ÜBER DAS PRINZIP IN DER THEORIE DER ABSTRAKTEN RÄUME

Von

Takeshi INAGAKI

Einleitung. Es scheint mir, dass in der Theorie der abstrakten Räume Relativisierung, Lokalisierung und Spezialisierung die wichtigsten drei Prinzipen sind. Der Zweck dieser Arbeit ist, das Prinzip der Spezialisierung zu untersuchen. Das Prinzip der Spezialisierung ist zum ersten Mal von Herrn E. W. CHITTENDEN behandelt worden.[1]

Spezialisierung besteht darin, dass, wenn ein abstrakter Raum R und eine Eigenschaft E gegeben sind, wir den Operator O finden, der die folgenden beiden Bedingungen erfüllt.

(I) Der Operator O wird nur mittels der Eigenschaft, die der Raum R besitzt, konstruiert.

(II) Wenn der Raum R durch den Operator O sich in den Raum R^* verändert, d.h. $O(R) = R^*$, so genügt der Raum R^* den folgenden Forderungen:

(α) Der Raum R^* erhält die Eigenschaft E.

(β) Besitzt der Raum R die Eigenschaft E, so gibt der Operator O eine identische Transformation, d.h. $R \equiv R^*$.

Bei Anwendung dieses Prinzips können wir einen Satz S^* in einem abstrakten Raume R^* mit der Eigenschaft E in einen Satz S im allgemeineren abstrakten Raume R als R^* überführen. So wird z.B. ein Satz S^* in Bezug auf eine abgeschlossene Menge im Raume R^* mit der Eigenschaft E in einen Satz S über die R^*-abgeschlossene Menge in R übergeführt, wobei wir unter einer R^*-abgeschlossenen Menge diejenige Menge M in R verstehen, die durch den früher angegebenen Operator O in die abgeschlossene Menge $M^* = O(M)$ in R^* übergeht.

(1) Siehe: E. W. CHITTENDEN, On general topology and the relation of the properties of the class of all continuous functions to the properties of space, Trans. of the Amer. Math. Soc., Bd. 31 (1929), S. 292–297.

Wir beginnen zuerst mit dem allgemeinsten abstrakten Raume und suchen die Operatoren, die die folgenden Räume konstruieren: monotone Ableitung erhaltender Raum, V-Raum, U-Raum, RIESZscher Raum, accessibler Raum, quasiaccessibler Raum, HAUSDORFFscher Raum und regulärer Raum. Mit anderen Worten, wir denken uns aus den Räumen, welche die allgemeinste Ableitung besitzen, einen, den folgenden Axiomen genügende Ableitung erhaltenden Raum einzuführen[1].

Axiome der Ableitung:

(I) Monotonie: Ist $A \subseteqq B$, so ist $A' \subseteqq B'$.

(II) Distributivität: $(A+B)' \subseteqq A'+B'$.

(III) Die Ableitung von Nullmenge ist null, d.h. $O' = O$.

(IV) Die Ableitung einer aus nur einem Punkte bestehenden Menge ist null, d.h. $\{a\}' = O$.

(V) Ist $p \in M'$, so ist $p \in (M-p)'$.

(VI) Für einen beliebigen Punkt p ist $M' \subseteqq (M-p)'$.

(VII) $M+M'$ ist abgeschlossen.

(VIII) M' ist abgeschlossen.

Trennbarkeitsaxiome:

(T_0) Sind p und q zwei verschiedene Punkte, so gibt es für jeden der Punkte z.B. p eine Umgebung wie $q \bar{\in} V(p)$.

(T_1) Sind p und q zwei verschiedene Punkte, so gibt es Umgebungen von p und q, so dass $V(p) \cdot V(q) = O$ ist.

(T_2) Wenn $p \bar{\in} (M+M')$ ist, so gibt es eine Umgebung von p und eine offene Menge O, die M enthält, so dass $V(p) \cdot O(M) = O$ ist.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich es nicht unterlassen, dem Herrn Prof. K. KUNUGI für seine freundlichen Anweisungen meinen aufrichtigsten Dank zu entbieten.

1. *Der Raum, welcher monotone Ableitung besitzt.* Die Spezialisierung in diesem Falle ist schon von Herrn E. W. CHITTENDEN unternommen worden.[2]

Unter $\delta(M)$ verstehen wir hier die Ableitung in dem allgemeinsten abstrakten Raume. E. W. CHITTENDEN hat eine neue Ableitung $\delta^*(M)$ in der folgenden Weise definiert:

---

(1) Einige von den oben erwähnten Problemen sind bereits von Herrn E. W. CHITTENDEN gelöst worden.

