INROADS Real Analysis Exchange Vol. 6 (1980-81)
Zbigniew Grande and Danuta Rzepka, Institute of Mathematics, Pedagogical University, Bydgoszcz, Poland

SUR LE PRODUIT DE DEUX DÉRIVÉES VECTORIELLES

Dans l'article [2] l'auteur a généralisé les théoremes de Iosifescu de l'article [4] étant certaines conditions suffisantes et nécessaires pour que le produit des dérivées de deux fonctions réelles d'une variable réelle soit de nouveau la fonction dérivée. La généralisation de [2] concerne des dérivées réelles de fonctions d'ensemble.

Dans le présent article nous généralisons les résultats de Iosifescu de [4] au produit scalaire de deux dérivées de fonctions d'ensemble admettant ses valeurs dans un espace complexe de Hilbert et au produit d'une dérivée complexe et d'une dérivée aux valeurs dans un espace complexe de Banach.

Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré de mesure σ-finie et complète. On appelle <u>base de différentiation</u> dans l'espace $(X,\mathcal{M},\mu)$ tout couple $(\Phi, \Rightarrow)$, où $\Phi\subset\mathcal{M}$ est une famille d'ensembles de mesure μ positive finie et $\Rightarrow$ désigne la convergence des suites (de Moore-Smith) d'ensembles de la famille Φ vers les points $x \in X$, definie de manière que deux conditions suivantes soient satisfaites:

(i) Il existe pour tout point $x \in X$ un ensemble dirigé T et une suite (de Moore-Smith) d'ensembles

$\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$ de la famile Φ qui est convergente au sens $\Rightarrow$ vers le point x.

(ii) Toute sous-suite cofinale d'une suite convergente vers un point $x \in X$ converge également vers ce point (v.[1],p.30) .

Fixons la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$ dans l'espace $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Soient Y un espace separable de Banach avec la norme $\|\cdot\|$ et $f: \Phi \to Y$ une fonction. Introduisons la designation suivante:

$a = \lim_{I\Rightarrow x} f(I)$, lorsque pour toute suite de Moore-Smith $\{I_\alpha\}_{\alpha\in T}$, convergente au sens $\Rightarrow$ vers le point x, on a $a = \lim_{\alpha\in T} f(I_\alpha)$.

Rappelons maintenant quelques notions dont nous ferons usage dans cet article (v.[1] et [3]).

Soit un ensemble μ-mesurable $A \subset X$ et le point x fixé, la borne supérieure (resp. inférieure), de l'ensemble de tous les nombres

$$\left\{ \limsup_{t\in T} \frac{\mu(A\cap I_t)}{\mu(I_t)} \right\} \qquad \left(\text{resp. } \left\{ \liminf_{t\in T} \frac{\mu(A\cap I_t)}{\mu(I_t)} \right\}\right),$$

pour toutes les suites de la forme $\{I_t\}_{t\in T}$, où $I_t \Rightarrow x$ est dite <u>densité supérieure</u> (resp. <u>inférieure</u>), de l'ensemble A au point x, relativement à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$. Si ces deux densités, supérieure et inférieure, sont égales, leur valeur commune s'appelle la densité tout court de l'ensembel A au point x, relativement à la même base de différentation. Dans le cas, où la densité en question est égale à 1, le point x est dit <u>point de densite</u> de l'ensemble A relativement à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$ et dans le cas apposé où la densité en ce point est nulle, il est dit <u>point de dispersion</u> de l'ensemble A relativement à la même base de différentiation.

Une fonction μ-mesurable $f:X\to Y$, qui est intégrable relativement à la mesure μ sur tout ensemble de la famile Φ, est dite fonction dérivée relative à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$ lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset Y$ tel que $f(x) \in U$, x est un point de densité de l'ensemble $f^{-1}(U)$ relativement à la base $(\Phi, \Rightarrow)$.

