DIE KRÜMMUNGSTHEORIE IM FINSLERSCHEN RAUME

Von

Hitoshi HOMBU

Im n-dimensionalen FINSLERschen Raume K_n(1) wird eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit als Ort ihrer tangierenden Linienelemente K_m(1) betrachtet. In der Krümmungstheorie von K_m in K_n tritt die Unbequemlichkeit ein, dass die CARTANsche Übertragung C_m(2) in K_m nicht im allgemeinen aus der C_n in K_n durch die Projektionsmethode in eine pseudonormale Richtung erhalten wird (§§ 1, 2), und noch dass die kovarianten partiellen Ableitungen, die der durch die letzte Projektion erhaltenen Übertragung in K_m zugehörig sind, nicht als die K_m-Komponenten der kovarianten Ableitungen in C_n definiert werden sollen (§ 3).

Schon haben J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN die D-Symbolik, die in Gedanken auf VAN DER WAERDEN und BORTOLOTTI zurückführt, in vollständiger und prägnanter Gestalt vorgelegt und gezeigt, dass mit deren Hilfe die Behandlung der Krümmungstheorie von V_m und V_n^m in V_n sich besonders einfach gestaltet.(3) Im Falle von V_m in V_n wird aber die D_b-Operator allein verwendet, und die D_μ- und die D_q-Operator spielen keine wichtige Rolle. Dieser Umstand beruht darauf, dass in dieser Theorie nur die Grössen, welche in den Punkten von V_m und nicht von V_n definiert sind, in Betracht gezogen werden, und dass für solche Grössen die beiden Operatoren D_μ und D_q nicht sinnvoll sind, d.h. keine bestimmte Bedeutung haben. Die verschiedenen D_b-Ableitungen einer Grösse A sind alle von den Komponenten $B_b^\mu \nabla_\mu A$ des Differentials δA

$$\delta A = \nabla_\mu A \cdot dx^\mu = B_b^\mu \nabla_\mu A \cdot dy^b$$

(1) A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 56 (1932), S. 245–76, insbesondere S. 249. Wir lassen einfachheitshalber den Index (1) von K_n(1) und K_m(1) weg.

(2) E. CARTAN, Les espaces de FINSLER, Paris, 1934.

(3) J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Annalen, Bd. 103 (1930), S. 752-83; Über die Krümmung einer V_m in V_n; eine Revision der Krümmungstheorie, Math. Annalen, Bd. 105 (1930), S. 144–159.

gebildet. Da im Falle der nichtholonomen Gebilde V_n^m in V_n dagegen die in allen Punkten der V_n definierten Grössen hervortreten, so werden die D-Operatoren dreier Arten sinnvoll und unentbehrlich. Uns auf diese Betrachtung stützend, können wir die D-Symbolik für K_m und die nichtholonomen Gebilde in K_n verallgemeinern (§ 3 bzw. 6) und auf ihre Krümmungstheorie verwenden (§§ 4–6). In der Theorie von K_m konstruieren wir in jedem Elemente zu K_m senkrechte lokale Richtungen aus den Indizesgebieten[1] derjenigen Grössen, welche mittels sukzessiver D_b-Ableitungen zweier Arten aus der tangierenden Richtung hergeleitet werden. Die gesamten Richtungen werden nicht notwendig aufgespannt von sukzessiven gewöhnlichen partiellen Differentialquotienten der Parameterdarstellung von X_m:

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial y^{b_1}},\ \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{b_1}\partial y^{b_2}},\ \ldots\ldots,\ \frac{\partial^i x^\nu}{\partial y^{b_1}\partial y^{b_2}\ldots\partial y^{b_i}},\ \ldots\ldots \quad (b_k\text{: abgedrosselt})^{(1)}.$$

Offenbar entsprechen unter Verwendung der D-Symbolik diese gewöhnlichen Tangentialräume höherer Ordnung den $\overset{0}{D}_b$-Ableitungen

$$\overset{0}{D}_{b_1}x^\nu,\quad \overset{0}{D}_{b_2}\overset{0}{D}_{b_1}x^\nu,\quad \ldots\ldots,\quad \overset{0}{D}_{b_i}\overset{0}{D}_{b_{i-1}}\ldots\overset{0}{D}_{b_1}x^\nu,\ \ldots\ldots$$
$$(b_k\text{: abgedrosselt});$$

in unserer Bestimmung der lokalen Richtungen treten noch die anderen ein, z.B. $\overset{1}{D}_b B_a^\nu = \overset{(1)}{H}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$ (a, b: abgedrosselt), die von der Torsionsgrösse $A_{\lambda\mu}^{\nu}$ von K_n gebildet wird (vgl. (41)).

Für den Fall $m = n-1$ hat schon M. Haimovici die Krümmungstheorie entwickelt.[2]

§ 1. Allgemeines.

In einer n-dimensionalen Finslerschen Mannigfaltigkeit, deren Urvariablen mit x^ν, $\nu = 1, 2, \ldots\ldots, n$ bezeichnet werden, sei eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit X_m, $m < n$, gegeben mittels der Parametergleichungen

$$(1)\qquad x^\nu = x^\nu(y^{a_1}, \ldots\ldots, y^{a_n}),\qquad a, \ldots\ldots, g = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m;$$

(1) Siehe: J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen, 1935.

(2) M. Haimovici, Les formules fondamentales dans la théorie des hypersurfaces d'un espace général, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, Bd. 20 (1935), S. 39–58. Vgl. auch L. Berwald, Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum, Monatsh. für Mathematik und Physik, Bd. 43 (1936), S. 1–14.

diese Parameter y^c können als Urvariablen in X_m verwendet werden. Bekanntlich vermitteln die $\binom{\nu}{a}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors B von X_m

(2) $$B_a^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}$$

die Beziehungen zwischen den ν- und a-Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors, der in X_m liegt:

(3) $$v^\nu = B_a^\nu v^a .$$

In üblicher Weise wird die X_n zu der Mannigfaltigkeit K_n der Linienelemente erster Ordnung erweitert und mit der sogenannten CARTANschen Übertragung mit dem Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}(x, x')$ ausgestattet. Die K_m, die Erweiterung von X_m, ist sodann eine Untermannigfaltigkeit von K_n, deren Elemente die X_m tangieren:

(4) $$x^{\nu\prime} = B_a^\nu y^{a\prime} .$$

Aus der FINSLERschen Metrik, die sich in X_m unmittelbar induziert, lässt sich der Fundamentaltensor g'_{ab} von K_m bilden. Man überzeugt sich leicht, dass besteht

(5) $$g'_{ab} = B_{ab}^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} \quad (B_{ab}^{\lambda\mu} = B_a^\lambda B_b^\mu) .$$

Man sagt, dass die K_m in K_n (mit der CARTANschen Übertragung C_n) eingespannt ist, wenn in jedem Elemente von K_m eine bestimmte pseudonormale $(n-m)$-Richtung E_n^{n-m} und somit die $\binom{a}{\nu}$-Bestimmungszahlen B_ν^a des Einheitsaffinors B angegeben werden. Dabei hat E_n^{n-m} mit der tangierenden m-Richtung von X_m (der lokalen E_m) keine Richtung gemeinsam. Aus B_ν^a lassen sich die $\binom{\lambda}{\nu}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors und der Einheitsaffinor C_ν^λ in E_n^{n-m} mittels der folgenden Formeln berechnen:

(6) $$B_\nu^\lambda = B_a^\lambda B_\nu^a ,$$

(7) $$A_\nu^\lambda = B_\nu^\lambda + C_\nu^\lambda .$$

Sie vermitteln erstens die Beziehungen zwischen den K_m- und den K_n-Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors in K_m:

(8) $$w_\lambda = B_\lambda^c w_c ,$$

und zweitens die K_m- und die E_n^{n-m}-Komponenten eines ko- oder kontravarianten Vektors in K_n, der in K_m definiert ist:

$$(9)\qquad \begin{cases} v^\lambda = v'^\lambda + v''^\lambda, & v'^\lambda = B_\nu^\lambda v^\nu, \quad v''^\lambda = C_\nu^\lambda v^\nu; \\ w_\lambda = w'_\lambda + w''_\lambda, & w'_\lambda = B_\lambda^\nu w_\nu, \quad w''_\lambda = C_\lambda^\nu w_\nu. \end{cases}$$

Ein Vektor heisst in K_m bzw. E_n^{n-m} liegend, wenn die E_n^{n-m}- bzw. K_m-Komponenten verschwinden.

Aus C_n leitet sich eine Übertragung in K_m durch die Projektionsmethode in E_n^{n-m} oder durch die Gleichungen ab:

$$(10)\qquad \begin{cases} \bar{\delta} v^\lambda = B_\nu^\lambda \delta v^\nu = B_\nu^\lambda \left[dv^\nu + (\Gamma_{\mu\omega}^\nu dx^\omega + C_{\mu\omega}^\nu dx^{\omega\prime}) v^\mu \right] \\ \qquad \text{oder} \qquad \bar{\delta} v^a = B_\nu^a \delta v^\nu, \end{cases}$$

daraus ergeben sich die Übertragungsparameter

$$(11)\qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}_{bc}^a = B_\nu^a B_{bc}^\nu + B_{\nu b c}^{a \mu \omega} \Gamma_{\mu\omega}^\nu + B_{\nu b}^{a \mu} B_{dc}^\omega y^{d\prime} C_{\mu\omega}^\nu, \\ \bar{C}_{bc}^a = B_{\nu b c}^{a \mu \omega} C_{\mu\omega}^\nu, \quad \left(B_{bc}^\nu = \dfrac{\partial}{\partial y^c} B_b^\nu \right). \end{cases}$$

Wenn als die Parameter $\bar{G}_c^a$ der Grundübertragung

$$(12)\qquad \bar{\delta} y^{a\prime} = dy^{a\prime} + \bar{G}_c^a dy^c$$

die Funktionen

$$\bar{G}_c^a \equiv \bar{\Gamma}_{bc}^a y^{b\prime} = B_\nu^a B_{bc}^\nu y^{b\prime} + B_{\nu c}^{a\omega} G_\omega^\nu$$

verwendet werden, so ist die Übertragung (10), (12) eine allgemeine lineare.

Wählt man nun die im Sinne der Metrik $g_{\lambda\mu}$ zu E_m senkrechte Richtung als die pseudonormale, so ist

$$(13)\qquad B_\nu^a = g'^{ab} B_b^\lambda g_{\lambda\nu}.$$

Die zugehörige Übertragung heisst die induzierte Übertragung C_n^m und wird mit dem Stern $*$ angedeutet (z.B. δ^* statt $\bar{\delta}$). Da

$$\begin{aligned} \delta^* g'_{ab} &= B_{ab}^{\lambda\mu} \delta(B_{\lambda\mu}^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma}) = 2B_{(ab)}^{\rho\mu} g_{\rho\sigma} \delta B_\mu^\sigma \\ &= -2B_\sigma^c g'_{c(a} B_{b)}^\mu \delta C_\mu^\sigma = 2B_\sigma^c C_\mu^\sigma g'_{c(a} \delta B_{b)}^\mu = 0, \end{aligned}$$

ist die induzierte Übertragung C_n^m *metrisch* bezüglich g'_{ab}. Aber man kann nicht schliessen, dass sie mit der zu g'_{ab} gehörigen CARTANschen

Übertragung C_m übereinstimmt.[1] Wenn nämlich die letzte Übertragung mit dem Strich angedeutet wird, so bestehen

$$(14)\qquad \delta' v^a - \delta^* v^a = \Phi^a_{bc} v^b dy^c\,, \quad \delta' w_b - \delta^* w_b = -\Phi^a_{bc} w_a dy^c\,,$$

wo

$$\Phi^a_{bc} = \Gamma'^a_{bc} - B^a_\nu (B^{\lambda\mu}_{bc} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + B^\nu_{bc} + C^\nu_{\lambda\mu} B^\lambda_b B^\mu_{dc} y^{d'})$$

gesetzt sind. Der Affinor Φ^a_{bc}, der im allgemeinen nicht verschwindet, wird leicht in der folgenden Form umgeschrieben, mit Rücksicht auf die Definitionsgleichungen von $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, $C^\nu_{\lambda\mu}$, Γ'^a_{bc}, C'^a_{bc} und die Beziehungen (4), (5):

$$(15)\qquad \Phi^a_{bc} = 2 g'^{ad} B^\rho_c C_{\rho\lambda\mu} H^\lambda_{;[b} B^\mu_{d]}\,,$$

wobei

$$(16)\qquad H^\lambda = C^\lambda_\mu \left(G^\mu + \frac{1}{2} B^\mu_{bc} y^{b'} y^{c'} \right), \quad H^\lambda_{;b} = \frac{\partial}{\partial y^{b'}} H^\lambda$$

sind. Aus (15) folgt

$$(17)\qquad \Phi^a_{bc} y^{c'} = 0\,,$$

da $B^\rho_c C_{\rho\lambda\mu} y^{c'} = C_{\rho\lambda\mu} x^{\rho'} = 0$. Aus (14), (17) folgt, dass *die δ'- und die δ^*-Differentiation einer beliebigen Grösse dieselben sind, wenn das Zentrum des Linienelementes in die Richtung des Linienlementes selbst verschoben wird.* Dies ist nichts anderes als das von J. H. TAYLOR gewonnene Resultat.[2] Man erinnere sich, dass die zur CARTANschen Übertragung gehörige Differentiation längs einer Kurve sich in die TAYLORsche Differentiation[3] reduziert.

