TSUKUBA J. MATH.
Vol. 5, No. 2 (1981). 285–289

ITÉRATION CONTRÔLÉE DE LA FONCTION σ

Par

Edmondo BEDOCCHI

Le but de cette note est d'étudier les propriétés des suites définies de la façon suivante: soit $N=\{0,1,2,\cdots\}$ l'ensemble des nombres naturels et soit σ la fonction somme des diviseurs, pour tout $n\in N$, $n\geqslant 3$, je pose

$$(*)\qquad \begin{aligned} &S_0(n)=n\,,\\ &S_{k+1}(n)=\begin{cases}\sigma(S_k(n)/2) & \text{si}\quad S_k(n)\quad \text{est pair,}\\ \sigma(S_k(n)) & \text{si}\quad S_k(n)\quad \text{est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$

Les problèmes que l'on peut traiter relativement à cette famille de suites sont semblables à ceux que l'on étudie relativement aux suites qui en anglais s'appellent 'aliquot sequences'. Avant d'initier l'exposition des résultats que j'ai obtenus pour les suites $(S_k(n))_{k\in N}$, je vais donner quelques définitions.

A) Étant donné la suite $(S_k(n))_{k\in N}$, on dira que le nombre naturel n est le *point initial* de la suite.

B) Soit $m\in N$, on dira que la suite $(S_k(n))_{k\in N}$ *passe* par m s'il existe $j\in N$ tel que $S_j(n)=m$.

C) Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ et soit $(S_k(m))_{k\in N}$ deux suites, on dira que $(S_k(n))_{k\in N}$ *passe* par $(S_k(m))_{k\in N}$ s'il existe $j\in N$ pour lequel la suite $(S_k(n))_{k\in N}$ passe par $S_j(m)$.

D) On dira que la suite $(S_k(n))_{k\in N}$ est *périodique* s'il existe $i,j\in N$, $i\neq j$, tels que $S_i(n)=S_j(n)$.

E) Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite périodique et soit (s,t) le plus petit élément (dans l'ordre lexicographique de $N\times N$) de l'ensemble $\{(i,j)|i\neq j \text{ et } S_i(n)=S_j(n)\}$. Le mot $S_0(n), S_1(n),\cdots,S_{s-1}(n)$ (s'il existe) s'appellera *partie apériodique* de $(S_k(n))_{k\in N}$ et s *longueur* de la partie apériodique. Le mot $S_s(n), S_{s+1}(n),\cdots,S_{t-1}(n)$ s'appellera *période* de $(S_k(n))_{k\in N}$ et $t-s$ *longueur* de la période.

F) Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite périodique. Si la partie apériodique n'existe pas, c'est-à-dire si s du point E) est égal à zéro, on dira que la suite est *immédiatement périodique*.

Je vais exposer maintenant les résultats 'expérimentaux' trouvés.

Received May 7, 1981.

1) Les suites $(S_k(n))_{k\in N}$ avec $n\leqslant 134$ sont toutes périodiques et leurs périodes ont une longueur de 1 ou de 2.

2) La suite $(S_k(135))_{k\in N}$ dans les premiers 45 termes ne présente pas la période (si éventuellement elle existe) et croît assez rapidement, la preuve en est qu'il résulte $S_{44}(135)=1479010806$.

3) Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite avec $n\leqslant 1500$. Il y a alors trois possibilités:

(i) $(S_k(n))_{k\in N}$ est périodique avec une période de longueur 1.

(ii) $(S_k(n))_{k\in N}$ est périodique avec une période de longueur 2.

(iii) $(S_k(n))_{k\in N}$ passe par une des huit suites qui ont comme point initial respectivement 135, 199, 315, 441, 567, 651, 1029, 1203.

4) Les huit suites indiquées ci-dessus ont des caractéristiques semblables aux caractéristiques exposées au point 2) pour $(S_k(135))_{k\in N}$ et dans les limites de l'intervalle $[0, 44]$ ne passent pas les unes par les autres.

5) Il n'existe pas de suites $(S_k(n))_{k\in N}$ avec $n\leqslant 40000$ qui sont immédiatement périodiques avec des périodes de longueur 3, 4, 5.

