Real Analysis Exchange Vol. 8 (1982-83)

A.MARQUETTY, Université de METZ,34, rue Ronsard,94100 ST-MAUR (FR.)

APPROCHE ALGEBRIQUE DE L'ANALYSE NON STANDARD

1. INTRODUCTION.- L'expression "Analyse non standard" a été inventée en 1961 par A. Robinson [6] (préface). L'intention de Robinson était de remplacer le concept habituel de limite par une théorie des infiniment petits et des infiniments grands en rationalisant ces concepts dont G.W. Leibniz avait pressenti l'intérêt. A partir de définitions non standards des notions de continuité et de dérivée, Robinson présente des démonstrations d'une séduisante simplicité des théorèmes classiques de l'analyse réelle, par exemple du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues [6] (p. 66).

Les techniques de l'analyse non standard ont fourni la preuve de leur efficacité [3], [4] et [5] (p. 140).

Un seul exemple, particulièrement frappant, suffit à justifier l'intérêt de l'analyse non standard :

Dans la théorie non standard de la mesure (voir Allen R. Bernstein et Frank Wattenberg [3]), la mesure de probabilité associée à un point de l'intervalle [0,1] a une valeur infinitésimale et non pas nulle comme c'est le cas en théorie classique de la mesure. Le point de vue non standard est plus conforme à l'intuition que le point de vue classique :
si chaque point de l'intervalle [0,1] a une chance sur une infinité continue de chances d'être choisi, la probabilité associée à ce point est infime mais ne peut pas être nulle, bien qu'étant inférieure à tout nombre réel, si petit soit-il : cette probabilité est infinitésimale.

En dépit de ses promesses ,le point de vue non standard ne s'est pas substitué aux procédés classiques d'approche de l'analyse réelle.

Parmi les causes de cet échec relatif, on peut citer le fait que l'analyse non standard est un sous produit de la théorie des modèles, elle-même inspirée par l'étude des systèmes formels. Or, peu de mathématiciens sont sensibles aux motivations qui soutiennent des recherches sur la nature de l'axiome du choix, de l'hypothèse du continu ou des cardinaux inaccessibles.

Le but de la première partie de cet article est de présenter les principaux éléments de l'analyse non standard à l'aide d'une technique qui, bien que très élémentaire, permet d'engendrer la plupart des structures algébriques classiques à partir d'un petit nombre de structures primitives (structure de groupe et structure de treilli). Cette technique est celle du transport de structure; elle sera décrite au cours de l'article.

La deuxième partie de l'article est intitulée "hiérarchie des monades" (une monade est l'ensemble (1) des éléments "infiniments proches" d'un élément d'un ensemble ordonné).

L'étude de la hiérarchie des monades conduit à envisager l'existence de fonctions "plus ou moins continues", résultat qui devrait avoir des applications en analyse réelle.

Partie I - ANALYSE NON STANDARD

1 - Infinitésimaux et extensions non standards - Les mots du vocabulaire utilisé dans la littérature sur l'analyse non standard peuvent être définis à l'aide de propriétés banales des relations d'ordre. Pour s'en convaincre, il suffit d'énoncer quelques définitions essentielles, de rappeler quelques propriétés des notions définies et de produire un exemple simple d'extension non standard d'un ensemble ordonné (1).

Définition 1 - Elément infinitésimal - Soit 0, un point que nous appelerons l'origine d'un ensemble A infini et totalement ordonné et A_0, un sous-ensemble de A, contenant 0. Nous dirons qu'un élément c de A est infinitésimal si et seulement si

$$\forall b \in A_0 - \{0\} \; (0 < c < b) \text{ (infinitésimal positif)}$$

ou

$$\forall b \in A_0 - \{0\} \; (b < c < 0) \text{ (infinitésimal négatif)}$$

(1) voir commentaire sur l'emploi du mot "ensemble" au début du paragraphe 5 : "ensembles internes et ensembles externes".

Définition 2 - éléments standards : éléments de A_o

Définition 3 - éléments presque standards : Un élément de A est presque standard si et seulement si , c étant l'élément de A, on a :

$$\exists a \in A_o \ \forall b \in A_o \ (a < b \Rightarrow a < c < b) \text{ ou } (b < a \Rightarrow b < c < a) \qquad (1)$$

Définition 4 - partie standard ${}^oc$ de c : si c est presque standard, l'élément a qu'on notera ${}^oc$ est la partie standard de c.

Définition 5 - monade de $a \in A_o$:

$$u(a) = \{c \in A - A_o : (1)\}$$

Définitions 6 :

supmonade : $u^+(a) = \{c \in u(a) : a < c\}$

infmonade : $u^-(a) = \{c \in u(a) : c < a\}$

(voir [4] , page 246)

Définition 7 - éléments infinis de A - Un élément c de A est infini si et seulement si

$\forall a \in A_o (a < c)$ (infini positif) ou

$\forall a \in A_o \ (c < a)$ (infini négatif)

Définition 8 -Eléments non standards : ensemble des éléments presque standards et des éléments infinis de A .

Définition 9 -L'extension non standard de A_o est l'ensemble noté ${}^*A_o$ des éléments standards et non standards de A_o .

Définition 10 - L'ensemble des éléments standards et presque standards est l'ensemble des éléments finis de ${}^*A_o$.