Da die δ'- und die δ^*-Übertragung beide metrisch bezüglich g'_{ab} sind, so besteht ferner

$$(18)\qquad \Phi^a_{bd} g_{ac} + \Phi^a_{cd} g_{ab} = 0\,.$$

Wenn das Linienelement $x^{\nu'}$ in K_m liegt, so berechnet man die Differenz des kovarianten δ-Differentials $\delta x^{\nu'}$ in K_n und des kovarianten δ'-Differentials $\delta' y^{c'}$ in K_m folgendermassen:

---

(1) Vgl. E. CARTAN, a. a. O., S. 24; H. HOMBU, Zur Theorie der unitären Geometrie, dieses Journal, Ser. I, Vol. 3 (1935), S. 27–32, insbesondere S. 35–37.

(2) J. H. TAYLOR, Parallelism and transversality in a subspace of a general (FINSLER) space, Annals of Mathematics, Vol. 28 (1927), S. 620–28.

(3) J. L. SYNGE, A generalization of the RIEMANNian line-element, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 27 (1925), S. 61–67; J. H. TAYLOR, A generalization of LEVI-CIVITA's parallelism and the FRENET formulas, ibid., S. 246–64.

$$\delta x^{\nu\prime} - B^{\nu}_{c}\delta' y^{c\prime} = \Psi^{\nu}_{b} dy^{b}\,, \tag{19}$$

wobei

$$\begin{aligned}\Psi^{\nu}_{b} &= B^{\mu}_{b} G^{\nu}_{\mu} + B^{\nu}_{cb} y^{c\prime} - B^{\nu}_{c} G'^{c}_{b} \\ &= C^{\nu}_{\lambda}(B^{\mu}_{b} G^{\lambda}_{\mu} + B^{\lambda}_{ab} y^{a\prime}) - B^{\nu}_{c} B^{c}_{\mu\,;\,b}\Big(G^{\mu} + \frac{1}{2} B^{\mu}_{de} y^{d\prime} y^{e\prime}\Big) \\ &= H^{\nu}_{;\,b}\end{aligned} \tag{20}$$

sind. Aus (20) folgt, dass die Grösse Ψ^{ν}_{b} mit dem Index ν nicht notwendig in E^{n-m}_{n} liegt. Überschiebt man (19) mit B^{a}_{ν} und vergleicht mit (14) ($v^{a} = y^{a\prime}$), so ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned}\Phi^{a}_{cb} y^{c\prime} &= -\Psi^{\nu}_{b} B^{a}_{\nu} = B^{a}_{\mu\,;\,b}\Big(G^{\mu} + \frac{1}{2} B^{\mu}_{de} y^{d\prime} y^{e\prime}\Big) \\ &= 2B^{\nu a}_{b\mu} C^{\mu}_{\nu\lambda} C^{\lambda}_{\rho}\Big(G^{\rho} + \frac{1}{2} B^{\rho}_{de} y^{d\prime} y^{e\prime}\Big)\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Bezeichnet man mit $\overset{0}{\nabla}$, $\overset{1}{\nabla}$ bzw. $\overset{0}{\nabla}{}'$, $\overset{1}{\nabla}{}'$ die kovarianten partiellen Ableitungen zweier Arten, die der Übertragung C_n bzw. C_m angehören, d.h.

$$\overset{0}{\nabla}_{\mu} v^{\lambda} = v^{\lambda}_{,\,\mu} - v^{\lambda}_{;\,\nu} G^{\nu}_{\mu} + \Gamma^{*\lambda}_{\nu\mu} v^{\nu}\,, \quad \overset{1}{\nabla}_{\mu} v^{\lambda} = v^{\lambda}_{;\,\mu} + C^{\lambda}_{\nu\mu} v^{\nu}\,,$$

(Gleiches für $\overset{0}{\nabla}{}'$, $\overset{1}{\nabla}{}'$), so lauten nach (10), (14), (19) die Beziehungen zwischen beiden Übertragungen C_n, C_m

$$\left\{\begin{aligned}\overset{0}{\nabla}{}'_{b} v^{a} &= B^{a\mu}_{\lambda b} \overset{0}{\nabla}_{\mu} v^{\lambda} + B^{a}_{\lambda} \Psi^{\mu}_{b} \overset{1}{\nabla}_{\mu} v^{\lambda} + \Phi^{a}_{cb} v^{c}\,, \\ \overset{1}{\nabla}{}'_{b} v^{a} &= B^{a\mu}_{\lambda b} \overset{1}{\nabla}_{\mu} v^{\lambda}\,.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Durch die Gleichungen (15), (16), (19), (22) sind die letzten Beziehungen vollständig ausgedrückt.[1]

§ 2. Ein Satz über das Verschwinden des Affinors $\Phi^{a}_{bc} y^{b\prime}$.

Die Bedingung $\Phi^{a}_{bc} = 0$ ist charakteristisch für die Übereinstimmung der δ'- und der δ^{*}-Übertragung, und die noch weniger beschränkte

(1) Dafür, dass C_m durch Projektion in eine passend gewählte pseudonormale Richtung aus C_n gewonnen werde, ist es notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (11) und $B^{a}_{\nu} B^{\nu}_{b} = B^{a}_{b} \overset{*}{=} \delta^{a}_{b}$ oder die Gleichungen $D^{a}_{\nu} B^{\nu}_{b} = 0$, $D^{a}_{\nu} B^{\mu\omega}_{bc} C^{\nu}_{\mu\omega} = 0$ und $\Phi^{a}_{bc} = D^{a}_{\nu}(B^{\nu}_{bc} + B^{\mu\omega}_{bc} \Gamma^{\nu}_{\mu\omega} + B^{\mu}_{b} B^{\omega}_{dc} y^{d\prime} C^{\nu}_{\mu\omega})$ algebraisch lösbar sind, wobei gesetzt sind: $B^{a}_{\nu} = g'^{ab} B^{\lambda}_{b} g_{\lambda\nu} + D^{a}_{\nu}$.

Bedingung $\Phi^a_{bc}y^{b'}=0$ für die des δ'- und des δ^*-Differentials von dem Linienelemente $x^{\nu'}=B_a^{\nu}y^{a'}$. In diesem Falle steht nach (21) Ψ^{ν}_a in Bezug auf den Index ν zu K_m senkrecht und bestehen

$$B^{\nu a}_{b\mu}C^{\mu}_{\nu\lambda}C^{\lambda}_{\rho}\left(G^{\rho}+\frac{1}{2}B^{\rho}_{de}y^{d'}y^{e'}\right)=0\,. \tag{23}$$

Wenn für jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit, die in einem Punkte eine bestimmte tangierende m-Richtung besitzt, (23) in diesem Punkte gültig ist, so folgt aus (23)

$$B^{\nu a}_{b\mu}C^{\mu}_{\nu\lambda}C^{\lambda}_{\rho}=0 \quad \text{oder} \quad B^{\rho\sigma}_{ab}C_{\rho\sigma\lambda}C^{\lambda}_{\omega}=0\,, \tag{24}$$

da B^{ρ}_{de} ganz beliebig sein dürfen.

Wir möchten den folgenden Satz beweisen:

Satz. *Ist der Affinor $\Phi^a_{bc}y^{b'}$ für jede $m\ (\geqq 2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die einen Punkt durchläuft, in diesem Punkte verschwindend, so verschwindet die Torsionsgrösse von C_n: $A_{\lambda\mu\nu}=0$.*

Um das identische Verschwinden von $C_{\lambda\mu\nu}$ zu beweisen, soll man eine Richtung in diesem Punkte festlegen, in Bezug auf welche lokale Begriffe (Längen- und Winkelmessung) sich einführen lassen. Mittels einer geeigneten Urvariablentransformation kann man das neue System der Urvariablen so wählen, dass erstens das Linienelement das Zentrum $(0, 0, \dots, 0)$ und die Richtung $(1, 0, 0, \dots, 0)$ hat und zweitens die zu den gewählten Urvariablen gehörigen n kontravarianten Massvektoren $\underset{\lambda}{e}^{\varkappa}\ (\lambda=1, 2, \dots, n)$ zueinander orthogonale Einheitsvektoren sind. Bezeichnet man die Urvariablen wieder mit x^{ν}, so sind noch orthogonale Transformationen der $x^2, x^3, \dots, x^n$ gestattet. Da im allgemeinen $C_{\lambda\mu\nu}x^{\nu'}=0$, so ist

$$C_{\lambda\mu 1}=0 \qquad \text{für jede } \lambda, \mu\,. \tag{25}$$

Wir betrachten nun die m-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$x^{\nu_1}=0\,, \quad x^{\nu_2}=0\,, \quad \dots, \quad x^{\nu_{n-m}}=0\,, \quad (\nu_i \neq 1)\,,$$

auf der das betreffende Linienelement liegt. Die $n-m$ Indizes ν_1, $\nu_2, \dots, \nu_{n-m}$ können beliebig aus der Reihe $2, 3, \dots, n$ angenommen werden und heissen die Indizesklasse (a') bildend, während die $m-1$ übrigen Indizes und der Index 1 die Indizesklasse (a) bildend heissen. Aus (24) folgt, dass

(1) Der Vektor $\underset{\lambda}{e}^{\varkappa}$ hat in diesem Urvariablensysteme die Bestimmungszahlen $\delta^{\varkappa}_{\lambda}$.

$$C_{abc'} = 0 \quad (a, b \text{ in } (a), c' \text{ in } (a')),$$

daraus ferner, dass für jede λ, μ, ν, die $\neq 1$ und voneinander verschieden sind,

$$(26a) \qquad (m \geqq 3) \quad C_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad C_{\lambda\lambda\nu} = 0 \quad (\text{nicht summiert});$$

$$(26b) \qquad (m = 2) \qquad C_{\lambda\lambda\nu} = 0 \quad (\text{nicht summiert}),$$

da die Klassen (a) und (a') so gewählt werden können, dass λ, μ in jene und ν in diese hineinkommen (z.B. $\nu_1 = \nu$, $\nu_i \neq \lambda, \mu$).

Da unter orthogonalen Transformationen der $x^2, \ldots, x^n$, etwa

$$x^1 = \bar{x}^1, \; x^2 = \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x}^3, \; x^3 = \gamma\bar{x}^2 + \delta\bar{x}^3, \; x^4 = \bar{x}^4, \; \ldots, \; x^n = \bar{x}^n,$$

$$(\alpha = \cos\theta, \; \beta = -\sin\theta, \; \gamma = \sin\theta, \; \delta = \cos\theta),$$

die Gleichungen (25), (26) auch für die transformierten $\bar{C}_{\lambda\mu\nu}$ bestehen müssen, so ergeben sich zunächst für $m = 2$, $n > 3$

$$0 = \bar{C}_{224} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^4} C_{\lambda\mu\nu} = 2\alpha\gamma C_{234}$$

für jedes θ oder $C_{234} = 0$, im allgemeinen

$$(26c) \qquad (m = 2) \qquad C_{\lambda\mu\nu} = 0 \quad (\lambda, \mu, \nu: \text{ verschieden}),$$

und alsdann unter Berücksichtigung von (26 a, b, c)

$$0 = \bar{C}_{223} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^3} C_{\lambda\mu\nu} = \alpha^2\beta C_{222} + \gamma^2\delta C_{333}$$

für jedes θ oder $C_{222} = C_{333} = 0$, im allgemeinen

$$(27) \qquad C_{\lambda\lambda\lambda} = 0 \quad (\text{nicht summiert}).$$

Aus (25), (26), (27) folgt das Verschwinden der Torsionsgrösse $A_{\lambda\mu\nu}$.

Besonders erkennt man nach diesem Satz, dass die Mannigfaltigkeit K_n mit der CARTANschen Übertragung RIEMANNsch ist, wenn für jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit der Affinor $\Phi^a_{bc}\, y^{b'}$ identisch verschwindet.

§ 3. Die verallgemeinerte D-Symbolik.

Die zu y^c gehörigen kontravarianten Massvektoren $\underset{a}{e^c}$ haben als Vektoren von K_n die Bestimmungszahlen

$$\underset{a}{e}^{\nu} = B_b^{\nu} \underset{a}{e}^b ,$$

und bilden eine R_m, die lokale R_m, da die aufgespannte lokale E_m mit dem Fundamentaltensor g'_{ab} (5) ausgestattet ist. Neben den Massvektoren $\underset{a}{e}^{\nu}$ wird in jedem Linienelemente von K_m ein System von $m' = n - m$ zueinander senkrechten Einheitsvektoren $\underset{p}{e}^{\nu} (p, \ldots, w = a_{m+1}, \ldots, a_n)$ senkrecht zu K_m als Massvektoren in $E_n^{m'}$ eingeführt. Sie bilden die lokale $R_{m'}$, da die $E_n^{m'}$ definitionsweis mit dem Fundamentaltensor

$$(28) \qquad g''_{pq} = C_{pq}^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} \qquad (C_p^{\lambda} \stackrel{*}{=} \underset{p}{e}^{\lambda})$$

ausgestattet ist. Man beachte, dass das Argument in g''_{pq} das in K_m und nicht in $E_n^{m'}$ liegende Linienelement ist. Offenbar ist der Einheitsaffinor in $R_{m'}$

$$(29) \qquad C_{\lambda}^{p} = g''^{pq} C_q^{\mu} g_{\lambda\mu} , \quad (g''^{pq} g''_{qr} = C_r^p) .$$

In Bezug auf die drei Systeme der Massvektoren $\underset{a}{e}^{\nu}$, $\underset{p}{e}^{\nu}$, $\underset{\lambda}{e}^{\nu}$ wird Grösse mit Indizes dreier Arten in Betracht gezogen. Die Grösse liegt mit den Indizes erster Art $a, b, \ldots, g$ in R_m, mit den Indizes zweiter Art $p, q, \ldots, w$ in $R_{m'}$, während sie in Bezug auf die Indizes dritter Art $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \rho, \sigma$ einfach als Grösse der K_n aufzufassen ist. Ebenso wie K_m-Grösse hat die betreffende Grösse (z.B. $v^{\lambda a}_{\cdot\cdot p}$) die K_n-Bestimmungszahlen $(v^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\nu} = B_a^{\mu} C_{\nu}^{p} v^{\lambda a}_{\cdot\cdot p})$.

