KLASSENKÖRPERTHEORIE IM KLEINEN FÜR DIE UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER

Von

Mikao MORIYA

INHALT

EINLEITUNG.

Die arithmetische Theorie der endlichen algebraischen Erweiterungskörper über den unendlichen algebraischen Zahlkörpern (d.h. über den algebraischen Zahlkörpern, deren Grade nach dem rationalen Zahlkörper unendlich sind) führt uns naturgemäss zu der Theorie der abelschen Erweiterungskörper, die für die endlichen algebraischen Zahlkörper als Grundkörper die Klassenkörpertheorie (im Grossen) genannt ist und einen höchsten Gipfel der heutigen algebraischen Zahlentheorie bildet. Die Tatsache, dass die Gesamtheit aller vom Nullideale verschiedenen Ideale aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper eine multiplikative (abelsche) Gruppe bildet, ist meiner Ansicht nach in der Klassenkörpertheorie im Grossen grundlegend. Dank dieser Tatsache kann man im Grundkörper stets eine Idealgruppe bilden, welche durch jeden abelschen Erweiterungskörper eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe dieser Idealgruppe im Grundkörper kann man viele schöne arithmetische und algebraische Eigenschaften des abelschen Erweiterungskörpers herleiten.

Im grossen Unterschied von den endlichen algebraischen Zahlkörpern ist aber die Gesamtheit aller vom Nullideal verschiedenen Ideale aus einem unendlichen algebraischen Zahlkörper nicht mehr allgemein eine multiplikative Gruppe. Also sind die meisten Methoden der Klassenkörpertheorie im Grossen für die Untersuchung der endlichen abelschen Erweiterungskörper über den unendlichen algebraischen Zahlkörpern nicht mehr anwendbar. Ob und wie die heutige Klassenkörpertheorie im Grossen auf die unendlichen algebraischen Zahlkörper als Grundkörper übertragen werden kann, davon habe ich augenblicklich keine Ahnung.

Wendet man sich aber der Untersuchung der abelschen Erweiterungskörper über den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern der unendlichen algebraischen Zahlkörper zu, so könnte man wohl noch hoffen, die sogenannte Klassenkörpertheorie im Kleinen auf diesen Fall zu übertragen, weil in dieser Theorie anstatt der Körperideale die Körperelemente selbst eine grosse Rolle spielen. Um diese Hoffnung zu verwirklichen, widme ich mich in der vorliegenden Arbeit der Untersuchung der abelschen Erweiterungskörper endlichen Grades über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers.

Als eine Vorbereitung für die vorliegende Arbeit habe ich in einer vor kurzem erschienenen Arbeit von mir(1) die $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper der unendlichen algebraischen Zahlkörper definiert. Und zwar habe ich zuerst für ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus einem unendlichen algebraischen Zahlkörper k eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung φ definiert. Diese Bewertung φ ist *exponentiell* und allgemein *nicht diskret*. Wir können nun über k den kleinsten, k enthaltenden perfekten Körper $\bar{k}$ in bezug auf φ— den derivierten Körper in bezug auf φ— bilden. Diesen derivierten Körper $\bar{k}$ habe ich den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper von k genannt. Wenn man aber für einen endlichen algebraischen Zahlkörper den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper wie oben definiert, so stimmt er bekanntlich mit dem HENSELschen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper überein.

Wie ich schon oben bemerkt habe, ist die Bewertung φ von k (also auch von $\bar{k}$) allgemein nicht diskret. Daher können wir in der folgenden Untersuchung nicht sogleich die Methoden der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie im Kleinen ergreifen, sondern müssen wir vielmehr

(1) MORIYA, Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Fac. Science, Hokkaido Imp. Univ., Series I, Vol. III (1935), zitiert mit M .

zunächst durch Vermittelung eines gewissen Teilkörpers—des Hilfskörpers—von $\bar{k}$ einmal von einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers zu den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern der endlichen algebraischen Zahlkörper heruntersteigen. Dadurch wird unsere Theorie vollständig auf die HENSELschen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper reduziert. Hier kann man also die Klassenkörpertheorie im Kleinen anwenden. Dann kehren wir von da aus wieder zu dem ursprünglichen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper zurück. Dies ist das Beweisprinzip durch die ganze Arbeit.

