TSUKUBA J. MATH.
Vol. 21 No. 3 (1997), 739–762

HYPOELLIPTICITÉ POUR UN CERTAIN OPÉRATEUR À CARACTÉRISTIQUE DOUBLE

Par

Tatsushi MORIOKA

§1. Introduction et Résultat

Nous considérons l'hypoellipticité d'un certain opérateur elliptique dégénéré en tenant compte de la relation entre sa partie principale et celle inférieure.

Avant d'énoncer le résultat, nous expliquons celui de Morimoto–Morioka [27], qui implique notre motivation. Dans [27], nous avons complètement caractérisé l'hypoelipticité de l'opérateur

(1) $$L = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_3^2 \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^3,$$

où $D_k = -i\partial/\partial x_k$. Nous avons donné la condition nécessaire et suffisante pour l'hypoellipticité de L comme ci-dessous. On fixe $I_0 \subset \boldsymbol{R}$ une intervalle ouverte. Pour une intervalle I et une fonction $h(x)$, on définit h_I par $h_I = (1/|I|)\int_I h$, où $|I|$ est la longeur de I. On dit que la condition (A.1) est vérifiée si

(A.1) $$f_I, g_I > 0 \text{ pour toute les intervalles } I \subset I_0.$$

On dit que la condition $(M; f, g)$ est vérifiée si

(M;f,g) $$\inf_{\delta>0} \sup\{(f_I)^{1/2}|I|\,|\log g_{3I}|: 3I \subset I_0, g_{3I} < \delta\} = 0.$$

Ici, $3I$ représente l'intervalle dont le centre est commun à celui de I et dont la longeur et trois frois plus grande que celle de I. On définit la condition $(M; g, f)$ en remplaçant mutuellement f et g dans la description de $(M; f, g)$. Nous avons obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME (Morimoto–Morioka [27, Théorème 1]). *On suppose* (A.1) *et que $f, g > 0$ sur ∂I_0. Alors, L est hypoelliptique dans $I_0 \times \boldsymbol{R}^2$ si et seulement si $(M; f, g)$ et $(M; g, f)$ sont vérifiées.*

Received January 22, 1996
Revised March 28, 1996

L'hypoellipticité de L a été étudiée par Hoshiro [7], Koike [14] et Wakabayashi-Suzuki [34, Exemple 5.1]. Ils ont toujours supposé que

$$f(t), g(t) > 0 \quad \text{lorsque } t \neq 0. \tag{H.1}$$

Par surcroit, ils ont donné les conditions nécessaires pour l'hypoellipticité de L en supposant (H.1) et que

$$tf'(t), \quad tg'(t) \geqq 0. \tag{H.2}$$

Pour ces résultats, on cite aussi [27, Remarque 1–3].

En revanche, [27, Théorème 1] ne suppose ni (H.1) ni (H.2). En effet, les hypothèses de [27, Théorème 1] admet le cas où la mesure de Lebesgue de $\{f = 0\}$ et de $\{g = 0\}$ est positive. Pour l'exemple de ce cas, on cite [27, Exemple 3.1]. Par surcroit, (A.1) est indispensable pour que L soit hypoelliptique.

À partir de [27, Théorème 1], nous étudions l'hypoellipticité de l'opérateur

$$P = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + D_3^2 + x_3^2 D_4^2 + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^4. \tag{2}$$

Le théorème suivant est notre résultat principal.

THÉORÈME. *On suppose* (A.1), *que* $f, g > 0$ *sur* ∂I_0 *et que* $g \leqq 1$. *Alors* P *est hypoelliptique dans* $I_0 \times \boldsymbol{R}^3$ *si et seulement si* $(M; 1, f)$ *et* $(M; f, g)$ *sont vérifiées.*

Remarquons le fait suivant. La condition $(M; f, g)$ devient moins stricte si f devient plus petite. Par exemple, supposons que $f(x_1) = x_1^{2k}$ et $g(x_1) = \exp(-|x_1|^{-\sigma})$. Alors, P est hypoelliptique si et seulement si $\sigma < k + 1$. Pour le moyen auquel on confirme $(M; f, g)$ à l'égard de cet exemple, on cite [7, Exemple 1] et [27, Remarque 1 et Théorème 5].

Nous écrivons les résultats connus qui concernent Théorème.

Au cas où $f \equiv 1$, Hoshiro [9] a montré que P etait hypoelliptique si g vérifiait (H.1) et $\lim_{t\to 0} t \log g(t) = 0$. En supossant (H.1) et (H.2), [9] a aussi montré que $\liminf_{t\to 0} |t \log g(t)| = 0$ si P etait hypoelliptique.

Wakabayashi–Suzuki [34, Exemple 5.2] a généralisé ce résultat [9]. Selon [34], P est hypoelliptique si f, g vérifient (H.1) et

$$\lim_{t\to 0} t \log f(t) = \lim_{t\to 0} t \log g(t) = 0. \tag{3}$$

L'idée principale de [34] est d'utiliser l'identité

$$((D_3^2 + x_3^2 D_4^2 - D_4)u, u) = \|(D_3 - ix_3 D_4)u\|^2,$$

à partir de laquelle on obtient

$$P \geqq D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_4. \tag{4}$$

En revanche, nous traduisons microlocalement P en l'opérateur

$$P_0 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_4 \quad \text{dans } \boldsymbol{R}^3 \tag{5}$$

en prenant la projection sur le premier espase propre de l'opérateur de Hermite. Cette idée provient de Boutet de Monvel [1], Grigis [4] et de Hoshiro [9]. Alors, on peut préciser l'hypoellipticité de P au moyen de [27, Théorème 1].

Nous expliquons la différence entre l'idée de [34] et nôtre. Afin de caractériser l'hyoellipticité de P, il faut considérer P_0 comme la partie principale de P. Soit $B = D_3^2 + x_3^2 D_4^2 - D_4$. Quant au (4), B représente la différence entre P et P_0. Puisque le degré de B est 2, B dissimule l'effet subtile de $g(x_1)D_4$. C'est la raison pour laquelle on ne pourrait obtenir que (3) à partir de (4). Pour la relation entre (3), (4) et l'hypoellipticité de P, on cite aussi Morimoto [21, Théorème 1 et Proposition 4]. En revanche, notre idée (5) nous permet de traiter P_0 comme la partie principale de P. Nous étudions (5) au §4.

Wakabayashi–Suzuki [34, Exemple 5.2] est déduit par [34, Théorème 4.9] qui représente un critère pour l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles. Malgré que les résultats de [34] soient applicables à l'hypoellpticité des opérateurs qui a été étudiée par [2], [7–10], [14], [19–22, 24, 25] et par [29], [27, Théorème 1] et Théorème montrent qu'il y a le cas où l'idée de [34] ne fonctionne pas bien afin de caractériser l'hypoellipticité.

Quant au [27, Théorème 1], l'idée principale est d'extrapoler Lemme de Sawyer qui a été montré par [31, Remarque 5]. Nous l'expliquons au §2. En tenant compte de [27, Théorème 1], [27, Théorème 8] a modifié [34. Théorème 4.9] et a aussi créé un critère pour l'hypoellipticité. Mais, il n'est pas applicable au Théorème. En effet, il faut supposer $(M; 1, f)$ et $(M; 1, g)$ pour l'hypoellipticité de P si on lui applique [27, Théorème 8].

Nous avons placé au §2: Lemme de Sawyer, au §3: les préliminaires, au §4: l'opérateur de Hermite, au §5: la réduction de notre problème, aux §6–§8: la démonstration de la suffisance pour l'hypoellipticité de P et au §9: celle de la nécessité.

Quant aux notations, on cite Hörmander [6, Index of Notation] pour $\mathscr{D}'$, $\mathscr{E}'$ et WF. $\hat{u}$ représente la transformation de Fourier de u. On note $\mathscr{S}$ l'espace des fonctions à décroissances rapides et on note $\mathscr{S}'$ celui des distributions tempérées. H^s est l'espace de Sobolev de degré s. On note $\| * \|_s$ le norme de H^s et $\| * \| =$

$\| * \|_0$. Pour $S^m_{\rho,\delta}$, on cite Kumano-go [15, page 54]. On dit que $A \in OPS^m_{\rho,\delta}$ si $\sigma(A) \in S^m_{\rho,\delta}$, où $\sigma(A)$ représente le symbole de A. Pour $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

§ 2. Lemme de Sawyer

Nous étudions l'idée principale du [27, Théorème 1]. La condition $(M; f, g)$ provient du lemme suivant qui a été montré par [31, Remarque 5]. Soit $I_0 \subset \boldsymbol{R}$ une intervalle ouverte.

LEMME S. *On suppose que* v, $w \in L^1_{loc}(I_0)$ *et que* v, $w \geqq 0$. *Alors, les descriptions suivantes* (i) *et* (ii) *sont équivalentes.*

(i). *Il existe une constance* $C > 0$ *telle que pour tout* $u \in C_0^\infty(I_0)$ *on a*

$$\int_{I_0} v|u|^2 \leqq C \int_{I_0} (|u'|^2 + w|u|^2).$$

(ii). *Il existe une constance* $A > 0$ *telle que pour toutes les intervalles* $I : 3I \subset I_0$ *on a*

$$v_I \leqq A(w_{3I} + 2|I|^{-2}).$$

Par surcroit, si A, C *sont les meilleures constances dans* (i) *et dans* (ii), *on a* $A \leqq C \leqq 100A$. □

Dans Lemme S, I_0 n'a pas besoin d'être bornée.

Soit L l'opérateur (1). Nous définissons la condition $(E; f, g)$ qui décide l'hypoellipticité de L.