Es sei A eine Grösse, die in K_m definiert ist. Dann existiert das kovariante Differential δA längs K_m (sinnvoll), wobei A über allen ihren Indizes als Grösse in K_n aufgefasst wird. Ist nun $x^{\nu\prime} = B^{\nu} y^{b\prime}$ ein Linienelement von K_m, so steht das Differential $\delta x^{\nu\prime} - B_b^{\nu} \delta^* y^{b\prime}$ zu K_m senkrecht:

$$(30) \qquad \delta x^{\nu\prime} = B_b^{\nu} \delta^* y^{b\prime} + H_b^{\nu} dy^b , \quad (B_{\nu}^{\lambda} H_b^{\nu} = 0) .$$

Dann entstehen

$$H_b^{\nu} = B_b^{\lambda} G_{\lambda}^{\nu} + B_{bc}^{\nu} y^{c\prime} - B_c^{\nu} G_b^{*c} = C_{\lambda}^{\nu}\left(G^{\lambda} + \frac{1}{2} B_{de}^{\lambda} y^{d\prime} y^{e\prime}\right)_{;b} ,$$

oder

$$(31) \qquad H_b^{\nu} = C_{\lambda}^{\nu} \Psi_b^{\lambda} = C_{\lambda}^{\nu} H^{\lambda}_{;b} .$$

---

(1) Im Falle $n = 3$, $m = 2$ besteht (26c) infolge (25).

Mittels (30) schreiben wir δA in der Form

$$\begin{aligned}\delta A &= \overset{0}{\nabla}_\nu A \cdot dx^\nu + \overset{1}{\nabla}_\nu A \cdot \delta x^{\nu\prime} \\ &= (B_b^\nu \overset{0}{\nabla}_\nu A + H_b^\nu \overset{1}{\nabla}_\nu A) dy^b + B_b^\nu \overset{1}{\nabla}_\nu A \cdot \delta^* y^{b\prime} .\end{aligned}$$

Daraus sehen wir, dass die beiden Ausdrücke $B_b^\nu \overset{0}{\nabla}_\nu A + H_b^\nu \overset{1}{\nabla}_\nu A$, $B_b^\nu \overset{1}{\nabla}_\nu A$ sinnvoll sind, aber nicht im allgemeinen der Ausdruck $B_b^\nu \overset{0}{\nabla}_\nu A$. Wir sollen also die in K_m induzierte Übertragung nicht so erklären, dass die kovarianten Ableitungen eines Affinors in K_m die K_m-Komponenten der kovarianten Ableitungen in K_m sind.

Uns auf die oben gemachte Betrachtung stützend, erweitern wir jetzt die sogenannte D-Symbolik folgendermassen:

$$(32a) \begin{cases} \text{(i)} & \overset{0}{D}_b p = B_b^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu p + H_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu p , \\ \text{(ii)} & \overset{0}{D}_b u^\nu = B_b^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu u^\nu + H_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu u^\nu , \quad \text{(sinnvoll in } K_m) \\ \text{(iii)} & \overset{0}{D}_b v^c = B_\nu^c (B_b^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu v^\nu + H_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu v^\nu) = \overset{0}{\nabla}{}_b^* v^c , \\ \text{(iv)} & \overset{0}{D}_b w^r = C_\nu^r (B_b^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu w^\nu + H_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu w^\nu) ; \end{cases}$$

$$(32b) \begin{cases} \text{(i)} & \overset{1}{D}_b p = B_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu p , \\ \text{(ii)} & \overset{1}{D}_b u^\nu = B_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu u^\nu , \quad \text{(sinnvoll in } K_m) \\ \text{(iii)} & \overset{1}{D}_b v^c = B_{\nu b}^{c\mu} \overset{1}{\nabla}_\mu v^\nu = \overset{1}{\nabla}{}_b^* v^c , \\ \text{(vi)} & \overset{1}{D}_b w^r = C_\nu^r B_b^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu w^\nu ; \end{cases}$$

p ist eine Invariante, u^ν eine Grösse in K_n, v^c liegt in R_m, w^r in $R_{m'}$. Die D-Operatoren anderer Arten $\overset{i}{D}_p$, $\overset{i}{D}_\mu$ $(i = 0, 1)$ werden insbesondere nicht eingeführt, da die Theorie von K_m in K_n sie entbehren kann. Die verallgemeinerten Operatoren (32) genügen den übliche Regeln für die Ableitungen von Summen und Produkten, und auch für die der Überschiebungen, die in Bezug auf die Indizes gleicher Arten gebildet werden.

Ausser den $\overset{i}{D}_b$-Operatoren wird noch der $\overset{0}{D}_0$-Operator $\overset{0}{D}_0 = y^{b\prime} \overset{0}{D}_b$ eingeführt:

$$(33) \begin{cases} \overset{0}{D}_0 p = \overset{0}{\nabla}_0 p + H^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu p , \\ \overset{0}{D}_0 u^\nu = \overset{0}{\nabla}_0 u^\nu + H^\mu \overset{1}{\nabla}_\mu u^\nu , \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Der Einheitsaffinor B und der Affinor H_b^ν lassen sich jetzt folgendermassen ausdrücken:

$$(34)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \overset{0}{D}_b x^\nu = B_b^\nu\,, \quad \overset{0}{D}_0 x^\nu = x^{\nu\prime}\,, \quad \overset{1}{D}_b x^\nu = 0\,, \\ \text{(b)} & \overset{0}{D}_b x^{\nu\prime} = H_b^\nu\,, \quad \overset{0}{D}_0 x^{\nu\prime} = H^\nu\,, \quad \overset{1}{D}_b x^{\nu\prime} = B_b^\nu\,. \end{cases}$$

Dabei soll der Vektor $x^{\nu\prime}$ als ein in jedem Elemente der K_m definierter Vektor, aber nicht als tangierender Vektor einer Kurve betrachtet werden, da im letzten Falle der Vektor $x^{\nu\prime}$ nur vom Orte abhängig ist. Ist i^ν tangierender Einheitsvektor einer Kurve in K_m, so bestehen, wie in der Krümmungstheorie von V_m in V_n,

$$u^\nu = i^\mu \overset{0}{\nabla}_\mu i^\nu = u'^\nu + i^b i^a \overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}\,, \quad u'^c = i^b \overset{0}{D}_b i^c\,,$$

wo

$$(39\text{a})\qquad \overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{0}{D}_b B_a^\nu$$

gesetzt ist. u^ν bzw. u'^ν sind der absolute bzw. relative erste Krümmungsvektor, $\overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ bzw.

$$(39\text{b})\qquad \overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{1}{D}_b B_a^\nu$$

heissen der erste Krümmungsaffinor von K_m erster bzw. zweiter Art.

Ein geordnetes System der k Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_k$, die entweder 0 oder 1 sind, wird mit $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$ oder kurz mit (i) bezeichnet. Die 2^k Systeme $(i_1 \ldots i_k)$ mit derselben Anzahl k heissen eine Klasse bildend, wobei k ihre Klassenzahl ist. Übrigens werden die geordneten Systeme aller Klassen durch die folgenden Gesetze geordnet: (I) Gehören zwei Systeme verschiedenen Klassen an, so geht das System der kleineren Klassenzahl dem anderen voran; (II) Gehören die Systeme (i), (j) derselben Klasse k an und bestehen $i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots, i_{k'} = j_{k'}$ und $i_{k'+1} = 0,\ j_{k'+1} = 1\ (0 \leqq k' < k)$, so geht das System (i) dem Systeme (j) voran. In üblicher Weise benutzen wir für diese Ordnungsbeziehung das Zeichen $<$, das wir so lesen, dass das linksstehende dem rechtsstehenden vorangeht.

Für jedes System (j), das nicht einem bestimmten Systeme $(l) = (l_1\, l_2 \ldots . l_p)$ nachfolgt, sei eine ganze Zahl $m_{(j)}$ bestimmt, die verschwinden mag. In jedem Linienelemente von K_m sei ferner ein System von zueinander senkrechten Richtungen $\overset{(0)}{E}, \overset{(1)}{E}, \ldots., \overset{(j)}{E}, \ldots., \overset{(l)}{E}$ in der lokalen $R_{m'}$ gegeben, deren Dimensionszahlen $m_{(0)}, m_{(1)}, \ldots.,$ $m_{(j)}, \ldots, m_{(l)}$ sind; es sei

$$(35) \qquad m^* = m' - m_{(0)} - m_{(1)} - \ldots . - m_{(l)} \geqq 0 .$$

Wir führen in jeder $\overset{(j)}{E}$, $(j) = (0), (1), \ldots., (l)$, ein System von $m_{(j)}$ zueinander senkrechten Einheitsvektoren e^ν als Massvektoren ein, wobei die Indizes $p_{(j)}, \ldots, w_{(j)}$ über $\overset{(j)}{a_1}, \overset{(j)}{a_2}, \ldots., \overset{(j)}{a}_{m_{(j)}}$ durchlaufen. Da in jeder $\overset{(j)}{E}$

$$(36) \qquad \overset{(j)}{g}_{p_{(j)}q_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{\lambda\ \mu}_{p_{(j)}q_{(j)}} g_{\lambda\mu} \qquad \Big(\overset{(j)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(j)}} \overset{*}{=} \underset{r_{(j)}}{e}{}^{\lambda}\Big)$$

als der Fundamentaltensor angesehen wird, ist jede $\overset{(j)}{E}$ eine $\overset{(j)}{R}$. Wie (29) für $R_{m'}$, werden die $\binom{p_{(j)}}{\lambda}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors $\overset{(j)}{B}$ in $\overset{(j)}{R}$ so gebildet:

$$(37) \qquad \overset{(j)}{B}{}^{p_{(j)}}_{\lambda} = \overset{(j)}{g}{}^{p_{(j)}q_{(j)}} \overset{(j)}{B}{}^{\mu}_{q_{(j)}} g_{\lambda\mu} , \qquad \Big(\overset{(j)}{g}{}^{p_{(j)}q_{(j)}} g_{r_{(j)}r_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{q_{(j)}}_{r_{(j)}}\Big) .$$

Für den ganz in $\overset{(j)}{R}$ liegenden kontra- bzw. kovarianten Vektor $v^{r_{(j)}}$ bzw. $w_{p_{(j)}}$ erweitern wir nun die durch (32) definierten $\overset{i}{D}_b$-Operatoren folgendermassen:

$$(38) \qquad \begin{cases} \overset{0}{D}_b v^{r_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{r_{(j)}}_{\nu}(B^{\mu}_{b}\overset{0}{\Gamma}_{\mu} v^{\nu} + H^{\mu}_{b}\overset{1}{\Gamma}_{\mu} v^{\nu}) , & \overset{1}{D}_b v^{r_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{r_{(j)}}_{\nu} B^{\mu}_{b} \overset{1}{\Gamma}_{\mu} v^{\nu} ; \\ \overset{0}{D}_b w_{p_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(j)}}(B^{\mu}_{b}\overset{0}{\Gamma}_{\mu} w_{\lambda} + H^{\mu}_{b}\overset{1}{\Gamma}_{\mu} w_{\lambda}), & \overset{1}{D}_b w_{p_{(j)}} = \overset{(j)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(j)}} B^{\mu}_{b} \overset{1}{\Gamma}_{\mu} w_{\lambda} . \end{cases}$$

Die erweiterten Operatoren genügen auch, wie leicht gezeigt werden kann, sowohl den üblichen Regeln für Differentiationen von Summen und Produkten, als den für Differentiationen der verschiedenen Überschiebungen, die den Arten von Indizes $\alpha, \ldots., \omega$; $a, \ldots., g$; $p_{(j)}, \ldots., w_{(j)}$ $((j) = (0), \ldots, (l))$ entsprechen.

§ 4. Frenetsche Gleichungen für K_m in K_n.

Hier wollen wir die in vorigen § erwähnten lokalen $\overset{(j)}{R}$, die beliebig wählbar sind, wie SCHOUTEN und VAN KAMPEN in der natürlichen Weise durch die Betrachtung der höheren Krümmungen von K_m in K_n bestimmen, was uns zur Aufstellung der verallgemeinerten FRENETschen Gleichungen führen wird.

