Hokkaido Mathematical Journal Vol. 8 (1979) p. 288-293

Vorgegebene Grenzableitungen auf nichtisolierten Mengen

Kazuo ISHIGURO und Karl ZELLER*)

(Received November 27, 1978)

Einleitung

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, die Anwendungen der Funktionalanalysis auf die Funktionentheorie auszubauen. Es werden analytische Funktionen konstruiert, die auf einer abzählbaren Menge vorgegebene Grenzableitungen annehmen. Die Menge darf dabei nichtisoliert sein, wenn sie bestimmten Bedingungen genügt (siehe unten).

Bisher hat man anscheinend nur isolierte Mengen betrachtet. Nach Vorarbeiten von Ritt und Carleman hat Franklin [**3**] den allgemeinen Fall mit klassischen Methoden behandelt. Eine zusammenfassende Darstellung findet der Leser in Pittnauer [**7**].

Die Theorie unendlicher Gleichungssysteme wurde von Eidelheit [**1, 2**] und Pólya [**9**] zur Konstruktion von gewünschten Funktionen herangezogen. Eidelheit stützt sich dabei auf die Theorie der F-Räume. Seine Untersuchungen wurden von Pittnauer-Zeller [**8**] weitergeführt. Wir knüpfen an die letztere Arbeit an, in der weitere Literaturangaben zu finden sind.

Die Theorie unendlicher Gleichungssysteme wurde von verschiedenen Autoren ausgestaltet. Wir nennen Cooke, Thompson, Baker und Petersen (siehe zum Beispiel [**4, 5, 6**]). Wir stützen uns auf neuere Formulierungen und Beweise des Hauptresultates von Eidelheit, die bei Niethammer-Zeller [**5**] und Meyer-König-Zeller [**4**] zu finden sind.

§ 1. Funktionalanalytische Grundlagen

Mit $\mathscr{F}=[\mathscr{F}\,;\,p_j]$ bezeichnen wir einen F-Raum, dessen Topologie durch die Halbnormen p_j gegeben wird. Eine stetige Linearform L in $\mathscr{F}$ genügt einer Abschätzung der Gestalt

$$\left|L(f)\right| \leqq M\big(p_0(f)+\cdots+p_m(f)\big) \qquad (f\in\mathscr{F})\,.$$

*) Die Verfasser danken der Japan Society for the Promotion of Science für großzügige Unterstützung.

Das kleinste m, für das eine solche Abschätzung besteht, nennen wir die Ordnung von L (bezüglich der p_j). Wir bezeichnen sie mit ord L und setzen ord $L=-1$, wenn L die Null-Linearform ist. Mit diesen Bezeichungen gilt

LEMMA 1. *Das Gleichungssystem*

$$L_n(f)=c_n \qquad (n=0,1,\cdots)$$

ist für beliebige c_n lösbar, wenn

$$\operatorname{ord} L_n = n \qquad (n=0,1,\cdots)$$

gilt.

In etwas modifizierter Form ist die Bedingung sogar notwendig. Das Ergebnis geht auf Eidelheit [**1**, **2**] zurück. Neuere Formulierungen und Beweise stehen in [**5**] und [**4**].

§ 2. Ein Grenzpunkt

Zur Vorbereitung behandeln wir den Fall eines Grenzpunktes so, wie es der späteren Übertragung auf unendlich viele Grenzpunkte angemessen ist. Sei u ein fester Punkt auf der imaginären Achse. Mit G bezeichnen wir das Gebiet, das aus der komplexen Ebene $\boldsymbol{C}$ entsteht, wenn man den Schlitz S (Streckenzug) $[-1, u, 1]$ wegnimmt. Wir führen eine Gewichtsfunktion r ein:

$$r(z):=\exp\left(-\frac{1}{|z+1|}-\frac{1}{|z-1|}\right) \qquad (z\neq \pm 1)\,.$$

Mit $r(\pm 1):=0$ hat diese Funktion genau zwei Nullstellen (unendlicher Ordnung).

Aus der Menge der in G holomorphen Funktionen f schneiden wir eine Teilmenge $\mathscr{F}$ heraus durch die Forderungen:

$$p_j(f):=\sup_{z\in G} r(z)\left|f^{(j)}(z)\right|<\infty \qquad (j=0,1,\cdots)\,,$$

$$L_j(f):=\lim_{z\to u}{}^* f^{(j)}(z) \quad \text{existiert} \qquad (j=0,1,\cdots)\,.$$

Dabei bedeutet lim* den Limes für $z\to u$ mit z oberhalb S. Es wird also gefordert: Jede Ableitung von f ist beschränkt, wenn wir beliebig kleine Umgebungen von -1 und $+1$ ausnehmen; bei Annäherung an u aus dem Bereich oberhalb S hat jede Ableitung einen Grenzwert ("Grenzableitung").