(2) Siehe: E. W. CHITTENDEN, a. a. O., S. 294–295.

$$\delta^*(M) = \sum_{N \subseteq M} \delta(N) .$$

Denken wir uns einen neuen Raum, der $\delta^*(M)$ als Ableitung erhält, dann hat der Raum die Eigenschaft, dass die Ableitung monoton ist. Wenn der ursprüngliche Raum die monotone Ableitung hat, dann ist der neue Raum mit ihm identisch, wie wir leicht erkennen können.

2. *Der die distributive Ableitung besitzende Raum.* Unter $\delta(M)$ verstehen wir die Ableitung in dem allgemeinsten abstrakten Raume. Wir definieren eine neue Ableitung $\delta^*(M)$ folgendermassen:

$$\delta^*(M) = \prod_{(\alpha)} \left(\delta(M_1) + \delta(M_2) + \dots + \delta(M_{n(\alpha)}) \right),$$

wobei $M_1 + M_2 + \dots + M_{n(\alpha)} = M$. $n(\alpha)$ ist dabei endliche Zahl und (α) läuft in $\prod\limits_{(\alpha)}$ über sämtliche Teilungen von M in endliche Zahlen.

Hier möchte ich zeigen, dass die Ableitung $\delta^*(M)$ Distributivität erfüllt. A und B seien zwei beliebige Mengen. Dann gilt nach der Definition, dass

$$\delta^*(A) = \prod_{(\alpha)} \left(\delta(A_1) + \delta(A_2) + \dots + \delta(A_{n(\alpha)}) \right),$$

$$\delta^*(B) = \prod_{(\beta)} \left(\delta(B_1) + \delta(B_2) + \dots + \delta(B_{n(\beta)}) \right)$$

und

$$\delta^*(A+B) = \prod_{(\tau)} \left(\delta(C_1) + \delta(C_2) + \dots + \delta(C_{n(\tau)}) \right),$$

wobei $A_1 + A_2 + \dots + A_{n(\alpha)} = A$, $B_1 + B_2 + \dots + B_{n(\beta)} = B$ und $C_1 + C_2 + \dots + C_{n(\tau)} = A + B$. Daraus folgt

$$\delta^*(A+B) \leqq \prod_{(\alpha,\beta)} \Big(\delta(A_1) + \delta(A_2) + \dots + \delta(A_{n(\alpha)}) + \delta(B_1) + \delta(B_2) + \dots + \delta(B_{n(\beta)}) \Big),$$

denn für die beliebige Teilung von A und B bestimmt sich eine Teilung von $A+B$, die aus der Teilung von A und B besteht. Die Formel $\delta(A_1) + \delta(A_2) + \dots + \delta(A_{n(\alpha)})$ stellen wir kurz mit A_α dar. Nun sind $\delta^*(A) = \prod\limits_{(\alpha)} A_\alpha$, $\delta^*(B) = \prod\limits_{(\beta)} B_\beta$ und $\delta^*(A+B) = \prod\limits_{(\tau)} (A+B)_\tau$, folglich

$$\delta^*(A+B) \leqq \prod_{(\alpha,\beta)} (A_\alpha + B_\beta) .$$

Es genügt also zu zeigen, dass jedes Glied in der Entwicklung des rechten Gliedes der letzten Formel entweder sämtliche A_α oder sämtliche B_β als Faktoren besitzt. Setzen wir voraus, dass ein Glied in der Entwicklung ein A_{α_0} und ein B_{β_0} als Faktoren nicht besitzt, so ergibt sich nicht der Faktor $(A_{\alpha_0}+B_{\beta_0})$ in der Formel $\prod\limits_{(\alpha,\beta)}(A_\alpha+B_\beta)$. Das ist ein Widerspruch. Also gewinnen wir die Relation:

$$\delta^*(A+B) \leqq \delta^*(A)+\delta^*(B)\,.$$

Ist, der ursprüngliche Raum monoton, so ist auch der neue Raum monoton. Denn, wenn $M \leqq N$ ist, gibt es eine Teilung von M $M = MN_1+MN_2+\ldots+MN_p+\ldots+MN_\nu$ für eine beliebige Teilung von N $N = N_1+N_2+\ldots+N_p+\ldots+N_\nu$ und wegen der Voraussetzung, dass die Ableitung in R modoton sei, ist $\delta(MN_p) \leqq \delta(N_p)$, folglich gilt nach kurzer Rechnung $\delta^*(M) \leqq \delta^*(N)$.

Wenn der ursprüngliche Raum monoton und distributiv ist, d.h. wenn in ihm das additive Gesetz gilt, so ist es klar, dass

$$\delta^*(M) = \delta(M)\,.$$

Mit anderen Worten, der neue Raum ist mit dem ursprünglichen Raume identisch.

