 Real Analysis Exchange Vol. 7 (1981-82)

François Guénard, 1, rue Houdart de Lamotte, 75015 PARIS France. †

SUR LA CONSTRUCTION DE MESURES ASSOCIEES AUX CONTRACTIONS ASYMPTOTIQUES DES INTERVALLES

0. INTRODUCTION — En 1967, Janos a montré le théorème suivant [4] :

<u>Théorème A</u> : Soient E un espace compact métrisable, $\alpha \in]0,1[$, et f une application continue $E \to E$ telle que : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(E) = \{c\}$.

Alors, il existe une distance d sur E, définissant la topologie de E, et telle que :

$\forall (x,y) \in E^2,\ d(f(x),f(y)) \leq \alpha.d(x,y)$ (1).

On dira qu'une application vérifiant (1) est *contractante de rapport* α *par rapport à* d.

Par ailleurs, si E est un intervalle compact I de $\mathbb{R}$, on a le théorème suivant [3] :

<u>Théorème B</u> : Soient $I = [a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, f une application continue $I \to I$, et c un point de I.

Soit $\mathcal{G}(f)$ le graphe de f : $\mathcal{G}(f) = \{(x,f(x)),\ x \in I\}$.

Posons : $\mathcal{G}_g(f) = \{(x,f(x)),\ x \in [a,c]\}$

$\mathcal{G}_d(f) = \{(x,f(x)),\ x \in [c,b]\}$

$\mathcal{G}_g^{-1}(f) = \{(f(x),x),\ x \in [a,c]\}$

et de même pour $\mathcal{G}^{-1}(f)$, $\mathcal{G}_d^{-1}(f)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in I,\ \lim_{n\to\infty} f^n(x) = c$.

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(I) = \{c\}$.

(iii) $\mathcal{G}_g^{-1}(f) \cap \mathcal{G}_d(f) = \{(c,c)\}$

(iv) $\mathcal{G}^{-1}(f) \cap \mathcal{G}(f) = \{(c,c)\}$

On dira qu'une telle fonction est une *contraction asymptotique*.

Une fonction $f:I \to I$ vérifiant la condition (ii) satisfait aux hypothèses du théorème A, de sorte qu'il existe une distance d pour laquelle la relation (1) est vérifiée. Or, si d est la distance habituelle, la fonction f est Lipschitzienne, et par suite presque partout dérivable, le terme «presque partout» étant pris relativement à la mesure de Lebesgue, qui est la mesure naturellement associée à la distance usuelle. Mais la relation (iii) montre que f n'a aucune raison d'être dérivable, en quelque point que ce soit.

Nous allons ici étudier la question suivante :

> Etant donnée une fonction $f : I \to I$ vérifiant (1) pour une distance d, existe-t-il une mesure μ_d vis-à-vis de laquelle f satisfasse à une condition particulière ? Si oui, comment construire cette mesure, et quelle est cette condition ?

Si d est la distance usuelle, et si λ est la mesure de Lebesgue, Fleissner et Foran ont montré le résultat suivant:

> <u>Théorème C</u> ([1]) : Soit f une application continue $I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
>
> a) Il existe un homéomorphisme $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g \circ f$ soit Lipschitzienne.
>
> b) Il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $h \circ f$ ait une dérivée bornée.
>
> c) Pour tout intervalle $J \subset Im(f)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout ensemble mesurable E vérifiant $J \subset f(E)$, on ait : $\lambda(E) > \eta$ (condition S').

C'est cette condition S' que l'on va adapter pour répondre à la question posée.

1. PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES — Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Convention 1 — Les seules distances que nous considérerons ici sont des distances définissant la topologie usuelle.

Nous omettrons donc de préciser «définissant la topologie usuelle» quand nous parlerons de «distances sur I».

En outre, nous emploierons les notations topologiques habituelles : si $A \subset I$, on note $\mathring{A}$ l'intérieur de A, $\bar{A}$ son adhérence.

Définition 2 — On dira qu'une *distance* d sur I est *compatible avec l'ordre* si, pour tout $(x,y,z) \in I^3$ vérifiant $x < y < z$, on a : $d(x,y) < d(x,z)$ et $d(y,z) < d(x,z)$.