Von dem Skalar x^ν und dem Vektorfeld $x^{\nu'}$ ausgehend, gewinnen wir durch zweimalige bzw. einmalige Anwendung der D-Operatoren die Grössen B_b^ν, $\overset{(i)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$, $\overset{\bullet}{H}{}_b^\nu$ (vgl. (34), (35)). Das ν-Gebiet von B^ν ist in K_m liegend, während die ν-Gebiete der anderen zu K_m senkrecht stehen, da

$$B^c_\nu \overset{i}{D}_b B^\nu_a = B^{c\lambda}_{\nu a}\overset{i}{D}_b B^\nu_\lambda = -B^{c\lambda}_{\nu a}\overset{i}{D}_b C^\nu_\lambda = C^\nu_\lambda B^\lambda_a \overset{i}{D}_b B^c_\nu = 0 .$$

Es bestehen

$$(40) \qquad H_b^\nu = \overset{(0)}{H}{}_{b0}^{\cdot\cdot\nu}, \quad \overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} y^{a'} = 0 ,$$

da

$$H_b^\nu = \overset{0}{D}_b x^{\nu'} = \overset{0}{D}_b(B^\nu_a y^{a'}) = y^{a'}\overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} + B^\nu_a \overset{0}{D}_b y^{a'} = \overset{(0)}{H}{}_{b0}^{\cdot\cdot\nu} ,$$

$$B_b^\nu = \overset{1}{D}_b x^{\nu'} = \overset{1}{D}_b(B^\nu_a y^{a'}) = y^{a'}\overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}+B^\nu_a\overset{1}{D}_b y^{a'} = y^{a'}\overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}+B^\nu_b .$$

Die Krümmungsaffinoren $\overset{(i)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ $(i = 0, 1)$ lassen sich aus den Übertragungsparametern von C_n berechnen:

$$(41) \qquad \overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = C^\nu_\alpha(B^\alpha_{ab}+B^{\rho\sigma}_{ab}\Gamma^{*\alpha}_{\rho\sigma}+B^\rho_a H^\sigma_b C^\alpha_{\rho\sigma}), \quad \overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} = C^\nu_\alpha B^{\rho\sigma}_{ab} C^\alpha ,$$

somit

$$(42) \qquad \overset{(0)}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} = C^\nu_\alpha B^\rho_{[a}H^\sigma_{b]}C^\alpha_{\rho\sigma} , \quad \overset{(1)}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} = 0 , \quad \overset{(1)}{H}{}_{0a}^{\cdot\cdot\nu} = 0 ;$$

also verschwindet $\overset{(0)}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu}$ nicht im allegmeinen.

Da in K_m das ausgezeichneten Vektorfeld $x^{\nu'} = B^\nu_a y^{a'}$ existiert, so haben wir die folgenden sechs Grössen (43), deren ν-Gebiete offenbar die mit K_m invariant verbundenen, zu K_m senkrechten Richtungen sind. Von diesen Richtungen liegen die der ν-Gebiete der $\overset{(0)}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu}$, H^ν_a, $\overset{(0)}{H}{}_{0a}^{\cdot\cdot\nu}$, H^ν in dem ν-Gebiete der $\overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$, und mit deren Hilfe lässt sich das letzte Gebiet invarianterweis zerlegen. Es ist bemerkenswert, dass das ν-Gebiet der $\overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ selbst ohne weitere Differenzierung sich zerlegt.[1] Trotzdem benutzen wir einfachheitshalber im

$$(43) \qquad \begin{tikzcd} & \overset{(0)}{H}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot\nu} & \\ \overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & H^\nu_a \arrow[r] & H^\nu \\ & \overset{(0)}{H}{}_{0a}^{\cdot\cdot\nu} \arrow[ur] & \\ \overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} & & \end{tikzcd}$$

(1) Dieser Sachverhalt geschieht nicht in der Krümmungstheorie von V_m in V_n.

Folgenden nicht diese Zerlegung, sondern die ν-Gebiete der $\overset{(0)}{H}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$, $\overset{(1)}{H}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$ und deren D-Ableitungen.[1]

Für $\overset{(0)}{R}$ wählen wir das ν-Gebiet der $\overset{(0)}{H}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$, und für $\overset{(1)}{R}$ diejenige Richtung, welche in der Richtung, die von $\overset{(0)}{R}$ und dem ν-Gebiete der $\overset{(1)}{H}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$ aufgespannt ist, liegt und ausserdem senkrecht zu $\overset{(0)}{R}$ steht (SCHMIDTsche Methode der Orthogonalisierung !). Die Fundamentaltensoren und die Einheitsaffinoren seien mit $\overset{(j)}{g}_{p_{(j)}q_{(j)}}$, $\overset{(j)}{B}$ $((j)=(0),\ (1))$ bezeichnet. Demnächst betrachten wir die ν-Gebiete der D-Ableitungen von $\overset{(j)}{B}((j)=(0),\ (1))$

$$\overset{0}{D}_b\overset{(0)}{B}{}^{\nu}_{r_{(0)}}\,,\quad \overset{1}{D}_b\overset{(0)}{B}{}^{\nu}_{r_{(0)}}\,,\quad \overset{0}{D}_b\overset{(1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(1)}}\,,\quad \overset{1}{D}_b\overset{(1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(1)}}\,.$$

Für $\overset{(00)}{R}$ wählen wir diejenige Richtung, welche in der von $\overset{(0)}{R}$, $\overset{(1)}{R}$, $\overset{0}{D}_b\overset{(0)}{B}{}^{\nu}_{r_{(0)}}$ (b, $r_{(0)}$: abgedrosselt) aufgespannten Richtung zu R_m, $\overset{(0)}{R}$, $\overset{(1)}{R}$ senkrecht steht, und für $\overset{(01)}{R}$ diejenige, welche in der von $\overset{(0)}{R}$, $\overset{(1)}{R}$, $\overset{(00)}{R}$, $\overset{1}{D}_b\overset{(0)}{B}{}^{\nu}_{r_{(0)}}$ (b, $r_{(0)}$: abgedrosselt) aufgespannte Richtung zu R_m, $\overset{(0)}{R}$, $\overset{(1)}{R}$, $\overset{(00)}{R}$ senkrecht steht, usw. Im allgemeinen, wenn jede $\overset{(j)}{R}$ $((j)<(i)=(i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k))$ definiert ist, so wird die Richtung der $\overset{(i)}{R}$ bestimmt als die, welche in der von allen $\overset{(j)}{R}((j)<(i))$ und $\overset{i_k}{D}_b\overset{(i')}{B}{}^{\nu}_{r_{(i')}}$ $((i')=(i_1 i_2 \ldots i_{k-1})$; b, $r_{(i')}$: abgedrosselt) aufgespannte Richtung zu R_m und zu allen $\overset{(j)}{R}((j)<(i))$ senkrecht steht. Dieses Verfahren wird nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Schluss kommen, d.h. wenn die durch D-Operatoren entstehenden ν-Gebiete aus jeder $\overset{(l)}{R}$ einer gewissen Klassenzahl p keine neuen Richtungen senkrecht zu R_m geben. Es gilt nun der folgende Satz:

Satz. *Es bestehen:*

$$\overset{j}{D}_b g'_{ac} = 0\,, \tag{44a}$$

$$\overset{j}{D}_b \overset{(i)}{g}_{p_{(i)}q_{(i)}} = 0\,,\quad (\textit{Klasse von } (i)\leq p)\,, \tag{44b}$$

und die verallgemeinerten FRENET*schen Gleichungen*

$$\boxed{\overset{0}{D}_b x^{\nu} = B^{\nu}_b\,,\quad \overset{1}{D}_b x^{\nu} = 0\,,} \tag{45}$$

(1) Dies beruht darauf, dass die Dimensionszahl des ν-Gebietes der beiden Krümmungsaffinoren zusammen im allgemeinen nicht m' erreicht.

$$
(46)\quad
\begin{aligned}
&\text{(a)} && \overset{j}{D}_b B^{\nu}_a = \overset{(j)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}\,,\\
&\text{(b)} && \overset{j}{D}_b \overset{(i)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i)}} = -\sum^k_{(i)\leq(kj)<(ij)} \overset{(k)j}{\underset{(i)}{H}}{}_{b\cdot r_{(i)}}^{\cdot\nu} + \sum^k_{(i)<(k)\leq(ij)} \overset{(i)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(i)}}^{\cdot\cdot\nu}\,,\\
&\text{(c)} && \overset{j}{D}_b \overset{(l)}{B}{}^{\nu}_{r_{(l)}} = -\sum^k_{(l)\leq(kj)<(lj)} \overset{(k)j}{\underset{(l)}{H}}{}_{b\cdot r_{(l)}}^{\cdot\nu} + \underset{\text{Klasse von }(k)=p}{\sum^k_{(l)<(k)} \overset{(l)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(l)}}^{\cdot\cdot\nu}}\,,
\end{aligned}
$$

oder

$$
(47)\quad
\boxed{
\begin{aligned}
&\text{(a)} && \overset{j}{D}_b B^{c}_{\lambda} = \overset{(j)}{H}{}_{b\cdot\lambda}^{\cdot c}\,,\\
&\text{(b)} && \overset{j}{D}_b \overset{(i)}{B}{}^{p_{(i)}}_{\lambda} = -\sum^k_{(i)\leq(kj)<(ij)} \overset{(k)j}{\underset{(i)}{H}}{}_{b\lambda}^{\cdot\cdot p_{(i)}} + \sum^k_{(i)<(k)\leq(ij)} \overset{(i)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{b\cdot\lambda}^{\cdot p_{(i)}}\,,\\
&\text{(c)} && \overset{j}{D}_b \overset{(l)}{B}{}^{p_{(l)}}_{\lambda} = -\sum^k_{(l)\leq(kj)<(lj)} \overset{(k)j}{\underset{(l)}{H}}{}_{b\lambda}^{\cdot\cdot p_{(l)}} + \underset{\text{Klasse von }(k)=p}{\sum^k_{(l)<(k)} \overset{(l)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{b\cdot\lambda}^{\cdot p_{(l)}}}\,,
\end{aligned}
}
$$

$(j = 0, 1;$ *Klasse von* $(i) < p$; *Klasse von* $(l) = p)$,

wobei $\overset{(i)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(i)}}^{\cdot\cdot\nu}$ *für* $(i) < (k) \leq (ij)$ *definiert ist und in Bezug auf die Indizes* b, $r_{(i)}$, ν *in* R_m, $\underset{(i)}{R}$, $\underset{(k)}{R}$ *bzw. liegend ist.*

Beweis. (44 a) ist klar, da die δ^*-Übertragung mit g'_{ac} metrisch ist, und (45), (46 a) sind (34 a), (35). Nach (44 a) folgt ohne weiteres (47 a):

$$
\overset{j}{D}_b B^{c}_{\lambda} = \overset{j}{D}_b(g'^{ca} B^{\mu}_a g_{\mu\lambda}) = g'^{ca} g_{\mu\lambda} \overset{j}{D}_b B^{\mu}_a = \overset{(j)}{H}{}_{b\cdot\lambda}^{\cdot c}\,.
$$

Für die weiteren Gleichungen wird der Beweis induktiv durchgeführt. Sind nämlich (44b), (46b), (47b) oder (44b), (46c), (47c) für einen (i) oder (l) wahr, so gelten sie auch für das dem (i) oder (l) unmittelbar Nachfolgende, das man kurz mit $(i+1)$ oder $(l+1)$ bezeichnet. Denn es bestehen

1° für $(i+1) \leq (mj) < (i+1, j)$,

$$
\begin{aligned}
\overset{(m)}{B}{}^{p_{(m)}}_{\nu}\Big[\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} + \sum^k_{(i+1)\leq(kj)<(i+1,j)} \overset{(k)j}{\underset{(i+1)}{H}}{}_{b\cdot r_{(i+1)}}^{\cdot\nu}\Big] &= -\overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} \overset{j}{D}_b \overset{(m)}{B}{}^{p_{(m)}}_{\nu} + \overset{(m)j}{\underset{(i+1)}{H}}{}_{b\cdot r_{(i+1)}}^{\cdot p_{(m)}}\\
&= -\overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} \sum^s_{(m)<(s)\leq(mj)} \overset{(m)j}{\underset{(s)}{H}}{}_{b\cdot\nu}^{\cdot p_{(m)}} + \overset{(m)j}{\underset{(i+1)}{H}}{}_{b\cdot r_{(i+1)}}^{\cdot p_{(m)}} = 0\,;
\end{aligned}
$$

2° für $(mj) < (i+1)$,

$$\overset{(m)}{B}{}^{p(m)}_{\nu}\Big[\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} + \sum_{(i+1)\leq(kj)<(i+1,j)}^{k} \underset{(i+1)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot\nu}{}_{\cdot r_{(i+1)}}\Big] = -\overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} \overset{j}{D}_b \overset{(m)}{B}{}^{p(m)}_{\nu}$$

$$= -\overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}}\Big[-\sum_{(m)\leq(sj)<(mj)}^{s} \underset{(m)}{\overset{(s)j}{H}}{}_{b\nu}{}^{\cdot\cdot p(m)} + \sum_{(m)<(s)\leq(mj)}^{s} \underset{(s)}{\overset{(m)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot p(m)}{}_{\cdot\nu}\Big] = 0\,;$$

3° $$\overset{(i+1)}{B}{}^{p(i+1)}_{\nu}\Big[\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} + \sum_{(i+1)\leq(kj)<(i+1,j)}^{k} \underset{(i+1)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot\nu}{}_{\cdot r_{(i+1)}}\Big] = \overset{(i+1)}{B}{}^{p(i+1)}_{\nu} \overset{(i+1)}{B}{}^{\lambda}_{r_{(i+1)}} \overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{\lambda}$$

$$= -\overset{(i+1)}{B}{}^{p(i+1)}_{\nu} \overset{(i+1)}{B}{}^{\lambda}_{r_{(i+1)}} \overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{C}{}^{\nu}_{\lambda} = \overset{(i+1)}{B}{}^{p(i+1)}_{\nu} \overset{(i+1)}{C}{}^{\nu}_{\lambda} \overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\lambda}_{r_{(i+1)}} = 0\,,$$

$$(\overset{(i+1)}{C}{}^{\nu}_{\lambda} = A^{\nu}_{\lambda} - \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{\lambda})\,;$$