Les définitions précédentes vont permettre de donner la définition non standard de la continuité après avoir rappelé les propriétés suivantes :

Propriété 1 - Un infinitésimal est un élément de la monade u(0) de l'origine 0, choisie dans A_o.

Propriété 2 - Pour que c soit presque standard, il est nécessaire que $c \in A - A_o$. En effet, si $c \in A_o$,on ne peut avoir $a < c < b$ pour tout $b \in A_o$ car si $b = c$, on a $a < c = b$.

Par contre, on peut avoir :

$$\forall a \in A_o \ \forall b \in A_o \ \exists c \in A_o : \ a < c < b \qquad (2)$$

Dans ce cas, on dira que l'ordre sur A_o est <u>dense</u> .

<u>Définition non standard de la continuité</u> :

Les notions de limite et de continuité sont décrites en analyse classique en utilisant les propriétés des ordres denses définis par la relation (2) (voir propriété 2).

En analyse non standard, c'est la relation (1) (voir définition 3) qui joue un rôle essentiel. On a, par exemple, la

<u>Définition 11</u> : une fonction f de A_o dans A_o est continue en un point x_o si et seulement si le prolongement $^*f$ de f dans $^*A_o$ est tel que

$$\forall x \in {}^*A_o \; (x \in u(x_o) \Rightarrow {}^*f(x) \in u(f(x_o)))$$

Pour mieux comprendre comment on utilise les définitions précédentes en analyse non standard, donnons d'abord un exemple simple d'ordre dense et d'une extension non standard de cet ordre.

<u>Exemple d'ensemble totalement ordonné, partout dense et sans plus grand élément.</u>

Soit l'ensemble $^N2$ des applications de l'ensemble N des entiers dans l'ensemble $\{0,1\}$ à deux éléments notés 0 et 1 et soit A_o , une partie de $^N2$ telle que :

$$A_o = \{ x \in {}^N2 : \exists n \in N \; \forall m \in N \; (m > n \Rightarrow x(m) = 0 \} \quad (3)$$

A_o possède la propriété énoncée par le théorème suivant :

<u>Théorème 1</u> - L'ordre lexicographique sur A_o est total, partout dense et sans plus grand élément.

<u>démonstration</u> -

a) soient x et y, deux éléments distincts de A_o et n_o , le plus petit entier tel que : $x(n_o) = y(n_o)$

on a, d'après la définition de l'ordre lexicographique,

soit $x(n_o) = 0$ et $y(n_o) = 1$ et $x < y$

soit $x(n_o) = 1$ et $y(n_o) = 0$ et $y < x$

L'ordre sur A_o est total.

b) montrons que , si $x < y$, il existe $z \in A_o$ tel que $x < z < y$ (4)

Soit n_o, le plus petit entier tel que $x(n_o) \neq y(n_o)$

On a : $x(n_o) = 0$ et $y(n_o) = 1$ car $x < y$ par hypothèse et pour tout z tel que $\forall n\ (n \leq n_o \Rightarrow x(n) = z(n))$, on a : $z < y$

De plus, d'après la définition(3) de A_o ,

$$\exists m_o \in \{ m \in N : n_o < m \}\ \forall m \in N\ (m_o < m \Rightarrow x(m) = 0) \}$$

et il existe z dans A_o tel que $n < m_o \Rightarrow x(n) = z(n)$ et $z(m_o) = 1$, c'est-à-dire tel que $x < z \leq y$.

L'ordre sur A_o est <u>partout dense</u> (la propriété (4) est vérifiée pour tout couple d'éléments x et y de A_o)

c) pour tout $x \in A_o$,si m_o est le plus petit entier tel que

$\forall n \in N\ (m_o < n \Rightarrow x(n) = 0)$, il existe $z \in A_o$ tel que

$$\forall n \in N\ (n < m_o \Rightarrow x(n) = z(n) \text{ et } z(m_o) = 1)$$

c'est-à-dire tel que $x < z$. L'ensemble A_o <u>n'a pas de plus grand élément</u> Q.E.D.

<u>Exemple d'extension non standard $^*A_o$ de l'ensemble A_o</u>

Soit ${}^N A_o$, l'ensemble des applications de N dans l'ensemble A_o défini par (3) (voir exemple précédent) .

On appelera A'_o ,l'ensemble des applications constantes de N dans A_o . L'ordre sur A_o induit un ordre total,partout dense et sans plus grand élément sur A'_o, défini par

$$\forall a,b \in A'_o\ \ \forall n \in N\ (a(n) = x < b(n) = y \Leftrightarrow a < b) \quad (5)$$

L'ordre sur A'_o étant dense, on peut définir un ensemble d'applications noté $A''_o - A'_o$ de N dans A_o ,vérifiant :

$$\forall c \in A''_o - A'_o\ \exists a \in A'_o\ \exists n_o \in N\ \forall m,n > n_o\ \forall p \in N \quad (6)$$

$$(a(p) = x \text{ et } n < m \Rightarrow (x < c(m) < c(n) \text{ ou } c(n) < c(m) < x))$$

De plus, l'ordre sur A'_o ,étant partout dense, on peut associer à chaque élément a de A'_o ,un ensemble d'applications c de $A''_o - A'_o$ vérifiant (6) et tel que

$$\forall d \in A'_o - \{a\} \quad \exists b \in A'_o - \{a\} \quad \exists n \in N$$
$$(c(n) = b \text{ et } (d < b < a \text{ ou } a < b < d)) \qquad (7)$$

Nous appelerons cet ensemble d'applications c associées à a, la monade $u(a)$ de a .