Im § 1 lege ich einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $\bar{k}$ eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k zugrunde und betrachte über $\bar{k}$ einen endlichen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$. Dann kann ich immer einen algebraischen Zahlkörper K über k und in K ein Primideal $\mathfrak{P}$ finden, sodass $\bar{K}$ gerade der $\mathfrak{P}$-adische Zahlkörper von K wird. Im Körper $\bar{k}$ bzw. $\bar{K}$ definiere ich noch einen besonderen Teilkörper $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{K}$, den ich im folgenden den Hilfskörper von $\bar{k}$ bzw. $\bar{K}$ nennen will. Diese Hilfskörper $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$ spielen eine grosse Rolle durch die ganze Arbeit.

Im § 2 behandle ich die Exponentialreihen und die logarithmischen Reihen in einem bewerteten Körper, welcher in bezug auf eine Exponentenbewertung perfekt ist. Diese Theorie ist im Falle, wo die Bewertung diskret ist, schon von Herrn HENSEL behandelt. Aber darüber hinaus will ich hier für eine beliebige Bewertung die beiden obigen Reihen untersuchen.

Wie im § 1 betrachte ich im § 3 einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $\bar{k}$ und über $\bar{k}$ einen beliebigen endlichen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$. Dabei definiere ich in $\bar{k}$ die $\bar{K}$ zugeordnete *Normengruppe* $\bar{H}$, welche aus den Normen aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ besteht. Diese $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe $\bar{H}$ in $\bar{k}$ ist sicher eine Untergruppe derjenigen Gruppe $\bar{A}$, die aus allen von Null verschiedenen Elementen aus $\bar{k}$ besteht. Das Hauptresultat dieses Paragraphen ist folgendes:

Der Index von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ ist ein Teiler des Grades von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$.

Im § 4 setze ich insbesondere den Körper $\bar{K}$ im § 3 als abelsch voraus. Aus dieser Annahme über $\bar{K}$ kann man einige enge Beziehungen zwischen der Faktorgruppe $\bar{A}/\bar{H}$ und dem Körper $\bar{K}$ herleiten. Im grossen Gegensatz zu der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie im Kleinen kann man in unserer Theorie *nicht mehr allgemein behaupten*, dass der Index von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ dem Grade von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ gleich sei.

Mit Hilfe der Untersuchung im § 4 kann ich im § 5 für einen beliebigen endlichen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$ über $\bar{k}$ untersuchen, wie sich die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ verhält.

Im Schlussparagraphen definiere ich die Klassenkörper über $\bar{k}$. Und zwar heisst *ein algebraischer Erweiterungskörper* $\bar{K}$ *vom Grade* n *über* $\bar{k}$ *Klassenkörper, wenn die* $\bar{K}$ *zugeordnete Normengruppe* $\bar{H}$ *eine Untergruppe vom Index* n *in* $\bar{A}$ *ist, d. h.* $[\bar{A}:\bar{H}]=[\bar{K}:\bar{k}]$ *ist.* Nach dieser Definition muss ein Klassenkörper über $\bar{k}$ immer abelsch sein. Aber die Umkehrung dieses Satzes ist allgemein nicht richtig. Damit ein abelscher Erweiterungskörper $\bar{K}$ über $\bar{k}$ Klassenkörper sei, muss der Körpergrad $[\bar{K}:\bar{k}]$ immer einer gewissen Beschränkung unterworfen sein, welche mit der Struktur von $\bar{k}$ enge Beziehung hat. So entsteht die spezielle Untersuchung über die Klassenkörper. Ich kann für die Klassenkörper über $\bar{k}$ den *Isomorphie-*, *Anordnungs-*, *Eindeutigkeits-*, *Abgrenzungs- und Verschiebungssatz* beweisen, wie in der gewöhnlichen Klassenkörpertheorie im Kleinen. Für den *Existenzsatz* der Klassenkörper muss man aber eine spezielle Klasse der Untergruppen in $\bar{A}$ betrachten, welche ich die K-Gruppen nenne.