4° die Tatsache, dass das ν-Gebiet der $\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}}$ in der Richtung, welche aus R_m, $\overset{(0)}{R}$, $\overset{(1)}{R}$, ..., $\overset{(i+1,j)}{R}$ aufgebaut wird, enthalten ist. Wir können dann $\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}}$ in der folgenden Form schreiben:

$$\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}} = -\sum_{(i+1)\leq(kj)<(i+1,j)}^{k} \underset{(i+1)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot\nu}{}_{\cdot r_{(i+1)}} + \sum_{(i+1)<(k)\leq(i+1,j)}^{k} \underset{(k)}{\overset{(i+1)j}{H}}{}_{b r_{(i+1)}}{}^{\cdot\cdot\nu}\,,$$

die nichts anderes als (46b) ($(i+1)$ statt (i)) ist. Und da

5° $$\overset{j}{D}_b g_{p_{(i+1)} q_{(i+1)}} = \overset{j}{D}_b\big(\overset{(i+1)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i+1)}} \overset{(i+1)}{B}{}^{\mu}_{q_{(i+1)}} g_{\lambda\mu}\big)$$

$$= 2 g_{\lambda\mu} \overset{(i+1)}{B}{}^{\lambda}_{(p_{(i+1)}} \overset{j}{D}_{|b|} \overset{(i+1)}{B}{}^{\mu}_{q_{(i+1)})} = 2\, g_{r_{(i+1)}(p_{(i+1)}} \overset{(i+1)}{B}{}^{r(i+1)}_{|\mu} \overset{j}{D}_{b|} \overset{(i+1)}{B}{}^{\mu}_{q_{(i+1)})} = 0\,,$$

und somit

6° $$\overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{p(i+1)}_{\lambda} = \overset{(i+1)}{g}{}^{p(i+1) r(i+1)} g_{\lambda\nu} \overset{j}{D}_b \overset{(i+1)}{B}{}^{\nu}_{r_{(i+1)}}\,,$$

sind (44b), (47b) klar. Diese Herleitung von (46) bleibt gültig auch im Falle, wenn die Klassenzahl von (l) gleich p ist. Da andererseits die schon erwiesene (46a) dieselbe Gestalt wie (47a) hat(1), so ist der Beweis des Satzes beendet.

Da nach (46), (47)

$$\overset{j}{D}_b \overset{(i)}{B}{}^{\nu}_{\lambda} = -\sum_{(i)\leq(kj)<(ij)}^{k} \big(\underset{(i)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{b\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{(i)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot\nu}{}_{\cdot\lambda}\big) + \sum_{\substack{(i)<(k)\leq(ij),\\ \text{Klasse von }(k)=p}}^{k} \big(\underset{(k)}{\overset{(i)j}{H}}{}_{b\lambda}{}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{(k)}{\overset{(i)j}{H}}{}_{b}{}^{\cdot\nu}{}_{\cdot\lambda}\big)$$

(1) Dabei soll $\overset{(1)}{H}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot\nu}$ sich in $\overset{(0)}{R}$- und $\overset{(1)}{R}$-Komponenten zerlegen.

(Klasse von $(i) \leqq p)$, so ergibt sich

$$\overset{j}{D}_b(B_\lambda^\nu + \sum_{1 \leq \text{Klasse von } (i) = p}^{i} \overset{(i)}{B}{}_\lambda^\nu) = 0 \,, \tag{48}$$

was geometrisch bedeutet, wie in der SCHOUTEN-V. KAMPENschen Theorie, dass $R + \sum_i \overset{(i)}{R}$ (Klasse von $(i) \leqq p$) und folglich R_{m^*} längs K_m parallel verschoben wird.

Übrigens, wenn wir die Übertragungsparameter der D-Operatoren für $\overset{(i)}{R}$ mit $\Gamma^{p(i)}_{q(i)b}$, $C^{p(i)}_{q(i)b}$ bezeichnen(1), so folgt wegen (44b)

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma^{r(i)}_{p(i)b} \overset{(i)}{g}_{r(i)q(i)} + \Gamma^{r(i)}_{q(i)b} \overset{(i)}{g}_{r(i)p(i)} &= \frac{\partial}{\partial y^b} \overset{(i)}{g}_{p(i)q(i)} - \frac{\partial}{\partial y^{c'}} \overset{(i)}{g}_{p(i)q(i)} \cdot G^{*c}_b \,, \\ C^{r(i)}_{p(i)b} \overset{()}{g}_{r(i)q(i)} + C^{r(i)}_{q(i)b} \overset{(i)}{g}_{r(i)p(i)} &= \frac{\partial}{\partial y^{b'}} \overset{(i)}{g}_{p(i)q(i)} \,. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Es zeigt sich, dass die Parameter der D-Operatoren für K_n

$$\Gamma^\lambda_{\mu b} = \Gamma^{*\lambda}_{\mu\nu} B^\nu_b + C^\lambda_{\mu\nu} H^\nu_b \,, \quad C^\lambda_{\mu b} = C^\lambda_{\mu\nu} B^\nu_b \tag{50a}$$

sind, und dass mittels dieser die Parameter $\Gamma^{r(i)}_{p(i)b}$, $C^{r(i)}_{p(i)b}$ sind:

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma^{r(i)}_{p(i)b} &= B^{r(i)}_\lambda \Big(\Gamma^\lambda_{\mu b} B^\mu_{p(i)} + \frac{\partial}{\partial y_b} B^\lambda_{p(i)} - \frac{\partial}{\partial y^{c'}} B^\lambda_{p(i)} \cdot G^{*c}_b\Big) \,, \\ C^{r(i)}_{p(i)b} &= B^{r(i)}_\lambda \Big(C^\lambda_{\mu b} B^\mu_{p(i)} + \frac{\partial}{\partial y^{b'}} B^\lambda_{p(i)}\Big) \,. \end{aligned}\right. \tag{50b}$$

§ 5. Integrierbarkeitsbedingungen.

Um die Integrierbarkeitsbedingungen der verallgemeinerten FRENETschen Gleichungen aufzustellen, leiten wir die folgenden Hilfsformeln von Vertauschung zweier D-Operatoren her: Für einen kontravarianten Vektor v^ν in K_n

$$\left\{\begin{aligned} 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]} v^\nu &= -R_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v^\sigma + 2S^*{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c} \overset{0}{D}_c v^\nu + R^*{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c} \overset{1}{D}_c v^\nu \,, \\ (\overset{0}{D}_b \overset{1}{D}_a - \overset{1}{D}_a \overset{0}{D}_b) v^\nu &= -P_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v^\sigma + C^{*c}_{ba} \overset{0}{D}_c v^\nu + D^{*c}_{ba} \overset{1}{D}_c v^\nu \,, \\ 2\overset{1}{D}_{[b}\overset{1}{D}_{a]} v^\nu &= -S_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} v^\sigma \,, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

---

(1) $\overset{0}{D}_b v^{r(i)} = v^{r(i)}_{\ \ .b} - v^{r(i)}_{\ \ ;c} G^{*c}_b + \Gamma^{r(i)}_{p(i)b} v^{p(i)}$, $\overset{1}{D}_b v^{r(i)} = v^{r(i)}_{\ \ ;b} + C^{r(i)}_{p(i)b} v^{p(i)}$

(G^c_b: Parameter der Grundübertragung).

wo

$$(52)\quad \begin{cases} R_{ba\sigma}{}^{\cdots\nu} = \Gamma^{\nu}_{\sigma b,a} - \Gamma^{\nu}_{\sigma a,b} + \Gamma^{\nu}_{\lambda a}\Gamma^{\lambda}_{\sigma b} - \Gamma^{\nu}_{\lambda b}\Gamma^{\lambda}_{\sigma a} + \Gamma^{\nu}_{\sigma a;c}G^{*c}_{b} - \Gamma^{\nu}_{\sigma b;c}G^{*c}_{a} \\ \qquad\qquad + C^{\nu}_{\sigma c}(G^{*c}_{b,}{}_{a} - G^{*c}_{a,}{}_{b} + G^{*c}_{a;}{}_{d}G^{*d}_{b} - G^{*c}_{b;}{}_{d}G^{*d}_{a}) , \\ P_{ba\sigma}{}^{\cdots\nu} = \Gamma^{\nu}_{\sigma b;a} - \overset{0}{D}_{b}C^{\nu}_{\sigma a} + C^{\nu}_{\sigma c}(G^{*c}_{b;}{}_{a} - \Gamma^{*c}_{ab}) , \\ S_{ba\sigma}{}^{\cdots\nu} = C^{\nu}_{\sigma b;a} - C^{\nu}_{\sigma a;b} + C^{\nu}_{\lambda a}C^{\lambda}_{\sigma b} - C^{\nu}_{\lambda b}C^{\lambda}_{\sigma a} , \\ R_{ba}{}^{\cdot\cdot c} = G^{*c}_{b,}{}_{a} - G^{*c}_{a,}{}_{b} + G^{*c}_{a;}{}_{d}G^{*d}_{b} - G^{*c}_{b;}{}_{d}G^{*d}_{a} , \\ S^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c} = \Gamma^{*c}_{[ba]} , \quad D^{c}_{ba} = G^{*c}_{b;}{}_{a} - \Gamma^{*c}_{ab} = \Gamma^{*c}_{db;a}y^{d'} \end{cases}$$

sind; für einen kovarianten Vektor $w_{q_{(i)}}$ in $\overset{(i)}{R}$

$$(53)\quad \begin{cases} 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}w_{q_{(i)}} = \overset{(i)}{R}_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}}w_{r_{(i)}} + 2S^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\overset{0}{D}_{c}w_{q_{(i)}} + R^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\overset{1}{D}_{c}w_{q_{(i)}} , \\ (\overset{0}{D}_{b}\overset{1}{D}_{a} - \overset{1}{D}_{a}\overset{0}{D}_{b})w_{q_{(i)}} = P_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}}w_{r_{(i)}} + C^{*c}_{ba}\overset{0}{D}_{c}w_{q_{(i)}} + D^{*c}_{ba}\overset{1}{D}_{c}w_{q_{(i)}} , \\ 2\overset{1}{D}_{[b}\overset{1}{D}_{a]}w_{q_{(i)}} = S_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}}w_{r_{(i)}} , \end{cases}$$

wo

$$(54)\quad \begin{cases} \overset{(i)}{R}_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}} = \Gamma^{r_{(i)}}_{q_{(i)}b,a} - \Gamma^{r_{(i)}}_{q_{(i)}a,b} + \Gamma^{r_{(i)}}_{p_{(i)}a}\Gamma^{p_{(i)}}_{q_{(i)}b} - \Gamma^{r_{(i)}}_{p_{(i)}b}\Gamma^{p_{(i)}}_{q_{(i)}a} \\ \qquad\qquad + \Gamma^{r_{(i)}}_{q_{(i)}a;c}G^{*c}_{b} - \Gamma^{r_{(i)}}_{q_{(i)}b;c}G^{*c}_{a} \\ \qquad\qquad + C^{r_{(i)}}_{q_{(i)}c}\left(G^{*c}_{b,}{}_{a} - G^{*c}_{a,}{}_{b} + G^{*c}_{a;}{}_{d}G^{*d}_{b} - G^{*c}_{b;}{}_{d}G^{*d}_{a}\right) , \\ \overset{(i)}{P}_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}} = \Gamma^{r_{(i)}}_{q_{(i)}b;a} - \overset{0}{D}_{b}C^{r_{(i)}}_{q_{(i)}a} + C^{r_{(i)}}_{q_{(i)}c}(G^{*c}_{b;}{}_{a} - \Gamma^{*c}_{ab}) , \\ \overset{(i)}{S}_{baq_{(i)}}{}^{\cdots r_{(i)}} = C^{r_{(i)}}_{q_{(i)}b;a} - C^{r_{(i)}}_{q_{(i)}a;b} + C^{r_{(i)}}_{p_{(i)}a}C^{p_{(i)}}_{q_{(i)}b} - C^{r_{(i)}}_{p_{(i)}b}C^{p_{(i)}}_{q_{(i)}a} \end{cases}$$

sind; die Formeln für einen kovarianten Vektor w_d in R_m ergeben sich sogleich aus (53) und (54), indem man die Indizes (i) weglässt und c, d, e statt $p_{(i)}, q_{(i)}, r_{(i)}$ schreibt. Man überzeugt sich leicht, dass

$$(55)\quad R^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c} = R^{*}{}_{bad}{}^{\cdots c}y^{d'} \equiv R^{*}{}_{ba0}{}^{\cdots c} , \quad D^{*c}_{ba} = P^{*}{}_{bad}{}^{\cdots c}y^{d'} = P^{*}{}_{ba0}{}^{\cdots c} .$$