Beispiel. Wir denken an den aus dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$[(1)] entstehenden Raum und definieren die Ableitung $\delta(M)$ einer Menge M im Raume derart, dass $\delta(M) = [\alpha, \beta]$ ist, wobei α und β die untere und obere Grenze der Ableitung M' von M im gewöhnlichen Sinne sind.

In diesem Raume gilt Distributivität, d.h. Axiom (II), nicht. Nehmen wir nun die Mengen $A = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $B = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ an, so sind $\delta(A+B) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\delta(A) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ und $\delta(B) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, daraus folgt unmittelbar:

$$\delta(A+B) > \delta(A)+\delta(B)\,.$$

Definieren wir eine neue Ableitung $\delta^*(M)$ durch das schon ausgesprochene Verfahren, d.h.

$$\delta^*(M) = \prod_{(\alpha)}\Big(\delta(M_1)+\delta(M_2)+\ldots\ldots+\delta(M_{n(\alpha)})\Big)\,,$$

(1) Wir folgen hier der Terminologie von A. DENJOY: Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist Menge von Punkte x wie $a \leqq x \leqq b$.

so erfüllt $\delta^*(M)$ das Axiom (II). Dazu können wir noch zeigen, dass es mit der Ableitung M' im gewöhnlichen Sinne identisch ist. In der Tat, setzen wir $p \in M'$ voraus, so enthält die gewöhnliche Ableitung eines Teiles in der endlichen Teilung von M den Punkt p; daher enthält auch $\delta^*(M)$ den Punkt p, d.h. $M' \leqq \delta^*(M)$. Ferner können wir zeigen, dass $M' \geqq \delta^*(M)$. Denn, wenn wir $p \bar{\in} M'$ voraussetzen, ist es klar, dass für eine Teilung $M=[0, p] \cdot M+[p, 1] \cdot M$ $p \bar{\in} \big([0, p] \cdot M\big)'$ und $p \bar{\in} \big([p, 1] \cdot M\big)'$ sind, demnach

$$p \bar{\in} \delta\big([0, p] \cdot M\big) + \delta\big([p, 1] \cdot M\big),$$

also folgt daraus $p \bar{\in} \delta^*(M)$. Somit ist $M' \geqq \delta^*(M)$. Daraus folgt unmittelbar $\delta^*(M) = M'$.

3. *V-Raum.*[1] Wir denken an den den Axiomen (I) und (III) genügenden Raum[2], und, für den beliebigen Punkt p, bezeichen durch $V(p)$ eine Menge, die p als den inneren Punkt enthält.

Verstehen wir unter $\delta^*(M)$ eine neue Ableitung, die folgendermassen definiert wird, so ist der $\delta^*(M)$ als Ableitung habende Raum V-Raum :

$$\delta^*(M) \ni p \rightleftarrows V(p) \cdot (M-p) \neq 0 \text{ für alle Umgebungen von } p.$$

Ist der ursprüngliche Raum V-Raum, so ist es nach dem FRÉCHETschen Satz[3] klar, dass der neue Raum mit dem ersten identisch ist.

4. *U-Raum.* Unter U-Raum verstehen wir einen Raum, in dem die Axiome (I), (III) und (VI) sich ergeben.

Unter $\delta(M)$ verstehen wir die Ableitung im V-Raume. Die neue Ableitung $\delta^*(M)$ wird durch

$$\delta^*(M) = \prod_A \delta(M-A)$$

definiert, wobei A eine beliebige endliche Menge ist. Dass dabei $\delta^*(M)$ den Axiomen (I) und (III) genügt, ist klar.

Weiter können wir zeigen, dass $\delta^*(M)$ das Axiom (VI) erfüllt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt p an, so ist nämlich auch $p+A$ eine endliche Menge. Hieraus erhalten wir durch Definition die Formel $\delta^*(M) \leqq \prod_A \delta(M-p-A)$, denn $\prod_A \delta(M-A) \leqq \prod_A \delta(M-p-A)$. Da

(1) Unter V-Raum verstehen wir FRÉCHETschen "espace v". Siehe : M. FRÉCH T, Espaces Abstraits, Paris (1927), S. 172.
(2) Man sehe Nr. 8 in dieser Arbeit.
(3) Siehe : C. R. Paris, Bd. 165 (1917), S. 359–360.

$\underset{A}{\Pi}\delta(M-p-A) = \underset{A}{\Pi}\delta\big((M-p)-A\big)$ ist, $\underset{A}{\Pi}\delta(M-p-A) = \delta^*(M-p)$ nach der Definition, also $\delta^*(M) \subseteqq \delta^*(M-p)$. Somit entspricht $\delta^*(M)$ unserer Behauptung.