Durch die ganze Arbeit setze ich die Klassenkörpertheorie im Kleinen als bekannt voraus und benutze überall die Sätze aus dieser Theorie ohne Beweise. Für die Klassenkörpertheorie im Kleinen will ich hier auf die Arbeiten von den Herren CHEVALLEY[(1)], HASSE[(2)] und F. K. SCHMIDT[(3)] hinweisen.

§ 1. Existenztheorem der gewissen algebraischen Zahlkörper.

Im folgenden betrachten wir einen unendlichen algebraischen Zahlkörper k, welcher als der Vereinigungskörper von unendlich (abzählbar) vielen algebraischen Zahlkörpern $k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots$, deren jeder über dem rationalen Zahlkörper k_0 einen endlichen Grad besitzt, difiniert ist: $k=\{k_i\}$. Dann kann man für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ aus k eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung φ (etwa die normierte Bewertung von $\mathfrak{p}$) von k herstellen[(4)]. Den derivierten Körper $\bar{k}$ von k

(1) C. CHEVALLEY, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. Fac. Science, Tokyo, Vol. II (1933), zitiert mit CH.

(2) HASSE, Die Normenresttheorie relativ abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 162 (1930), zitiert mit H.

(3) F. K. SCHMIDT, Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen, Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 162 (1930), zitiert mit SCH.

In den beiden letzten Arbeiten ist die Klassenkörpertheorie im Grossen als bekannt vorausgesetzt, aber in der Arbeit von Herrn CHEVALLEY ist die Klassenkörpertheorie im Kleinen ganz unabhängig von der im Grossen aufgebaut.

(4) M. S. 167.

hinsichtlich dieser Bewertung φ nenne ich den $\mathfrak{p}$-*adischen Zahlkörper*[1] von k. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{p}_i$ das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal aus $k_i\ (i \geqq 1)$ in $k = \{k_i\}$ und mit p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl, so induziert die Bewertung φ von k in Körpern k_i und k_0 die diskreten Bewertungen. Der derivierte Körper $\bar{k}_i$ von k_i in bezug auf $\varphi-\bar{k}_i$ ist bekanntlich der $\mathfrak{p}_i$-adische Zahlkörper von k_i—und der p-adische Zahlkörper $\bar{k}_0$ sind offenbar in $\bar{k}$ enthalten. Ferner ist bekanntlich $\bar{k}_i$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}_0$.

Wir bezeichnen nun den Vereinigungskörper von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_i, \dots$ durch $\mathfrak{k} : \mathfrak{k} = \{\bar{k}_i\}$. Dann ist $\mathfrak{k}$ ein Teilkörper von $\bar{k}$ und der derivierte Körper von $\mathfrak{k}$ in bezug auf φ ist $\bar{k}$[2]. Durch die ganze Arbeit bedeuten $\bar{k}$, $\mathfrak{k}$ und $\bar{k}_i$ durchweg die oben bestimmten Körper, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes darüber erwähnt ist. Der Körper $\mathfrak{k}$ ist, invariant ausgesprochen, folgenderweise definiert:

$\mathfrak{k}$ *ist derjenige maximale Teilkörper von* $\bar{k}$, *der über* $\bar{k}_0$ *algebraisch ist.*

Nämlich α sei ein algebraisches Element über $\bar{k}_0$, welches zu $\bar{k}$ gehört. Dann genügt α einer irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}$. Da $f(x)$ in $\bar{k}$ auch irreduzibel ist[3], so muss $f(x)$ bereits in $\mathfrak{k}$ vom Grade 1 sein, weil ja α Element aus $\bar{k}$ ist. Also ist α Element aus $\mathfrak{k}$. Offenbar ist $\mathfrak{k}$ über $\bar{k}_0$ algebraisch. Somit ist die Behauptung bestätigt. Im folgenden nenne ich diesen durch $\bar{k}$ eindeutig bestimmten Körper $\mathfrak{k}$ den *Hilfskörper* von $\bar{k}$.