Berechnen wir die Ausdrücke $2\overset{j'}{D}_{[b}\overset{j}{D}_{a]}v^{\nu}$ $(j, j' = 0, 1)$ in der anderen Weise unter Berücksichtigung der Formeln von Vertauschung der kovarianten δ-Ableitungen

$$2\overset{0}{\nabla}_{[\omega}\overset{0}{\nabla}_{\mu]}v^{\nu} = -R_{\omega\mu\sigma}{}^{\cdots\nu}v^{\sigma} + R_{\omega\mu 0}{}^{\cdots\rho}\overset{1}{\nabla}_{\rho}v^{\nu} , \quad \text{usw.},$$

so ergeben sich

$$\begin{aligned} 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}v^\nu &= -\{B^{\omega\mu}_{ba}R_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+2B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}P_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+H^{\omega}_{b}H^{\mu}_{a}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}\}v^\sigma \\ &\quad +2\{\overset{(0)}{H}{}_{[ba]}{}^{\rho}+B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}C^{\rho}_{\omega\mu}\}\overset{0}{\Gamma}_\rho v^\nu \\ &\quad +\{2\overset{0}{D}_{[b}H^{\rho}_{a]}+H^{\omega\mu}_{ba}R_{\omega\mu 0}{}^{\rho}+2B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}P_{\omega\mu 0}{}^{\rho}\}\overset{1}{\Gamma}_\rho v^\nu , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\overset{0}{D}_b\overset{1}{D}_a-\overset{1}{D}_a\overset{0}{D}_b)v^\nu &= -\{B^{\omega\mu}_{ba}P_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+H^{\omega}_{b}B^{\mu}_{a}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}\}v^\sigma \\ &\quad +\{B^{\omega\mu}_{ba}C^{\rho}_{\omega\mu}-\overset{(1)}{H}{}_{ab}{}^{\rho}\}\overset{0}{\Gamma}_\rho v^\nu+\{B^{\omega\mu}_{ba}P_{\omega\mu 0}{}^{\rho}+\overset{(0)}{H}{}_{ba}{}^{\rho}-\overset{1}{D}_aH^{\rho}_{b}\}\overset{1}{\Gamma}_\rho v^\nu , \end{aligned}$$

$$2\overset{1}{D}_{[b}\overset{1}{D}_{a]}v^\nu = -B^{\omega\mu}_{ba}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}v^\sigma .$$

Da $\overset{i}{\Gamma}_\rho v^\nu$ unbestimmt und in einem Linienelemente von K_m beliebig wählbar sind, erhalten wir die Beziehungen zwischen den Krümmungen (52) und denjenigen von C_n ·

$$\boxed{\begin{aligned} R_{ba\sigma}{}^{\nu} &= B^{\omega\mu}_{ba}R_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+2B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}P_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+H^{\omega}_{b}H^{\mu}_{a}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu} , \\ P_{ba\sigma}{}^{\nu} &= B^{\omega\mu}_{ba}P_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu}+H^{\omega}_{b}B^{\mu}_{a}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu} , \\ S_{ba\sigma}{}^{\nu} &= B^{\omega\mu}_{ba}S_{\omega\mu\sigma}{}^{\nu} , \end{aligned}} \tag{56}$$

und andere Identitäten

$$\left\{\begin{aligned} 2\overset{0}{D}_{[b}H^{\rho}_{a]} &= -B^{\omega\mu}_{ba}R_{\omega\mu 0}{}^{\rho}-2B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}P_{\omega\mu 0}{}^{\rho}+B^{\rho}_{c}R^*{}_{ba0}{}^{c}+2H^{\rho}_{c}S^*{}_{ba}{}^{c} , \\ \overset{1}{D}_aH^{\rho}_{b}-\overset{(0)}{H}{}_{ba}{}^{\rho} &= B^{\omega\mu}_{ba}P_{\omega\mu 0}{}^{\rho}-B^{\rho}_{c}P^*{}_{ba0}{}^{c}-H^{\rho}_{c}C^{*c}_{ba} , \end{aligned}\right. \tag{57}$$

$$B^{\rho}_{c}C^{*c}_{ba} = B^{\omega\mu}_{ba}C^{\rho}_{\omega\mu}-\overset{(1)}{H}{}_{ab}{}^{\rho} , \quad B^{\rho}_{c}S^*{}_{ba}{}^{c} = \overset{(0)}{H}{}_{[ba]}{}^{\rho}+B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}C^{\rho}_{\omega\mu} .$$

Aus den R_m- und $R_{m'}$-Komponenten letzter zwei Gleichungen ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \boxed{\overset{(0)}{H}{}_{[ba]}{}^{\nu}+C^{\nu}_{\rho}B^{\omega}_{[b}H^{\mu}_{a]}C^{\rho}_{\omega\mu} = 0 , \quad \overset{(1)}{H}{}_{ba}{}^{\nu} = C^{\nu}_{\rho}B^{\omega\mu}_{ba}C^{\rho}_{\omega\mu} ,}$$

$$\text{(B)} \qquad \boxed{S^*{}_{ba}{}^{c} = B^{c\mu}_{\lambda[b}H^{\omega}_{a]}C^{\lambda}_{\mu\omega} , \quad C^{*c}_{ba} = B^{\omega\mu c}_{ba\rho}C^{\rho}_{\omega\mu} .}$$

(A) sind nichts anderes als (41), (42). Da andererseits für den Skalar x^ν in K_m $\overset{0}{D}_b \overset{0}{D}_a x^\nu = \overset{(0)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} - \Gamma^\nu_{\mu b} B^\mu_a$, $\overset{1}{D}_b \overset{0}{D}_a x^\nu = \overset{(1)}{H}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu} - C^\nu_{\mu b} B^\mu_a$, so sehen wir leicht nach (50a), (51), dass die Integrierbarkeitsbedingungen von (45) eben (A) und (B) sind.

Nun wenden wir uns zu die Integrierbarkeit von (46). Unter Verwendung der Operatoren $\overset{j'}{D}_b \overset{j}{D}_a (j, j' = 0, 1)$ auf $\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}}$ folgen erstens nach (51), (53)

$$2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}} = -R_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\overset{(i)}{B}{}^\sigma_{p_{(i)}} + \overset{(i)}{R}{}_{bap_{(i)}}^{\cdot\cdot\cdot r_{(i)}}\overset{(i)}{B}{}^\nu_{r_{(i)}} + 2S^{*}{}_{ba}^{\cdot\cdot c}\overset{0}{D}_c\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}}$$

$$+R^{*}{}_{ba0}^{\cdot\cdot\cdot c}\overset{1}{D}_c\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}}, \quad (\overset{0}{D}_b\overset{1}{D}_a - \overset{1}{D}_a\overset{0}{D}_b)\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}} = -P_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\overset{(i)}{B}{}^\sigma_{p_{(i)}}$$

$$+\overset{(i)}{P}{}_{bap_{(i)}}^{\cdot\cdot\cdot r_{(i)}}\overset{(i)}{B}{}^\nu_{r_{(i)}} + C^{*c}_{ba}\overset{0}{D}_c\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}} + P^{*}{}_{ba0}^{\cdot\cdot\cdot c}\overset{1}{D}_c\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}},$$

$$2\overset{1}{D}_{[b}\overset{1}{D}_{a]}\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}} = -S_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\overset{(i)}{B}{}^\sigma_{p_{(i)}} + \overset{(i)}{S}{}_{bap_{(i)}}^{\cdot\cdot\cdot r_{(i)}}\overset{(i)}{B}{}^\nu_{r_{(i)}}.$$

zweitens nach (46)

$$\overset{j'}{D}_b\overset{j}{D}_a\overset{(i)}{B}{}^\nu_{p_{(i)}} = -\sum_{(i)\leq(kj)<(ij)}^{k}\Big(\overset{(k)}{B}{}^\nu_{q_{(k)}}\overset{j'}{D}_b\underset{(i)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{a\cdot p_{(i)}}^{\cdot q_{(k)}} + \underset{(i)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{a\cdot p_{(i)}}^{\cdot q_{(k)}}\overset{j'}{D}_b\overset{(k)}{B}{}^\nu_{q_{(k)}}\Big)$$

$$+\sum_{(i)<(k)\leq(ij)}^{k}\Big(\overset{(k)}{B}{}^\nu_{q_{(k)}}\overset{j'}{D}_b\underset{(k)}{\overset{(i)j}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} + \underset{(k)}{\overset{(i)j}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}}\overset{j'}{D}_b\overset{(k)}{B}{}^\nu_{q_{(k)}}\Big);$$

aus den letzten und (46) gehen die mehrfach zerlegten Bedingungen hervor: Für $(ij) < (m) \leqq (ijj)$ $(1 \leqq \text{Klasse von } (i) \leqq p,\ j = 0, 1)$,

$$\text{(C)}\quad \boxed{\begin{aligned} \sum_{(m)\leq(kj)}\underset{(m)}{\overset{(k)j}{H}}{}_{[b|q_{(k)}r_{(m)}|}\underset{(k)}{\overset{(i)j}{H}}{}_{a]p_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} &= -\frac{1}{2}S_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^\lambda_{p_{(i)}}\overset{(m)}{B}{}^\mu_{r_{(m)}} \quad \text{für } j=1, \\ &= -\frac{1}{2}R_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^\lambda_{p_{(i)}}\overset{(m)}{B}{}^\mu_{r_{(m)}} \quad \text{für } j=0,\ (m)>(i1), \\ &= -\frac{1}{2}R_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^\lambda_{p_{(i)}}\overset{(i1)}{B}{}^\mu_{r_{(i1)}} + \frac{1}{2}R_{ba0}^{\cdot\cdot\cdot c}\underset{(i1)}{\overset{(i)1}{H}}{}_{cp(i)r(i)} \quad \text{für } \begin{matrix} j=0, \\ (m)=(i1); \end{matrix} \end{aligned}}$$

für $(i) < (m) \leqq (ij)$,

$$
\begin{aligned}
&\overset{j}{D}_{[b}\overset{(i)j}{\underset{(m)}{H}}{}_{a]p_{(i)}r_{(m)}} - \sum_{(k)<(i)}^{k}\overset{(k)j}{\underset{(m)}{H}}{}_{[b|q_{(k)}r_{(m)}|}\overset{(k)j\cdot q_{(k)}}{\underset{(i)}{H}}{}_{a]\cdot p_{(i)}} \\
&\quad + \sum_{(i)<(k)<(m)}^{k}\overset{(k)j}{\underset{(m)}{H}}{}_{[b|q_{(k)}r_{(m)}|}\overset{(i)j\cdot\cdot q_{(k)}}{\underset{(k)}{H}}{}_{a]p_{(i)}} - \sum_{(m)<(k)}^{k}\overset{(m)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{[b|r_{(m)}q_{(k)}|}\overset{(i)j\cdot\cdot q_{(k)}}{\underset{(k)}{H}}{}_{a]p_{(i)}} \\
&\quad = -\frac{1}{2}S_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{r_{(m)}} && \text{für} \quad j = 1, \\
&\quad = -\frac{1}{2}R_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{r_{(m)}} + S^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\overset{(i)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{cp_{(i)}r_{(m)}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}R^{*}{}_{ba0}{}^{\cdot\cdot\cdot c}\overset{(i)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{cp_{(i)}r_{(m)}} && \text{für} \quad j = 0;
\end{aligned}
\tag{D}
$$

für $(m) = (i)$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(k)<(i)\leq(kj)}^{k}\overset{(k)j}{\underset{(i)}{H}}{}_{[b|q_{(k)}r_{(i)}|}\overset{(k)j\cdot q_{(k)}}{\underset{(i)}{H}}{}_{a]\cdot p_{(i)}} + \sum_{(i)<(k)\leq(ij)}^{k}\overset{(i)j}{\underset{(k)}{H}}{}_{[b|r_{(i)}q_{(k)}|}\overset{(i)j\cdot\cdot q_{(k)}}{\underset{(k)}{H}}{}_{a]p_{(i)}} \\
&\quad = \frac{1}{2}S_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(i)}{B}{}^{\mu}_{r_{(i)}} - \frac{1}{2}\overset{(i)}{S}_{bap_{(i)}r_{(i)}} && \text{für} \quad j = 1, \\
&\quad = \frac{1}{2}R_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(i)}{B}{}^{\mu}_{r_{(i)}} - \frac{1}{2}\overset{(i)}{R}_{bap_{(i)}r_{(i)}} && \text{für} \quad j = 0;
\end{aligned}
\tag{E}
$$

für $(i) \leqq (mj) < (ij)$ und $(i) \leqq (mjj) < (ijj)$, (F) und (G) von analoger Gestalt wie (D) bzw. (C); für $(m) = (i10)$ und $(i1) < (m) < (i10)$,

$$
\begin{aligned}
&\overset{(i1)0}{\underset{(i10)}{H}}{}_{bq_{(i1)}r_{(i10)}}\overset{(i)1\cdot\cdot q_{(i1)}}{\underset{(i1)}{H}}{}_{ap_{(i)}} = -P_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(i10)}{B}{}^{\mu}_{r_{(i10)}}, \qquad \text{bzw.} \\
&\sum_{(m)\leq(k0)}^{k}\overset{(k)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(m)}}\overset{(i)1\cdot\cdot q_{(k)}}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}} - \sum_{(m)\leq(k1)}^{k}\overset{(k)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(m)}}\overset{(i)0\cdot\cdot q_{(k)}}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}} \\
&\qquad = -\frac{1}{2}P_{ba\lambda\mu}\overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}}\overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{r_{(m)}};
\end{aligned}
\tag{H}
$$