Die Menge $\mathscr{F}$ läßt sich in natürlicher Weise als F-Raum auffassen und bildet einen F-Raum $\mathscr{F}=[\mathscr{F};\, p_j]$ mit den genannten Halbnormen. Der Raum $\mathscr{F}$ besitzt nichttriviale Elemente (siehe unten: h und g). Darüber hinaus gilt

LEMMA 2. *Im Raum $\mathscr{F}$ gibt es zu beliebigen c_j ein f mit*

$$L_j(f) := \lim_{z\to u}{}^* f^{(j)}(z) = c_j\,.$$

BEMERKUNG. Die Funktion hat also in u Grenzableitungen der oben beschriebenen Art.

BEWEIS. Wir ziehen Lemma 1 heran. Die L_j sind offenbar stetige Linearformen in $\mathscr{F}$. Wir zeigen

$$\operatorname{ord} L_j = j \qquad (j=0, 1, \cdots)\,.$$

Dabei ist die Ungleichung ord $L_j \leqq j$ klar. Daß ord $L_j < j$ nicht gilt, erkennen wir durch Einsetzen der Funktionen g, die wir nun mit Hilfe einer Funktion h definieren. Wir erklären eine Funktion h in G durch

$$h(z) := z - \sqrt{z^2-1}\,;$$

dabei nehmen wir denjenigen Zweig der Wurzel, der eine beschränkte Funktion h liefert. Die Funktion h gehört zu $\mathscr{F}$. Im Falle $u=0$ bildet h das Gebiet G eineindeutig auf das punktierte Innere des Einheitskreises ab (der andere Wurzelzweig würde das Äußere liefern). Die Halbachse $(0, i\infty)$ geht dabei in die Strecke $(-i, 0)$ über. Daher gilt $\lim^* h(z) = -i$. Ebenso erhalten wir folgende Beziehungen: Im Falle $\operatorname{Im} u < 0$ liegt $\lim^* h(z)$ auf dem Strahl $(-i, -i\infty)$. Im Falle $\operatorname{Im} u > 0$ liegt $\lim^* h(z)$ auf der Strecke $(-i, 0)$.

Die Funktionen $g = g_d$:

$$g(z) := \frac{1}{h(z)-d} \qquad \Big(d \text{ unterhalb } \lim_{z\to u}{}^* h(z)\Big)$$

sind in ganz G definiert (weil h den Wert d nicht annimmt; dafür wäre der andere Wurzelzweig nötig). Sie gehören zu $\mathscr{F}$. Ist

$$\delta := \left|\lim{}^* h(z) - d\right|$$

klein, so nimmt g betragsgroße Werte an, wenn z oberhalb S und nahe u liegt. Noch größere Betragswerte findet man bei den Ableitungen der Funktion. Das läßt sich so präzisieren: Für $\delta \to 0$ sind $p_j(g_d)$ und $L_j(g_d)$ asymptotisch proportional δ^{-j-1}. Das schließt Abschätzungen der Gestalt

$$\left|L_j(f)\right| \leqq M_j\big(p_0(f) + \cdots + p_{j-1}(f)\big) \qquad (f \in \mathscr{F})$$

aus. Wir haben also ord $L_j \geqq j$ und damit ord $L_j = j$.

Lemma 1 zeigt nun, daß das Gleichungssystem in Lemma 2 für beliebige c_j lösbar ist.

§ 3. Viele Grenzpunkte

Wir betrachten eine abzählbare abgeschlossene Menge $\{z_0, z_1, \cdots\}$ komplexer Zahlen. Dabei machen wir folgende Voraussetzung: Es gibt Sektoren

$$H_k: \quad |z-z_k| \leqq \rho_k, \qquad \alpha_k \leqq \arg(z-z_k) \leqq \beta_k$$

mit

$$0<\rho_k \to 0; \; 0<\beta_k-\alpha_k<2\pi,$$

die paarweise punktfremd sind:

$$H_k \cap H_l = \phi \qquad (k \neq l).$$

Die Voraussetzung ist zum Beispiel im Falle $z_0=0$, $z_1=1/1$, $z_2=1/2$, $\cdots$ erfüllt, also für eine nichtisolierte Menge.

In H_k wählen wir einen offenen Teilsektor W_k:

$$0<|z-z_k|<\rho_k^*, \qquad \alpha_k^*<\arg(z-z_k)<\beta_k^*,$$

wo

$$0<\rho_k^*<\rho_k, \qquad \alpha_k<\alpha_k^*<\beta_k^*<\beta_k.$$

Der Rand von W_k besteht aus einem Bogen und einem geknickten Schlitz (Streckenzug) $[a_k, z_k, b_k]$. Diesen Schlitz bezeichnen wir mit S_k.