Nun betrachten wir über $\bar{k}$ einen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$ vom Grade n. Dann ist $\bar{K}$ sicher von der ersten Art über $\bar{k}$[4], weil die Charakteristik von $\bar{k}$ Null ist. Also können wir den Körper $\bar{K}$ so bewerten, dass die Bewertung φ von $\bar{k}$ beibehalten ist. Diese erweiterte Bewertung bezeichne ich auch mit φ. Dann ist $\bar{K}$ der derivierte Körper von sich selbst in bezug auf φ[5].

Da $\bar{K}$ über $\bar{k}$ endlich und von der ersten Art ist, so gibt es ein primitives Element θ von $\bar{K}$ über $\bar{k}$[6]. Dabei kann man noch ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass θ ein ganzes Element aus $\bar{K}$ (in bezug auf φ) ist[7]. Es existiert also in $\bar{k}$ ein irreduzibles

---

(1) M. S. 186.
(2) M. S. 187.
(3) M. S. 153.
(4) STEINITZ, Algebraische Theorie der Körper, Neu herausgegeben von BAER und HASSE, Leipzig (1930), zitiert mit ST. S. 62.
(5) Siehe etwa M. S. 131.
(6) ST. S. 65.
(7) Siehe etwa S. 128.

Polynom $f(x)$ vom Grade n, welches θ als eine Nullstelle besitzt. Da θ ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist, so kann man $f(x)$ als so normiert annehmen, dass die Koeffizienten von $f(x)$ sämtlich ganze Elemente aus $\bar{k}$ und sogar der höchste Koeffizient gleich 1 sind[1].

Weil $f(x)$ sicher ein Polynom 1. Art in $\bar{k}$ ist, so besitzt $f(x)$ keine mehrfachen Nullstellen. Also ist die Diskriminante D von $f(x)=0$ sicher ein von Null verschiedenes ganzes Element aus $\bar{k}$. Wir bezeichnen nun die Bewertung von D durch $2d$, wobei d offenbar eine nicht negative reelle Zahl ist: $\varphi(D)=2d$.

Bezeichnet man mit $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, so ist offenbar $f'(\theta)\neq 0$, weil $f(x)$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Setzt man nun $\varphi(f'(\theta))=a$, so ist a eine nicht negative reelle Zahl.

Wir bestimmen nun eine positive Zahl δ so, dass

$$\delta > \mathrm{Max}\,(2a\,,\,2d) \geqq 0$$

ist. Ist $\bar{c}$ ein beliebiger Koeffizient von $f(x)$, so kann man in k eine Zahl c finden, derart dass

$$\varphi(\bar{c}-c) > \delta$$

ist, weil jedes Element aus $\bar{k}$ ein Grenzelement einer Fundamentalreihe aus k ist. Es existiert also in k ein Polynom $g(x)$ vom Grade n, so dass

$$\varphi(g(x)-f(x)) > \delta^{(2)}$$

ist. Dabei kann man noch annehmen, dass der höchste Koeffizient von $g(x)$ gleich 1 ist. Weil aber alle Koeffizienten von $f(x)$ ganze Elemente aus $\bar{k}$ sind, so folgt aus $\varphi(g(x)-f(x))>\delta$, dass die Koeffizienten von $g(x)$ alle in $\bar{k}$ ganz sind.

Setzt man nun $x=\theta$, so ergibt sich ohne weiteres

$$\varphi(g(\theta)-f(\theta)) = \varphi(g(\theta)) > \delta\ ,$$

weil θ ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist.

Für ein noch nachher zu bestimmendes Element ρ_1 aus K bilden wir nun ein Element

$$\theta_1 = \theta+\rho_1\,.$$

(1) Siehe etwa M. S. 124.

(2) $\varphi(g(x)-f(x))$ bedeutet die kleinste Bewertung unter den Bewertungen aller Koeffizienten von $g(x)-f(x)$.

Dann ist

$$g(\theta_1) = g(\theta+\rho_1)$$
$$= g(\theta)+\rho_1 g'(\theta)+\ldots\ldots+\rho_1^i \frac{g^{(i)}(\theta)}{i\,!}+\ldots\ldots+\rho_1^n \frac{g^{(n)}(\theta)}{n\,!}\,.$$

Dabei bedeutet $g^{(i)}(x)$ die i-te Ableitung von $g(x)$ und man kann auch durch eine leichte Rechnung bestätigen, dass $\frac{g^{(i)}(x)}{i\,!}$ ein Polynom mit ganzen Koeffizienten aus $\bar{k}$ ist.