Je vais exposer maintenant les résultats de caractère général:

PROPOSITION 1. *Pour toute suite $(S_k(n))_{k\in N}$ on a, $S_k(n)\neq 1$ pour tout $k\in N$.*

Preuve. Je procède par récurrence sur k. L'affirmation est vraie si $k=0$, puisque $S_0(n)=n$ et $n\geqslant 3$. Supposons que l'on ait $S_k(n)\neq 1$ et $S_{k+1}(n)=1$: il y a alors deux possibilités, $1=S_{k+1}(n)=\sigma(S_k(n))$ ou bien $1=S_{k+1}(n)=\sigma(S_k(n)/2)$. De la première on tire $S_k(n)=1$ qui contredit l'hypothèse de récurrence, de la deuxième on tire $S_k(n)=2$ qui contredit le fait que $S_0(n)\geqslant 3$ et $2\notin \mathrm{Im}(\sigma)$. Donc ce ne peut pas être $S_{k+1}(n)=1$ et la preuve est ainsi complète.

PROPOSITION 2. *Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite périodique avec une période de longueur 1. Si $S_i(n)$ est sa période, alors $S_i(n)$ est le double d'un nombre parfait.*

Preuve. Par hypothèse on a $S_i(n)=S_{i+1}(n)$. On a alors deux possibilités: $S_i(n)=S_{i+1}(n)=\sigma(S_i(n))$ ou $S_i(n)=S_{i+1}(n)=\sigma(S_i(n)/2)$. De la première on tire $S_i(n)=1$ qui contredit la Prop. 1, de la deuxième on tire que $S_i(n)/2$ est un nombre parfait, c'est-à-dire ce qu'on voulait.

PROPOSITION 3. *Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite périodique avec une période de longueur 2. Si $S_i(n), S_{i+1}(n)$ est sa période et $S_i(n)$ est pair et $S_{i+1}(n)$ est impair, alors $S_i(n)$ est le double d'un nombre 'super-parfait'* (voir [5]).

Preuve. La période de la suite étant $S_i(n), S_{i+1}(n)$ avec $S_i(n)$ pair et $S_{i+1}(n)$

impair, on a $S_i(n)=S_{i+2}(n)=\sigma(S_{i+1}(n))=\sigma(\sigma(S_i(n)/2))$ dont il résulte que $S_i(n)/2$ est 'super-parfait', comme on voulait.

Remarque 1. Le résultat obtenu par D. Suryanarayana en [5] permet d'affirmer que si $S_i(n)/2$ est pair, alors on doit avoir $S_i(n)=2^t$ avec 2^t-1 nombre premier.

Remarque 2. Les résultats obtenus par D. Suryanarayana en [5] et par H.-J. Kanold en [4] permettent d'affirmer que la condition, $S_i(n)/2$ 'super-parfait', est aussi suffisante.

PROPOSITION 4. *Soit* $(S_k(n))_{k\in N}$ *une suite périodique avec une période de longueur* 2. *Si* $S_i(n), S_{i+1}(n)$ *est sa période et si* $S_i(n)$ *et* $S_{i+1}(n)$ *sont divisibles par* 4, *alors* $S_i(n)=2^p(2^q-1)$ *et* $S_{i+1}(n)=2^q(2^p-1)$ *avec* 2^p-1 *et* 2^q-1 *nombres premiers.*

Preuve. Par hypothèse $S_i(n)=2^tm$ et $S_{i+1}(n)=2^sm'$ avec $t, s\geqslant 2$ et m, m' nombres impairs. La période de la suite étant $S_i(n), S_{i+1}(n)$, on a $\sigma(S_i(n)/2)=S_{i+1}(n)$ et aussi $\sigma(S_{i+1}(n)/2)=S_i(n)$ dont

$$(1)\qquad \begin{aligned}(2^t-1)\sigma(m)&=2^sm'\\ (2^s-1)\sigma(m')&=2^tm\end{aligned}$$

d'où il résulte qu'il existe A, B entiers tels que

$$(2)\qquad \begin{aligned}\sigma(m)&=2^sA\\ \sigma(m')&=2^tB\end{aligned}$$

et remplaçant en (1) on tire

$$(3)\qquad \begin{aligned}m'&=(2^t-1)A\\ m&=(2^s-1)B\end{aligned}$$

et remplaçant en (2) il résulte

$$(4)\qquad \begin{aligned}\sigma[(2^s-1)B]&=2^sA\\ \sigma[(2^t-1)A]&=2^tB\end{aligned}$$