Pour justifier cette appellation et montrer que ces applications c ont la propriété des éléments presque standards, il faut étendre l'ordre sur A'_o à un ordre sur A''_o défini par

$$\forall a,b \in A''_o \; (a < b) \text{ si et seulement si}$$
$$\exists n_o \in N \;\; \forall n \in N \; (n_o < n \Rightarrow a(n) < b(n)) \qquad (8)$$

On vérifie que, d'après (8), les éléments de $u(a)$ vérifient la relation (1) (voir définition 3) et que $A''_o - A'_o$ est un ensemble d'éléments presque standards relativement à l'ensemble A'_o que nous appelerons l'ensemble des éléments standards.

Si on note o, l'élément de A'_o tel que $\forall n \in N \;\; o(n) = 0$, la supmonade $u^+(o)$ est l'ensemble des infinitésimaux de A'_o .

On peut définir également un ensemble ${}^*A_o - A''_o$ d'éléments infinis positifs comme étant l'ensemble des applications c de N dans A_o telles que

$$\forall a \in A'_o \quad \exists n_o \in N \; \forall m \in N \; (n_o < m \Rightarrow a(m) < c(m)) \qquad (9)$$

On appelera ${}^*A_o$, une extension non standard de A_o .

Une étude générale des extensions non standards nécessite la présentation des notions suivantes :

- Produits réduits et puissance réduite

L'ensemble des ensembles $A_{n_o} = \{ n \in N : n_o < n \}$ qui intervient dans (8) est le filtre de Fréchet sur N.

Si deux éléments a et b de A''_o vérifient (8), on dit que a est inférieur à b "presque partout" et si

$$\exists n_o \in N \; \forall n \in N \; (n_o < n \Rightarrow a(n) = b(n)) ,$$

on dit que a = b "presque partout". On montre facilement (voir [1]) que le filtre de Fréchet, noté F, détermine sur ${}^{N}A_o$, une relation d'équivalence dont les classes sont définies par

$$C_a = \{ b : b = a, \text{ presque partout} \}$$

Si on note A_o^N, l'ensemble des suites $< f(n) >_{n \in N}$ avec $f \in {}^{N}A_o$, l'ensemble quotient A_o^N /F est la puissance réduite de A_o^N sur F.

Si $\{ f(n) : f \in B \subseteq {}^{N}A_o \} = A_n$, l'ensemble quotient $\prod_{n \in N} A_n /F$ est un produit réduit sur F .

- (X,G)-extension non standard de A_o - On peut se demander si le procédé de construction de l'extension ${}^{*}A_o$ de A_o permet d'obtenir des extensions non standards non isomorphes à ${}^{*}A_o$, en considérant des applications d'un ensemble X dans A et un filtre G qui n'est pas un filtre de Fréchet. La question sera étudiée dans la deuxième partie de cet article ("Hiérarchie des monades"). On peut , cependant, déjà remarquer que X doit être un ensemble infini et totalement ordonné. L'extension ${}^{*}A_o$ de A_o est une (N,F)-extension non standard de A_o.

- extension non standard d'une extension non standard - Etant donné, par exemple, une (N,F)-extension, on peut se demander s'il n'existe pas un filtre G et un ensemble totalement ordonné X tels que l'extension donnée puisse elle-même avoir une extension non standard.

On remarque d'abord que les relations (5), (6),(7) et(8) déterminent sur A un ordre qui permet de comparer les éléments non standards aux éléments standards mais non de comparer les éléments d'une même monade ou des éléments infinis. En effet :

Théorème 2 - c étant un élément de la monade $u(a)$ d'un élément standard a, il existe $d \in u(a)$ tel que c et d soient incomparables.

Démonstration - Soit $< c(n_j)>$ avec $n_j \in N$, une suite de valeurs de c telle que $n_i < n_{i+1} \Rightarrow c(n_{2i+1}) < c(n_{2i})$ avec $i \in N$

L'ordre sur A_o étant dense, il existe une suite $<b_j>_{j \in N}$ telle que

$$c(n_{2i+1}) < b_{2i+1} < b_{2i} < c(n_{2i})$$

L'élément c et l'élément d tel que $d(n_{2i+1}) = b_{2i+1}$ et $d(n_{2i}) = b_{2i}$ sont incomparables et $d \in u(a)$. Q.E.D.

De même, on peut démontrer le théorème et le corollaire suivants :

<u>Théorème 3</u> - c étant un élément infini de $^*A_o$, il existe d, infini tel que c et d soient incomparables .

<u>Corollaire 4</u> - L'ordre sur $^*A_o$ étant partiel, il n'existe pas d'extension non standard de $^*A_o$

<u>Commentaire</u> - On peut remédier au résultat du corollaire 4 soit en considérant une partie totalement ordonnée d'une extension donnée, soit en cherchant à construire une extension totalement ordonnée.

La recherche d'une telle extension est l'objet du prochain paragraphe.