Soit $f: X\to Y$ une fonction intégrable relativement à la mesure μ. Un point $x \in X$ est dit <u>point de Lebesgue</u> de la fonction f lorsqu'on a l'egalité

$$\lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \|f(t) - f(x)\| \, d\mu(t) = 0. \qquad 1)$$

Soit maintenant $f: X\to Y$ une fonction telle que la fonction $\|f\|^2$ $(t\to\|f(t)\|^2)$ soit integrable relativement à la mesure μ. Un point $x \in X$ s'appelle <u>point de Lebesgue d'ordre deux</u> de la fonction f lorsqu' on

1) L'intégrale dont nous appliquons est l'intégrale de Bochner.

a l'egalité

$$\lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \|f(t) - f(x)\|^2 \, d\mu(t) = 0 .$$

<u>Lemme 1.</u> Soit f: $X \to Y$ une fonction μ-mesurable telle que $\|f\|^2$ est intégrable relativement à la mesure μ. Si un point $x \in X$ est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f, le point x est également un point de Lebesgue de la fonction f.

<u>Démonstration</u>. On a pour tout $I \in \Phi$

$$\int_I \|f(t) - f(x)\| d\mu(t) \le \sqrt{\mu(I)} \cdot \sqrt{\int_I \|f(t)-f(x)\|^2 d\mu(t)} ,$$

d'où il vient notre lemme.

<u>Théorème 1.</u> Soit f: $X \to Y$ une fonction μ-mesurable et bornee. Pour qu'un point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction f, il faut et il suffit qu'il soit un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de remarquer que

$$\int_I \|f(t)-f(x)\|^2 d\mu(t) \le 2M_f \int_I \|f(t)-f(x)\| d\mu(t) ,$$

où le nombre M_f satisfait à l'inégalité $\|f(t)\| \le M_f$ pour tout $t \in X$ et notre théorème résulte immédiatement du lemme 1.

<u>Théorème 2.</u> Soit f: $X \to Y$ une fonction μ-mesurable et bornee. Pour qu'un point $x \in X$ soit

un point de Lebesgue de la fonction f, il faut et il suffit que la fonction f soit approximativement, continue au point x relativement à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$.

<u>Démonstration</u>. Remarquons, d'abord, que la fonction f est approximativement continue an point x relativement à la base $(\Phi, \Rightarrow)$ si et seulement si le point x est un point de dispersion relativement, à cette base $(\Phi, \Rightarrow)$ de l'ensemble

$$E_\epsilon = \{t \in X ; \| f(t) - f(x) \| \geq \epsilon\}$$

quel que soit le nombre $\epsilon > 0$.

Désignons par M_f le nombre tel que $\|f(t)\| \leq M_f$ pour tout point $t \in X$.

Si la fonction f est approximativement continue au point x relativement à la base $(\Phi, \Rightarrow)$, on a

$$\frac{\int_I \|f(t)-f(x)\| d\mu(t)}{\mu(I)} \leq \epsilon + 2 \cdot \frac{\mu(E_\epsilon \cap I)}{\mu(I)} M_f ,$$

d'où il vient que x est un point de Lebesgue de la fonction f.

D'autre part, si x est un point de Lebesgue de la fonction f, alors on a

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{\int_{I \setminus E_\epsilon} \|f(t)-f(x)\| d\mu(t)}{\mu(I)} \leq \lim_{I \Rightarrow x} \frac{\int_I \|f(t)-f(x)\| d\mu(t)}{\mu(I)} = 0 .$$

De plus ,

$$\frac{\int_{E_\epsilon \cap I} \|f(t)-f(x)\| d\mu(t)}{\mu(I)} \geq \epsilon \cdot \frac{\mu(E_\epsilon \cap I)}{\mu(I)} ,$$

d'ou il vient que la fonction f est approximativement continue au point x relativement à la base $(\Phi, \Rightarrow)$.

