d\tau}=B_i(x'')\,,\quad 2\le i\le 4\,, \tag{4.17}$$

avec les données $x_1(0)=0$, $x_i(0)=y_i$, $2\le i\le 4$.

Donc, en posant $y_1=0$ dans (4.5) et (4.6), on a

$$x_1=\tau\,,\quad x_i=x_i(\tau,y'')\,,\quad 2\le i\le 4\,,\quad y''=(y_2,y_3,y_4)\in\boldsymbol{C}^3 \tag{4.18}$$

et

$$y_i=y_i(x')\,,\quad 2\le i\le 4\,,\quad x'=(x_1,\dots,x_4)\,. \tag{4.19}$$

En remplaçant t, (w_1, w_2, w_3) et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ par x_1, (x_2, x_3, x_4) et $(y_2, y_3.y_4)$ respectivement dans (3.11), (3.12), on obtient les fonctions $y_2(x')$, $y_3(x')$. C.Q.F.D.

Nous allons étudier les domaines d'holomorphie des fonctions $y_2(x')$ et $y_3(x')$.

Nous faisons d'abord

REMARQUE 4.2. (i) Pour $\tilde{x}'' = (\tilde{x}_2, x_3, x_4) \in \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2$, si $x_3 = 0$, on a $p(\tilde{x}'')s(\tilde{x}'') - q(\tilde{x}'')r(\tilde{x}'') = 0$, donc

$$\lambda\left(\frac{p(\tilde{x}'')x_1 + q(\tilde{x}'')}{r(\tilde{x}'')x_1 + s(\tilde{x}'')}\right) = \lambda(\nu(\tilde{x}_2)) = x_2\,,$$

$$\lambda'\left(\frac{p(\tilde{x}'')x_1 + q(\tilde{x}'')}{r(\tilde{x}'')x_1 + s(\tilde{x}'')}\right) = \lambda'(\nu(\tilde{x}_2))$$

et $\operatorname{Im}(p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')}) = \operatorname{Im}(\nu(\tilde{x}_2))|\lambda'(\nu(\tilde{x}_2)^2 x_4|^2 > 0$ pour $x_4 \neq 0$.

(ii) Pour $\tilde{x}'' \in \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2$, $x_3 \neq 0$,

$$\operatorname{Im}(q(\tilde{x}'')/s(\tilde{x}'')) = \operatorname{Im}(\nu(\tilde{x}_2)) > 0 \quad \text{et donc} \quad \operatorname{Im}(q(\tilde{x}'')\overline{s(\tilde{x}'')}) > 0\,.$$

Compte tenu du Lemme 3.1, nous posons

$$\mathcal{A}_+ = \{\tilde{x}'' = (\tilde{x}_2, x_3, x_4) \in \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2; \operatorname{Im}(p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')}) > 0\}\,,$$
$$\mathcal{A}_- = \{\tilde{x}'' = (\tilde{x}_2, x_3, x_4) \in \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2; \operatorname{Im}(p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')}) < 0\}\,,$$
$$\mathcal{A}_0 = \{\tilde{x}'' = (\tilde{x}_2, x_3, x_4) \in \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2; \operatorname{Im}(p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')}) = 0\}\,.$$

Nous notons que $\mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_- \cup \mathcal{A}_0 = \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2$.

Définissons

$$\mathcal{D}_+ = \{\tilde{x}' = (x_1, \tilde{x}'') \in \boldsymbol{C} \times \mathcal{A}_+; |x_1 - P(\tilde{x}'')| > R(\tilde{x}'')\}\,,$$
$$\mathcal{D}_- = \{\tilde{x}' = (x_1, \tilde{x}'') \in \boldsymbol{C} \times \mathcal{A}_-; |x_1 - P(\tilde{x}'')| < R(\tilde{x}'')\}\,,$$
$$\mathcal{D}_0 = \left\{\tilde{x}' = (x_1, \tilde{x}'') \in \boldsymbol{C} \times \mathcal{A}_0; \begin{array}{l} \operatorname{Im}[\{p(\tilde{x}'')\overline{s(\tilde{x}'')} - \overline{q(\tilde{x}'')}r(\tilde{x}'')\}x_1 \\ +q(\tilde{x}'')\overline{s(\tilde{x}'')}] > 0 \end{array}\right\}\,,$$

où

$$P(\tilde{x}'') = \{\overline{p(\tilde{x}'')}s(\tilde{x}'') - q(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')}\}/\{p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')} - \overline{p(\tilde{x}'')}r(\tilde{x}'')\}\,,$$
$$R(x'') = |p(\tilde{x}'')s(\tilde{x}'') - q(\tilde{x}'')r(\tilde{x}'')|/|p(\tilde{x}'')\overline{r(\tilde{x}'')} - \overline{p(\tilde{x}'')}r(\tilde{x}'')|\,.$$

La réunion $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_-$ construit un domaine étalé au-dessus de $\boldsymbol{C}^4$. Remarquons que vu le Lemme 3.1 et la Remarque 4.2(ii), on a $(0, \tilde{x}'') \in \mathcal{D}$. Le domaine $\mathcal{D}$ possède la propriété (E).