2 - <u>Extension d'un ordre partiel à un ordre total et extension non standard totalement ordonnée</u> -

On peut transporter une structure d'ordre total, définie sur un ensemble Y, dans l'espace ^XY des applications d'un ensemble X dans Y en définissant l'ordre dans Y par :

$$\forall f, g \in {}^XY \; (f < g \iff \forall x \in X \; (f(x) < g(x))) \qquad (1)$$

Si on pose : $A = \{x \in X : f(x) < g(x) \}$,
$B = \{x \in X : f(x) = g(x) \}$,
et $C = \{x \in X : f(x) > g(x) \}$,

les éléments f et g ne sont comparables au sens défini par (1) que si $A = \emptyset$ ou $C = \emptyset$.

On a plus précisément les définitions suivantes :

1) $f < g$ ssi $A = X$ d'où $B = \emptyset$ et $C = \emptyset$

2) $f = g$ ssi $B = X$ d'où $A = \emptyset$ et $C = \emptyset$

(U) 3) $g < f$ ssi $C = X$ d'où $A = \emptyset$ et $B = \emptyset$

4) $f \leq g$ ssi $A \cup B = X$ d'où $C = \emptyset$

5) $g \leq f$ ssi $B \cup C = X$ d'où $A = \emptyset$

(ssi = si et seulement si)

De plus, si $g \leq f$ et $f \leq g$, on a $A \cup B = X$ d'où $C = \emptyset$ et $B \cup C = X$ d'où $A = \emptyset$. Il en résulte que $B = X$ et $f = g$.

On peut augmenter le nombre d'éléments comparables de Y en définissant une famille G de parties de X de telle sorte qu'un couple d'éléments f et g de ^XY vérifie une relation d'ordre $<$ ou $\leq$,ou d'équivalence $=$,si on a :

$$
\text{(V)} \qquad
\begin{array}{llll}
1)\ f < g & \text{ssi} & A \in G & \text{et} \quad B \cup C \notin G \\
2)\ f = g & \text{ssi} & B \in G & \text{et} \quad A \cup C \notin G \\
3)\ g < f & \text{ssi} & C \in G & \text{et} \quad A \cup B \notin G \\
4)\ f \leq g & \text{ssi} & A \cup B \quad G & \text{et} \quad C \notin G \\
5)\ g \leq f & \text{ssi} & B \cup C \quad G & \text{et} \quad A \notin G
\end{array}
$$

Une solution au problème de l'extension d'un ordre partiel à un ordre total est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5 - Soit Y, un ensemble totalement ordonné. Pour que les relations (V) étendent à un ordre total, un ordre partiel défini par les relations (U) sur un ensemble B d'applications d'un ensemble X dans Y, il suffit que G soit un ultrafiltre.

Démonstration -

a) G étant un ultrafiltre, on a $X \in G$ et $\emptyset \notin G$. Donc les éléments comparables au sens défini par (U) sont comparables au sens défini par (V).

b) soient $f, g \in B$ et $X_1 = \{ x \in X : f(x) = g(x) \}$

On a soit $f \leq g$ si $X_1 \in G$ soit $g < f$ car G étant un ultrafiltre, si $X_1 \notin G$ alors $X - X_1 \in G$.

c) si $X_1 = \{ x \in X : f(x) \leq g(x) \} \in G$ et
$X_2 = \{ x \in X : g(x) \leq h(x) \} \in G$ alors

$f \leq g$ et $g \leq h$ entraînent $f \leq h$ car, G étant un ultrafiltre, on a : $X_1 \cap X_2 \quad G$ et, la relation sur Y étant transitive, on a :

$X_1 \cap X_2 \subseteq \{ x \in X : f(x) \leq h(x) \} = X_3$ et $X_3 \in G$

Q.E.D.

Si on pose $B_x = \{ f(x) : f \in B \}$, on a le corollaire suivant:

Corollaire 6 - Si on définit un ordre total sur X et si G est un ultrafiltre, l'ordre total sur Y induit un ordre total sur le produit réduit $\prod_{x \in X} B_x / G$

Démonstration - Conséquence de la définition du produit réduit.

Définition 12 - Un produit réduit s'appelle un ultraproduit quand le filtre G est un ultrafiltre.

- <u>extension non standard propre</u> - Le théorème 5 et son corollaire donnent bien une condition pour qu'une extension non standard soit totalement ordonnée mais au prix d'une réduction du nombre de classes d'éléments f et g distincts, la relation f = g étant remplacée par la relation f = g presque partout ce qui peut s'écrire f = g(modG). En particulier, si G est un ultrafiltre principal, on a le théorème suivant :

<u>Théorème 7</u> - Si G est un ultrafiltre principal et si B contient l'ensemble des applications constantes de X dans Y, l'ultraproduit $\prod_{x \in X} B_x/G$, noté B , est isomorphe à Y.

<u>Démonstration</u> - Soit x_o , l'élément de X qui détermine l'ultrafiltre principal G = $\{X_1 \subseteq X : x_o \in X_1\}$ ce qui peut s'écrire

$$X_1 = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in G \text{ ssi } x_o \in X_1$$

Si a est l'application constante de X dans Y telle que $\forall x \in X\ (a(x) = f(x_o))$, on a : $\{x \in X : f(x) = a(x)\} \in G$ et f = a (mod G) :

toute application f de X dans Y est un élément d'une classe d'équivalence déterminée par une application constante de X dans Y et toute application constante détermine un élément de B_1. Q.E.D.