DÉFINITION 2.1. *On dit que* f, g *vérifient* $(E; f, g)$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N > 0$ *telle que pour tout* $\eta \geqq N$ *et tout* $u \in C_0^\infty(I_0)$ *on a*

$$(\log\eta)^2 \int f|u|^2 \leqq \varepsilon \int (|u'|^2 + \eta^2 g|u|^2). \tag{E;f,g}$$

Selon [27, Lemme 3.1], Lemme S nous donne la relation entre $(M; f, g)$ et $(E; f, g)$ comme ci-dessous.

LEMME 2.2. *On suppose* (A.1). *Alors,* $(M; f, g)$ *équivaut à* $(E; f, g)$.

Dans [27, Proposition 4.], nous avons prouvé la proposition suivnte, qui concerne l'hypoellipticité de L.

Proposition 2.3. *On suppose* (A.1) *et que* $f, g > 0$ *sur* ∂I_0. *Alors,* L *est hypoelliptique dans* $I_0 \times \boldsymbol{R}^2$ *si et seulement si* $(E; f, g)$ *et* $(E; g, f)$ *sont vérifiées.*

[27, Théorème 1] est déduit par la combinaison de Lemme 2.2 et Proposition 2.3. La condition $(E; f, g)$ provient de Hoshiro [7, Proposition 3.1] qui a étudié l'hypoellipticité de L en supposant (H.1). Dans la démonstration de Théorème, nous traduisons $(M; f, g)$ à $(E; f, g)$ au moyen de Lemme 2.2.

§ 3. Préliminaires

À partir de cette section, on commance la démonstration de Théorème.

D'abord, on montre que (A.1), $(M; 1, f)$ et $(M; f, g)$ sont suffisantes pour que P soit hypoelliptique. La proposition suivante réduit le problème à l'égard de l'analyse microlocale.

Proposition 3.1. *Soit* P *l'opérateur* (2) *qui vérifie* (A.1), $(M; 1, f)$ *et que* $g \leqq 1$. *Soit* $U \subset I_0 \times \boldsymbol{R}^3$ *un ensemble ouvert. On suppose que* $u \in \mathscr{D}'$ *et que* $Pu \in C^\infty(U)$. *Soit* $\rho \in T^*\boldsymbol{R}^4 \backslash 0$, $\rho = (t, \tau) \in \boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{R}^4 \backslash 0$ *avec* $|\tau| = 1$. *Alors,* $\rho \notin WFu$ *si* $t \in U$ *et* $\tau \neq (0, 0, 0, 1)$.

Démonstration de Proposition 3.1. On ne considére que le cas où $\tau = (0, \pm 1, 0, 0)$. Car, P est microlocalement elliptique ou sous-elliptique au voisinage conique de τ si $\tau \neq (0, \pm 1, 0, 0)$ et $\tau \neq (0, 0, 0, 1)$. Soit $A = D_1^2 + f(x_1) D_2^2$ et soit Γ un voisinage conique de τ. Selon Lemme S, $(M; 1, f)$ équivaut á $(E; 1, f)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C > 0$ telle que pour tout $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$; supp $\hat{u} \subset \Gamma$ on a

$$\|(\log \Lambda) u\|^2 \leqq \varepsilon \, Re(Au, u)_{L^2} + C\|u\|^2, \tag{3.1}$$

où $\sigma(\log \Lambda) = \log((2 + |\xi|^2)^{1/2})$. Puisque $(Au, u) \leqq (Pu, u)$, on obtient aussi (3.1) en remplaçant A par P. Alors, $\rho \notin WFu$ est la conclusion déduite par [21] ou par [27, Théorème 8]. □

On décrit alors le lemme suivant qui sera utilisé au § 5.

Lemme 3.2. *Soit* $u \in \mathscr{D}'$ *mentionée dans Proposition* 3.1. *Alors, il existe* $N > 0$ *telle que pour tout* $\varphi \in C_0^\infty(U)$ *on a* $\langle D_4 \rangle^{-N}(\varphi u) \in L^2(\boldsymbol{R}^4)$.

Démonstration de Lemme 3.2. Puisque $\rho \notin WFu$ si $t \in U$ et $\tau \neq (0, 0, 0, 1)$, on obitent immédiatement la conclusion. □

§ 4. Opérateur de Hermite

On définit $h_j(t) : j = 0, 1, 2 \dots$ par

$$(4.1) \qquad h_j(t) = \pi^{-1/4}(2^j j!)^{-1/2}\left(\frac{d}{dt} - t\right)^j \exp(-t^2/2).$$

h_j est la j-ème fonction propre de l'opérateur de Hermite $L = -(d/dt)^2 + t^2$. En effet, on a $Lh_j = (2j+1)h_j$ et $\|h_j\| = 1$. On définit $\varphi(t;\eta)$ par $\varphi(t;\eta) = |\eta|^{1/4}h_j(t|\eta|^{1/2})$. Alors, $\varphi(t;\eta)$ est la j-ème fonction propre de l'opérateur de Hermite à paramétre $\eta : L_\eta = -(d/dt)^2 + t^2\eta^2$.

Soit $\phi(\eta) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, $0 \leqq \phi \leqq 1$, $\phi(\eta) = 1$ lorsque $|\eta| \geqq 2$ et $\phi(\eta) = 0$ lorsque $|\eta| \leqq 1$. On définit $H_j : \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^3) \to \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$ par

$$(4.2) \qquad (H_j v)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2\pi)^{-1/2}\int e^{ix_4\xi_4}\phi(\xi_4)\varphi(x_3;\xi_4)\hat{v}(x_1, x_2;\xi_4)\,d\xi_4$$

où $\hat{v}$ est la transformation de Fourier de $v(x_1, x_2, x_4)$ par rapport á x_4. On définit $H_j^* : \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4) \to \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^3)$, qui est adjoint de H_j, par

$$(4.3) \qquad (H_j^* v)(x_1, x_2, x_4) = (2\pi)^{-1/2}\iint e^{ix_4\xi_4}\phi(\xi_4)\varphi(y;\xi_4)\hat{v}(x_1, x_2, y;\xi_4)\,dy\,d\xi_4$$

On définit $H_j : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$ et $H_j^* : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$ par $(H_j v, \psi)_4 = (v, H_j^*\psi)_3$ pour $v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$, $\psi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$ et $(H_j^* u, \psi)_3 = (u, H_j\psi)_4$ pour $u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$, $\psi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^3)$, Ici, $(\ ,\ )_k$ représente la multiplication à l'égard de $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^k) \times \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^k)$. On définit $\Pi_j : \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$ par $\Pi_j = H_j H_j^*$.

On décrit la proposition suivante, qui concerne la propriété de l'opérateur de Hermite et dont la démonstration Hoshiro [9, Proposition 1] a donné en citant Grigis [4, Section III. 3] et Hörmander [6, Théorème 8.1.9]. Ici, [6] concerne la description (v) dans la proposition.

PROPOSITION 4.1.
(i) *Pour tout* $u \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$ *on a*

$$(\Pi_j u)(x) = \int e^{ix\xi}\sigma(\Pi_j)(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi,$$

où $\sigma(\Pi_j)(x,\xi) = i^j\phi(\xi_4)^2 h_j(x_3|\xi_4|^{1/2})h_j(\xi_3/|\xi_4|^{1/2})\exp(-ix_3\xi_3)$.

Par surcroit, pour tout α, β *il existe une constance* $C_{\alpha,\beta}$ *telle que*

$$|\sigma(\Pi_j)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi_3,\xi_4\rangle^{-|\alpha|/2+|\beta|/2},$$

où $r^{(\alpha)}_{(\beta)} = \partial^\alpha_\xi D^\beta_x r$.

(ii) *Pour tout* $u \in L^2(\boldsymbol{R}^4)$, *on a* $\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j u = \phi(D_4)^2 u$ *dans* $L^2(\boldsymbol{R}^4)$.

(iii) *Pour tout* j, k, *on a* $H_j^* H_k = \delta_{jk}\phi(D_4)^2$ *dans* $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$.

(iv) *On définit* P_j *par*

$$P_j = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + (2j+1)|D_4| + (g(x_1) - 1)D_4 \quad \textit{dans } \boldsymbol{R}^3.$$

Alors, on a $PH_j = H_j P_j$ *dans* $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$ *et* $H_j^* P = P_j H_j^*$ *dans* $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$.

(v) *Soit* $y = (x_1, x_2, x_4)$ *et* $\eta = (\xi_1, \xi_2, \xi_4)$. *On définit* $J(y, \eta)$ *par*

$$J(y, \eta) = (x_1, x_2, 0, x_4; \xi_1, \xi_2, 0, \xi_4).$$

Alors, pour tout $u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$ *et tout* $v \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$ *on a*

$$WF(H_0 v) \subset \{J(y, \eta) \in T^*\boldsymbol{R}^4 \backslash 0 : (y, \eta) \in WFv\},$$

$$WF(H_0^* u) \subset \{(y, \eta) \in T^*\boldsymbol{R}^3 \backslash 0 : J(y, \eta) \in WFu\}.$$

La combinaison de Proposition 2.1 et Proposition 4.1 nous implique la proposition suivante, qui représente l'idée principale de Théorème.

Proposition 4.2. *Soit* P *l'opérateur* (2) *qui vérifie* (A.1), $(M, 1, f)$ *et* (M, f, g). *Soit* $U \subset I_0 \times \boldsymbol{R}^3$ *un ensemble ouvert. On suppose que* $u \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R})^4$ *et* $Pu \in C^\infty(U)$. *Soit* $\rho \in T^*\boldsymbol{R}^4 \backslash 0$, $\rho = (t, \tau) \in \boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{R}^4 \backslash 0$ *avec* $t \in U$ *et* $\tau = (0, 0, 0, 1)$. *Alors, on a* $\rho \notin WF(\Pi_0 u)$.