I. LE PRODUIT SCALAIRE DE DEUX DÉRIVÉES.

Dans cette partie nous admettons que Y soit un espace complexe hilbertien separable.

Théorème 3. Si une fonction $f: X \to Y$ est bornee et approximativement continue au point $x \in X$ relativement à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$, la fonction f est une dérivée au point x relative à la même base $(\Phi, \Rightarrow)$.

Démonstration. D'après le théorème 2, le point x est un point de Lebesgue de la fonction f et par conséquent la fonction f est une derivee au point x relative à la base $(\Phi, \Rightarrow)$.

Theoreme 4. Soit $f: X \to Y$ une fonction μ-mesurable et telle que la fonction $\|f\|^2$ soit intégrable. Pour que les fonctions f et $\|f\|^2$ soient des dérivées, il faut et il suffit, que chaque point $x \in X$ soit un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f.

Démonstration. On a l'égalité

$$(1)\quad \frac{\int_I (\|f(t)\|^2 - \|f(x)\|^2)d\mu(t)}{\mu(I)} = \frac{\int_I (f(x)|f(t)-f(x))d\mu(t)}{\mu(I)} +$$

$$+ \frac{\int_I (f(t)-f(x)|f(x))d\mu(t)}{\mu(I)} + \frac{1}{\mu(I)} \int_I \|f(t)-f(x)\|^2 d\mu(t),$$

(où $f|g$ est le produit scalaire).

Si les fonction f et $\|f\|^2$ sont des dérivées, on a les égalités

$$(2)\quad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [f(t)-f(x)]d\mu(t) = 0 \quad ,$$

$$(3)\quad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [\|f(t)\|^2 - \|f(x)\|^2]d\mu(t) = 0$$

pour tout point $x \in X$. Les égalités (1), (2) et (3) entraînent

$$(3')\quad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I \| f(t)-f(x)\|^2 \, d\mu(t) = 0 \ ,$$

d'où x est un point de Lebesgue d' ordre deux de la fonction f.

D' autre part, si x est un point de Lebesgue d'ordre deux de la fonction f, x est également un point de Lebesgue de la fonction f et par consequent on a (2). Les egalites (1), (2) et (3') entraînent l'égalité (3), qui suffit pour que la fonction $\|f\|^2$ soit une dérivée.

<u>Théorème 5.</u> Soient $f: X\to Y$ et $g: X\to Y$ des dérivées bornées. Pour que le produit scalaire $(f|g)$ $[t\to(f(t)|g(t))]$ soit une dérivée, il suffit

que, quel que soit le point $x \in X$, au moins une de deux fonctions f et g soit approximativement continue à point x .

<u>Démonstration.</u> Soit $x \in X$. Supposons que la fonction f soit approximativement continue au point x. On a

$$(4) \quad \frac{1}{\mu(I)} \int_I [(f(t)|g(t)) - (f(x)|g(x))] \, d\mu(t) =$$

$$= \frac{1}{\mu(I)} \int_I (f(x)|[g(t) - g(x)]) \, d\mu(t) +$$

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_I ([f(t)-f(x)]|g(t)) d\mu(t)$$

Puisque la fonction g est une dérivée bornée, ainsi on a

$$(5) \quad \lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [g(t) - g(x)] \, d\mu(t) = 0 .$$

D'autre part, d'aprés le théorème 2, x est un point de Lebesgue de la fonction f. Alors,

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int \|f(t) - f(x)\| \, d\mu(t) = 0.$$

Il en résulte que

$$(6) \quad \lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \left| \int_I ([f(t)-f(x)]|g(t)) d\mu(t) \right| \leq$$

$$\leq \lim_{I \Rightarrow x} \frac{M_g}{\mu(I)} \int_I \|f(t)-f(x)\| d\mu(t) = 0 ,$$

où le nombre M_g est tel que $\|g(t)\| \leq M_g$ pour tout $t \in X$. De (4), (5) et (6) il résulte que

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [(f(t)|g(t))-(f(x)|g(x))]\, d\mu(t) = 0.$$

Ainsi la fonction $(f|g)$ est une dérivée au point x et le théorème 5 est demontré.