D'après les Lemmes 3.1 et 4.1, nous avons

LEMME 4.2. *Les domaines d'holomorphie de $y_2(x')$ et $y_3(x')$ sont respectivement $\mathcal{D}$ et*

$$\mathcal{D} \setminus \{\tilde{x}' = (x_1, \tilde{x}'') \in \boldsymbol{C} \times \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2; r(\tilde{x}'')x_1 + 2\lambda'(\nu(\tilde{x}_2))^2 x_3 = 0\}\,.$$

Ils possèdent la propriété (E).

D'après les Lemmes 3.1 et 4.1, nous avons de même

LEMME 4.3. *Le domaine d'holomorphie de $\Theta(x')$ est $\mathcal{D} \setminus \{x_3 = 0\}$. Il possède la propriété* (E).

Les Lemmes 4.1 et 4.2 prouvent la Proposition 1.4. En effet, vu que $\Delta_j(x') = y_{j+1}(x')$, $j = 1, 2$, les domaines d'holomorphie Ω_{j+3} de Δ_j, $j = 1, 2$, sont $\Omega_4 = \mathcal{D}$ et

$$\Omega_5 = \mathcal{D} \setminus \{\tilde{x}' = (x_1, \tilde{x}'') \in \boldsymbol{C} \times \mathcal{R}[\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}] \times \boldsymbol{C}^2; r(\tilde{x}'')x_1 + 2\lambda'(\nu(\tilde{x}_2))^2 x_3 = 0\}.$$

Ils possèdent la propriété (E).

Enfin, nous allons démontrer la Proposition 1.3. D'abord, d'après les Remarques 4.1 et 4.2, nous pouvons choisir $x''^{(0)}$, $(x_3 \neq 0)$ comme $\operatorname{Im}(p(x''^{(0)})\overline{r(x''^{(0)})}) > 0$. Vu le Lemme 3.1, pour $x_1^{(0)} \neq 0$ voisin de 0, $x_1^{(0)}$ est dans l'extérieur du cercle $|x_1 - P(x''^{(0)})| = R(x''^{(0)})$: $|x_1^{(0)} - P(x''^{(0)})| > R(x''^{(0)})$. Prenons z' voisin de $x'^{(0)}$ et ζ_1 le point d'intersection du segment $[z_1, P(z'')]$ et du cercle $\{x_1; |x_1 - P(z'')| = R(z'')\}$: $|\zeta_1 - P(z'')| = R(z'')$.

Définissons pour z', ζ_1 les chemins $\gamma_1(z')$, $\gamma_2(z', \zeta_1)$, $\gamma_2^*(z', \zeta_1)$ et $\gamma_0(z')$ comme suit:

(i) $\gamma_1(z') = \{x = (x_0, x'); x_0 = \gamma_1(t; z'), x' = z', t \in [0, 1]\}$ un chemin fermé d'origine et d'extrémité $(0, z')$ qui fait un tour autour du point $(\delta(z'), z')$, où $\gamma_1(t; z')$ est une fonction continue de $t \in [0, 1]$ et de z' voisin de $x'^{(0)}$, $\gamma_1(0; z') = \gamma_1(1; z') = 0$.

(ii) $\gamma_2(z', \zeta_1) = \{x; x_0 = 0, x_1 = z_1 + t(\zeta_1 - z_1), x'' = z'', t \in [0, 1]\}$ un chemin d'origine $(0, z')$ et d'extrémité $(0, \zeta_1, z'')$.

(iii) $\gamma_2^*(z', \zeta_1) = \gamma_2(z', \zeta_1) \setminus \{x = (0, \zeta_1, z'')\} = \{x; x_0 = 0, x_1 = z_1 + t(\zeta_1 - z_1), x'' = z'', t \in [0, 1)\}$.

(iv) $\gamma_0(z') = \{x; x_0 = 0, x' = (0, x''^{(0)}) + t[z' - (0, x''^{(0)})], t \in [0, 1]\}$ un chemin d'origine $(0, 0, x''^{(0)})$ et d'extrémité $(0, z')$.