Démonstration de Proposition 4.2. Soit $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. On choisit une intervalle ouverte I_1; $t_3 \in I_1$ et un ensemble ouvert $U_1 \subset \boldsymbol{R}^3$ tel que $\{x : x_3 \in I_1, (x_1, x_2, x_4) \in U_1\} \subset U$. Selon l'hypothèse $Pu \in C^\infty(U)$ et Proposition 4.1-(v), on a $H_0^* Pu \in C^\infty(U_1)$. Selon Proposition 4.1-(iv), on a $P_0(H_0^* u) \in C^\infty(U_1)$. On définit $\tilde{\rho} \in T^*\boldsymbol{R}^3 \backslash 0$ par $\tilde{\rho} = (t_1, t_2, t_4; 0, 0, 1)$. Au voisinage de $\tilde{\rho}$, on a

$$P_0 = D_1^2 + f(x_1)D_2^2 + g(x_1)D_4.$$

Selon Lemme 2.2, (M, f, g) équivaut à (E, f, g). Alors, la démonstration de [27, Proposition 4] nous lesse savoir que $\tilde{\rho} \notin WF(H_0^* u)$. Selon Proposition 4.1-(v), on obtient $\rho \notin WF(\Pi_0 u)$. □

§5. Réduction du problème

Notre objectif est de prouver la proposition suivante, qui réduit notre problème.

PROPOSITION 5.1. *Soit P l'opérateur* (2) *qui vérifie* (A.1), $(M, 1, f)$ *et que* $g \leqq 1$. *Soit* $U \subset I_0 \times \boldsymbol{R}^3$ *un ensemble ouvert. Soit* $\rho \in T^*\boldsymbol{R}^4 \backslash 0$, $\rho = (t, \tau) \in \boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{R}^4 \backslash 0$ *avec* $t \in U$ *et* $\tau = (0,0,0,1)$. *On suppose les hypothèses suivantes* (a)–(c).

(a) $u \in \mathscr{E}'(\boldsymbol{R}^4)$ *et* $Pu \in C^\infty(U)$.

(b) *Pour tout* $t \in U$, *on a* $\rho \notin WF(\Pi_0 u)$.

(c) *Il existe* $N > 0$ *telle que* $\langle D_4 \rangle^{-N} u \in L^2(\boldsymbol{R}^4)$.

Alors, $u \in C^\infty(U)$.

En admettant provisoirement cette proposition, on montre que P est hypoelliptique sous les conditions (A.1), $(M, 1, f)$ et (M, f, g). Soit $V \subset I_0 \times \boldsymbol{R}^3$ un ensemble ouvert. On suppose que $w \in \mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^4)$ et $Pw \in C^\infty(V)$. On donne $t \in V$. Choisissons un ensemble ouvert U tel que $t \in \bar{U} \subset V$. Soit $\phi \in C_0^\infty(V)$; $\phi = 1$ au voisinage de $\bar{U}$. On définit $u \in \mathscr{E}'(\boldsymbol{R}^4)$ par $u = \phi w$. Alors, (a) est vérifiée. Selon Proposition 4.2, (b) est vérifiée. Selon Lemme 3.2, (c) est vérifiée. Donc, $w \in C^\infty(U)$ et la démonstration est terminée.

On divise $\boldsymbol{R}^4$ en 3 domaines afin de prouver Proposition 5.1. On définit

$$\Gamma_1 = \{\xi \in \boldsymbol{R}^4 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqq 4|\xi_4|\},$$

$$\Gamma_2 = \{\xi \in \boldsymbol{R}^4 : \xi_1^2 + \xi_3^2 \geqq 2(\xi_2^2 + |\xi_4|)\},$$

$$\Gamma_3 = \{\xi \in \boldsymbol{R}^4 : \xi_1^2 + \xi_3^2 + |\xi_4| \leqq 11\xi_2^2\},$$

Alors, $\boldsymbol{R}^4 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

PROPOSITION 5.2. *Soit P l'opérateur* (2) *qui vérifie* (A.1) *et que* $g \leqq 1$. *On suppose que u vérifie les hypothèse* (a)–(c) *de Proposition* 5.1. *Alors, on obtient les conclusions suiventes* (i) *et* (ii).

(i) *Pour tout* $m > 0$ *et tout* $\varphi \in C_0^\infty(U)$ *on a*

$$\int_{\Gamma_1} |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m} \, d\xi < \infty.$$

(ii) *Pour tout* $m > 0$ *et tout* $\varphi \in C_0^\infty(U)$ *on a*

$$\int_{\Gamma_2} |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m} \, d\xi < \infty.$$

PROPOSITION 5.3. *On suppose que P vérifie* (A.1), $(M, 1, f)$ *et que* $g \leqq 1$. *On suppose aussi l'hypothèse* (a) *de Proposition* (5.1) *et que*

$$\text{(d)} \qquad \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} |\widehat{\psi u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m} \, d\xi < \infty$$

pour tout $m>0$ et tout $\psi \in C^\infty(\boldsymbol{R}^4)$. *Alors, pour tout* $m>0$ *et tout* $\varphi \in C_0^\infty(U)$ *on a*

$$\int_{\Gamma_3} |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m} d\xi < \infty.$$

Proposition 5.1 est déduite par Propositions 5.2 et 5.3. À partir de la section suivante, on donnera la démonstration de Propositions 5.2 et 5.3.

§ 6. Démonstration de Proposition 5.2-(i)

L'argument dans cette section est essenciellement due à Boutet de Monvel [1], Grigis [4] et à Hoshiro [9].

D'abord, on décrit Théorème C, qui a été donné par Cardelon–Vaillancourt et pour lequel on cite Kumano-go [15, page 224].

Pour $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\boldsymbol{R}^n)$, on définit son l-em seminorme $|p|_l^{(m)}$ par

$$|p|_l^{(m)} = \sup\{p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)|/\langle \xi \rangle^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} : (x,\xi) \in \boldsymbol{R}^{2n}, |\alpha+\beta| \leqq l\}.$$

THÉORÈME C. *On suposse que* $\delta \leqq \rho$ *et que* $\delta < 1$. *On donne* s *et* m. *Alors, il existe des constances* $l(s, s+m)$ *et* $C_{s,m}$ *telles que pour tout* $A \in OPS^m_{\rho,\delta}$ *et tout* $u \in \mathscr{S}$ *on a*

$$\|Au\|_s \leqq C_{s,m} |\sigma(A)|^{(m)}_{l(s,s+m)} \|u\|_{s+m}. \tag{6.1}$$

Avant de commencer la démonstration de Proposition 5.2-(1), remarquons le fait suivant. Selon Proposition 3.1, il nous suffit de prouver Proposition 5.2-(i) en remplaçant Γ_1 par $\Gamma_1 \cap \{\xi_4 > 0\}$. Soit P_j l'opérateur mentionée dans Proposition 4.1-(iv). Lorsque $\xi_4 > 0$, on a

$$P_j = D_1^2 + f(x_1) D_2^2 + (2j + g(x_1)) D_4. \tag{6.2}$$

On commence la démonstration de Proposition 5.2-(i) en construisant microlocalement la paramétrix de chaque P_j; $j \geqq 1$.

On écrit $\sigma(P_j^N)$ par la somme des parties semihomogènes:

$$\sigma(P_j^N) = \sum_{k=0}^{2N} a_{k,j}, \tag{6.3}$$

où $a_k(x_1; t\xi_2, t\xi_2, t^2\xi_4) = t^k a_k(x_1; \xi_1, \xi_2, \xi_4)$ pour tout $t > 0$ et N est un nombre qui sera convenablement précisé.

Soit $\varphi_0 \in C^\infty(\boldsymbol{R}\backslash 0)$: $0 \leqq \varphi_0 \leqq 1$, $\varphi_0 = 1$ lorsque $0 \leqq t \leqq 7$ et $\varphi_0 = 0$ lorsque $t \geqq 8$ ou $t < 0$. Soit $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \xi_4)$. On définit $\psi(\xi')$ par

$$\psi(\xi') = \varphi_0((\xi_1^2 + \xi_2^2)/\xi_4)(1 - \varphi_0(|\xi|^2)). \tag{6.4}$$

On définit $\{r_{-2N-\nu}(x_1, \xi')\}_{\nu=0}^{\infty}$ consécutivement par

$$r_{-2N,j} = \psi/a_{2N,j}, \tag{6.5}$$

$$r_{-2N-\nu,j}a_{2N,j} + \sum_E (r_{-2N-l,j})^{(\alpha)}(a_{2N-m,j})_{(\alpha)}/\alpha! = 0, \tag{6.6}$$

où $E = \{(l, m, \alpha): l + m + |\alpha| = \nu, l < \nu \text{ et } \nu \geqq 1\}$.

On fait désormais C représenter des positives constances qui sont indépendantes de j.