Théorème 6. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction bornée. Pour que le produit scalaire de la fonction f avec une fonction dérivée bornée soit une dérivée, il faut et il suffit que la fonction f soit approximativement continue relativement à la base de différentiation $(\Phi, \Rightarrow)$.

Démonstration. La suffisance de cette condition resulte des theoremes 4 et 5. Nous démontrerons sa nécessité. De l'égalité $(f|f)=\|f\|^2$ il résulte que la fonction $\|f\|^2$ est une dérivée. Puisque les fonctions $(f(x)|f(t))$ et $\|f(x)\|^2$ sont des dérivées (x étant fixé), on a

$$\frac{\int_I [\|f(t)\|^2 - \|f(x)\|^2]\, d\mu(t)}{\mu(I)} = \frac{\int_I (f(x)|(f(t)-f(x)))\, d\mu(t)}{\mu(I)} + $$
$$+ \frac{\int_I ((f(t)-f(x))|f(x))\, d\mu(t)}{\mu(I)} + \frac{1}{\mu(I)} \int_I \|f(t)-f(x)\|^2 d\mu(t)$$

et

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{\int_I [\,\|f(t)\|^2 - \|f(x)\|^2]\, d\mu(t)}{\mu(I)} = 0$$

et

$$\lim_{I\Rightarrow x}\frac{\int_I ((f(t)-f(x))|f(x))d\mu(t)}{\mu(I)} =$$

$$\lim_{I\Rightarrow x}\frac{\int_I (f(x)|(f(t)-f(x)))d\mu(t)}{\mu(I)} = 0$$

Il en résulte que

$$\lim_{I\Rightarrow x}\frac{1}{\mu(I)}\int_I \|f(t) - f(x)\|^2 d\mu(t) = 0$$

et d'aprés les théorèmes 1 et 2, on obtient notre théorème.

Théorème 7. Soient $f: X\to Y$ une dérivée bornée (relative à la base de differentiation $(\Phi, \Rightarrow)$) et $g: X\to Y$ une dérivée intégrable. Pour que le produit scalaire $(f|g)$ soit une dérivée il suffit que chaque point $x \in X$ soit un point de Lebesgue de la fonction g.

Démonstration. Soit $x \in X$ un point de Lebesgue de la fonction g. Alors

$$\lim_{I\Rightarrow x}\frac{1}{\mu(I)}\int_I \|g(t)-g(x)\| d\mu(t) = 0 .$$

Evidemment

$$(7)\quad \lim_{I\Rightarrow x}\frac{1}{\mu(I)}\left|\int_I (f(t)|g(t) - g(x))d\mu(t)\right| \le$$

$$\le \lim_{I\Rightarrow x}\frac{M_f}{\mu(I)}\int_I \|g(t) - g(x)\| d\mu(t) = 0 .$$

Puisque la fonction f est une dérivée bornée, alors on a

$$(8)\quad \lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [f(t) - f(x)]d\mu(t) = 0 .$$

De (7), (8) et de l'egalite

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_I [(f(t)|g(t)) - (f(x)|g(x))]d\mu(t) =$$

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_I ((f(t)-f(x))|g(x))d\mu(t)+$$

$$\frac{1}{\mu(I)} \int_I (f(t)|g(t)-g(x))d\mu(t) ,$$

puisque

$$\int_I ((f(t)-f(x))|g(x))d\mu(t) = (\int_I (f(t)-f(x))d\mu(t))|g(x)$$

il resulte que

$$\lim_{I\Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [(f(t)|g(t))-(f(x)|g(x))]d\mu(t) = 0 ,$$

ce qui termine la démonstration du théorème 7.