Dans le cas où B est une extension non standard $^*Y$ de Y, on a le corollaire suivant :

<u>Corollaire 8</u> - Une condition nécessaire pour qu'une extension non standard $^*Y$ de Y, déterminée par un ultraproduit B_1, contienne des éléments non standards est que l'ultrafiltre G soit <u>non principal.</u>

<u>Démonstration</u> - conséquence immédiate du théorème 7 .

<u>Définition 13</u> - Une extension non standard est dite <u>propre</u> si elle contient des éléments non standards.

- <u>Exemple d'extension non standard propre et totalement ordonnée</u>

Dans le paragraphe 1 de la partie I, l'extension non standard $^*A_o$ de l'ensemble A_o est partiellement ordonnée. De plus, $^*A_o$ est un produit réduit sur le filtre de Fréchet de N. On peut obtenir une extension non standard, propre et totalement ordonnée comme suit :

chaque monade $u(a)$ et l'ensemble des éléments infinis ${}^*A_o - A''_o$ sont des ensembles partiellement ordonnés. On peut choisir une chaîne $u_1(a)$ dans chaque $u(a)$ c'est-à-dire un sous ensemble totalement ordonné d'éléments de $u(a)$ et une chaîne d'éléments infinis notée B_N. On vérifiera que l'ensemble $B = B_N \cup (\bigcup_{a \in A'_o} u_1(a))$ est bien ordonné et que l'ensemble B est une extension non standard, propre et totalement ordonnée de A_o et que, de plus, le filtre de Fréchet sur N est bien un ultrafiltre sur l'ensemble B.

3 - <u>Hyperstructures et ultralimites</u> -

L'analyse non standard est l'oeuvre de logiciens dont l'une des préoccupations est l'étude de la cardinalité des ensembles. Aussi, la littérature sur l'analyse non standard traite des propriétés de structures définies avec un très haut niveau de généralité.

Robinson, par exemple, (voir [3] p. 110 et [5] p.12) et Elias Zakon (voir [2] p.314) étudient les extensions non standards d'une <u>superstructure</u> $\hat{S}$ d'un ensemble donné S, $\hat{S}$ étant définie par $S_o = S \quad S_{n+1} = S_n \cup P(S_n)$ et $\hat{S} = \bigcup_{n \in N} S_n$

La technique du transport de structure permet d'étudier des extensions non standards d'une structure initiale notée $\hat{\hat{S}}$ légèrement plus générale que la structure S et qui présente l'avantage supplémentaire de permettre une étude des extensions non standards en ne considérant que les seules relations d'ordre sans qu'il soit nécessaire d'initier le lecteur aux subtilités du calcul des propositions et des prédicats.

On appelera hyperstructure, la structure $\hat{\hat{S}}$ définie par

$$S_o = A_o \qquad S_{n+1} = {}^{S_n}A_{n+1} \text{ et } \hat{\hat{S}} = \bigcup_{n \in N} S_n$$

les ensembles A_n étant les éléments d'une suite donnée $\langle A_n \rangle_{n \in N}$ d'ensembles totalement ordonnés. Par transport de structure de l'ordre total dans A_{n+1} sur ${}^{S_n}A_{n+1}$, on définit sur chaque S_{n+1}, un ordre partiel et on a un ordre partiel sur $\hat{\hat{S}}$.

Une extension non standard ${}^*\hat{\hat{S}}$ de $\hat{\hat{S}}$ peut être définie comme suit :

a) on définit une chaîne de $\hat{\hat{S}}$, notée $\hat{\hat{S}}_m$ en sélectionnant une chaîne

$S_{n,m}$ dans chaque ensemble partiellement ordonné S_n . Si $p,q \in \hat{S}$, on peut écrire $p < q$ si $p \in S_n$ et $q \in S_m$ et $n < m$ ou si les deux éléments p et q sont sur la même chaîne $S_{n,m}$ et si $p < q$ sur $S_{n,m}$

b) on se donne un ensemble I, muni d'un ultrafiltre G et on construit les ultrapuissances $^*\hat{S}_m^I/G$. Si M est l'ensemble des indices m qui déterminent les chaînes $\hat{S}_m$, l'extension non standard de $\hat{S}$ est

$$^*\hat{S} = \bigcup_{m \in M} \hat{S}_m^I/G$$

Pour étudier l'extension précédente, il convient de rappeler et de compléter quelques définitions :

<u>Définition 14</u> - Les éléments **<u>standards</u>** de l'extension sont les éléments équivalents aux applications constantes de I dans la structure de départ.

<u>Définition 15</u> - La m-monade $u_m(a)$ d'un élément standard a est l'ensemble des éléments presque standards déterminés par l'ultrapuissance $\hat{S}_m^I/G$ et dont la partie standard est l'élément a.