Exemple et définition 3 — Soit φ une application continue strictement croissante $I \to \mathbb{R}$. Alors, la fonction $d : I^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto |\varphi(y) - \varphi(x)|$ est une distance sur I, qui est compatible avec l'ordre. On dira qu'une distance ainsi obtenue est une *distance paramétrique*.

Raccordement des distances locales — Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites monotones d'éléments de I, respectivement croissante et décroissante, convergeant toutes deux vers $c \in \mathring{I} =]a,b[$, et telles que : $a_0 = a$, $b_0 = b$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, d_n une distance définie sur $[a_{-n-1}, a_{-n}]$ si $n \in \mathbb{Z}^*_-$, sur $[b_n, b_{n-1}]$ si $n \in \mathbb{Z}^*_+$. On suppose en outre que les d_n sont compatibles avec l'ordre, et que la série double

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*_-} d_n(a_{-n-1}, a_{-n}) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*_+} d_n(b_n, b_{n-1}) \text{ est convergente.}$$

Soit $d : I^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction ainsi définie :

$$
\begin{cases}
\bullet\ \forall n \in \mathbb{Z}_-^*,\ \forall (x,y) \in [a_{-n-1}\,,\ a_{-n}]^2,\ d(x,y) = d_n(x,y) \\
\bullet\ \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ \forall (x,y) \in [b_n\,,\ b_{n-1}]^2\ ,\ d(x,y) = d_n(x,y) \\
\bullet\ \forall (n,p) \in \mathbb{Z}_-^{*2},\ n > p,\ \forall x \in [a_{-n-1}\,,\ a_{-n}]\ ,\ \forall y \in [a_{-p-1}\,,\ a_{-p}]\ , \\
\quad d(x,y) = d_n(x,a_{-n}) + \sum_{m=p+1}^{n-1} d_m(a_{-m-1}\,,\ a_{-m}) + d_p(a_{-p-1}\,,\ y) \\
\bullet\ \forall n \in \mathbb{Z}_-^*\ ,\ \forall p \in \mathbb{Z}_+^*\ ,\ \forall x \in [a_{-n-1}\,,\ a_{-n}]\ ,\ \forall y \in [b_p\,,\ b_{p-1}], \\
\quad d(x,y) = d_n(x,a_{-n}) + \sum_{m=n-1}^{-\infty} d_m(a_{-m-1}\,,\ a_{-m}) \\
\qquad\qquad + \sum_{k=p+1}^{+\infty} d_k(b_k\,,\ b_{k-1}) + d_p(b_p\,,\ y) \\
\bullet\ \forall (n,p) \in \mathbb{Z}_+^{*2},\ n > p,\ \forall x \in [b_n\,,\ b_{n-1}],\ \forall y \in [b_p\,,\ b_{p-1}], \\
\quad d(x,y) = d_n(x,b_{n-1}) + \sum_{k=p+1}^{n-1} d_k(b_k\,,\ b_{k-1}) + d_p(b_p\,,\ y) \\
\bullet\ \forall (x,y) \in I^2\ ,\ d(x,y) = d(y,x).
\end{cases}
$$

Lemme 4 — La fonction d ainsi définie est une distance sur I, compatible avec l'ordre. De plus, si les d_n , $n \in \mathbb{Z}^*$, sont des distances paramétriques, il en est de même de d.

La première partie de ce lemme s'étend aux espaces métriques quelconques, mais une telle généralité serait ici sans objet. La démonstration est une simple vérification que nous omettrons.

Remarque : le lemme est bien sûr vérifié pour une distance d construite à partir d'un nombre fini d'intervalles et de distances d_n.

Supposons à présent que les d_n sont des distances paramétriques. Soit f une application continue $I \to I$ vérifiant :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ f([a_n\ ,\ b_n]) \subset [a_{n+1}\ ,\ b_{n+1}] \\ \bullet\ \exists \alpha \in]0,1[\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall (x,y) \in \left([a_n\ ,\ a_{n+1}]^2 \cup [b_{n+1}\ ,\ b_n]^2\right)\ , \\ \left\{\left[\exists (z,t) \in \left([a,a_n]^2 \cup\ [b_n\ ,\ b]^2\right)\ ,\ f(z) = x \quad \text{et} \quad f(t) = y\right] \right. \\ \qquad \left. \Rightarrow\ \left[\ d(x,y) \leq \alpha\ .\ d(z,t)\ \right]\right\}. \end{cases}$$

Lemme 5 — Sous ces hypothèses, f est contractante de constante α par rapport à d :

$$\forall (z,t) \in I^2,\ d(f(z),f(t)) \leq \alpha\ .\ d(z,t)$$

Démonstration : Soient z, t deux points de I, $x = f(z)$ et $y = f(t)$ leurs images par f. Quitte à échanger z et t, supposons $z < t$.