Ist der ursprüngliche Raum U-Raum, so ist der neue Raum mit dem vorangehenden identisch. Denn A wird in der Form $A = p_1+p_2+\ldots+p_n$ dargestellt, da A endlich ist. Daher erhalten wir $\delta(M-A) = \delta(M-p_1-p_2-p_3-\ldots-p_n)$. Nach den Axiomen (I) und (VI) ist

$$\delta(M-p_1-p_2-\ldots.-p_n) = \delta(M-p_1-p_2-\ldots.-p_{n-1}),$$

ebenfalls folgt durch Repetition der Axiome (I) und (VI) schliesslich $\delta(M-A) = \delta(M)$, daraus folgt $\delta^*(M) = \underset{A}{\Pi}\delta(M-A) = \delta(M)$.

5. RIESZ*scher Raum.* Damit U-Raum RIESZscher Raum sei, ist es notwendig und hinreichend, dass U-Raum das Axiom (II) erfüllt. Also genügt es, in den U-Raum das Axiom (II)—wie in Nr. 2.—einzuleiten. Ist der ursprüngliche Raum RIESZscher Raum, so ist es klar, dass die Transformation identisch ist.

6. *Accessibler Raum.* Accessibler Raum ist RIESZscher Raum: in ihm ist die Ableitung einer Menge abgeschlossen. Da RIESZscher Raum V-Raum ist, stellen wir die Umgebung von p in ihm mit $V(p)$ dar. Nun erfüllt diese Umgebung das Axiom (B) von HAUSDORFF:

(B) Zu zwei Umgebungen $U(x)$, $V(x)$ desselben Punktes gibt es eine dritte $W(x) \subseteqq U(x) \cdot V(x)$.

Nehmen wir die aus inneren Punkten $I(V(p))$ von $V(p)$ in dem Raume entstehende Menge als eine neue Umgebung an, so ist der Raum mit der durch Umgebung $I(V(p))$ bestimmten Ableitung accessibler Raum. Denn es folgt in dem neuen Raume nach leichter Berechnung, dass die Axiome (I), (II) und (IV) bestehen. Das Axiom (VII) besteht auch in ihm. Dies können wir wie folgt beweisen. Setzen wir q den beliebigen Punkt derart, dass $q \in I(V(p))$ ist, so erhalten wir wegen der Eigenschaft von V-Raum eine der folgenden Relation genügende Umgebung von q; $V(q) \subseteqq V(p)$. Daraus folgt ferner—wegen der Eigenschaft von V-Raum—

$$I\big(V(q)\big) \subseteqq I\big(V(p)\big).$$

Also ist die Umgebung $I(V(p))$ eine offene Menge im neuen Raume. Deshalb ist der Raum ein accessibler Raum nach dem TUMARKINschen

Satz[1], d.h. in ihm entsteht das Axiom (VII)[2]. Somit ist der neue Raum accessibler Raum. Wenn $V(p)$ offen ist, dann ist der ursprüngliche Raum accessibler Raum, und darum ist $I(V(p)) = V(p)$; demnach ist es klar, dass die beiden Räume identisch sind.

7. *Quasiaccesibler Raum*[3]. Damit V-Raum quasiaccessibler Raum sei, ist es notwendig und hinreichend, dass wir die offenen Umgebungen als Umgebungssystem, ohne die Ableitung zu verändern, annehmen können. Nehmen wir also, wie in Nr. 6, eine neue Umgebung $I(V(p))$ statt der ursprünglichen Umgebung $V(p)$ im V-Raume an, so erhalten wir einen quasiaccessibler Raum. Jetzt ist es auch klar, dass der neue Raum mit dem ursprünglichen identisch ist, wenn letzterer quasiaccessibler Raum ist.

Beispiel. Wir denken an den aus allen reellen Zahlen entstehenden Raum, und definieren die Umgebung von jedem Punkte x in ihm derart, dass das offene Intervall, welches x als Mittelpunkt enthält, und die beiden Punkte $[x-1]$, $[x+1]$ entsteht, wo $[a]$ die zu a nächstliegende ganze Zahl ist. Denken wir an die aus nur einem Punkt 0 entstehende Menge M, dann ist es klar, dass

$$2 \bar{\epsilon} M+M' \qquad \text{und} \qquad 2 \epsilon (M+M')+(M+M')' .$$

Daraus folgt deutlich, dass der Raum nicht quasiaccessibler Raum ist.