Zuerst will ich zeigen, dass

$$g'(\theta) \neq 0$$

ist. Nämlich aus $\varphi(g(x)-f(x)) > \delta$ folgt ohne Schwierigkeit

$$\varphi(g'(x)-f'(x)) > \delta\,.$$

Da θ ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist, so folgt ohne weiteres

$$\varphi(g'(\theta)-f'(\theta)) > \delta\,.$$

Ist nun $\varphi(g'(\theta)) \neq \varphi(f'(\theta))$, so muss $\varphi(g'(\theta)-f'(\theta)) = \mathrm{Min}\big(\varphi(g'(\theta)),\, \varphi(f'(\theta))\big)$ $> \delta > a$ sein, was aber Widerspruch ist, weil $\varphi(f'(\theta)) = a < \delta$ ist. Daher muss

$$\infty > \varphi(f'(\theta)) = \varphi(g'(\theta)) = a$$

sein. Also ist $g'(\theta)$ sicher von Null verschieden.

Wir bestimmen jetzt ρ_1 so, dass

$$g(\theta)+\rho_1 g'(\theta) = 0$$

wird, d.h. $\rho_1 = -\frac{g(\theta)}{g'(\theta)}$ ist. Da nach dem oben Bewiesenen $\varphi(g(\theta))$ $> \delta > 2a$ ist, so kann man für eine positive Zahl ε

$$\varphi(g(\theta)) = 2a+\varepsilon$$

setzen. Da aber $\varphi(g'(\theta)) = a < \delta$ ist, so ergibt sich

$$\varphi(\rho_1) = \varphi(g(\theta))-\varphi(g'(\theta)) = a+\varepsilon > a\,.$$

Da $\frac{g^{(i)}(x)}{i\,!}$ ganze Koeffizienten aus $\bar{k}$ besitzt und θ ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist, so ist

$$\frac{g^{(i)}(\theta)}{i\,!}$$

sicher ganz in $\bar{K}$. Für $n \geqq i \geqq 2$ gilt also

$$\varphi\left(\rho_1^i \frac{g^{(i)}(\theta)}{i\,!}\right) \geqq i\varphi(\rho_1) \geqq i(a+\varepsilon) \geqq 2(a+\varepsilon)\,.$$

Hieraus schliesst man sofort

$$\varphi(g(\theta_1)) \geqq 2(a+\varepsilon)\,.$$

Setzt man nun $\varphi(g(\theta_1)) = 2a+\varepsilon_1$, so wird

$$\varepsilon_1 \geqq 2\varepsilon\,,$$

und

$$\varphi(g(\theta_1)) = 2a+\varepsilon_1 > 2a+\varepsilon = \varphi(g(\theta))\,.$$

Hierbei möchte ich darauf aufmerksam machen, dass θ_1 auch ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist.

Nun bilden wir für ein noch nachher zu bestimmendes Element ρ_2 aus $\bar{K}$ ein Element $\theta_2 = \theta_1+\rho_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\theta_2) &= g(\theta_1+\rho_2) \\ &= g(\theta_1)+\rho_2 g'(\theta_1)+\ldots\ldots+\rho_2^i \frac{g^{(i)}(\theta_1)}{i\,!}+\ldots\ldots+\rho_2^n \frac{g^{(n)}(\theta_1)}{n\,!}\,. \end{aligned}$$

Weil $\varphi(f'(\theta)) = a$, $\varphi(\rho_1) > a$ und die Koeffizienten von $f'(x)$ alle ganze Elemente aus $\bar{k}$ sind, so ist

$$\varphi(f'(\theta_1)) = \varphi(f'(\theta+\rho_1)) = a\,.$$

Ebenso wie für $\varphi(g'(\theta))$ kann man jetzt beweisen, dass

$$\varphi(g'(\theta_1)) = a$$

ist. Also ist $g'(\theta_1) \neq 0$. Somit können wir ρ_2 so bestimmen, dass

$$g(\theta_1)+\rho_2 g'(\theta_1) = 0$$

wird, d.h. $\rho_2 = -\dfrac{g(\theta_1)}{g'(\theta_1)}$.

