Real Analysis Exchange Vol. 8 (1982-83)

Zbigniew Grande, Department of Mathematics, Higher School of Pedagogy, 85-064 Bydgoszcz, Chodkiewicza 30, Poland.

Sur une fonction de classe 2 de Baire dont le graphe coupe les graphes de toutes les fonctions de classe 1

Dans le travail [2] les auteurs ont posé la question suivante:

Question. ([2], Question 2.) Does there exist a Borel 2 function from R into R which intersects each Borel 1 function from R into R?

La réponse affirmative résulte du théorème suivant:

Théorème. Soit $\alpha > 1$ un nombre ordinal dénombrable. Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ de classe α de Baire dont le graphe coupe les graphes de toutes les fonctions $g: R \to R$ de classes de Baire plus petites que α.

Démonstration. D'après le théorème de Cantorovitch [1] il existe une fonction universelle $F: R^2 \to R$ de classe de Baire α telle que, quelle que soit la fonction $g: R \to R$ de classe de Baire plus petite que α, il existe un nombre $t_o \in R$ tel que $g(x) = F(x, t_o)$ pour tout $x \in R$. Soit $f(x) = F(x,x)$. La fonction f satisfait aux conditions exigées.

En effet, on voit facilement que la fonction f est de classe α de Baire. Fixons encore une fonction $g:R\to R$ de classe $\beta < \alpha$. Il existe un nombre $t_o \in R$ tel que $g(x) = F(x,t_o)$. On a

$$g(t_o) = F(t_o,t_o) = f(t_o),$$

d'où il vient que les graphes des fonctions g et f se coupent au point $(t_o,F(t_o,t_o))$ et la démonstration est finie.

Ouvrages cités:

[1] Cantorovitch L. W.; Sur les fonctions universelles, (en russe), J. Leningrad FMO, (1929), p. 13-21.

[2] Ceder J., Levi S; On the search for Borel 1 selections, to appear.

Received December 21, 1982