<u>Définition 16</u> - La <u>monade intérieure</u> int- u(a) est l'intersection des monades $u_m(a)$ avec $m \in M$

<u>Définition 17</u> - La <u>monade extérieure</u> ext- u(a) est la réunion des monades $u_m(a)$ avec $m \in M$

On peut construire une extension non standard de $^*\hat{S}$ mais pour éviter les complications dues au fait qu'une hyperstructure n'est pas un ensemble totalement ordonné, on se bornera à définir les extensions non standards d'une chaîne $\hat{S}_m$ dont l'extension $^*\hat{S}_m = \hat{S}_m^I/G$ est totalement ordonné.

On peut définir une suite $<P_n>_{n \in N}$ d'extensions non standards successives d'une chaîne $\hat{S}_m$,elle-même notée P_o, en se donnant une suite $<(I_n,G_n)>_{n \in N}$ de couples d'ensembles I_n et d'ultrafiltres G_n en notant $P_1 = P_o^{I_1}/G_1$ et $P_{n+1} = P_{n+1}^{I_{n+1}}/G_{n+1}$

On définit ensuite un ensemble P_N dont les éléments sont les classes d'équivalences obtenues comme suit :

a) si $p_n \in P_n$ et $d_n(p_n)$ est l'élément standard de P_n défini par p_n et si m n, on notera $d_n^m(p_n) = d_{m-1}o\ldots od_n(p_n)$, l'élément standard de P_m défini par p_n et par composition des applications

$d_{m-1}, \ldots, d_n$.

b) la relation d'équivalence annoncée s'obtient en écrivant

$$p_n \cong p_m \quad \text{ssi} \quad \forall p \geq m \text{ et } p \geq n \quad (d_m^p (p_m) = d_n^p (p_n))$$

On appelle l'ensemble P_N , une <u>ultralimite</u>, notion due à Kochen (1962) (voir [1], p. 165).

Les ultralimites, étant des ensembles totalement ordonnés, peuvent servir à fabriquer de nouvelles hyperstructures. On dispose ainsi de procédés permettant d'obtenir des ensembles de cardinalités très élevées.

Dans le cas <u>des applications à l'analyse réelle, les notions d'hyperstructure et d'ultralimite</u> servent à utiliser des types d'ordre plus riches que les types d'ordre habituels des ensembles N,Q ,R.

4 - <u>Remarques sur la technique du transport de structure : principe du transfère et relations concurrentes</u> -

Dans les paragraphes précédents, la technique du transport de structure a été utilisée pour transporter une relation d'ordre sur un ensemble Y dans l'espace ${}^XY$ des applications d'un ensemble X dans Y.

Habituellement, les notions d'analyse non standard sont présentées après une étude aussi générale que possible des structures relationnelles. Mais les difficultés d'utilisation des techniques non standards apparaissent dès qu'on les applique à des structures courantes (structures de groupe, d'anneau, de corps, de module, d'espace vectoriel, etc ...).

Pour mettre en évidence l'intérêt des remèdes proposés par l'analyse non standard pour pallier à ces difficultés, on peut borner l'étude à des cas usuels.

La technique utilisée dans le paragraphe 2 peut être appliquée au cas d'un ensemble Y muni d'une opération binaire notée + et qui fait correspondre à $y_1, y_2 \in Y$, l'élément $y = y_1 + y_2$ de Y . Si X est un ensemble et $f_1, f_2 \in {}^XY$, on définit l'opération notée + par

$$f_1+f_2 = f \quad \text{ssi} \quad \forall x \in X \quad (f_1(x) + f_2(x) = f(x)) \qquad (1)$$

f est un élément de ${}^XY$ déterminé par l'opération + et les éléments

f_1 , f_2 de ${}^X Y$.

Si on définit un ultraproduit Y^X/G , l'opération $\overset{*}{+}$ sera définie par

$$\bar{f}_1 \overset{*}{+} \bar{f}_2 = \bar{f} \quad \text{ssi} \quad \{ x \in X : f_1(x) + f_2(x) = f(x) \} \in G \qquad (2)$$

avec $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2 \in Y^X/G$.

La relation (1) montre qu'un transport de structure de Y sur ${}^X Y$ enrichit une structure sur Y sans modifier sa description formelle. En effet, si on note $st({}^X Y)$, l'ensemble des applications constantes de X dans Y, on constate que

$$(st({}^X Y), \overset{*}{+}) \text{ est isomorphe à } (Y,+) \qquad (3)$$

Pour démontrer (3), il suffit de définir f_1 , $f_2 \in st({}^X Y)$ par

$\forall x$ $f_i(x) = a_i$ avec $i = 1,2$ et $a_i \in Y$ et $f_1 + f_2$ par la relation (1)

On démontre, d'une façon analogue, que

$$(st(Y^X/G), \overset{*}{+}) \text{ est isomorphe à } (Y,+) \qquad (4)$$

Il résulte de (3) et (4) ainsi que du fait que $st({}^X Y)$ et $st(Y^X/G)$ sont respectivement des parties propres de ${}^X Y$ et de Y^X/G que $({}^X Y, +)$ et $(Y^X/G, +)$ sont des extensions propres de $(Y,+)$. De plus, on remarque que les formules $f_1 \overset{*}{+} f_2 = f$ dans (1) et $\bar{f}_1 \overset{*}{+} \bar{f}_2 = \bar{f}$ dans (2) s'obtiennent en remplaçant y par f ou $\bar{f}$ dans la formule $y_1 + y_2 = y$. C'est l'extension de cette remarque aux formules d'un langage quelconque qui conduit à énoncer le <u>principe du transfère</u>, utilisé en analyse non standard.