Supposons maintenant que $X = R^m$ (l'espace euclidien de m dimensions) et μ soit la mesure de Lebesgue. Soit Φ la famille de toutes les sphères de l'espace R^m et la convergence $\Rightarrow$ soit définie par la condition $K(x,r_n)\Rightarrow x$ ($K(x,r_n)=\{t\in R^m: \varrho(t,x)\leq r_n\}$, où ϱ designe la distance euclidienne dans l'espace R^m), lorsque la suite de nombres $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ est convergente vers 0.

Soit $f\colon R^m \to Y$ une fonction. Un point $x \in R^m$ est dit <u>point de Lipschitz</u> de la fonction f lorsqu'il existe des nombres positifs r_n et a tels que

$\|f(t) - f(x)\| \leq a[\varrho(t,x)]^m$ pour tout point $t \in K(x,r_n)$.

Théorème 8. Soient $f: X \to Y$ et $g: X \to Y$ des dérivées intégrables. Pour que le produit scalaire $(f|g)$ soit une dérivée il suffit que tout point $x \in X$ soit un point de Lipschitz de la fonction f.

Démonstration. Admettons que $x \in X$ est un point de Lipschitz de la fonction f. Alors il existe des nombres positifs a et r_n tels que

$\|f(t) - f(x)\| \leq a \cdot \varrho^m(t,x)$ pour tout $t \in K(x,r_n)$.

Puisque la fonction g est une dérivée, alors

$$(9) \quad \lim_{I \Rightarrow x} \frac{1}{\mu(I)} \int_I [g(t) - g(x)]\, d\mu(t) = 0 .$$

D'autre part, si $r < r_n$, alors

$$\frac{1}{\mu(K(x,r))} \left| \int_{K(x,r)} ((f(t)-f(x))|g(t))d\mu(t) \right| \leq$$

$$\frac{a \cdot \gamma^m}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} \| g(t) \| d\mu(t) \leq \frac{a}{K_1} \int_{K(x,r)} \|g(t)\| d\mu(t) \quad ,$$

$$(K_1 = \frac{\mu(K(x,r))}{r^m}) \quad .$$

Puisque l'intégralle de Lebesgue est continue, alors

$$(10)\quad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} ((f(t)-f(x))|g(t))d\mu(t) = 0 .$$

De (4), (9) et (10) on a

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(K(x,r))} \int_{K(x,r)} [(f(t)|g(t))-(f(x)|g(x))]d\mu(t) = 0 ,$$

ce qui achéve la démonstration.

Il résulte des théorèmes 7 et 8 le théorème suivant.

Théorème 9. Soient $f\colon R^m \to Y$ une dérivée bornée et $g\colon R^m \to Y$ une dérivée intégrable. Pour que le produit scalaire $(f|g)$ soit une dérivée, il suffit que tout point $x \in R^m$ soit un point de Lipschitz de la fonction f où bien un point de Lebesgue de la fonction g.

II. LE PRODUIT D'UNE DÉRIVÉE $f\colon X\to C$ ET D'UNE DÉRIVÉE $g\colon X\to Y$, OÙ Y EST UN ESPACE COMPLEXE SÉPARABLE DE BANACH.

Théorème 10. Soient $f\colon X\to C$ et $g\colon X\to Y$ des dérivées bornées. Pour que le produit $f\cdot g$ soit une dérivée, il suffit que, quel que soit le point $x \in X$, au moins une de deux fonctions f et g soit approximativement continue au point x.

La démonstration de ce théorème est analoque qui la demonstration du théorème 5.

Théorème 11. Soit $f\colon X\to C$ une fonction bornée.

Pour que le produit de la fonction f avec chaque fonction dérivée bornée $g: X \to Y$ soit une dérivée, il faut et il suffit que la fonction f soit approximativement continue.