- S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
  $(x,y)\ \in \left([a_n\ ,\ a_{n+1}]^2 \cup\ [b_{n+1}\ ,\ b_n]^2\right)$, c'est terminé.
- Sinon, il faut distinguer différents cas :

▪ $\exists (p,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ p > n,\ x \in [a_n\ ,\ a_{n+1}]$ et $y \in [a_p\ ,\ a_{p+1}]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une séquence $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ldots \leq u_p$ dans $[z,t]$ telle que :

$$f(u_i)\ =\ a_i\ \ ,\ \text{pour}\ \ n+1 \leq i \leq p$$

Puisque la distance d est paramétrique, on a :

$$d(x,y)\ =\ d(x,a_{n+1})\ +\ d(a_{n+1}\ ,\ a_{n+2})\ +\ \ldots\ +\ d(a_{p-1}\ ,\ a_p) + d(a_p\ ,\ y)$$

et

$$d(z,t)\ =\ d(z,u_{n+1})\ +\ d(u_{n+1}\ ,\ u_{n+2})\ +\ \ldots\ +\ d(u_{p-1}\ ,\ u_p) + d(u_p\ ,\ t)$$

De plus, en raison des hypothèses faites sur f :

$$\begin{cases} d(x\ ,\ a_{n+1}) & \leq \alpha\ .\ d(z\ ,\ u_{n+1}) \\ d(a_{n+1}\ ,\ a_{n+2}) & \leq \alpha\ .\ d(u_{n+1}\ ,\ u_{n+2}) \\ \ldots & \\ d(a_{p-1}\ ,\ a_p) & \leq \alpha\ .\ d(u_{p-1}\ ,\ u_p) \\ d(a_p\ ,\ y) & \leq \alpha\ .\ d(u_p\ ,\ t) \end{cases}$$

On en déduit : $d(x,y) \leq \alpha\ .\ d(z,t)$; ce qui est l'inégalité cherchée.

▪ Les autres cas se traitent de façon similaire. □

2. PRELIMINAIRES SUR LES MESURES — Nous suivons ici la construction de M. Bruneau [2].

Définition 6 — Soit h une fonction définie sur l'ensemble des couples (x,y) d'éléments de I tels que $x \leq y$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On dira que h est une *fonction déterminante de Carathéodory* si, quels que soient $x \leq y \leq z \leq t$ dans I, on a :

$$(i)\ h(y,z) \leq h(x,t)$$

$$(ii)\ h(x,t) \leq h(x,z) + h(y,t)$$

Exemple 7 — Une distance d sur I, compatible avec l'ordre, est une fonction déterminante de Carathéodory. En effet, si x, y, z, t sont des éléments de I tels que $x \leq y \leq z \leq t$, du fait de la compatibilité de d avec l'ordre, on a d'une part :

$$d(y,z) \leq d(x,z) \leq d(x,t) ,$$

et d'autre part :

$$d(x,t) \leq d(x,y) + d(y,t)$$
$$\leq d(x,z) + d(y,t)$$

Etant donnée une fonction déterminante de Carathéodory h, soit μ_h^* la fonction d'ensembles définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(I)$ de toutes les parties de I par :

$$\forall A \subset I ,\ \mu_h^*(A) = \underline{\lim} \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k , y_k)$$

où $\{]x_k , y_k[, k \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement dénombrable de A, et où la limite inférieure est prise lorsque la borne supérieure des nombres $y_k - x_k$ devient arbitrairement petite.

Définition 8 — Pour toute fonction déterminante h, on dit que μ_h^* est la *mesure extérieure de Carathéodory* de fonction déterminante h. La restriction μ_h de μ_h^* à la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens de I est appelée la *mesure de Carathéodory* de fonction déterminante h. Une mesure de Carathéodory est positive.

Soit d_α la distance de Hausdorff d'ordre α sur I : $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha$. La mesure μ_{d_α} est la mesure de Hausdorff dans la dimension α . On sait que, pour tout intervalle $J \subset I$, on a : $\mu_{d_\alpha}(J) = +\infty$ si $0 < \alpha < 1$; cela exprime que la dimension de Hausdorff d'un intervalle est supérieure à 1 .