La difficulté d'énonciation de ce principe résulte des précautions à prendre pour <u>définir</u> les formules d'un langage, leur <u>mode de génération</u> et leur <u>interprétation</u> dans un <u>modèle</u>. (voir [1] (chapitres 2 et 3 et [6] (chapitre 2)).

Dans un <u>langage</u>, une <u>formule</u> représente une correspondance entre une partie X_o d'un ensemble X (ensemble des <u>variables propo sitionnelles</u>)et un élément x_o de X. la cardinalité de X_o est <u>l'arité</u> de la formule. La valeur d'une formule notée f est notée $f(X_o)$.

On peut engendrer de nouvelles formules par des <u>substitutions</u> notées $(f_i/x_i)f = f^*$ de formules f_i dans des variables x_i (avec $x_i \in X$ et $i \in I$: ensemble d'indexation). La nouvelle formule f^* représente une correspondance entre l'ensemble $(X_o - \{x_i\}_{i \in I}) \cup (\bigcup_i X_i)$ noté X^* et un élément x de X, les ensembles X_i définissant les valeurs $f_i(X_i)$ des formules f_i.

Les formules f d'un langage L servent à décrire les <u>opérations</u> et les <u>relations</u> définies sur un ensemble Y (Y est un <u>modèle</u> de f), une opération étant une application de Y^A dans Y, A étant un ensemble totalement ordonné et une relation, une application de Y^A dans un ensemble à deux éléments noté $\{0,1\}$. L'opération ou la relation décrite par f est une <u>interprétation</u> de f.

On peut énoncer le <u>principe du transfère</u> comme suit :

Etant donné une interprétation d'une formule f dans un ensemble Y, un transport de structure de Y sur un ensemble ^XY ou sur un ultra-produit Y^X/G détermine une interprétation de f dans ^XY ou dans Y^X/G.

Les conditions de validité du principe du transfère sont précisées, dans le cadre de la logique formelle, par le <u>théorème de Łos</u> ([1] page 89).

On peut éviter les cas où le principe du transfère pourrait être en défaut en ne considérant que des formules d'arité finies obtenues par un nombre fini de substitutions. Sinon, il peut arriver que l'opération *f correspondante à l'opération f dans un transport de structure ne soit pas définie comme le montre l'exemple suivant :
<u>Exemple</u> : soit l'opération + définie sur $\{0,1\}$ par $1+1 = 0+0 = 0$ et $1+0 = 0+1 = 1$. On a :

$$\bar{f}_1 \overset{*}{+} \bar{f}_2 = \bar{f} \text{ ssi } \{x \in X : f_1(x)+f_2(x) = f(x)\} \in G$$

De même, $\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i = \bar{f}_i$ est défini par un transport de structure.

En particulier, si

$$\forall x \in X \ \forall i=1,\dots,n \ (f_i(x) = 1),$$

on a $f(x) = 0$ si n est pair et $f(x) = 1$ si n est impair.

Mais si $\forall x \in X \ \forall i \in N \ (f_i(x) = 1)$, la formule $\sum_{i \in N} f_i(x)=f(x)$ obtenue par une infinité de substitutions de $f_n(x)+f_{n+1}(x)$ à $f_n(x)$ n'a pas de valeur déterminée quand $f_i(x) = 1$ pour tout i.

En analyse non standard, on peut garantir la validité du principe du transfère en se bornant à des formules obtenues par un nombre fini de substitutions sur des relations dites concurrentes données par la définition suivante :

Définition 18 - Une relation f sur un ensemble Y est dite concurrente si et seulement si, $P_f(Y)$ étant l'ensemble des parties finies de Y, on a:

$$\forall Y' \in P_f(Y)\ \exists y \in Y\ \forall y' \in Y'\ (f(y',y) = 1)$$

On appelera les modèles non standards obtenus à partir de relations concurrentes, des élargissements, traduction française du terme "enlargement" choisi par A. Robinson. De plus, A. Robinson appelle constantes ("constants") les signes qui désignent les formules f d'un langage L.

Il est possible aussi de garantir le principe du transfère dans des cas plus généraux en utilisant des modèles saturés (voir [3] page 27).

En analyse réelle, le principe du transfère, quand il est garanti, permet d'étendre à l'extension non standard $^*R$, les propriétés des éléments de R (ensemble des nombres réels) et, en particulier, de prolonger une application f de R dans R à une application $^*f$ de $^*R$ dans $^*R$.

5 - Ensembles internes et ensembles externes -

- Langage de la théorie des ensembles -

Dans les paragraphes précédents, le mot "ensemble" a été employé dans le sens informel que lui donne la plupart des usagers des mathématiques.

Les règles d'emploi informel du mot "ensemble" sont résumées dans [5] ,pages 5, 6 et 7.

Dans la suite de cet article, le mot "ensemble" dans son sens informel sera remplacé par le mot "collection", le terme "ensemble" étant réservé aux êtres mathématiques désignés par les formules d'un langage qui décrit les propriétés informelles des collections qui seront utilisées et qu'on propose de déterminer comme suit :

- on définit sur une collection $\{0,1\}$ de deux objets, une structure notée B_o et déterminée par les opérations +, . et $\urcorner$ définies par :

a) $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ et $1 + 0 = 0 + 1 = 1$

b) $0 \, . \, 0 = 0 \, . \, 1 = 0$ et $1 \, . \, 1 = 1$

c) $\urcorner(0) = 1$ et $\urcorner(1) = 0$

On appelera B_o , une <u>algèbre de Boole à deux éléments</u> .