Rappelons (4.14), où x' et $\gamma(x')$ sont remplacés par z' et $\gamma_1(z')$ respectivement, alors on a

$$U_2^1(x)\,\big|_{(0,z')} = U_2^0(x)\,\big|_{(0,z')} + 2\pi i \Theta(x')\,\big|_{z'},$$

où $\Theta(x')\,\big|_{z'}$ est consideré comme le germe au point z' qui est prolongé analytiquement le long de $\gamma_0(z')$ du germe $\Theta(x')\,\big|_{(0,x''^{(0)})}$ de $\Theta(x')$ au point $(0, x''^{(0)})$. $U_2^0(x)\,\big|_{(0,z')}$ et $\Theta(x')\,\big|_{z'}$ peuvent se prolonger analytiquement sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $S \setminus \{x_1 = 0\}$ dans $\boldsymbol{C}^5$ et $\mathcal{D} \setminus \{x_3 = 0\}$ respectivement. Donc ces germes peuvent se prolonger analytiquement le long de $\gamma_2^*(z', \zeta_1)$. Ainsi la fonction $U_2(x)$ peut se prolonger analytiquement le long d'un chemin composé $\gamma^*(z', \zeta_1) = \gamma_1(z') \circ \gamma_2^*(z', \zeta_1)$. Plus précisément, désignons par $\tilde{\gamma}^*(z', \zeta_1)$ le relèvement de $\gamma^*(z', \zeta_1)$ sur Ω_2. La fonction $U_2(x)$ peut se prolonger analytiquement le long de $\tilde{\gamma}^*(z', \zeta_1)$. Soit $\zeta_1^{(0)}$ le point d'intersection du segment $[x_1^{(0)}, P(x''^{(0)})]$ et du cercle $\{x_1; |x_1 - P(x''^{(0)})| = R(x''^{(0)})\} : |\zeta_1^{(0)} - P(x''^{(0)})| = R(x''^{(0)})$.

Une suite des points de $\tilde{\gamma}^*(x'^{(0)}, \zeta_1^{(0)})$ dont les projections sur $\boldsymbol{C}^5$ tendent vers $\zeta^{(0)} = (0, \zeta_1^{(0)}, x''^{(0)})$ définit un point frontière $\tilde{\zeta}^{(0)}$ de $\Omega_2 : \pi(\tilde{\zeta}^{(0)}) = \zeta^{(0)}$. Prenons $\delta_0 > 0$ une constante suffisamment petite. Alors pour tout polydisque $\underline{V}_\delta$ $(0 < \delta \leq \delta_0)$ de centre $\zeta^{(0)}$ et de rayon δ dans $\boldsymbol{C}^5$, la projection $\pi(V_\delta)$ de la composante connexe V_δ de $\pi^{-1}(\underline{V}_\delta)$, ayant

$\tilde{\zeta}^{(0)}$ comme un point frontière, est l'ensemble

$$\left\{x \in \boldsymbol{C}^5;\ \begin{array}{l}|x_0| < \delta,\, |x_1 - \zeta_1^{(0)}| < \delta,\, |x_i - x_i^{(0)}| < \delta,\, 2 \le i \le 4, \\ |x_1 - P(x''^{(0)})| > R(x''^{(0)})\end{array}\right\}.$$

Donc $\pi(V_\delta)$ a l'extérieur non vide dans $\underline{V}_\delta$, d'où le point frontière $\tilde{\zeta}^{(0)}$ satisfait la condition (A). Donc Ω_2 possède la propriété (E). Ceci démontre la Proposition 1.3.

5. Quelques exemples. Nous donnons ici quelques exemples dans lesquels les solutions peuvent se prolonger analytiquement sur le revêtement universel $\mathcal{R}[\boldsymbol{C}^{n+1} \setminus \bigcup_{j=0}^{\text{fini}} K_j]$ où les K_j sont des surfaces caractérisques.

Dans ce qui suit, les déterminations de $Z_1 = \log z$ et de $Z_2 = z^{1/2}$ sont égales à $Z_1 = 0$ et $Z_2 = 1$ pour $z = 1$ respectivement. Dans les exemples suivants, vu les expressions des solutions, on voit que les domaines d'holomorphie des solutions ne possèdent pas la propriété (E).