<u>Problème 9</u> — Quelles sont les distances d sur I compatibles avec l'ordre et telles que : $\mu_d(I) < \infty$?

Faute de connaître la réponse de cette question, nous dirons qu'une telle distance est de *poids fini.*

<u>Lemme 10</u> — Soit d une distance sur I , compatible avec l'ordre. Soient z et t deux éléments de I. On a :

$$\mu_d(]z,t[) = \mu_d([z,t]) \geq d(z,t)$$

D é m o n s t r a t i o n : L'égalité $\mu_d([z,t]) = \mu_d(]z,t[)$ résulte de la proposition 3 de ([2]) (p. 103).

Soit $(]x_k , y_k[)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $[z,t]$ par des intervalles ouverts. On peut en extraire un sous-recouvrement fini $(]x_i , y_i[)_{1\leq i\leq r}$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(x_k , y_k) \geq \sum_{i=1}^{r} d(x_i , y_i) \quad \text{(somme de nombres positifs)}$$

$$\geq d(z,t) \qquad (1) \quad \text{(Par définition d'une distance)}$$

On en déduit $\mu_d^*([z,t]) \geq d(z,t)$. En effet, l'inégalité (1) étant vérifiée pour tout recouvrement de $[z,t]$, elle l'est aussi pour la <u>lim</u> des termes du premier membre. Enfin, μ_d étant la restriction de μ_d^* aux boréliens, on a aussi

$$\mu_d([z,t]) \geq d(z,t) . \qquad \square$$

En particulier, ce lemme montre que la mesure de Carathéodory associée à une distance compatible avec l'ordre charge tout intervalle non réduit à un point.

3. <u>THEOREME 11</u> — Soit f une contraction asymptotique de $I = [a,b]$, de point fixe c.
Les cinq assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une distance paramétrique sur I pour laquelle f est contractante de rapport α.

(ii) Il existe $\alpha \in]0,1[$, et une distance paramétrique sur I pour laquelle f est contractante de rapport α.

(iii) Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une distance sur I, compatible avec l'ordre, de poids fini, et pour laquelle f est contractante de rapport α.

(iv) Il existe $\alpha \in]0,1[$, et une distance sur I, compatible avec l'ordre, de poids fini, et pour laquelle f est contractante de rapport α.

(v) Il existe une mesure de Carathéodory μ sur I, diffuse, finie, qui charge tout intervalle non réduit à un point, et qui est reliée à f par la condition suivante :

$$(S'')\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1,\ \exists k_n \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall J = [x,y] \subset (f(I) \setminus f^n(I)),\ \forall E \in \mathcal{B},\ \left\{ \left[E \subset (I \setminus f^{n-1}(I)) \text{ et } J \subset f(E)\right] \Rightarrow \left[k_n \cdot \mu(J) < \mu(E)\right] \right\}.$$

Démonstration : On a clairement :

$$(i) \Rightarrow \begin{matrix}(ii)\\(iii)\end{matrix} \Rightarrow (iv)$$

On va montrer : (iv) $\Rightarrow$ (v) et (v) $\Rightarrow$ (i).

(iv) $\Rightarrow$ (v) — Soient $\alpha \in]0,1[$ et d une distance sur I compatible avec l'ordre, de poids fini, et pour laquelle f est contractante de rapport α. D'après ce qui précède (lemme 10), il suffit de montrer que (S'') est vérifiée avec la mesure μ_d.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, x et y deux éléments de $f(I) \setminus f^n(I)$

tels que : $J = [x,y] \subset (f(I) \setminus f^n(I))$.

Soit E un borélien tel que : $E \subset (I \setminus f^n(I))$, $f(E) \supset J$.