Ferner ist

$$\varphi(\rho_2) = \varphi(g(\theta_1))-\varphi(g'(\theta_1)) = 2a+\varepsilon_1-a = a+\varepsilon_1 \geqq a+2\varepsilon\,.$$

Genau so wie für $g(\theta_1)$ kann man beweisen:

$$\varphi(g(\theta_2)) \geqq 2(a+\varepsilon_1) .$$

Setzt man hierbei $\varphi(g(\theta_2)) = 2a+\varepsilon_2$, so wird

$$\varepsilon_2 \geqq 2\varepsilon_1 \geqq 2^2\varepsilon .$$

Es gilt noch $\varphi(g'(\theta_2)) = a$.

Durch vollständige Induktion kann man ohne Schwierigkeit zeigen, dass für eine beliebige natürliche Zahl ν ein ganzes Element ρ_ν existiert, derart dass

$$\varphi(\rho_\nu) \geqq a+2^{\nu-1}\varepsilon$$

und

$$\varphi(g(\theta_\nu)) = 2a+\varepsilon_\nu \geqq 2a+2^\nu\varepsilon$$

sind. Dabei ist $\theta_\nu = \theta_{\nu-1} + \rho_\nu$ gesetzt.

Betrachtet man nun eine Folge

$$\theta, \theta_1 = \theta+\rho_1, \ldots, \theta_\nu = \theta+\rho_1+\ldots+\rho_\nu, \ldots,$$

so ist diese eine Fundamentalreihe in $\bar{K}$, weil für $j \geqq 1$

$$\varphi(\theta_\nu-\theta_{\nu+j}) \geqq a+2^\nu\varepsilon$$

ist. Da $\bar{K}$ ein perfekter Körper in bezug auf φ ist, so besitzt die obige Fundamentalreihe in $\bar{K}$ ihr Grenzelement Θ.

Da $\lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi(g(\theta_\nu)) = \infty$ ist, so konvergiert die Folge $g(\theta_1), g(\theta_2), \ldots, g(\theta_\nu), \ldots$ zu Null. Hieraus folgt ohne weiteres, dass

$$g(\Theta) = 0$$

ist.

Ich behaupte jetzt, dass $g(x)$ ein irreduzibles Polynom in $\bar{k}$ ist. Nämlich es sei für zwei nicht triviale Polynome $h_1(x)$, $h_2(x)$ in $\bar{k}$

$$g(x) = h_1(x)h_2(x) .$$

Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $h_1(x)$, $h_2(x)$ ganze Koeffizienten aus $\bar{k}$ und sogar die höchsten Koeffizienten 1 besitzen, weil die Koeffizienten von $g(x)$ alle ganz und sein höchster Koeffizient gleich 1 sind.

Bezeichnet man nun mit $R(h_1(x), h_2(x))$ die Resultante von $h_1(x)$ und $h_2(x)$, und durch $D(g(x))$, $D(h_1(x))$, $D(h_2(x))$ resp. die Diskriminanten von $g(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, so ist

$$D(g(x)) = eD(h_1(x))D(h_2(x))R^2(h_1(x), h_2(x))^{(1)},$$

wobei e entweder 1 oder -1 ist. Da nach Voraussetzung über $h_1(x)$ und $h_2(x)$ die Diskriminanten von $h_1(x)$ und $h_2(x)$ ganze Elemente aus $\bar{k}$ sind, so folgt ohne weiteres

$$\varphi\Big(D(g(x))\Big) \geqq 2\varphi\Big(R(h_1(x), h_2(x))\Big).$$

Weil aber $\varphi(g(x)-f(x)) > \delta > 2d = \varphi\Big(D(f(x))\Big)$ ist, so kann man leicht bestätigen, dass

$$\varphi\Big(D(g(x))\Big) = 2d$$

ist. Daher ist

$$2d \geqq 2\varphi\Big(R(h_1(x), h_2(x))\Big) \geqq 0,$$

d.h. $0 \leqq \varphi\Big(R(h_1(x), h_2(x))\Big) \leqq d$. Damit haben wir gezeigt:

1.) *Der Grad von $h_1(x)h_2(x)$ ist gleich dem von $f(x)$.*

2.) *Der höchste Koeffizient von $h_1(x)h_2(x)$ stimmt mit dem von $f(x)$ überein.*

3.) $0 \leqq \varphi\Big(R(h_1(x), h_2(x))\Big) \leqq d$.