- on se donne une suite de collections $<X_n>_{n \in N}$ et on construit une hyperstructure B définie par

$$B_1 = {}^{X_o}B_o \qquad B_{n+1} = {}^{X_n}B_n \qquad B = \bigcup_{n \in N} B_n$$

On peut choisir, en particulier, des X_n faciles à formaliser, par exemple : $X_n = N$ pour tout n .

- par des transports de structure de B_n dans B_{n+1} ($n = 0,1, \ldots$), on munit B d'une structure définie par deux opérations notées + et .

L'opération $\urcorner$ peut se définir à l'aide de l'addition à condition de définir l'application I par $\forall n \in N \; (I(n) = 1)$.

En effet, si $b \in B_1 = {}^N B_o$, on a :

$$\urcorner b(n) = b(n) + I(n) = 0 \text{ si } b(n) = 1 \text{ et } 1 \text{ si } b(n) = 0$$

Par des transports de structure successifs, on en déduit :

$$\forall b \in B \quad \urcorner b = b + I$$

L'algèbre B est une <u>algèbre de Boole sur une hyperstructure</u>.

L'algèbre B est aussi un <u>langage</u> qui peut être utilisé pour décrire les propriétés des collections . En effet :
soient X et Y, deux collections. On peut représenter les propriétés de $X \cap Y$ par $x.y$ avec $x,y \in B$, les termes x et y désignant respectivement X et Y.

De même, on vérifie que $X \cup Y$ peut être désigné par $x + y + x.y$, $X \subseteq Y$ ou $(\urcorner X) \cup Y$ par $x + xy + I$ (en notant $x.y$ par xy), $X - Y$ par $xy + x$, la collection vide $\emptyset$ par les applications de N dans B définies par transport de structure à partir de l'application o de N dans B_o telle que $\forall n \in N \quad o(n) = 0$

La relation d'appartenance notée ϵ est définie comme suit :
soient x et y, deux éléments de $B_{n+1} = {}^N B_n$ tels que $xy = x$. On écrira $a \in y$ si x est une application constante de N dans B_n et si a

est la valeur de x . Il résulte de cette définition que, si $z \in B_{n+1}$ $zx = z$, $z(n) = b \in x$, $x(n) = a \in z$, alors $b \in y$. On dira alors que B_{n+1} est un <u>ensemble transitif</u> et on appelera le langage B, une <u>algèbre de Boole transitive</u> .

- pour décrire une hyperstructure sur une collection quelconque X (collection des <u>individus</u> de l'hyperstructure), on choisit une algèbre B_n et on désigne chaque élément de X par une <u>constante</u> de B_n c'est-à-dire un signe représentant un élément de B_n. L'hyperstructure sur X est une sous algèbre de B close par rapport aux opérations de B.

Par exemple, on peut choisir comme collection X, les éléments de l'algèbre B_o . L'hyperstructure sur B_o est B.

- <u>Ensembles internes et ensembles externes</u> -

Si on se donne un ensemble I et un ultrafiltre G sur I, on peut définir une extension non standard $^*B$ de B par l'ultrapuissance B^I/G. On appelera <u>ensembles internes</u>, les éléments de $^*B - B_o^I/G$ et <u>individus</u> de $^*B$, les éléments de B_o^I/G notés $^*B_o$.

Si on construit une hyperstructure A (ou une superstructure A') sur $^*B_o$, on appelera <u>ensembles externes</u>, les éléments de A (ou de A') qui ne sont pas dans $^*B$. On peut vérifier qu'il existe des ensembles externes sur un exemple.

<u>Exemple</u> -

<u>Théorème 8</u> - L'ensemble B_f des éléments finis de l'extension $^*B$ de la structure B est un ensemble externe.

<u>Démonstration</u> - B_f <u>n'est pas fini</u> sinon il existe des éléments finis contenant B_f.

B_f n'est pas <u>infini</u> sinon il existe des éléments infinis contenus dans B_f

B_f n'étant ni fini, ni infini n'est pas un élément de $^*B$, donc B_f est un élément de $A - {^*B}$ ou $A' - {^*B}$ donc un <u>ensemble externe</u>.

Q.E.D.

Fin de la partie I

Partie II : to appear

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages cités :

Partie I :

[1] Bell J.L. and Slomson "Models and ultraproducts"
North Holland (1969)

[2] Hurt, Albert (Ed.) "Victoria Symposium on Non Standard Analysis"
Lecture Notes in Mathematics n° 369 Springer Verlag (1974)

[3] Luxembourg W.A.J. (Ed.) "Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability Theory"
Holt Rinehart and Winston (1969)

[4] Luxembourg W.A.J. (Ed.) "Contributions to Non Standard Analysis"
Studies in Logic North Holland (1972)

[5] Martin Davis "Applied Non Standard Analysis"
John Wiley (1977)

[6] Robinson Abraham "Non Standard Analysis"
Studies in Logic North Holland (1966)