Soit $\tau > 0$. Par définition de $\mu^*(J)$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout recouvrement $\left(]\alpha_k , \beta_k[\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de J par des ouverts de longueur (pour la distance habituelle: $|.|$) $< \eta$, on ait :

$$\mu_d^*(J) - \tau \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} d(\alpha_k , \beta_k) \qquad (1)$$

Par ailleurs, puisque d définit la topologie habituelle, la distance usuelle $|.|$ est continue, et par suite uniformément continue sur le compact I . Il existe donc $\theta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \ d(x,y) < \theta \implies |x-y| < \eta \qquad (2)$$

Puisque E est un borélien, on a : $\mu_d(E) = \mu_d^*(E)$.
Soit $\delta > 0$. Soit $\left(]x_k , y_k[\right)_{k\in\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de E, —c'est-à-dire une suite d'intervalles telle que : $E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]x_k , y_k[$ —, vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall k \in \mathbb{N} , \ d(x_k , y_k) < \theta & (3) \\ \mu_d^*(E) + \delta \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} d(x_k , y_k) & (4) \end{array}\right.$$

Les intervalles $f(]x_k , y_k[)$ forment un recouvrement de $[x,y]$. Ces intervalles $f(]x_k , y_k[)$ peuvent être ouverts, fermés, ou semi-ouverts. Posons :

$$\overline{f(]x_k , y_k[)} = [z_k , t_k] .$$

L'application f étant contractante de rapport α par rapport à d , on a :

$$d(z_k , t_k) \leq \alpha . d(x_k , y_k) \qquad (5)$$

puis, d'après (3) :

$$d(z_k , t_k) \leq \alpha.\theta \qquad (6)$$

$$< \theta \quad \text{car} \quad \alpha < 1 \qquad (7)$$

Cela étant, soit $\zeta > 0$. Définissons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un intervalle $]u_k , v_k[$ satisfaisant à :

$$\begin{cases} [z_k\,,\,t_k] \subset\,]u_k\,,\,v_k[& (8) \\ d(u_k\,,\,v_k) < \theta \quad (\text{possible d'après } (7)) & (9) \\ d(u_k\,,\,v_k) < (1+\zeta)\,.\,d(z_k\,,\,t_k) & (10) \end{cases}$$

La suite $\big(]u_k\,,\,v_k[\big)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un recouvrement de J par des ouverts de longueur $<\eta$ (d'après (9) et (2)). On a successivement les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_d^*(J) - \tau &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} d(u_k\,,\,v_k) && (\text{d'après (9), (2) et (1)}) \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} (1+\zeta)\,.\,d(z_k\,,\,t_k) && (\text{grâce à (10)}) \\ &\le (1+\zeta)\,.\,\alpha\,.\sum_{k\in\mathbb{N}} d(x_k\,,\,y_k) && (\text{par (5)}) \\ &\le (1+\zeta)\,.\,\alpha\,.\,(\mu_d^*(E)+\delta\,) && (\text{par (4)}). \end{aligned}$$

En faisant tendre successivement vers 0 les réels ζ, δ et τ, on obtient : $\mu_d^*(J) \le \alpha\,.\,\mu_d^*(E)$, ce qui montre (S").

(v) $\Rightarrow$ (i) — Soit $\alpha \in\,]0,1[$. Supposons que (v) soit vérifié. On va construire par récurrence une distance d sur I pour laquelle f est contractante de rapport α .

Pour cela, posons :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f^n(I) = [a_n\,,\,b_n] = I_n$$

$$I_0 = I = [a_0\,,\,b_0] = [a,b]\ .$$

$$\begin{aligned} \forall\, n\in\mathbb{N}\,,\ J_n &= [a_n\,,\,a_{n+1}] \\ K_n &= [b_{n+1}\,,\,b_n] \\ L_n &= [a,a_{n+1}] = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_n \\ M_n &= [b_{n+1}\,,\,b] = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_n \\ P_n &= L_n \cup M_n\ . \end{aligned}$$

Ces définitions sont justifiées par l'assertion (ii) du théorème 8.

Pour tout $x \in J_{n+1}$, posons :

$$\varphi_{n+1}(x) = \inf\{\,\sigma \mid \exists\, E \subset P_n\,,\ E\in\mathcal{B}\,,\ \mu(E) = \sigma \ \text{ et } [a_{n+1}\,,\,x] \subset f(E)\,\}$$

Comme $[a_{n+1}\,,\,x]$ est, pour tout $x \neq a_{n+1}$ un intervalle non réduit à un point, et que μ charge un tel intervalle, la condition S" montre que l'on a :

$$\mu(E) > k_{n+1} \cdot \mu([a_{n+1}, x])$$

Cela justifie l'existence de φ_{n+1}, qui est en outre une application strictement croissante. De plus, μ étant diffuse, φ_{n+1} est continue.