Nehmen wir die aus dem inneren Punkte der Umgebung entstehende Menge als neue Umgebung an, so folgt unmittelbar, dass das aus der neuen Umgebung entstehende Umgebungssystem mit dem gewöhnlichen Umgebungssystem äquivalent ist. Hieraus können wir leicht ersehen, dass der das neue Umgebungssystem als Umgebungssystem besitzende Raum quasiaccessibler Raum ist.

Ein anderes Verfahren[4], das Axiom (VII) einzuleiten, ist schon von Herrn E. W. CHITTENDEN gegeben worden, aber dieses Verfahren ist von unserem verschieden, wie leicht aus obigem Beispiele zu ersehen ist.

---

(1) TUMARKINscher Satz: Das Axiom (VII) entsteht im V-Raume, dann und nur dann, wenn er die offene Menge in ihm als Umgebung annehmen kann.

(2) Es ist leicht zu sehen, wenn Axiome (I), (II), (IV) und (VII) wahr sind, dieses auch bei dem Axiom (VIII) zutrifft. Sind aber die Axiome (I), (II), (VIII) wahr, so ist das Axiom (VII) ebenfalls wahr.

(3) Siehe: A. APPERT. Sur l'extension aux espaces (v) les plus généraux des propriétés simples des espaces (v) vérifiant la condition $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$, Extras din Math. Bd. 11 (1935), S. 23-31; E. W. CHITTENDEN, a. a. O., S. 295-297.

(4) Siehe: E. W. CHITTENDEN, a. a. O., S. 295-297.

8. *Einführung von* (T_0). Unter $\delta(M)$ verstehen wir die Ableitung des allgemeinsten Raumes. Wir definieren zunächst die neue Ableitung $\delta^*(M)$ in folgender Art:

$$\delta^*(M) = \sum_{N_1,\, N_2 \leqq M} \big(\delta(N_1) - \delta(N_2)\big)\,,$$

wobei N_1 und N_2 Untermengen von M und beide nicht leer sind. Betrachten wir, dass der wie schon oben erwähnte Raum vorhanden ist,—also $\delta^*(A) \leqq \delta^*(B)$, falls $A \leqq B$ ist—so ist es auch klar, dass die Ableitung der aus nur einem Punkte entstehenden Menge leer ist.

Denken wir an V-Raum, welcher aus dem $\delta^*(M)$ als Ableitung erhaltenden Raume konstruiert wird, so entsteht das Axiom (T_0) im V-Raume. Denn, nehmen wir im V-Raume zwei verschieden beliebige Punkte p und q an, und denken wir an die komplemente Menge $c\{q\}$ von q, so gelten $p \in c\{q\}$ und $q \bar{\in} c\{q\}$.

Nach der Definition von $\delta^*(M)$ ist es klar, dass $\delta^*(q) = 0$ ist. Daraus folgt $c\{q\} \cdot (q + \delta^*(q)) = 0$. Also enthält $c\{q\}$ den Punkt p als innern Punkt in sich. $c\{q\}$ enthält also eine Umgebung von p d.h. $V(p) \leqq c\{q\}$, so folgt unmittelbar $q \bar{\in} V(p)$.

Ist der ursprüngliche Raum V-Raum und erfüllt das Axiom (T_0), so ist es evident, dass der neue Raum mit ihm identisch ist.

9. *Einführung von* (T_1). Wir denken zuerst an V-Raum. Damit man den beiden verschiedenen beliebigen Punkten p und q ihre Umgebungen $V(p)$ und $V(q)$ derart geben können, dass $V(p) \cdot V(q) = 0$ sei, ist es notwendig und hinreichend, dass für einen der beiden Punkte z.B. für p die Umgebung $V(p)$ sich ergibt und für die Umgebung $q \bar{\in} \overline{V(p)}$ genügt, wobei wir unter $\overline{V(p)}$ $V(p) + V'(p)$ in dem Raume verstehen.

Wir denken an $\prod_{V(p)} \overline{V(p)} = P$, dabei bedeutet $\prod_{V(p)} \overline{V(p)}$ den Durchschnitt von $\overline{V(p)}$ für alle Umgebungen $V(p)$ von p. Nehmen wir einen Punkt q von P an und konstruieren $\prod_{V(q)} \overline{V(q)} = Q$, so ist $p \in Q$. Denn, wenn $p \bar{\in} Q$ ist, es gibt eine Umgebung $V(q)$ von q derart, dass $p \bar{\in} \overline{V(q)}$, folglich entsteht für eine Umgebung von p $V(p) \cdot V(q) = 0$, demnach gilt für $V(p)$ $q \bar{\in} \overline{V(p)}$, daraus folgt unmittelbar $q \bar{\in} P$; doch dieses Ergebnis enthält einen Widerspruch, da nach dem Vorausgesetzten $q \in P$ ist. Hieraus folgt $p \in Q$.