SATZ 3. *Sei $\{z_0, z_1, \cdots\}$ eine abzählbare abgeschlossene Menge komplexer Zahlen. Es gebe Sektoren H_k der beschriebenen Art, in H_k seien Schlitze S_k wie oben festgelegt. Zu vorgegebenen c_{jk} gibt es dann eine Funktion f, welche in $\boldsymbol{C}\backslash \cup S_k$ holomorph ist und die Bedingungen*

$$\lim_{z\to z_k}{}^* f^{(j)}(z) = c_{jk} \qquad (j, k=0, 1, \cdots)$$

erfüllt.

BEMERKUNGEN. Dabei bedeutet lim* den Limes für $z\to z_k$ mit $z\in W_k$. Die Funktion f hat also in jedem z_k Grenzableitungen bei Annäherung aus einem Sektor. Ferner liegt die Funktion in dem unten beschriebenen Funktionenraum $\mathscr{F}$, woraus sich weitere Eigenschaften von f ergeben. Bei der Konstruktion von f (und der Festlegung von $\mathscr{F}$) sind manche Varianten möglich.

BEWEIS. Aus der Menge der in $\boldsymbol{C}\backslash \cup S_k$ holomorphen Funktionen f schneiden wir einen Teilmenge $\mathscr{F}$ heraus durch die Forderungen:

$$p_{jk}(f):=\sup_{z\in G_k} r_k(z)\left|f^{(j)}(z)\right|<\infty \qquad (j, k=0, 1, \cdots)$$

$$L_{jk}(f):=\lim_{z\to z_k}{}^{*} f^{(j)}(z) \quad \text{existiert} \qquad (j, k=0, 1, \cdots).$$

Dabei sei

$$G_k:=\boldsymbol{C}\backslash(S_k\cup\bigcup_{l\neq k} H_l)$$

und

$$r_k(z):=\exp\left(-\frac{1}{|z-a_k|}-\frac{1}{|z-b_k|}\right).$$

Die Menge $\mathscr{F}$ bildet in natürlicher Weise einen linearen Raum sowie einen F-Raum $\mathscr{F}=[\mathscr{F}\ ;\ p_{jk}]$ mit den genannten Halbnormen. Letztere ordnen wir gemäß

(1) $$q_0:=p_{00}, \qquad q_1:=p_{01}, \qquad q_2:=p_{10}, \cdots$$

zu einer Einfachfolge $\{q_l\}$ an.

L_{jk} ist eine stetige Linearform im F-Raum $\mathscr{F}$. Offenbar gilt

$$\left|L_{jk}(f)\right|\leqq q_l(f) \qquad (f\in\mathscr{F}),$$

wenn wir l gemäß (1) aus (j, k) bestimmen. Andrerseits gilt für kein M eine Abschätzung

$$\left|L_{jk}(f)\right|\leqq M\big(q_0(f)+\cdots+q_{l-1}(f)\big) \qquad (f\in\mathscr{F})$$

Das erkennen wir ähnlich wie bei Lemma 2. Wir nehmen Funktionen

$$g(z)=\frac{1}{h_k(z)-d},$$

wo

$$h_k(z):=z-\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}$$

ist. Dabei wählen wir d in der Nähe von $\lim^* h_k(z)$, aber außerhalb des Wertevorrats von h_k. Wie dort erkennt man, daß $q_0(g), \cdots, q_{l-1}(g)$ im Vergleich zu $L_{jk}(q)$ klein sind. Lemma 1 liefert die Existenz eines $f\in\mathscr{F}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Literatur

[1] M. EIDELHEIT: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math., **6** (1936), 139–148.

[2] M. EIDELHEIT: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II), *ibid.*, **7** (1938), 150–154.

[3] Ph. FRANKLIN: Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag-Leffler's theorem, Acta Math., **47** (1926), 371–385.

[4] W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER: Matrixtransformationen mit voller Reichweite, Enseignement Math., **15** (1969), 233–235.

[5] W. NIETHAMMER und K. ZELLER: Unendliche Gleichungssysteme mit beliebiger rechter Seite, Math. Z., **96** (1967), 1–6.

[6] G. M. PETERSEN und A. C. BAKER: On a theorem of Pólya (II), J. London Math. Soc., **39** (1964), 745–752.

[7] F. PITTNAUER: Vorlesungen über asymptotische Reihen, Lecture Notes in Mathematics, 301, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1972.

[8] F. PITTNAUER und K. ZELLER: Analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Grenzableitungen, Studia Math., **31** (1968), 153–158.

[9] G. PÓLYA: Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen, Comment. Math. Helv., **11** (1939), 234–252. Ergänzung in Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1940), 129.

Kazuo ISHIGURO
Mathematisches Institut
Hokkaido Universität
Sapporo, Japan

Karl ZELLER
Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Tübingen
Bundesrepublik Deutscland