Si h_n est un réel >0, l'application $(1/h_n).\varphi_{n+1}$ a les mêmes propriétés, et $(x,y) \longmapsto \frac{1}{h_n} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(y)|$ définit sur J_{n+1} une distance paramétrique.

De même, on définit sur K_{n+1} une distance paramétrique à partir de l'application ψ_{n+1} :

$$\psi_{n+1}(x) = \inf\{\sigma \mid \exists E \subset P_n, E \in \mathcal{B}, \mu(E) = \sigma, \text{ et } [b_{n+1}, x] \subset f(E)\}$$

Pour toute suite double $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ de réels strictement positifs, la construction du lemme 4 fournit sur I une distance paramétrique d construite à partir des

$$d_n : \begin{cases} (x,y) \longmapsto \frac{1}{h_n} . |\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-1}(y)| & \text{si } n \in \mathbb{Z}_-^* \\ (x,y) \longmapsto \frac{1}{h_n} . |\psi_{n+1}(x) - \psi_{n+1}(y)| & \text{si } n \in \mathbb{Z}_+^* \end{cases}$$

Nous allons construire par récurrence une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ permettant d'appliquer le lemme 5.

On pose : $d_{-1}(x,y) = \mu([x,y])$, $\forall (x,y) \in J_0^2$

$d_1(x,y) = \mu([x,y])$, $\forall (x,y) \in K_0^2$

Supposons la distance d construite sur $L_n^2 \cup M_n^2$ (cf. la remarque suivant le lemme 4), et telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall p \leq n, \forall (x,y) \in \left(J_p^2 \cup K_p^2\right), \left\{\left[\exists (z,t) \in \left(L_{p-1}^2 \cup M_{p-1}^2\right), f(z) = x \right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. \text{et } f(t) = y\right] \Longrightarrow \left[d(x,y) \leq \alpha . d(z,t)\right]\right\} \\ \bullet\ \exists j_n > 0, \forall (z,t) \in \left(L_n^2 \cup M_n^2\right), d(z,t) \geq j_n . \mu([z,t]) . \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t) \in I^4$ vérifiant :

$$(x,y) \in J_{n+1}^2 \ ; \ (z,t) \in \left(M_n^2 \cup L_n^2\right); \ x < y \ ; \ f(z) = x \ ; \ f(t) = y$$

On a :

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(y)| = \inf\{\sigma \mid \exists E \subset P_n ,\ \mu(E) = \sigma \text{ et } [x,y] \subset f(E)\}$$

Comme $f(z) = x$, et $f(t) = y$, on a $[x,y] \subset f([z,t])$, et donc, $\mu([z,t]) \geq |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(y)|$, et, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$d(z,t) \geq j_n \cdot |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(y)|$$

Posons : $h_{-n} = \dfrac{1}{\alpha . j_n}$

On a alors : $\alpha . d(z,t) \geq d_{-n}(x,y)$,

avec : $d_{-n}(x,y) = \dfrac{1}{h_{-n}} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(y)|$

De même, on définit h_n , et d_n sur K_n^2 .

D'après S" , on a alors : $\mu([x,y]) < \dfrac{1}{k_{n+1}} \mu(E)$,

pour tous $(x,y) \in \left(L_{n+1}^2 \cup M_{n+1}^2\right)$ et $E \subset P_n$ $(E \in \mathcal{B})$, tels que $[x,y] \subset f(E)$. On en déduit l'existence de j_{n+1} dans l'hypothèse de récurrence.

Le lemme 5 s'applique donc, ce qui achève la démonstration.□

Corollaire 12 — Les contractions asymptotiques Lipschitziennes pour la distance usuelle sont contractantes pour une distance paramétrique.

Bibliographie

[1] A.M. Bruckner *"Differentiation of real functions"* Springer éd. Lecture Notes n°659 (1978) — (Pour le résultat de Fleissner et Foran, voir p. 133)

[2] M. Bruneau *"Variation totale d'une fonction"* Springer éd. Lecture Notes n°413 (1974) — (Pour les mesures de Carathéodory, voir le chapitre IV)

[3] F. Guénard *"Caractérisations des contractions asymptotiques et des applications itérativement convergentes des intervalles"* C. R. Acad. Sci. Paris I, t.292, 1981, 55-56

[4] L. Janos *"A converse of Banach's contraction theorem"* Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 287-289

† Ce travail a été effectué à l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique — Paris-Cachan (France)