Selon la définition, on a

$$|(a_{k,j})_{(\beta)}^{(\alpha)}(x_1, \xi')| \leqq C(j+1)^{k/2}\langle \xi' \rangle^{k/2 - |\alpha|/2}; \quad j \geqq 1 \tag{6.7}$$

pour tout $\xi' \in \operatorname{supp} \psi$. Selon (6.5)–(6.7), on a

$$|(r_{-2N-\nu,j})_{(\beta)}^{(\alpha)}(x_1, \xi')| \leqq C(j+1)^{-N-\nu/2}\langle \xi' \rangle^{-N-\nu/2-|\alpha|/2}. \tag{6.8}$$

On définit $q_j(x_1, \xi')$ par

$$q_j = \sum_{\nu=0}^{k} r_{-2N-\nu,j}, \tag{6.9}$$

où k est un nombre qui sera cenvenablement présisé. Selon (6.8) et (6.9), on a $q_j \in S_{1/2,0}^{-N}(\boldsymbol{R}^3)$. Par surcroit,

$$|(q_j)_{(\beta)}^{(\alpha)}(x_1, \xi')| \leqq C(j+1)^{-N}\langle \xi' \rangle^{-N-|\alpha|/2}. \tag{6.10}$$

On définit $Q_j \in S_{1/2,0}^{-N}(\boldsymbol{R}^3)$ et $\Psi_0 \in S_{1/2,0}^{0}(\boldsymbol{R}^3)$ par $Q_j = q_j(x_1, D')$ et $\Psi_0 = \psi(D')$, où $D' = (D_1, D_2, D_4)$. On définit K_j par

$$Q_j P_j^N = \Psi_0 + K_j. \tag{6.11}$$

LEMME 6.1. *$K_j \in OPS_{1/2,0}^{-k}(\boldsymbol{R}^3)$. Par surcroit,*

$$|\sigma(K_j)_{(\beta)}^{(\alpha)}(x_1, \xi')| \leqq C(j+1)^{-k}\langle \xi' \rangle^{-k-|\alpha|/2}. \tag{6.12}$$

DÉMONSTRATION DE LEMME 6.1. Selon (6.5), (6.6) et (6.11), on a

$$\sigma(K_j)(x_1,\xi') = \sum_{l+m \geqq 2k} \sigma(r_{-2N-l,j} \circ a_{2N-m,j})(x_1,\xi')$$
$$+ \sum_{l+m<2k} \sum_{|\gamma|=2k-l-m} |\gamma| \int_0^1 (1-\theta)^{|\gamma|-1} \omega_{\gamma,l,m}(\theta)\, d\theta/\gamma!$$

où $(r \circ a)(x_1, D') = r(x_1, D')a(x_1, D')$ et

$$\omega_{\gamma,l,m}(\theta) = Os \iint e^{-iy\eta}(r_{-2N-l,j})^{(\gamma)}(x_1,\xi'+\theta\eta')(a_{2N-m,j})_{(\gamma)}(x_1+y_1,\xi')\, dy'\, d\eta'.$$

Selon (6.7) et (6.8), on obtient la conclusion. □

Pour l'intégral oscillante, on cite Kumano-go [15, page 45].

On définit B_j et E_j par $B_j = H_j Q_j H_j^*$ et $E_j = H_j K_j H_j^*$. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

LEMME 6.2. *$B_j \in OPS^{-N}_{1/2,1/2}(\boldsymbol{R}^4)$ et $E_j \in OPS^{-k}_{1/2,1/2}(\boldsymbol{R}^4)$. Par surcroit,*

$$|\sigma(B_j)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x_1,\xi)| \leqq C(j+1)^{-N+1+\alpha_3+\alpha_4+\beta_3}\langle\xi\rangle^{-N-|\alpha|/2+\beta_3/2}, \tag{6.13}$$

$$|\sigma(E_j)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x_1,\xi)| \leqq C(j+1)^{-k+1+\alpha_3+\alpha_4+\beta_3}\langle\xi\rangle^{-k-|\alpha|/2+\beta_3/2} \tag{6.14}$$

DÉMONSTRATION DE LEMME 6.2. Rappelons-nous Proposition 4.1-(i). Alors, on a

$$\sigma(B_j) = \sigma(Q_j)(x_1,\xi')\sigma(\Pi_j)(x_3;\xi_3,\xi_4), \tag{6.15}$$

$$\sigma(E_j) = \sigma(K_j)(x_1,\xi')\sigma(\Pi_j)(x_3;\xi_3,\xi_4). \tag{6.16}$$

Notons que

$$|t^m h_j^{(n)}(t)| \leqq C(j+1)^{1+m+n}. \tag{6.17}$$

Selon (6.10), (6.12) et (6.15)–(6.17), on obtient la conclusion. □

Pour (6.17), on cite Folland [3, Chapitre 1–§7].

On définit $\Psi\colon \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4) \to \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$ par $\Psi = \psi(D)$. Alors, on a

$$H_j \Psi_0 w = \Psi H_j w \tag{6.18}$$

pour tout $w \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3)$. Selon (6.11), (6.18) et Proposition 4.1-(iv), on a

$$B_j P^N = \Psi \Pi_j + E_j \tag{6.19}$$

dans $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$.

On déduit désormais Proposition 5.2-(i). On fixe $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Selon (6.19), on a

$$\varphi B_j P^N u = \varphi \Psi \Pi_j u + \varphi E_j u. \tag{6.20}$$

On définit Π_* par $\Pi_* = \phi(D_4)^2 - \Pi_0$. On donne $m > 0$ et on montre que

$$\varphi \Psi \Pi_* u \in H^m. \tag{6.21}$$

Puisque $u \in \mathscr{E}'$, il existe $s > 0$ telle que $u \in H^{-s}$. Choisissons N et k pour que

$$\begin{cases} N \geqq \max\{m, l(m,0) + 15\} \\ k \geqq \max\{s + m, l(m,-s) + 3\} \end{cases} \tag{6.22}$$

où $l(\ ,\ )$ est la valeur décidée par (6.1). On prend la somme de chaque terme de (6.20) de $j = 1$ à $j = \infty$.

LEMME 6.3.

(i) $\sum_{j=1}^\infty \|E_j u\|_m < \infty$ *et* (ii) $\sum_{j=1}^\infty \|\varphi B_j P^N u\|_m < \infty$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 6.3. (i) Selon Théorème C, on a $\|E_j u\|_m \leqq C|\sigma(E_j)|_{l(m,-s)}^{(-s-m)} \|u\|_{-s}$. Selon (6.14) et (6.22), on a $|\sigma(E_j)|_{l(m,-s)}^{(-s-m)} \leqq C(j+1)^{-2}$. Donc, on obtient la conclusion.

(ii) Soit $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$ qui vérifie $\varphi \Subset \varphi_1$, i.e., $\{\varphi_1 = 1\}$ est plus grand que certain ensemble ouvert qui contient supp φ. On définit φ_2 par $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$. Alors, on a

$$\|\varphi B_j P^N u\|_m \leqq \|\varphi B_j(\varphi_1 P^N u)\|_m + \|\varphi B_j(\varphi_2 P^N u)\|_m. \tag{6.23}$$

Lemme 6.3-(ii) est déduit par le lemme suivant. □

LEMME 6.4.

(i) $\sum_{j=1}^\infty \|B_j(\varphi_1 P^N u)\|_m < \infty$ et (ii) $\sum_{j=1}^\infty \|\varphi B_j(\varphi_2 P^N u)\|_m < \infty$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 6.4. (i) Puisque $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$, on a $\varphi_1 P^N u \in C_0^\infty(U)$. Selon Théorème C, on a

$$\|B_j(\varphi_1 P^N u)\|_m \leqq C|\sigma(B_j)|_{l(m,0)}^{(-m)} \|\varphi_1 P^N u\|_0.$$

Selon (6.13) et (6.22), on a $|\sigma(B_j)|_{l(m,0)}^{(-m)} \leqq C(j+1)^{-2}$. Donc, on obtient la conclusion.

(ii) On définit $R_j \in OPS^{-\infty}$ par $R_j w = \varphi B_j(\varphi_2 w)$ pour $w \in \mathscr{S}$. Alors, on a

$$\varphi B_j(\varphi_2 P^N u) = R_j(P^N u).$$

Soit $b_j = \sigma(B_j)$. Selon la définition, on a

$$\sigma(R_j)^{(\alpha)}_{(\beta)} = \sum_{\gamma+\nu=\beta} A_{\gamma,\nu} I_{\gamma,\nu}$$

où chaque $A_{\gamma,\nu}$ est constance et

$$I_{\gamma,\nu} = Os \iint e^{-iy\eta} D_x^\gamma[\varphi(x)\varphi_2(x+y)](b_j)^{(\alpha)}_{(\nu)}(x, \xi+\eta)\, dy\, d\eta. \tag{6.26}$$

Choisissons M, L telles que $2M \geqq N + s + m - 6$ et que $2L \geqq \max(5, -(N+2M+1) + \beta_3/2)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} I_{\gamma,\nu} = \iint & e^{-iy\eta} \langle D_y\rangle^{2L} [\gamma_M(y) D_x^\gamma[\varphi(x)\varphi_2(x+y)]] \\ & \times \langle\eta\rangle^{-2L} (b_j)^{(\mu)}_{(\nu)}(x_1, \xi+\eta)\, dy\, d\eta, \end{aligned} \tag{6.27}$$

où $\gamma_M(y) = (y_1^{2M} + y_2^{2M} + y_3^6 + y_4^6)^{-1}$ et $\mu = \alpha + (2M, 2M, 6, 6)$. Puisque $\varphi \Subset \varphi_1$, la fonction $\gamma_M(y) D_x^\gamma[\varphi(x)\varphi_2(x+y)]$ est bien définie. Selon (6.15), on a

$$|(b_j)^{(\mu)}_{(\nu)}(x_1, \xi)| \leqq C(j+1)^{-N+13+\alpha_3+\alpha_4+\beta_3} \langle\xi\rangle^{-2N-s-m-|\alpha|/2+\beta_3/2}. \tag{6.28}$$

Donc, on obtient

$$|\sigma(R_j)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x_1, \xi)| \leqq C(j+1)^{-N+13+\alpha_3+\alpha_4+\beta_3} \langle\xi\rangle^{-2N-s-m-|\alpha|/2+\beta_3/2}. \tag{6.29}$$