für $(m) = (i1)$ und $(i) < (m) < (i1)$,

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
&\overset{0}{D}_b \overset{(i)1}{\underset{(i1)}{H}}{}_{ap_{(i)}r_{(i1)}} + \sum_{(i)<(k)<(i1)}^{k} \Big(\overset{(k)0}{\underset{(i1)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(i1)}} \overset{(i)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} - \overset{(k)1}{\underset{(i1)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(i1)}} \overset{(i)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\qquad = -P_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}} \overset{(i1)}{B}{}^{\mu}_{r_{(i1)}} + P^{*}{}_{ba0}^{\cdot\cdot\cdot c} \overset{(i)1}{\underset{(i1)}{H}}{}_{cp_{(i)}r_{(i1)}}, \quad \text{bzw.} \\[2ex]
&\overset{0}{D}_b \overset{(i)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{ap_{(i)}r_{(m)}} - \overset{1}{D}_b \overset{(i)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{ap_{(i)}r_{(m)}} \\
&\qquad - \sum_{(k)<(i)}^{k} \Big(\overset{(k)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(m)}} \overset{(k)1}{\underset{(i)}{H}}{}_{a\cdot p_{(i)}}^{\cdot q_{(k)}} - \overset{(k)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{aq_{(k)}r_{(m)}} \overset{(k)0}{\underset{(i)}{H}}{}_{b\cdot p_{(i)}}^{\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\quad + \sum_{(i)<(k)<(m)}^{k} \Big(\overset{(k)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(m)}} \overset{(i)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} - \overset{(k)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{aq_{(k)}r_{(m)}} \overset{(i)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{bp_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\quad + \sum_{(m)<(k)}^{k} \Big(\overset{(m)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(m)}q_{(k)}} \overset{(i)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} - \overset{(m)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ar_{(m)}q_{(k)}} \overset{(i)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{bp_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\quad = -P_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}} \overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{r_{(m)}} + C^{*c}_{ba} \overset{(i)0}{\underset{(m)}{H}}{}_{cp_{(i)}r_{(m)}} + P^{*}{}_{ba0}^{\cdot\cdot\cdot c} \overset{(i)1}{\underset{(m)}{H}}{}_{cp_{(i)}r_{(m)}};
\end{aligned}
$$

für $(m) = (i)$,

$$
\text{(J)}\quad
\begin{aligned}
&\sum_{(k)<(i)}^{k} \Big(\overset{(k)0}{\underset{(i)}{H}}{}_{bq_{(k)}r_{(i)}} \overset{(k)1}{\underset{(i)}{H}}{}_{a\cdot p_{(i)}}^{\cdot c_{(k)}} - \overset{(k)1}{\underset{(i)}{H}}{}_{aq_{(k)}r_{(i)}} \overset{(k)0}{\underset{(i)}{H}}{}_{b\cdot p_{(i)}}^{\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\quad + \sum_{(k)>(i)}^{k} \Big(\overset{(i)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(i)}q_{(k)}} \overset{(i)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ap_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} - \overset{(i)1}{\underset{(k)}{H}}{}_{ar_{(i)}q_{(k)}} \overset{(i)0}{\underset{(k)}{H}}{}_{br_{(i)}}^{\cdot\cdot q_{(k)}} \Big) \\
&\quad = P_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{p_{(i)}} \overset{(i)}{B}{}^{\mu}_{r_{(i)}} - \overset{(i)}{P}{}_{bar_{(i)}r_{(i)}};
\end{aligned}
$$

für $(i'j) \leqq (m) < (i)$ und $(i'$ od. $i'+1) \leqq (m) < (i'j)$, wo $(i) = (i'jj')$ ist, (K) und (L) von analoger Gestalt wie (I) bzw. (H). Übrigens bestehen:

$$
\text{(M)}\quad
\begin{aligned}
&R_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{\rho} \overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad (m) > (i00), \\
&P_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{\rho} \overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad (m) > (i10), \\
&S_{ba\lambda\mu} \overset{(i)}{B}{}^{\lambda}_{\rho} \overset{(m)}{B}{}^{\mu}_{\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad (m) > (i11).
\end{aligned}
$$

(A)-(M) sind die Verallgemeinerungen der GAUSS-CODAZZIschen Gleichungen, welche auch, wenn man es verlangt, mittels der Übertragung C_m und der Affinoren Φ^a_{bc}, Ψ^ν_b leicht zum Ausdruck gebracht werden (vgl. (14)).

§ 6. Nichtholonome Gebilde.

Durch die Gleichungen $(dx)^k = A^k_\mu dx^\mu$ und umgekehrt $dx^\mu = A^\mu_k (dx)^k$ werden nichtholonome Parameter x^k in K_n eingeführt, wobei A^k_μ im allgemeinen vom Linienelemente der K_n abhängig sind. Beim Übergang zu diesen Parametern entstehen

$$\delta v^k = A^k_\nu \delta v^\nu = dv^k + v^i \Big[A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} \Gamma^{*\nu}_{\lambda\mu} dx^j + A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} C^\nu_{\lambda\mu} \delta x^{j\prime} + A^k_\nu A^\nu_{i.\mu} dx^\mu + A^k_\nu A^\nu_{i;\mu} dx^{\mu\prime} \Big],$$

somit

$$\delta v^k = dv^k + v^i \Big[\Gamma^{*k}_{ij} dx^j + C^{*k}_{ij} \delta x^{j\prime} \Big], \tag{58}$$

$$\begin{cases} \Gamma^{*k}_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} \Gamma^{*\nu}_{\lambda\mu} + A^k_\nu (A^\nu_{i.\mu} A^\mu_j - A^\nu_{i;\mu} G^\mu_\rho A^\rho_j), \\ C^{*k}_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} C^\nu_{\lambda\mu} + A^k_\nu A^\nu_{i;\mu} A^\mu_j, \end{cases} \tag{59}$$

da

$$dx^{\mu\prime} = A^\mu_j \delta x^{j\prime} - G^\mu_\rho A^\rho_j dx^j \tag{60}$$

ist. Wegen (58), (60) ergeben sich

$$\begin{cases} \overset{0}{\Gamma}_j v^k = A^\nu_j v^k_{.\nu} - G^\nu_\rho A^\rho_j v^k_{;\nu} + \Gamma^{*k}_{ij} v^i, \\ \overset{1}{\Gamma}_j v^k = A^\nu_j v^k_{;\nu} + C^{*k}_{ij} v^i. \end{cases} \tag{61}$$

Nun sei jedem Punkte der n-dimensionalen FINSLERschen Mannigfaltigkeit eine m-Richtung zugeordnet. Das m-Richtungsfeld X^m_n sei für jede $p < n$ nicht X_p-bildend. Wie K_m betrachten wir das nichtholonome Gebilde als Ort K^m_n seiner tangierenden Linienelemente. Sind B^ν_a die $\binom{\nu}{a}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors von K^m_n, so ergibt sich in jedem Elemente von K^m_n die Massbestimmung mit dem Fundamentaltensor g'_{ab} (5), und die $\binom{a}{\nu}$-Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors und der Einheitsaffinor C^ν_λ in der pseudonormalen m'-Richtung $K^{m\prime}_n$ werden von (13) bzw. (7) gegeben.

Wir wählen die nichtholonomen Parameter x^k in solcher Weise, dass von den zugehörigen n Massvektoren die ersten m in X_n^m liegend und von der Richtung des Elementes unabhängig sind, und dass die übrigen m' in der zu X_n^m senkrechten m'-Richtung liegen. Die letzte m'-Richtung lässt sich *in jedem Elemente von* K_n definieren. Durchlaufen $a, b, \ldots, g$ bzw. $p, q, \ldots, w$ die Indizes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bzw. $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$, so können A_a^ν und A_p^ν mit B_a^ν bzw. C_p^ν identifiziert werden, d.h. in den k-Bestimmungszahlen $B_a^k \overset{*}{=} \delta_a^k$, $C_p^k \overset{*}{=} \delta_p^k$, und bestehen

$$g_{\lambda\mu} A_a^\lambda A_q^\mu = 0 .$$

Die Fundamentaltensoren und die Einheitsaffinoren von X_n^m und der zu X_n^m senkrechten m'-Richtung werden durch (5), (13), (28), (29) gegeben.

Ist v^a ein Vektor von K_n^m, so ist nach (58), (59) die Projektion seines kovarianten Differentials *längs* K_n^m

$$\delta' v^a = B_k^a \delta v^k = dv^a + v^b \left[\Gamma_{bj}^{*a} dx^j + C_{bj}^{*a} \delta x^{j'} \right], \tag{62}$$

wo

$$\Gamma_{bj}^{*a} = B_{\nu b}^{a\lambda} A_j^\mu \Gamma_{\lambda\mu}^{*\nu} + B_\nu^a B_{b,\,\mu}^\nu A_j^\mu , \quad C_{bj}^{*a} = B_{\nu b}^{a\lambda} A_j^\mu C_{\lambda\mu}^\nu , \tag{63}$$

da A_a^ν von der Richtung des Elementes unabhängig sind. Wie (30) in § 3 ergeben sich für $x^{k'} = B_a^k x^{a'}$

$$\delta x^{k'} = B_a^k \delta' x^{a'} + H_j^k dx^j , \tag{64}$$

wobei gesetzt sind:

$$H_j^k = x^{b'} (\Gamma_{bj}^{*k} - B_a^k \Gamma_{bj}^{*a}) = C_\nu^k (G_\mu^\nu + x^{b'} A_{b,\,\mu}^\nu) A_j^\mu . \tag{65}$$

Aus (62), (64) folgen längs K_n^m

$$\delta' v^a = dv^a + v^b \left[(\Gamma_{bj}^{*a} + C_{bk}^{*a} H_j^k) dx^j + C_{bj}^{*a} B_c^j \delta' x^{c'} \right], \tag{66}$$

und ferner nach Verschiebung dx^j auf K_n^m

$$\delta' v^a = dv^a + v^b \left[\Gamma_{bc}^{*a} dx^c + C_{bc}^{*a} \delta' x^{c'} \right], \tag{67}$$

wo nach (63), (65)

$$(68)\qquad \Gamma^{*a}_{bc} = B^{a\lambda\mu}_{\nu bc}\Gamma'^{*\nu}_{\lambda\mu} + B^{a\lambda}_{\nu b}H'^{\mu}_{c}C^{\nu}_{\lambda\mu} + B^{a}_{\nu}B^{\nu}_{b,\mu}B^{\mu}_{c}\,, \quad C^{*a}_{bc} = B^{a\lambda\mu}_{\nu bc}C^{\nu}_{\lambda\mu}\,,$$

$$(69')\qquad H'^{\mu}_{c} = C^{\mu}_{\nu}B^{\rho}_{c}(G^{\nu}_{\rho} + x^{b'}B^{\nu}_{b',\rho})\,.$$

Durch die Gleichung (67) induziert sich eine Übertragung in K^m_n.

Es sei A eine Grösse, die in K^m_n definiert ist. Sinnvoll ist dann ihr δ-Differential längs K^m_n

$$\delta A = \overset{0}{\nabla}_{\mu}A\cdot dx^{\mu} + \overset{1}{\nabla}_{\mu}A\cdot\delta' x^{\mu'} = (\overset{0}{\nabla}_{\mu}A + H^{\rho}_{\mu}\overset{1}{\nabla}_{\rho}A)dx^{\mu} + B^{\rho}_{c}\overset{1}{\nabla}_{\rho}A\cdot\delta' x^{c'}\,,$$

somit sind auch die Ausdrücke

$$\overset{0}{D}_{j}A \equiv \overset{0}{\nabla}_{j}A + H^{l}_{j}\overset{1}{\nabla}_{l}A\,, \quad \overset{0}{D}_{b}A \equiv B^{j}_{b}\overset{0}{\nabla}_{j}A + H'^{j}_{b}\overset{1}{\nabla}_{j}A\,,$$

$$\overset{0}{D}_{r}A \equiv C^{j}_{r}\overset{0}{\nabla}_{j}A + H''^{j}_{r}\overset{1}{\nabla}_{j}A\,, \quad \overset{1}{D}_{b}A \equiv B^{j}_{b}\overset{1}{\nabla}_{j}A$$

sinnvoll, wo

$$(69'')\qquad H''^{j}_{r} = C^{k}_{r}H^{j}_{k} = C^{j}_{\nu}(G^{\nu}_{\mu} + x^{b'}A^{\nu}_{b',\mu})C^{\mu}_{r}$$

ist. Danach verallgemeinern wir die D-Symbolik für nichtholonome Gebilde folgendermassen:

$$(70a)\qquad \begin{cases} \overset{0}{D}_{\mu}u^{\nu} = \overset{0}{\nabla}_{\mu}u^{\nu} + H^{\rho}_{\mu}\overset{1}{\nabla}_{\rho}u^{\nu}\,, \\ \overset{0}{D}_{\mu}v^{c} = B^{c}_{\nu}(\overset{0}{\nabla}_{\mu}v^{\nu} + H^{\rho}_{\mu}\overset{1}{\nabla}_{\rho}v^{\nu})\,, \\ \overset{0}{D}_{\mu}w^{r} = C^{r}_{\nu}(\overset{0}{\nabla}_{\mu}w^{\nu} + H^{\rho}_{\mu}\overset{1}{\nabla}_{\rho}w^{\nu})\,; \end{cases}$$

$$(70b)\qquad \begin{cases} \overset{0}{D}_{b}u^{\nu} = B^{\mu}_{b}\overset{0}{\nabla}_{\mu}u^{\nu} + H'^{\mu}_{b}\overset{1}{\nabla}_{\mu}u^{\nu}\,, \\ \overset{0}{D}_{b}v^{c} = B^{c}_{\nu}(B^{\mu}_{b}\overset{0}{\nabla}_{\mu}v^{\nu} + H'^{\mu}_{b}\overset{1}{\nabla}_{\mu}v^{\nu}) = \overset{0}{\nabla}'_{b}v^{c}\,, \\ \overset{0}{D}_{b}w^{r} = C^{r}_{\nu}(B^{\mu}_{b}\overset{0}{\nabla}_{\mu}w^{\nu} + H'^{\mu}_{b}\overset{1}{\nabla}_{\mu}w^{\nu})\,; \end{cases}$$