Es ist also evident, dass, wenn $q \in P$, so ist $p \in Q$ und umgekehrt. Wir konstruieren aus einem Punkte p von V-Raume $\prod_{V(p)} \overline{V(p)} = P$, aus jedem

Punkte x von $P \ \prod_{V(x)} \overline{V(x)} = X$ und dann auch aus jedem Punkte y von $X \ \prod_{V(y)} \overline{V(y)} = Y$. Die Summe der aus Punkte p nach *endlichem Verfahren* wie oben gewonnene Mengen stellen wir mit $M(p)$ dar.

Es ist leicht zu sehen, dass, wenn $q \in M(p)$ ist, dann ist $M(p)=M(q)$. Folglich wird der Raum in der folgenden Weise zerlegt:

$$R = \sum M(p) .$$

Dabei gilt für die beiden beliebigen Elemente $M(x)$, $M(y)$, dass entweder $M(x) \equiv M(y)$ oder $M(x) \cdot M(y) = 0$.

Wir betrachten den Raum R^*, dessen Punkt p^* die Menge $M(p)$ im ursprünglichen Raume ist. Wir definieren die Umgebung $V^*(p^*)$ von einem Punkte p^* in R^* in der folgenden Weise:

Aus jeder Menge $M(p)$ von R wählen wir einen Vertreter durch eine bestimmte Methode und stellen in Reihe:

$$\alpha) \qquad p_1 , \ p_2 , \ \ldots\ldots , \ p_\xi , \ \ldots\ldots\ldots$$

Dass hier die Korrespondenz von p und $M(p)$ eineindeutig ist, ist evident.

Wir bezeichnen $M(p)$ mit $M(p_\xi)$, wenn der Vertreter von $M(p)$ p_ξ ist. Für p_ξ nehmen wir eine Umgebung $V(p_\xi)$ in R an, und setzen für jeden Punkt p_η, der der in $V(p_\xi)$ liegende Vertreter ist, $V^*(p^*) = V^*(M(p)) = \sum_{p_\eta} M(p_\eta)$. Die Umgebung in R^* hängt nach der Definition von der Weise, den Vertreter von $M(p)$ auszuwählen, ab. Wenn wir aber für alle möglichen Fälle, den Vertreter von $M(p)$ auszuwählen, die Umgebung in R^* definieren, so ist die Umgebung von der Auswahlweise des Vertreters unabhängig.

Wir wollen nun zeigen, dass das Axiom (T_1) in R^* gilt. Nehmen wir zwei verschiedene Punkte p^* und q^* in R^* an, so erhalten wir in der Reine α) deren Vertreter p und q. Für p und q gibt es nun die Umgebungen in R nach der Eigenschaft von p^* und q^* so, dass $V(p) \cdot V(q) = 0$ ist. Unter $V^*(p^*)$, $V^*(q^*)$ verstehen wir die aus $V(p)$ und $V(q)$ konstruierten Umgebungen, wobei $V^*(p^*) = \sum_{p_\xi \in V(p)} M(p_\xi)$, $V^*(q^*) = \sum_{q_\eta \in V(q)} M(q_\eta)$, und p_ξ und q_η Vertreter in der Reihe α) sind. Es genügt zu zeigen, dass $V^*(p^*) \cdot V^*(q^*) = 0$ ist. Setzen wir nun $r^* \in V^*(p^*) \cdot V^*(q^*)$ voraus, dann gibt es einen Vertreter von r^* in der Reihe α). Bezeichnen wir den Vertreter von r^* mit r, so ist nach der Definition von $V^*(p^*)$ und $V^*(q^*)$ $r \in V(p) \cdot V(q)$. Das ist ein Widerspruch. Daraus folgt unmittelbar

$$V^*(p^*) \cdot V^*(q^*) = 0 .$$

Wenn der ursprüngliche Raum dem Axiom (T_1) genügt, ist es klar, dass $\underset{V(p)}{\Pi} V(p)$ p selbst ist, d.h. $R = R^*$.

Beispiel[1]. Unter dem Raume R verstehen wir aus Punkte (x, y), Originalpunkte $(0, 0)$ und $p = (1,0)$ entstehende Menge, wobei $x > 0$, $y > 0$ sind, und definieren die Umgebung in jedem Punkte in folgender Weise:

(a) Die Umgebung im Punkte (x, y), wenn $(x, y) \neq (1, 0)$, besteht aus dem gemeinsamen Teile der gewöhnlichen Umgebung in der Ebene und des Raumes R.