On définit $G_j \in OPS^{-m}_{1/2,1/2}(\boldsymbol{R}^4)$ et $w \in H^0$ par $G_j = R_j \langle D_x\rangle^{s+2N}$ et $w = \langle D_x\rangle^{-s-2N} P^N u$. Selon Théorème C, on a

$$\|R_j P^N u\|_m = \|G_j w\|_m \leqq C|\sigma(G_j)|^{(-m)}_{l(m,0)} \|w\|_0. \tag{6.30}$$

Selon (6.22) et (6.29), on a $|\sigma(G_j)|^{(-m)}_{l(m,0)} \leqq C(j+1)^{-2}$. Donc, on obtient la conclusion. □

Lemme 6.5. *$\sum_{j=1}^\infty \Pi_j u = \Pi_* u$ dans $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$.*

Démonstration de Lemme 6.5. On définit T_k par $T_k = \sum_{j=1}^k \Pi_j$. Selon l'hypothèse (c) de Proposition 5.1, il existe $N > 0$ telle que $\langle D_4\rangle^{-N} u \in H^0$. Soit $\psi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R}^4)$. Puisque $[T_k, \langle D_4\rangle] = 0$ sur $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$, on a $(T_k u, \psi) = (T_k \langle D_4\rangle^{-N} u,$

$\langle D_4\rangle^N\varphi)$. Selon Proposition 4.1-(ii), on a

$$\lim_{k\to\infty}(T_k u, \psi) = (\Pi_*\langle D_4\rangle^{-N}u, \langle D_4\rangle^N\psi) = (\langle D_4\rangle^{-N}\Pi_* u, \langle D_4\rangle^N\psi) = (\Pi_* u, \psi),$$

où on a utilisé le fait que $[\Pi_*, \langle D_4\rangle] = 0$ sur $\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^4)$. Donc, on obtient la conclusion. □

Selon Lemme 6.3, Lemme 6.5 et (6.20), on obtient (6.21). Donc, on a

$$\varphi\Psi\Pi_* u \in C_0^\infty. \tag{6.31}$$

Soit $\varphi_3 \in C^\infty(\boldsymbol{R}\backslash 0) : 0 \leqq \varphi_3 \leqq 1$, $\varphi_3(t) = 1$ lorsque $0 \leqq t \leqq 5$, $\varphi_3(t) = 0$ lorsque $t \geqq 6$ ou $t < 0$. On définit $\psi_1(\xi)$ par

$$\psi_1(\xi) = \varphi_3((\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)/\xi_4))(1 - \varphi_3(|\xi|^2)).$$

On définit Ψ_1 par $\Psi_1 = \psi_1(D)$. Selon (6.31), on a

$$\Psi_1(\varphi\Pi_* u) \in H^\infty. \tag{6.32}$$

Selon l'hypothèse (b) de Proposition 5.1, on a

$$\Psi_1(\varphi\Pi_0 u) \in H^\infty. \tag{6.33}$$

Rappelons-nous $\Pi_0 + \Pi_* = \phi(D_4)^2$. Selon (6.32) et (6.33), on obtient $\Psi_1(\varphi u) \in H^\infty$. Donc, la démonstration de Proposition 5.2-(i) est terminée.

§7. Démonstration de Proposition 5.2-(ii)

Dans Γ_2, on construit microlocalement le paramétrix de P. La méthode est due à Kumano-go [15, Théorème 5.4 de page 83] qui explique la construction du paramétrix à partir de la condition (H) de Hörmander.

Soit $\{\varphi_k\}_{k=1}^4 \subset C_0^\infty(\boldsymbol{R}) : 0 \leqq \varphi_k \leqq 1$, $\varphi_k \Subset \varphi_{k+1}$, $\varphi_1(t) = 1$ lorsque $|t| \leqq 5/19$ et $\varphi_4(t) = 0$ lorsque $|t| \geqq 1/3$. On définit $\{\varphi_k(\xi)\}_{k=1}^4$ par

$$\psi_k(\xi) = \varphi_k((\xi_2^4 + \xi_4^2)/(\xi_1^2 + \xi_3^2)^2)(1 - \varphi_{5-k}(|\xi|^2)).$$

Notons que $\psi_k \in S^0_{1/2,0}(\boldsymbol{R}^4)$, $\psi_k \Subset \psi_{k+1}$, $\{\psi_1 = 1\} \supset \Gamma_2 \cap \{|\xi| \geqq 1\}$ et que supp $\psi_4 \subset \{\xi\colon \xi_1^2 + \xi_3^2 \geqq (6/5)(\xi_2^2 + |\xi_4|)\}$.

Soit $\rho = \sigma(P)$. Le lemme suivant est immédiatement obtenu à partir des définitions. Dans la description, C, $C_{\alpha,\beta}$ sont positives constances.

LEMME 7.1. *Sur supp* $\varphi_4(\xi)$, *on a*

(i) $$|p(x,\xi)| \geqq C\langle\xi\rangle,$$

(ii) $$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)/p(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|/2} \quad si\ \alpha_4 = 0.$$

On définit $\Psi_k \in OPS^0_{1/2,0}(\boldsymbol{R}^4)$ et $Q \in {}^{-1}_{1/2,0}(\boldsymbol{R}^4)$ par $\Psi_k = \psi_k(D)$ et $Q = q(x,D)$, où $q = \psi_4/p$. On définit K par

(7.1) $$QP = \Psi_4 - K.$$

Selon (7.1), on a

(7.2) $$\sigma(K)(x,\xi) = \sum_{|\gamma|=1} \int_0^1 \omega_{\gamma,\theta}(x,\xi)\, d\theta$$

oú

$$\omega_{\gamma,\theta}(x,\xi) = Os \iint e^{-iy\eta} r^{(\gamma)}(x,\xi+\theta\eta) p_{(\gamma)}(x+y,\xi)\, dy\, d\eta.$$

Lorsque $\gamma_4 \neq 0$, on a $p_{(\gamma)} = 0$. Selon (7.2) et Lemme 7.1, on a $K \in OPS^{-1}_{1/2,0}(\boldsymbol{R}^4)$. On déduit désormais Proposition 5.2-(ii). Selon (7.1), on a

(7.3) $$\Psi_3 QPu = \Psi_3(I-K)u.$$

On définit $E \in OPS^{-1}_{1/2,0}(\boldsymbol{R}^4)$ par $E \sim \sum_{m=1}^{\infty} K^m$. On fixe $\varphi \in C_0^\infty(U)$. Selon (7.3), on a

(7.4) $$\varphi BPu = \varphi\Psi_2 E(I-K)u + \varphi\Psi_2 E\Psi_5(I-K)u,$$

où $B = \Psi_2 E\Psi_3 Q$ et $\Psi_5 = 1 - \Psi_3$. Observons que $E(I-K) - I \in OPS^{-\infty}$ et que $\Psi_2 E\Psi_5 \in OPS^{-\infty}$. Puisque $\varphi \in C_0^\infty(U)$ et $Pu \in C^\infty(U)$, on a $\varphi\Psi_2 u \in C_0^\infty$, Donc, on obtient $\Psi_1(\varphi u) \in H^\infty$ et la démonstration de Proposition 5.2-(ii) est terminée.

§ 8. Démonstration de Proposition 5.3

Puisque $|\xi_2|$ est dominant dans Γ_3, Proposition 5.3 est déduite par la proposition suivante.

PROPOSITION 8.1. *On suppose toutes les hypothèses de Proposition* 5.3. *Alors*, pour tout $m > 0$ et tout $\varphi \in C_0^\infty(U)$ on a

$$\int |\widehat{\varphi u}(\xi)|^2 \langle\xi_2\rangle^{2m}\, d\xi < \infty.$$

Notre objectif est de prouver la Proposition 8.1. On fixe $t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in U$. Alors, il existe les intervalles ouvertes $\{I_k\}_{k=1}^4\subset \boldsymbol{R}$ dont le centre est t_k et qui vérifient $I_1\times I_2\times I_3\times I_4\subset U$, $|I_1|=|I_2|=|I_3|=|I_4|$. Puisque $(A.1)$ est vérifiée, on peut choisir une fonction $a\in C_0^\infty(I_1)$ telle que $0\leqq a\leqq 1$, $a=1$ au voisinage de t_1 et que $f(y)$, $g(y)$ soient positives sur supp $a'(y)$. Observons que

$$a(x_1)Pu=P(a(x_1)u)-[D_1^2,a(x_1)]u. \tag{8.1}$$

Puisque $Pu\in C^\infty(U)$ et $f(y)$, $g(y)$ sont positives sur supp$a'(y)$, on a $[D_1^2,a(x_1)]u\in C^\infty(U)$. Donc, on obtient $P(au)\in C^\infty(U)$.

On fait désormais la microlocalisation de au. Soit $\psi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$: $0\leqq\psi\leqq 1$, $\psi(y)=1$ lorsque $|y|\leqq 1$ et $\psi(y)=0$ lorsque $|y|\geqq 2$. On définit $\alpha_\lambda(\xi_2)$ par

$$\alpha_\lambda(\xi_2)=\psi(\lambda\xi_2-1)+\psi(\lambda\xi_2+1)$$

où $\lambda: 0<\lambda\leqq 1/3$ est le paramétre. Le fait que $\lambda^{-1}\sim|\xi_2|$ dans suppa_λ est important.