$$(70c)\qquad \begin{cases} \overset{0}{D}_{q}u^{\nu} = C^{\mu}_{q}\overset{0}{\nabla}_{\mu}u^{\nu} + H''^{\mu}_{q}\overset{1}{\nabla}_{\mu}u^{\nu}\,, \\ \overset{0}{D}_{q}v^{c} = B^{c}_{\nu}(C^{\mu}_{q}\overset{0}{\nabla}_{\mu}v^{\nu} + H''^{\mu}_{q}\overset{1}{\nabla}_{\mu}v^{\nu})\,, \\ \overset{0}{D}_{q}w^{r} = C^{r}_{\nu}(C^{\mu}_{q}\overset{0}{\nabla}_{\mu}w^{\nu} + H''^{\mu}_{q}\overset{1}{\nabla}_{\mu}w^{\nu}) = \overset{0}{\nabla}''_{q}w^{r}\,; \end{cases}$$

$$(71)\quad \overset{1}{D}_b u^\nu = B^\mu_b \overset{1}{\nabla}_\mu u^\nu\,,\quad \overset{1}{D}_b v^c = B^{c\mu}_{\nu b} \overset{1}{\nabla}_\mu v^\nu = \overset{1}{\nabla}{}'_b v^c\,,\quad \overset{1}{D}_b w^r = C^r_\nu B^\mu_b \overset{1}{\nabla}_\mu w^\nu\,;$$

u^ν ist ein Vektor in K_n, v^c und w^r liegen in R^m_n ($= K^m_n$ mit g'_{ab}) bzw. $R^{m\prime}_n$($= K^{m\prime}_n$ mit g''_{pq}). Benutzt man die Verkürzungen

$$A_{,b} = (A_{,\mu} + A_{;\lambda} B^\lambda_{c,\mu} x^{c\prime}) B^\mu_b\,,\quad A_{,r} = (A_{,\mu} + A_{;\lambda} B^\lambda_{c,\mu} x^{c\prime}) C^\mu_r\,,$$
$$A_{;b} = A_{;\mu} B^\mu_b\,,$$

so nehmen die D-Ableitungen die folgende Gestalt an:

$$\overset{0}{D}_b v^c = v^c_{,b} - v^c_{;d} G^{*d}_b + \Gamma^{*c}_{ab} v^a\,,\qquad \overset{1}{D}_b v^c = v^c_{;b} + C^{*c}_{ab} v^a\,;$$
$$\overset{0}{D}_b w^r = w^r_{,b} - w^r_{;d} G^{*d}_b + \Gamma^{*r}_{pb} w^p\,,\quad \overset{1}{D}_b w^r = w^r_{;b} + C^{*r}_{pb} w^p\,;$$
$$\overset{0}{D}_q v^c = v^c_{,q} - v^c_{;d} G^{*d}_q + \Gamma^{*c}_{aq} v^a\,,\quad \text{usw.},$$

wo

$$(72)\quad \begin{cases} G^{*c}_b = B^c_\nu (G^\nu_o B^o_b + B^\nu_{d,\cdot b} x^{d\prime})\,,\quad G^{*c}_q = B^c_\nu (G^\nu_o C^o_q + B^\nu_{d,q} x^{d\prime})\,; \\ \Gamma^{*r}_{pb} = C^{r\lambda}_{\nu p} (B^\mu_b \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + H'^\mu_b C^\nu_{\lambda\mu}) + C^r_\nu (C^\nu_{p,b} - C^\nu_{p;q} G^{*q}_b)\,, \\ C^{*r}_{pb} = C^{r\lambda}_{\nu p} B^\mu_b C^\nu_{\lambda\mu}\,,\quad \text{usw.} \end{cases}$$

sind. Neben (44a) gelten die metrischen Eigenschaften der D-Operatoren

$$(73)\quad \begin{cases} \overset{j}{D}_b g'_{ac} = 0\,, & \overset{j}{D}_b g''_{pr} = 0\,, & \overset{0}{D}_q g'_{ac} = 0\,, & \overset{0}{D}_q g''_{pr} = 0\,, \\ \overset{0}{D}_\mu g_{\lambda\nu} = 0\,, & \overset{j}{D}_b g_{\lambda\nu} = 0\,, & \overset{0}{D}_q g_{\lambda\nu} = 0\,. \end{cases}$$

Unter Verwendung der so erklärten D-Symbolik lässt sich die Krümmungstheorie von K^m_n in K_n ganz analog wie die von V^m_n in V_n entwickeln. Es bestehen zusammen mit (45)

$$(74)\quad \boxed{\overset{0}{D}_b x^\nu = B^\nu_b\,,\quad \overset{1}{D}_b x^\nu = 0\,,\quad \overset{0}{D}_q x^\nu = C^\nu_q}$$

und nach nochmaligen D-Ableitungen treten daraus die Krümmungsaffinoren in R^m_n bzw. $R^{m\prime}_n$ (wie (46a))

$$(75)\quad \boxed{\overset{j}{D}_b B^\nu_a = \underset{m}{\overset{j}{H}}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}\,,\quad \overset{0}{D}_q C^\nu_p = \underset{m'}{\overset{0}{H}}{}_{qp}^{\cdot\cdot\nu}}$$

hervor; $\overset{j}{\underset{m}{H}}{}_{ba}^{\cdot\cdot\nu}$ und $\overset{0}{\underset{m'}{H}}{}_{qp}^{\cdot\cdot\nu}$ stehen in Bezug auf ν zu R_n^m bzw. $R_n^{m'}$ senkrecht. Wegen (73) gilt Analoges wie (47a). Die Vertauschungen der D-Ableitungen lassen sich in den folgenden Formeln ausdrücken, wobei $T_{dq}^{\cdot\cdot\nu}$ in Bezug auf d, q, ν bzw. in R_n^m, $R_n^{m'}$, K_n liegen:

$$(76)\quad \begin{cases} 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} = -R_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}T_{dq}^{\cdot\cdot\sigma} + \underset{m}{R}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot c}T_{cq}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{mm'}{R}{}_{baq}^{\cdot\cdot\cdot r}T_{dr}^{\cdot\cdot\nu} \\ \qquad\qquad + 2S^{*\cdot\cdot c}_{ba}\overset{0}{D}_c T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} + R^{*\cdot\cdot c}_{ba}\overset{1}{D}_c T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} + 2\mathfrak{H}_{ba}^{\cdot\cdot r}\overset{0}{D}_r T_{dq}^{\cdot\cdot\nu}, \\ (\overset{0}{D}_b\overset{1}{D}_a - \overset{1}{D}_a\overset{0}{D}_b)T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} = -P_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}T_{dq}^{\cdot\cdot\sigma} + \underset{m}{P}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot c}T_{cq}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{mm'}{P}{}_{baq}^{\cdot\cdot\cdot r}T_{dr}^{\cdot\cdot\nu} \\ \qquad\qquad + C^{*c}_{ba}\overset{0}{D}_c T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} + D^{*\cdot\cdot c}_{ba}\overset{1}{D}_c T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} + \mathfrak{R}_{ba}^{\cdot\cdot r}\overset{0}{D}_r T_{dq}^{\cdot\cdot\nu}, \\ 2\overset{1}{D}_{[b}\overset{1}{D}_{a]}T_{dq}^{\cdot\cdot\nu} = -S_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu}T_{dq}^{\cdot\cdot\sigma} + \underset{m}{S}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot c}T_{cq}^{\cdot\cdot\nu} + \underset{mm'}{S}{}_{baq}^{\cdot\cdot\cdot r}T_{dr}^{\cdot\cdot\nu} \\ \qquad\qquad + 2\mathfrak{L}_{ba}^{\cdot\cdot r}\overset{0}{D}_r T_{dq}^{\cdot\cdot\nu}, \end{cases}$$

wobei man die Verkürzungen (55), (56) (H_a^μ, H_b^ω: gestrichen) benutzt und setzt

$$(77)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}_{ba}^{\cdot\cdot r} = \overset{0}{\underset{m}{H}}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r} + B^{\omega}_{[b}H'^{\mu}_{a]}C^{r}_{\rho}C^{\rho}_{\omega\mu}, \\ \mathfrak{R}_{ba}^{\cdot\cdot r} = -\overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{ab}^{\cdot\cdot r} + B^{\omega\mu}_{ba}C^{r}_{\rho}C^{\rho}_{\omega\mu}, \\ \mathfrak{L}_{ba}^{\cdot\cdot r} = \overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{[ba]}^{\cdot\cdot r}; \end{cases}$$

$$(78)\quad \begin{cases} \underset{m}{R}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot c} = 2S^{*\cdot\cdot e}_{ba}\Gamma^{*c}_{de} + R^{*\cdot\cdot e}_{ba}C^{*c}_{de} + 2\mathfrak{H}_{ba}^{\cdot\cdot p}\Gamma^{*c}_{dp} - 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}\underset{d}{e}^{c}, \\ \underset{mm'}{R}{}_{baq}^{\cdot\cdot\cdot r} = 2S^{*\cdot\cdot e}_{ba}\Gamma^{*r}_{qe} + R^{*\cdot\cdot e}_{ba}C^{*r}_{qe} + 2\mathfrak{H}_{ba}^{\cdot\cdot p}\Gamma^{*r}_{qp} - 2\overset{0}{D}_{[b}\overset{0}{D}_{a]}\underset{q}{e}^{r}, \\ \qquad \text{usw.,} \qquad S^{*\cdot\cdot c}_{ba} = B^{c\omega}_{\lambda[b}H'^{\mu}_{a]}C^{\lambda}_{\omega\mu}. \end{cases}$$

Bei Anwendung von (76) auf B_d^ν und C_q^ν ergeben sich die verallgemeinerten GAUSS-, CODAZZI- und RICCIschen Gleichungen (79), (80), (81):

$$(79)\quad \boxed{\begin{aligned} B^{\sigma e}_{d\nu}R_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{m}{R}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot e} + 2\overset{0}{\underset{m}{H}}{}_{[b\cdot|q|}^{\cdot e}\overset{0}{\underset{m}{H}}{}_{a]d}^{\cdot\cdot q}, \\ B^{\sigma e}_{d\nu}P_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{m}{P}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot e} + \overset{0}{\underset{m}{H}}{}_{b\cdot q}^{\cdot e}\overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{ad}^{\cdot\cdot q} - \overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{a\cdot q}^{\cdot e}\overset{0}{\underset{m}{H}}{}_{bd}^{\cdot\cdot q}, \\ B^{\sigma e}_{d\nu}S_{ba\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{m}{S}{}_{bad}^{\cdot\cdot\cdot e} + 2\overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{[b\cdot|q|}^{\cdot e}\overset{1}{\underset{m}{H}}{}_{a]d}^{\cdot\cdot q}; \end{aligned}}$$

$$
\text{(80)}\qquad
\boxed{\begin{aligned}
B^{\sigma}_{d}C^{q}_{\nu}R_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= 2S^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{cd}{}^{\cdot\cdot q}+R^{*}{}_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{cd}{}^{\cdot\cdot q}-2\,\mathfrak{H}_{ba}{}^{\cdot\cdot r}\underset{m'}{\overset{0}{H}}{}_{r}{}^{\cdot q}{}_{\cdot d}-2\overset{0}{D}_{[b}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{a]}{}^{\cdot}{}_{d}{}^{\cdot q},\\
B^{\sigma}_{d}C^{q}_{\nu}P_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= C^{*c}_{ba}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{cd}{}^{\cdot\cdot q}+D_{ba}{}^{\cdot\cdot c}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{cd}{}^{\cdot\cdot q}-\mathfrak{K}_{ba}{}^{\cdot\cdot r}\underset{m'}{\overset{0}{H}}{}_{r}{}^{\cdot q}{}_{\cdot d}\\
&\qquad -\overset{0}{D}_{b}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{ad}{}^{\cdot\cdot q}+\overset{1}{D}_{a}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{bd}{}^{\cdot\cdot q},\\
B^{\sigma}_{d}C^{q}_{\nu}S_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= -2\,\mathfrak{L}_{ba}{}^{\cdot\cdot r}\underset{m'}{\overset{0}{H}}{}_{r}{}^{\cdot q}{}_{\cdot d}-2\overset{1}{D}_{[b}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{a]}{}^{\cdot}{}_{d}{}^{\cdot q};
\end{aligned}}
$$

$$
\text{(81)}\qquad
\boxed{\begin{aligned}
C^{\sigma r}_{q\nu}R_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{mm'}{R}{}_{baq}{}^{\cdot\cdot\cdot r}+2\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{[b|}{}^{\cdot\cdot r}{}_{e|}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{a]}{}^{\cdot e}{}_{\cdot q},\\
C^{\sigma r}_{q\nu}P_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{mm'}{P}{}_{baq}{}^{\cdot\cdot\cdot r}+\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{be}{}^{\cdot\cdot r}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{a}{}^{\cdot e}{}_{\cdot q}-\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{ae}{}^{\cdot\cdot r}\underset{m}{\overset{0}{H}}{}_{b}{}^{\cdot e}{}_{\cdot q},\\
C^{\sigma r}_{q\nu}S_{ba\sigma}{}^{\cdot\cdot\cdot\nu} &= \underset{mm'}{S}{}_{baq}{}^{\cdot\cdot\cdot r}+2\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{[b|}{}^{\cdot\cdot r}{}_{e|}\underset{m}{\overset{1}{H}}{}_{a]}{}^{\cdot e}{}_{\cdot q}.
\end{aligned}}
$$

Juni 1936.