(b) Die Umgebung von $p=(1,0)$ besteht aus dem Punkte $p=(1,0)$ und aus dem der Ungleichung $0 < y < f(x)$ genügenden Punkte, dabei ist $f(x)$ eine beliebige positive stetige Funktion, die in $0 < x$ definiert wird.

Dass das Axiom (T_1) in R für den Originalpunkt $(0, 0)$ und den Punkt $p = (1,0)$ nicht gilt, ist klar. Denken wir an $\underset{V(p)}{\Pi} \overline{V(p)}$ hinsichtlich eines beliebigen Punktes p, so gibt es zwei Fälle

1° $\underset{V(p)}{\Pi} \overline{V(p)} = p$, wenn p weder $(0,0)$ noch $(1,0)$ ist.

2° $\underset{V(p)}{\Pi} \overline{V(p)} = (0,0)+(1,0)$, wenn p entweder $(0,0)$, oder $(1,0)$ ist.

Wenn der Raum R durch den Operator, der zwei Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$ als einen Punkt $\mathfrak{p}$ ansieht, sich in einen Raum R^* verändert, so entsteht R^* aus dem Punkte (x, y) und einem anderen Punkte $\mathfrak{p}$, wobei $x > 0$, $y > 0$.

In R^* ist die Umgebung von dem Punkte (x, y), $(x > 0, y > 0)$, dieselbe wie in R und die Umgebung von $\mathfrak{p}$ dieselbe wie von $(0, 0)$, wenn wir $(0, 0)$ als Vertreter der Menge $(0,0)+(1,0)$ aufnehmen. Es ist also evident, dass das Axiom (T_1) in R^* gilt.

10. *Einführung von* (T_2). Wir denken an den dem Axiom (T_0) genügenden quasiaccessiblen Raum (R, δ) und bezeichnen die Umgebung mit $V(p)$. Zunächst denken wir an den die Umgebung $\overline{V(p)}$ habenden V-Raum (R_1, δ_1), dabei bedeutet $\overline{V(p)}$ $V(p)+V'(P)$ von $V(p)$ im V-Raume (R, δ), und unter $V^*(p)$ verstehen wir den offenen Kern von $\overline{V(p)}$ im V-Raume (R_1, δ_1), wenn es p enthält, sonst setzen wir $V^*(p) = p$.

An dieser Stelle können wir zeigen, dass $G+\delta(G) = G+\delta_1(G)$ ist, wenn G eine offene Menge in (R, δ) ist. Es ist zuerst klar, dass

(1) Siehe: O. FRINK, The fourth postulates of RIESZ and HAUSDORFF, Bulletin of the Amer. Math. Soc., Bd. 36 (1930), S. 281–283.

$G+\delta(G) \leqq G+\delta_1(G)$ ist, weil $\delta(M) \leqq \delta_1(M)$. Zunächst müssen wir zeigen, dass $G+\delta(G) \geqq G+\delta_1(G)$ ist. Setzen wir voraus, dass p ein beliebiger Punkt von $G+\delta_1(G)$ ist, so gilt für alle Umgebung $\overline{V(p)}$ in (R_1, δ_1) von p $\overline{V(p)} \cdot G \neq 0$ z.B. $q \in \overline{V(p)} \cdot G$, sodann entstehen $q \in \overline{V(p)}$ und $q \in G$. Folglich entsteht für alle Umgebung $U(q)$ in (R, δ) von q $U(q) \cdot V(p) \neq 0$ und anderseits gibt es eine Umgebung $U(q)$ von q, so dass $U(q) \leqq G$ ist, weil G eine offene Menge in (R, δ) ist. Daraus folgt für alle Umgebung $V(p)$ von p, dass $V(p) \cdot G \neq 0$ ist, d.h. $p \in G+\delta(G)$. Also haben wir gezeigt: $G+\delta(G) = G+\delta_1(G)$.

Nun können wir zeigen, dass der neue Raum (R^*, δ^*) mit $V^*(p)$ als Umgebung dem Axiom (T_2) genügt. Ist $x \in V^*(p)$, dann ist x nach der Definition ein innerer Punkt von $V^*(p)$ in (R_1, δ_1), also gilt, falls $p \in V^*(p)$, $V^*(p) \geqq \overline{U(x)}$, nun gilt auch $\overline{U(x)} \geqq U^*(x)$. Folglich erhalten wir die folgenden Relationen:

$$V^*(p) \geqq \overline{U(x)} \geqq U^*(x),$$

und auf alle Fälle $V^*(p) \geqq U^*(x)$. Daraus folgt, dass $V^*(p)$ eine offene Menge in (R^*, δ^*) ist. Mit anderen Worten (R^*, δ^*) ist quasiaccessibler Raum. Da nun (R, δ) quasiaccessibler Raum ist, so sind $U(p)$ bzw. $\overline{U(p)}$ eine offene bzw. eine abgeschlossene Menge in (R, δ), ausserdem ist $\delta^*(M) \leqq \delta_1(M)$. Jetzt erhalten wir demnach unmittelbar die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\overline{U(p)} &= \overline{U(p)} + \delta(\overline{U(p)}) = I(\overline{U(p)}) + \delta_1\big(I(\overline{U(p)})\big)\\ &\geqq U^*(p) + \delta_1(U^*(p)) \geqq U^*(p) + \delta^*(U^*(p)),\end{aligned}$$

d.h. $$\overline{U(p)} \geqq U^*(p) + \delta^*(U^*(p)).$$

Daraus folgt, falls $p \in V^*(p)$,

$$V^*(p) \geqq \overline{U(p)} \geqq U^*(p) + \delta^*(U^*(p)),$$

und auf alle Fälle $V^*(p) \geqq U^*(p) + \delta^*(U^*(p))$.

Damit nun der quasiaccessible Raum dem Axiom (T_2) genüge, ist es notwendig und hinreichend, dass die beliebige Umgebung von jedem Punkte p die abgeschlossene Hülle von einer andern Umgebung von p enthält. Hieraus folgt, dass das Axiom (T_2) in (R^*, δ^*) gilt.

Ist der ursprüngliche Raum der dem Axiom (T_2) genügende, so ist $V(p)$ mit $\overline{V(p)}$ äquivalent, demnach ist auch $V(p)$ mit $V^*(p)$ äquivalent. Also ist der Raum (R^*, δ^*) mit dem Raume (R, δ) identisch.

Beispiel.[1] Wir denken an den aus allen reellen Zahlen entstehenden Raum und definieren die Umgebung von jedem Punkte p in folgender Weise:

1) Die Umgebung von p, wenn $p \neq 0$, ist die gewöhnliche Umgebung.

2) Die Umgebung von p, wenn $p=0$, ist die aus der gewöhnlichen Umgebung den Punkt $\xi = \pm\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ streichende Menge.

Im so bestimmten Raume ist der Punkt $p = 0$ kein regulärer Punkt, denn die abgeschlossene Hülle von $V(0)$ enthält den Punkt $\xi = \pm \frac{1}{n}$ $(n \geqq n_0)$, wie leicht zu sehen ist. Alle Umgebung von $p = 0$ enthält also nicht $\overline{V(0)}$.

Wir betrachten den Raum R_1, der $\overline{V(p)}$ als Umgebung von p enthält, dabei ist $\overline{V(p)}$ das den Punkt p als Mittelpunkt habende abgeschlosssene Intervall. Der offene Kern $V^*(p)$ von $\overline{V(p)}$ in dem Raume R_1 ist ein offenes Intervall, welches die Umgebung von p in gewöhnlichem Sinne ist. Demnach genügt der Raum R^*, der $V^*(p)$ als Umgebung enthält, dem Axiom (T_2).

(1) Vergleiche: P. ALEXANDROFF et P. URYSOHN, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, afdeeling Natuurkunde (Eerste sectie), Bd. 14 (1929), S. 5.

Bemerkung bei der Korrektur.—Herr L.M. GRAVES hat in der letzten Zeit den die additive Ableitung besitzenden Raum eingeführt: Corrections to my previous paper "Topics in the functional calculus", Bulletin of the Amer. Math. Soc., Bd. 42 (1936), S. 381. Wir können aber leicht zeigen, dass seine Operation von unserer in Nr. 2 dieser Arbeit verschieden ist. Um dies zu zeigen, denken wir uns nun den schon im Beispiele von Nr. 2 ausgesprochenen Raum, der $\delta(M)$ als Ableitung hat. $\delta(M)$ ist also eine von Herrn E.W. CHITTENDEN definierten Mengenfunktion K. Da $\delta(M)$ monoton ist, ist das ferner die von Herrn E. W. CHITTENDEN eingeführte Mengenfunktion L. Es folgt unmittelbar aus der von Herrn L. M. GRAVES gegebenen Definition der additiven Mengenfunktion $L_a(M)$, dass

$$L_a(M) = \delta(M)+\sum_D \Big[\delta(M+D)-\delta(D)\Big],$$

wo D eine beliebige Menge in R. Wir setzen jetzt voraus, dass $\delta(M)$ nicht leer ist, etwa $p \in \delta(M)$. Nehmen wir nun $D_1 = \left\{\frac{1}{n}\right\}$, $D_2 = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$, so gilt nach kurzer Berechnung, dass $L_a(M) \geqq (0, 1)$.