Soit $\chi\in C^\infty(\boldsymbol{R})$: $0\leqq\chi\leqq 1$, $0<r_1<r_2,\chi(y)=0$ lorsque $|y|\leqq r_1$ et $\chi(y)=1$ lorsque $|y|\geqq r_2$. Ici, on décide r_1 et r_2 pour que $\overline{\{y:\chi(y-t_k)<1\}}\subset I_k$ pour $k=3,4$. Soit $\phi\in C_0^\infty(I_2):0\leqq\phi\leqq 1$, $\phi=1$ au voisinage de t_2. On définit $\gamma_\lambda(x_3,x_4)$ et $\beta_{\lambda,q}(x_2,x_3,x_4)$ par

$$\begin{cases}\gamma_\lambda(x_3,x_4)=\exp(M(\chi(x_3-t_3)+\chi(x_4-t_4))\log\lambda)\\ \beta_{\lambda,q}(x_2,x_3,x_4)=\phi_q(x_2)\gamma_\lambda(x_3,x_4)\end{cases} \tag{8.2}$$

où $\lambda: 0<\lambda\leqq 1/3$ est le paramétre, $\phi_q(y)=D_y^q\phi(y)$ et M est constance qui sera convenablement précisée.

On définit v,h par $v=au$ et $Pv=h$. Selon (8.1), $h\in C^\infty(U)$. On définit $v_{\lambda,q}$ et $h_{\lambda,q}$ par $v_{\lambda,q}=\alpha_\lambda(D_2)(\beta_{\lambda,q}v)$ etc.

Avant de commencer la démonstration de Proposition 8.1, on prouve les lemmes suivants.

LEMME 8.2. *Pour tout* $\lambda: 0<\lambda\leqq 1/3$, *tout* $q\geqq 0$ *et tout* $M\geqq 1$ *on a* $v_{\lambda,q}\in H^\infty$.

DÉMONSTRATION DE LEMME 8.2. On fixe $m>0$ et on montre que $v_{\lambda,q}\in H^m$. Selon la définition, on a $\|v_{\lambda,q}\|_m^2=I_1+I_2+I_3$ où

$$I_k=\int_{\Gamma_k}\langle\xi\rangle^{2m}\alpha_\lambda(\xi_2)^2|\widehat{\beta_{\lambda,q}v}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Selon l'hypothèse (d), on a $I_1 + I_2 < \infty$. Puisque $|\xi_2|$ est dominant dans Γ_3 et supp α_λ est compact, on a $I_3 < \infty$. Donc, on obtient la conclusion. $\square$

LEMME 8.3. *On suppose que $u \in H^{-s}$ et que $s > 0$. Alors, pour tout $q \geqq 0$ il existe une constance C_q telle que pour tout λ: $0 < \lambda \leqq 1/3$ et tout $m \geqq 1$ on a $\|v_{\lambda,q}\| \leqq C_q \lambda^{-2s}$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 8.3. Selon la définition, $v_{\lambda,q} = \gamma_\lambda \alpha_\lambda(\phi_q v)$ et $0 < \gamma_\lambda \leqq 1$. Observons que $\lambda^{4s}\|v_{\lambda,q}\|^2 \leqq \lambda^{4s}\|\alpha_\lambda(\phi_q v)\|^2 \leqq$ Const. $(I_1 + I_2 + I_3)$ où

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \langle \xi_2 \rangle^{-4s} |\widehat{\phi_q v}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Ici, on a utilisé le fait que $|\xi_2|^{-1} \sim \lambda$ dans supp α_λ. Selon l'hypothèse (d), on a $I_1 + I_2 < \infty$. Puisque $|\xi| \leqq$ Const. $\langle \xi_2 \rangle^2$ dans Γ_3 et $\phi_q v \in H^{-s}$, on a $I_3 \leqq$ Const. $\|\phi_q v\|_{-s} < \infty$. Donc, on obtient la conclusion. $\square$

LEMME 8.4. *Soit $A = D_1^2 + f(x_1) D_2^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ telle que pout tout λ: $0 < \lambda \leqq \delta$, tout $q \geqq 0$ et tout $M \geqq 1$ on a*

$$(\log \lambda)^2 \|v_{\lambda,q}\|^2 \leqq \varepsilon(A v_{\lambda,q}, v_{\lambda,q}). \tag{8.3}$$

DÉMONSTRATION DE LEMME 8.4. Selon Lemme 2.1, $(M; 1, f)$ équivaut à $(E; 1, f)$, i.e., pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 > 0$ telle que pour tout $\xi_2 > N_0$ et tout $w \in C_0^\infty(I_1)$ on a

$$(\log \xi_2)^2 \int |w(s)|^2 \, ds \leqq \varepsilon \int (|w'(s)|^2 + \xi_2^2 f(s) |w(s)|^2) \, ds. \tag{8.4}$$

Soit $(\widehat{\beta_{\lambda,q} v})(x_1; \xi_2; x_3; x_4)$ la transformation de Fourier de $\beta_{\lambda,q} v(x)$ par rapport à x_2. Remplaçons $w(s)$ par $(\widehat{\beta_{\lambda,q} v})(s; \xi_2; x_3, x_4)$ et intégrons chaque terme de (8.4) par rapport à $(\xi_2; x_3, x_4)$. En sachant que $|\lambda|^{-1} \sim |\xi_2|$ sur suppα_λ, on obtient (8.3). $\square$

LEMME 8.5. *On suppose que $u \in H^{-s}$, $s > 0$ et que $M > 2s + 4$. Alors, pour tout $q \geqq 0$ il existe une constance $C_q > 0$ telle que pour tout λ: $0 < \lambda \leqq 1/3$ on a $\|h_{\lambda,q}\| \leqq C_q \lambda^l$, où $l = M - 2s - 4$.*

DÉMONSTRATION DE LEMME 8.5. Soit $\omega \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$: $0 \leqq \omega \leqq 1$, $0 < r_3 < r_4$, $\omega(y) = 1$ lorsque $|y| \leqq r_3$ et $\omega(y) = 0$ lorsque $|y| \geqq r_4$. Ici, on décide r_3 et r_4 pour que $r_2 < r_3$ et que supp$\,\omega(x_k - t_k) \subset I_k$; $k = 3, 4$. On définit h_1 et h_2 par

$h_1(x) = \omega(x_3 - t_3)\omega(x_4 - t_4)h(x)$ et $h_2 = h - h_1$. On montre que $\|(h_k)_{\lambda,q}\| \leqq C_q\lambda^l$; $k = 1, 2$.

Puisquè $h \in C^\infty(U)$ et $v = au$, on a $\phi_q(x_2)h_1(x) \in C_0^\infty(U)$. Donc,

$$\lambda^{-2l}\|(h_1)_{\lambda,q}\|^2 \leqq \lambda^{-2l}\|\alpha_\lambda(\phi_q h_1)\|^2 \leqq \text{Const.} \int \langle\xi_2\rangle^{2l}|(\widehat{\phi_q h_1})(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Puisque $\gamma_\lambda \leqq \lambda^M$ sur supph_2, on a $\lambda^{-2l}\|(h_2)_{\lambda,q}\|^2 \leqq \lambda^{-2l+2M}\|\alpha_\lambda(\phi_q h_2)\|^2 \leqq$ Const. $(I_1 + I_2 + I_3)$, oú

$$I_k = \text{Const.} \int_{\Gamma_k} \langle\xi_2\rangle^{-4s-8}|(\widehat{\phi_q h_2})(\xi)|^2\, d\xi.$$

Selon l'hypothèse (d), $I_1 + I_2 < \infty$. En sachant que $|\xi| \leqq \text{Const.}\, |\xi_2|^2$ et que $\phi_q h_2 \in H^{-s-2}$, on a $I_3 < \infty$. Donc, on obtient la conclusion. □

On choisit les intervalles ouvertes $E_j \subset \boldsymbol{R}$: $j = 3, 4$ telle que $t_j \in E_j \subset \{y : \chi(y - t_j) = 0\}$. Soit $U_0 = E_3 \times E_4$.

LEMME 8.6. *On suppose qu'il existe $l > 2$, $M \geqq 1$, $\delta > 0$ et une constance $C > 0$ telles que pour tout $\lambda : 0 < \lambda \leqq \delta$ on a $\|v_{\lambda,0}\| \leqq C\lambda^l$. Alors, pour tout $\varphi_0 \in C_0^\infty(U_0)$ on a*

$$\int |\hat{w}(\xi)|^2\langle\xi_2\rangle^{2l-2}\, d\xi < \infty, \tag{8.5}$$

où $w(x) = \phi(x_2)(\varphi_0)(x_3, x_4)v(x)$.

DÉMONSRATION DE LEMME 8.6. On fixe $\varphi_0 \in C_0^\infty(U)$. Selon l'hypothèse, on a $\|\varphi_0 v_{\lambda,0}\| \leqq \text{Const.}\, \|v_{\lambda,0}\| \leqq \text{Const.}\, \lambda^l$ pour tout $\lambda : 0 < \lambda \leqq \delta$. Puisque $\varphi_0 v_{\lambda,0} = \alpha_\lambda(\varphi_0\beta_{\lambda,0}v) = \alpha_\lambda w$, on a

$$\int \lambda^{-2l}\alpha_\lambda(\xi_2)^2|\hat{w}(\xi)|^2\, d\xi = K < \infty. \tag{8.6}$$

Observons que $\langle\xi_2\rangle^{2l-2} \leqq \text{Const.} \int_0^\delta \lambda^{-2l}\alpha_\lambda(\xi_2)\, d\lambda$ lorsque $\langle\xi_2\rangle$ est suffisament grande. Alors, en intégrant chaque terme de (8.6) de $\lambda = 0$ à $\lambda = \delta$, on obtient (8.5). □

On se met désormais à la démonstration de Proposition 8.1. Puisque $u \in \mathscr{E}'$, il existe $s > 0$ telle que $u \in H^{-s}$. On donne $m > 2$ et on précise la valeur de M telle que $M \geqq 2m + 2s + 4$. Notre objectif est de montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une constance $C > 0$ telles que pour tout $\lambda\colon 0 < \lambda \leqq \delta$ on a

$$\|v_{\lambda,0}\| \leqq C\lambda^m. \tag{8.7}$$

Selon Lemme 8.6, (8.7) achève la démonstration.