Maintenant étant $t, s\geqslant 2$ on a $\sigma[(2^s-1)B]\geqslant(2^s-1)B+B=2^sB$ et $\sigma[(2^t-1)A]\geqslant(2^t-1)A+A=2^tA$ dont $2^sA\geqslant 2^sB$ et $2^tB\geqslant 2^tA$ et donc $A=B$. Les (4) deviennent alors

$$\begin{aligned}\sigma[(2^s-1)A]&=2^sA\\ \sigma[(2^t-1)A]&=2^tA\end{aligned}$$

Maintenant si $A\neq 1$ on a $2^s A=\sigma[(2^s-1)A]\geqslant(2^s-1)A+A+1=2^s A+1$ qui est faux. Donc $A=B=1$ et alors $\sigma(2^s-1)=2^s$ et $\sigma(2^t-1)=2^t$; il résulte alors que 2^s-1 et 2^t-1 sont des nombres premiers. En rappelant les (3) on obtient $S_i(n)=2^t(2^s-1)$ et $S_{i+1}(n)=2^s(2^t-1)$ et la démonstration est ainsi complète.

Remarque. L'hypothèse $4|S_i(n)$, $S_{i+1}(n)$ est essentielle: en effet la suite $(S_k(320))_{k\in N}$ a une période 320, 378 et d'ailleurs il résulte $320=2^6 5$ et $378=2\cdot 3^3 7$.

Il est facile de se convaincre que, après les Prop. 3 et 4, pour achever l'étude des suites $(S_k(n))_{k\in N}$ avec une période $S_i(n), S_{i+1}(n)$, il ne reste à analyser que le cas dans lequel $S_i(n)$ et $S_{i+1}(n)$ sont pairs et au moins l'un d'eux est le double d'un nombre impair. En ce qui concerne les suites de ce type, je n'ai trouvé que les renseignements suivants:

6) Soit $(S_k(n))_{k\in N}$ une suite immédiatement périodique avec une période $S_0(n)$, $S_1(n)$ et soit $n\leqslant 40000$. Si $S_0(n)$ et $S_1(n)$ sont pairs et que au moins l'un d'eux est le double d'un nombre impair, alors il résulte $n=320$ ou bien $n=378$.

7) S'il existe un nombre m 'super-parfait' impair (jusqu'à présent on n'en connaît pas) et s'il existe un nombre premier $p=2^t-1$ tel que $p\nmid m$, alors la suite $(S_k(2mp))_{k\in N}$ est immédiatement périodique avec une période $2mp, 2^t\sigma(m)$.

Conclusion. Il est clair que les problèmes que l'on pourrait traiter dans le cadre des suites $(S_k(n))_{k\in N}$ sont encore nombreux, mais je vaudrais attirer l'attention sur les deux problèmes suivants:

—Pour tout $m\in N$ existe-t-il une suite $(S_k(n))_{k\in N}$ telle que ses premiers m termes soient tous différents? (pour les 'aliquot sequences' le théorème de Lenstra, voir [2], répond affirmativement à la question).

—Étant donné une suite $(S_k(n))_{k\in N}$, soit $m(n)$ le plus petit élément de l'ensemble $\{S_k(n)|k\in N\}$ et $v(n)=n/m(n)$; l'ensemble $\{v(n)|n\in N\}$ est-il borné?

Je crois qu'il n'est pas simple de trouver une réponse à ces deux questions. On voit au contraire facilement que si la réponse au premier problème est négative alors la réponse au deuxième est affirmative.

Bibliographie

[1] Catalan E., Propositions et questions diverses, Bull. Soc. Math. France, **16** (1887-88), 129.

[2] Erdös P., On asymptotic properties of aliquot sequences, Math. Comp., **30** (1976), 641-645.

[3] Guy R.K., Selfridge J.L., What drives an aliquot sequence?, Math. Comp., **29** (1975),

101-107. Corr. ibid., **34** (1980), 319-321.
[4] Kanold H.-J., Über 'Super perfect numbers', Elem. Math., **24** (1969), 61-62.
[5] Suryanarayana D., Super perfect numbers, Elem. Math., **24** (1969), 16-17.

Istituto di Geometria—Università
Piazza di Porta S. Donato 5
40127 Bologna
Italia