<u>Démonstration.</u> La suffisance de cette condition résulte des théorèmes 3 et 10. Nous démontrerons sa nécessité. Fixons le point $x \in X$ et un élement $y_0 \in Y$ $(y_0 \neq 0)$ et remarquons que les fonctions $f \cdot y_0$, $\overline{f} \cdot y_0$ et $|f|^2 \cdot y_0$ ($\overline{f}(t)$ designe, comme d'habitude, le nombre conjugué à $f(t)$) sont des dérivées. Par conséquent

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{\int_I f(t) \cdot y_0 \, d\mu(t)}{\mu(I)} = f(x) \cdot y_0$$

et

$$\lim_{I \Rightarrow x} \frac{\int_I |f|^2(t) \cdot y_0 \, d\mu(t)}{\mu(I)} = |f|^2(x) \cdot y_0$$

et f et $|f|^2$ sont des dérivées.

La fonction f est donc d'apres le théorème 5, approximativement continue.

<u>Théorème 12.</u> Supposons que Y soit un espace complexe de Banach de dimension finie. Soit $g: X \to Y$ une fonction bornée. Pour que le produit $f \cdot g$ soit une dérivée pour chaque dérivée bornée $f: X \to C$, il faut et il suffit que la fonction g soit approximativement continue.

<u>Démonstration.</u> Comme Y est un espace de dimension

finie, il existe donc une base finie $e_1, e_2, \ldots,$ $\ldots, e_k$ dans cet expace et

$$g(x) = g_1(x)e_1 + \ldots + g_k(x)e_k \quad ,$$

où les fonctions g_i: $X \to C$. Remarquons que le produit $f \cdot g$ est une dérivée si et seulement si toutes les produits $f \cdot g_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ sont des dérivées. D'apres le theoreme 12 toutes les produits $f \cdot g_i$ ($i=1, 2, \ldots, k$ et f: $X \to C$ est une dérivée bornée) sont des dérivées si et seulement si les fonctions g_i $(i=1,2,\ldots,k)$ sont approximativement continues, ce qui est équivalent à la continuité approximative de la fonction g.

Problème. Le théorème 12 reste - t - il vrai, si l'espace Y sera un espace complexe, separable de Banach (ou même de Hilbert) de dimension infinie?

Théorème 13. Soient f: $X \to C$ une dérivée bornée (integrable) et g: $X \to Y$ une dérivée intégrable (bornée). Si tout point $x \in X$ est un point de Lebesgue de la fonction g (f), le produit $f \cdot g$ est egalement une dérivée.

La démonstration est analogue que la démonstration du théorème 7.

Theoreme 14. Soient f: $X \to C$ et g: $X \to Y$ des dérivées intégrables. Si tout point $x \in X$ est un point de Lipschitz de la fonction f ou bien g, le produit $f \cdot g$ est également une dérivée.

La démonstration est analogue que la démonstration du théorème 8.

Il resulte des théorèmes 13 et 14 le théorème suivant:

<u>Theoreme 15.</u> Soient $f\colon R^m \to C$ une dérivée bornée (intégrable) et $g\colon R^m \to Y$ une dérivée intégrable (bornée). Si tout point $x \in X$ est un point de Lipschitz (de Lebesgue) de la fonction f (g) ou bien un point de Lebesgue (de Lipschitz) de la fonction g (f), la fonction $f \cdot g$ est une dérivée.

Travaux cites

[1] A.M. Bruckner: Differentiation of integrals, Amer. Math. Monthly, 78/1971/,p.1-51.

[2] Z. Grande: Sur le produit de deux dérivées, Demonstration Mathematica, 9/1976/,p.321-332.

[3] Z. Grande: Sur un théorème de Nikodym, (sous presse).

[4] M. Iosifescou: Les conditions pour que le Produit de deux dérivées soit une dérivée (en russe), Revue Roum. Math. Pures et Appl. 4(1959), p.641-649.*

[5] W. Kolodziej: Analiza matematyczna, Warszawa PWN 1978.

Received April 2, 1980

*A translation of this article is available from the R.A.E.