À partir de $Pv = h$, on a

$$Pv_{\lambda,q} - \alpha_\lambda[P, \beta_{\lambda,q}]v = h_{\lambda,q}. \tag{8.8}$$

Selon Lemme 8.2 et (8.8), on a

$$(Pv_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})_{L^2} = \mathrm{Re}(\alpha_\lambda[P, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q})_{L^2} + \mathrm{Re}(h_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})_{L^2}. \tag{8.9}$$

Observons que $\mathrm{Re}(\alpha_\lambda[P, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q}) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, où

$$I_1 = \mathrm{Re}(f(x_1)\alpha_\lambda[D_2^2, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q})$$

$$I_2 = \mathrm{Re}(\alpha_\lambda[D_3^2, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q})$$

$$I_3 = \mathrm{Re}(x_3^2\alpha_\lambda[D_4^2, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q})$$

$$I_4 = \mathrm{Re}((g(x_1) - 1)\alpha_\lambda[D_4, \beta_{\lambda,q}]v, v_{\lambda,q})$$

et que $[D_k^2, \beta_{\lambda,q}]v = 2D_k((D_k\beta_{\lambda,q})v) - (D_k^2\beta_{\lambda,q})v$. Alors, on a

$$I_1 = E_1 + E_2, \tag{8.10}$$

où $E_1 = \mathrm{Re}(2f(x_1)D_2v_{\lambda,q+1}, v_{\lambda,q})$ et $E_2 = -\mathrm{Re}(f(x_1)v_{\lambda,q+2}, v_{\lambda,q})$. Selon l'inégalité de Schwartz, on a

$$E_1 \leqq \tfrac{1}{4}\, J_{\lambda,q}^{(2)} + 4J_{\lambda,q+1}^{(0)}, \tag{8.11}$$

$$E_2 \leqq K^{-1}\lambda^{-2}J_{\lambda,q}^{(0)} + K\lambda^2 J_{\lambda,q+2}^{(0)}, \tag{8.12}$$

où $J_{\lambda,q}^{(k)} = (f(x_1)D_2^k v_{\lambda,q}, v_{\lambda,q}$ et K est la positive constance dont la valeur sera convenablement précisée.

On fait désormais C_l représenter des positives constances qui sont indépendantes de λ et de q. Puisque $|\lambda|^{-1} \sim |\xi_2|$ sur $\mathrm{supp}\alpha_\lambda$, on a $\lambda^{-2}J_{\lambda,q}^{(0)} \leqq C_1 J_{\lambda,q}^{(2)}$. Choisisons K telle que $C_1/K < 1/4$. Alors, on a

$$E_1 \leqq \tfrac{1}{4}\, J_{\lambda,q}^{(2)} + C_2\lambda^2 J_{\lambda,q+1}^{(2)}, \tag{8.13}$$

$$E_2 \leqq \tfrac{1}{4}\, J_{\lambda,q}^{(2)} + C_3\lambda^4 J_{\lambda,q+2}^{(2)}. \tag{8.14}$$

Selon (8.10), (8.13) et (8.14), on obtient

(8.15) $$I_1 \leqq \frac{1}{2} B_{\lambda,q} + C_4(\lambda^2 B_{\lambda,q+1} + \lambda^4 B_{\lambda,q+2}),$$

où $B_{\lambda,q} = J^{(2)}_{\lambda,q}$. Observons que

$$D_3\beta_{\lambda,q} = (M\log\lambda)\chi_1\beta_{\lambda,q} \quad \text{et que } D_3^2\beta_{\lambda,q} = ((M\log\lambda)^2\chi_1^2 + (M\log\lambda)\chi_2)\beta_{\lambda,q},$$

où $\chi_k(x_3) = (D^k\chi)(x_3 - t_3)$. Alors, on a

(8.16) $$I_2 = (M\log\lambda)(E_3 + E_4) + (M\log\lambda)^2 E_5,$$

où $E_3 = \mathrm{Re}(2D_3(\chi_1 v_{\lambda,q}), v_{\lambda,q})$, $E_4 = \mathrm{Re}(\chi_2 v_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})$ et $E_5 = \|\chi_1 v_{\lambda,q}\|^2$. Puisque $2\mathrm{Re}\, z = z + \bar{z}$, on a $|E_3| \leqq C_5\|v_{\lambda,q}\|^2$. Donc, on a

(8.17) $$|I_2| \leqq C_6(M\log\lambda)^2\|v_{\lambda,q}\|^2.$$

On peut aussi évaluer I_3 et I_4 au même moyen et on obtient

(8.18) $$|I_2| + |I_3| + |I_4| \leqq C_6(M\log\lambda)^2\|v_{\lambda,q}\|^2.$$

Selon Lemme 8.4, il existe $\delta_1 > 0$ telle que pout tout λ: $0 < \lambda \leqq \delta_1$ et tout $q \geqq 0$ on a

(8.19) $$C_6(M\log\lambda)^2\|v_{\lambda,q}\|^2 \leqq \frac{1}{4}(Av_{\lambda,q}, v_{\lambda,q}).$$

Selon (8.15), (8.18) et (8.19), on a

(8.20) $$V_{\lambda,q} \leqq \frac{1}{4} F_{\lambda,q} + \frac{1}{2} B_{\lambda,q} + C_4 \sum_{l=1}^{2} \lambda^{2l} B_{\lambda,q+l} + |(h_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})|,$$

où $V_{\lambda,q} = (Pv_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})$ et $F_{\lambda,q} = (Av_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})$, pour tout λ: $0 < \lambda \leqq \delta_1$ et tout $q \geqq 0$. Puisque $\|D_1 v_{\lambda,q}\|^2 + B_{\lambda,q} = F_{\lambda,q} \leqq V_{\lambda,q}$, on obtient

(8.21) $$\frac{1}{4}(\|D_1 v_{\lambda,q}\|^2 + B_{\lambda,q}) \leqq C_4 \sum_{l=1}^{2} \lambda^{2l} B_{\lambda,q+l} + |(h_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})|.$$

Selon l'inégalité de Poincaré, il existe $K > 1$ telle que pour tout λ: $0 < \lambda \leqq 1/3$ et tout $q \geqq 0$ on a $\|D_1 v_{\lambda,q}\|^2 \geqq 4K^{-1}\|v_{\lambda,q}\|^2$. Puisque

$$2|(h_{\lambda,q}, v_{\lambda,q})| \leqq K\|h_{\lambda,q}\|^2 + K^{-1}\|v_{\lambda,q}\|^2,$$

on a

(8.22) $$\|v_{\lambda,q}\|^2 + B_{\lambda,q} \leqq C_8 \sum_{l=1}^{2} \lambda^{2l} B_{\lambda,q+l} + C_8\|h_{\lambda,q}\|^2.$$

Soit $E_{\lambda,q} = \lambda^q B_{\lambda,q}$. En multipliant λ^q au chaque terme de (8.22), on a

$$\lambda^q \|v_{\lambda,q}\|^2 + E_{\lambda,q} \leqq C_8\lambda \sum_{l=1}^{2} E_{\lambda,q+l} + C_8\lambda^q \|h_{\lambda,q}\|^2. \tag{8.23}$$

Soit $N \geqq 2m + 2s + 3$. On prend le somme de chaque terme de (8.23) de $q = 0$ à $q = N - 2$. Soit

$$S_\lambda = \sum_{q=0}^{N} \lambda^q \|v_{\lambda,q}\|^2, \quad G_\lambda = \sum_{q=0}^{N} \lambda^q \|h_{\lambda,q}\|^2, \quad T_\lambda = \sum_{q=0}^{N} E_{\lambda,q}, \quad R_\lambda = \sum_{q=N-1}^{N} E_{\lambda,q}.$$

Alors, on a

$$S_\lambda + T_\lambda \leqq C_9(\lambda T_\lambda + G_\lambda) + R_\lambda. \tag{8.24}$$

On choisit $\delta > 0$ pour que $\delta \leqq \min(\delta_1, 1/(2C_9))$. Alors, pout tout λ: $0 < \lambda \leqq \delta$ on a

$$S_\lambda \leqq R_\lambda + C_9 G_\lambda. \tag{8.25}$$

Lemme 8.7. (i) $R_\lambda \leqq C_{10}\lambda^{2m}$ *et* (ii) $G_\lambda \leqq C_{11}\lambda^{2m}$.

Démonstration de Lemme 8.7. (i) Observons que $B_{\lambda,q} \leqq \|D_2 v_{\lambda,q}\|^2 \leqq C_{12}\lambda^{-2}\|v_{\lambda,q}\|^2$. Selon Lemme 8.3, on a $B_{\lambda,q} \leqq$ Const. λ^{-2s-2}. Puisque $N \geqq 2m + 2s + 3$ et $q \geqq N - 1$, on obtient (i).

(ii) Selon Lemme 8.5, on a $\|h_{\lambda,q}\| \leqq$ const. λ^l, où $l = M - 2s - 4$. Donc $G_\lambda \leqq C_{13}\lambda^l$. Puisque $M \geqq 2m + 2s + 4$, on obtient (ii). □

Observons que $\|v_{\lambda,0}\|^2 \leqq S_\lambda$. Selon Lemme 8.7 et (8.25), on a $\|v_{\lambda,0}\| \leqq C_{14}\lambda^m$ pour tout λ: $0 < \lambda \leqq \delta$. Donc on obtient (8.7) et la démonstration de Proposition 8.1 est terminée.