EXEMPLE 5.1. Considérons le problème de Cauchy

$$(D_0 - 2x_1^2 x_2 D_1 + D_2 + x_1 D_3)u(x) = 0\,, \quad u(0, x') = x_3\,,$$
$$x = (x_0, x') \in \boldsymbol{C}^4\,, \quad x' = (x_1, \dots, x_3)\,.$$

La solution est la fonction

$$\begin{aligned} u(x) &= x_3 - \int_0^{x_0} \frac{x_1 d\sigma}{1 - 2x_1 x_2 \sigma + x_1 \sigma^2} \\ &= x_3 + \frac{x_1^{1/2}}{2(x_1 x_2^2 - 1)^{1/2}} \\ &\quad \times \log\left\{\left(\frac{x_1^{1/2}(x_2 - x_0) - (x_1 x_2^2 - 1)^{1/2}}{x_1^{1/2}(x_2 - x_0) + (x_1 x_2^2 - 1)^{1/2}}\right)\left(\frac{x_1^{1/2} x_2 + (x_1 x_2^2 - 1)^{1/2}}{x_1^{1/2} x_2 - (x_1 x_2^2 - 1)^{1/2}}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Elle peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\boldsymbol{C}^4 \setminus \bigcup_{i=0}^2 K_i)$, où $K_0 = \{x;\, 1 - x_1 x_2^2 = 0\}$, $K_1 = \{x;\, x_1 = 0\}$ et $K_2 = \{x;\, 1 - 2x_1 x_2 x_0 + x_1 x_0^2 = 0\}$.

EXEMPLE 5.2. Considérons le problème de Cauchy

$$(D_0^2 - (x_1^2 D_1)^2 - (x_2^2 D_2)^2)u(x) = 0\,, \quad u(0, x') = 0\,, \quad D_0 u(0, x') = x_1 x_2\,,$$
$$x = (x_0, x') \in \boldsymbol{C}^3\,, \quad x' = (x_1, x_2)\,.$$

La solution est la fonction

$$u(x) = \frac{x_1 x_2}{2(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2 x_0^2)^{1/2}} \log\left(\frac{1 + x_0(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2 x_0^2)^{1/2}}{1 - x_0(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2 x_0^2)^{1/2}}\right).$$

Elle peut se prolonger analytiquement sur $\mathcal{R}(\boldsymbol{C}^3 \setminus \bigcup_{i=0}^4 K_i)$, où $K_0 = \{x;\, x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2^2 x_0^2 = 0\}$, $K_i = \{x;\, 1 - x_i x_0 = 0\}$, $i = 1, 2$, et $K_{i+2} = \{x;\, 1 + x_i x_0 = 0\}$, $i = 1, 2$.

Références

[BT] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Chelsea, New York, 1934.

[C] H. Cartan, Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'Une ou Plusieurs Variables Complexes, Hermann, Paris, 1961.

[GKL] L. Gårding, T. Kotake et J. Leray, Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire à données holomorphes; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), 263–361.

[G] R. C. Gunning, Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, vol. I Function Theory, Wadsworth & Brooks/Cole Math. Ser., Wadsworth & Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, 1990.

[H1] Y. Hamada, Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes, Recent Developments in Hyperbolic Equations, Pitman Res. Notes Math. Ser. 183, Longman, 1988, 82–95.

[H2] Y. Hamada, Une remarque sur le domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur différentiel à coefficients des fonctions entières, Tôhoku Math. J. 50 (1998), 133–138.

[HLT1] Y. Hamada, J. Leray et A. Takeuchi, Sur le domaine d'existence de la solution de certains problèmes de Cauchy, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), 27–30.

[HLT2] Y. Hamada, J. Leray et A. Takeuchi, Prolongements analytiques de la solution du problème de Cauchy linéaire, J. Math. Pures Appl. 64 (1985), 257–319.

[HT] Y. Hamada et A. Takeuchi, Sur le prolongement analytique de la solution du problème de Cauchy, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295 (1982), 329–332.

[Hi] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Wiley, New York-London, 1976.

[L] J. Leray, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 389–429.

[N] T. Nishino, Theory of Functions of Several Complex Variables [Tahensu Kansu Ron] (en japonais), University of Tokyo Press, 1996.

[P] J. Persson, On the local and global non-characteristic Cauchy problem when the solutions are holomorphic functions or analytic functionals in the space variables, Ark. Mat. 9 (1971), 171–180.

[PW] P. Pongérard et C. Wagschal, Problème de Cauchy dans des espaces de fonctions entières, J. Math. Pures Appl. 75 (1996), 409–418.

61–36 Tatekura-cho
Shimogamo, Sakyo-ku
Kyoto 606–0806
Japan