§ 9. Démonstration de la nécessité

On montre que $(M; 1, f)$ et $(M; f, g)$ sont nécessaire pour l'hypoellipticité de P. L'idée provient de [9], [18] et [27, Proposition 4].

D'abord, on suppose que $(M; f, g)$ n'est pas vérifiée. Selon Lemme 2.2, $(M; f, g)$ équivaut à $(E; f, g)$. Donc, il exite $\varepsilon > 0$, une positive séquence $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{R}$; $\lim_{m\to\infty} \eta_m = \infty$ et $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(I_0)$ tels que pour tout $m \geqq 1$

on a

$$(9.1)\qquad (\log\eta_m)^2\int_{I_0} f|u_m|^2 \geqq \varepsilon\int(|u_m'|^2+\eta_m g|u_m|^2).$$

On définit L_η par $L_\eta = -(d/dt)^2 + g(t)\eta$, où $\eta > 0$ est paramétre. Nous considérons le problème de valeur propre:

$$(9.2)\qquad \begin{cases} L_\eta = \lambda f(t)v \\ v|_{\partial I_0} = 0 \end{cases}.$$

Soit $\lambda(\eta)$ la première valeur propre de (9.2). Alors,

$$(9.3)\qquad \lambda(\eta) = \inf\{(L_\eta w, w)/(fw, w)\colon w \in C_0^\infty(I_0), w \not\equiv 0\}.$$

Soit $C = 1/\varepsilon$. Selon (9.1) et (9.3), on a

$$(9.4)\qquad 0 < \lambda(\eta_m) \leqq C(\log\eta_m)^2$$

pour tout $m \geqq 1$. Soit $v_m(t)$ la fonction propre qui corréspend à $\lambda(\eta_m)$ et $\int_I \|v_m\|^2 = 1$, où $I = I_0$. Puisque $\lim_{m\to\infty}\eta_m = \infty$, on peut choisir une sous-séquence $\{\eta_{m(k)}\} \subset \{\eta_m\}$ pour que

$$(9.5)\qquad (\eta_{m(k+1)})^{1/2} - (\eta_{m(k)})^{1/2} > 1$$

pour tout $k \geqq 1$. On note $\{\eta_m\}$ au lieu de $\{\eta_{m(k)}\}$ à nouveau. On définit $\Omega \subset \boldsymbol{R}^4$ par $\Omega = I_0 \times J \times J \times J$, où $J = (-1, 1)$. Soit $N \geqq C + 2$. On définit $w(x)$ par

$$(9.6)\qquad w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m^{-N} v_m(x_1)\exp(ix_4\eta_m + x_2\lambda(\eta_m)^{1/2})h_0(x_3\eta_m^{1/2}).$$

Selon (9.4), on a $w \in L^2(\Omega)$ et $Pw = 0$ dans Ω. Puisque $g > 0$ sur ∂I_0, il existe une constance $\delta > 0$ et une intervalle fermée $E \subset I_0$ telles que $g(t) > \delta$ lorsque $t \in I_0\backslash E$. Selon (9.2)–(9.4) on a

$$(9.7)\qquad \lim_{m\to\infty}\int_E |v_m|^2 = 1.$$

On suppose que $w \in C^\infty(\Omega)$ et on va déduire une contradiction. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$: $\varphi(0) \neq 0$ et $\hat\varphi(0) = 1$. On définint $G(s, y)$ par

$$(9.8)\qquad G(s, y) = \varphi(y)w(s, 0, 0, y).$$

Soit $F(s, \eta)$ la transformation de Fourier de G par rapport à y. Selon (9.5)–(9.8), on a

$$(9.9)\qquad \left(\int_E |F(s,\eta_l)|^2\,ds\right)^{1/2} \geqq \eta_l^{-N}/2 - \sum_{m\neq l}^{\infty} \eta_m^{-N}\hat{\varphi}(\eta_l-\eta_m)|$$

$$\geqq \eta_l^{-N}/2 - \text{Const. } \eta_l^{-N-1}$$

$$\geqq \text{Const. } \eta_l^{-N-1}$$

si l est suffisament grand.

En revanche, $\int_E |F(s,\eta_l)|^2\,ds$ doit rapidement décroitre lorsque l s'approche de ∞. C'est ce que l'on obtient à partir de l'hypothèse $w\in C^\infty(\Omega)$. Donc, il y a la contradiction. Alors, on sait que $(M;f,g)$ est nécessaire pour l'hypoellipticité de P.

On suppose que $(M;1,f)$ n'est pas vérifiée. Alors, on obtient (9.1) en remplaçant (f,g) par $(1,f)$. On définit $\lambda(\eta_m)$, $v_m(t)$ et N comme l'argument précédant. On définit $w(x)$ par

$$(9.10)\qquad w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m^{-N} v_m(x_1)\exp(ix_2\eta_m + x_3\lambda(\eta_m)^{1/2}).$$

Alors, $w\in L^2(\Omega)$ et $Pw=0$ dans Ω. On peut savoir que $w\notin C^\infty(\Omega)$ au même moyen de (9.7)–(9.9). Donc, $(M;1,f)$ est nécessaire pour que P soit hypoelliptique.

References

[1] L. Boutet de Monvel., Hypoelliptic operators with double characteristic and related pseudo-differential operators, Comm. Pure and Appl. Math. **27** (1974), 585–639.

[2] Fediĭ V. S., On a criterion for hypoellipticity, Math. USSR Sb **14** (1971), 15–45.

[3] Folland G. B., Harmonic analysis in phase space, Ann of Math Studies, Princeton Univ. Press. **122** (1989).

[4] Grigis A., Hypoellipticité et paramétrix pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, Astérisque **34–35** (1976), 183–205.

[5] Hörmander L., Hypoelliptic second order differential equations, Acts. Math. **119** (1967), 147–171.

[6] Hörmander L., The analysis of Linear Partial Differential Operators I, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.

[7] Hoshiro T., Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic and parabolic operators of second order, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 615–632.

[8] Hoshiro T., Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic and parabolic operators of II, operators of higher order, J. Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 497–513.

[9] Hoshiro T., On hypoellipticity for a certain operator with double characterisitic, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 593–603.

[10] Hoshiro T., On Levi-type conditions for hypoellipticity of certain differential operators, Comm. PDE **17** (1992), 905–922.

[11] Hoshiro T., Some examples of Hypoelliptic operators of infinitely degenerate type, Osaka J. Math. **30** (1993), 771–782.

[12] Kajitani K.–Wakabayashi S., Propagation of singularities for several classes of pseudodifferential operators, Bull. Sci. Math. 2^e série **115** (1991), 397–449.

[13] Kerman R.–Sawyer E., The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators, Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 207–228.

[14] Koike M., A note on hypoellipticity for degenerate elliptic operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. **27** (1991), 995–1000.

[15] Kumano-go H., Pseudo-differental operators, MIT Press (1981).

[16] Kusuoka S.–Stroock D., Applications of the Malliavin calculus, Part II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **32** (1885), 1–76.

[17] Morimoto Y., On the hypoellipticity for infinitely degenerate semi-elliptic operators, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 327–358.

[18] Morimoto Y., Non-hypoellipticity for degenerate elliptic operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. **22** (1986), 25–30.

[18] Morimoto Y., Erratum., Publ. RIMS Kyoto Univ. **30** (1994), 533–534.

[19] Morimoto Y., Criteria for hypoellipticity of differential operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. **22** (1986), 1129–1154.

[20] Morimoto Y., Hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic operators, Osaka J. Math. **24** (1987), 13–35.

[21] Morimoto Y., A criterion for hypoellipticity of second order differential operators, Osaka J. Math **24** (1987), 651–675.

[22] Morimoto Y., The uncertainty principle and hypoelliptic operators, Publ. RIMS Kyoto Univ. **23** (1987), 955–964.

[23] Morimoto Y., Propagation of wave front sets and hypoelliptic operators, Pitman Res. Notes Math Ser. **32** (1992), 212–224.

[24] Morimoto Y, Estimates for degenerate Schrödinger operators and hypoellipticity for infinitely degenerate elliptic operators, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 333–372.

[25] Morimoto Y., Hypoelliptic operators in $\boldsymbol{R}^3$ of the form $X_1^2+X_2^2$, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1992), 461–484.

[26] Morimoto Y.–Morioka T., Some remarks on hypoelliptic operators which are not micro-hypoelliptic, Publ. RIMS Kyoto Univ. **28** (1992), 579–586.

[27] Morimoto Y.–Morioka T., The positivity of Schrödinger operators and the hypoellipticity of second order degenerate elliptic operators, Preprint.

[28] Morioka T., Hypoellipticity for semi-elliptic operators which degenerate on hypersurface, Osaka J. Math. **28** (1991), 563–578.

[29] Morioka T., Hypoellipticity for some infinitely degenerate elliptic operators of second order, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), 373–386.

[30] Morioka T., Some remarks on micro-hypoelliptic operators of infinitely degenerate type, Publ. RIMS Kyoto Univ. **28** (1992), 129–138.

[31] Sawyer E., A weighted inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operators, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 1–28.

[32] Suzuki M., Hypoellipticity for a class of degenerate elliptic operators of secon order, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 217–234.

[33] Taira K., On a class of hypoelliptic differential operators with double characteristics, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 391–419.

[34] Wakabayashi S.–Suzuki M., Microhypoellipticity for a class of pseudodifferential operators with double characterisitics, Funkciaj Ekvacioj **36** (1993), 519–556.

Département de Mathématiques
Université d'Osaka
Osaka 560, JAPON