4.) $\varphi(f(x)-h_1(x)h_2(x)) > \delta > 2d$.

Also können wir Hilfssatz 3 im §1 von M. auf diesen Fall anwenden. $f(x)$ wird also reduzibel in $\bar{k}$, was aber Widerspruch ist. Daher muss $g(x)$ in $\bar{k}$, um so mehr in k, irreduzibel sein.

Da Θ eine Nullstelle von $g(x)$ ist, welches Zahlkoeffizienten besitzt, so kann man einfach Θ als eine Zahl annehmen[(2)]. Also existiert über k ein algebraischer Zahlkörper $K = k(\Theta)$ vom Grade n, welcher sicher in $\bar{K}$ enthalten ist. Weil aber $g(x)$ in $\bar{k}$ auch irreduzibel und Θ in $\bar{K}$ enthalten ist, so ist $\bar{k}(\Theta)$ ein Teilkörper von $\bar{K}$ und vom Grade n über $\bar{k}$. Da aber $\bar{K}$ über $\bar{k}$ vom Grade n ist, so muss

---

(1) Siehe etwa HENSEL, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig (1908), S. 60.

(2) Genauer ausgesprochen, gibt es eine Zahl ζ, welche der Gleichung $g(x) = 0$ genügt. Da beide Körper $k(\zeta)$ und $k(\Theta)$ über k äquivalent sind, so kann man in den beiden Körpern die folgende arithmetische und algebraische Untersuchung ganz parallel durchführen. Für unsere weitere Untersuchung brauchen wir also die beiden Körper nicht zu unterscheiden und sagen einfach, dass $k(\Theta)$ ein algebraischer Zahlkörper ist.

$$K\bar{k} = \bar{k}(\theta) = \bar{K}$$

sein.

Ist $\bar{\mathfrak{P}}$ das zu φ gehörige Primideal[1] aus $\bar{K}$, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{P}$ von $\bar{\mathfrak{P}}$ mit der Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus K auch ein Primideal aus K. Die Bewertung φ von $\bar{K}$ induziert in K offenbar eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung. Bildet man nun den derivierten Körper von K in bezug auf φ, so enthält er den $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $\bar{k}$ und infolgedessen den Körper $\bar{k}(\theta) = \bar{K}$. Da aber $\bar{K}$ hinsichtlich φ ein perfekter Körper ist, so muss $\bar{K}$ gerade der derivierte Körper von K sein, d.h. $\bar{K}$ ist der $\mathfrak{P}$-adische Zahlkörper von K.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei k ein unendlicher algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k. Ferner sei $\bar{k}$ der $\mathfrak{p}$-adische Zahlkörper von k und $\bar{K}$ ein algebraischer Erweiterungskörper vom Grade n über $\bar{k}$. Dann kann man über k einen algebraischen Zahlkörper K vom Grade n und darin ein Primideal $\mathfrak{P}$ finden, derart dass $\bar{K}$ der $\mathfrak{P}$-adische Zahlkörper von K wird. Ferner ist*

$$\bar{K} = K\bar{k}^{(2)} .$$

Betrachtet man nun die früher bestimmte Gleichung $g(x) = 0$ in k, so sind die sämtlichen Koeffizienten von $g(x)$ schon in einem passenden Teilkörper k_i von k enthalten. Wir können also die Körper $K_i = k_i(\theta)$, $K_{i+1} = k_{i+1}(\theta)$, ..., $K_j = k_j(\theta)$, ... bilden, welche resp. vom Grade n über $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j, \ldots$ sind. Also ist K der Vereinigungskörper von $K_i, K_{i+1}, \ldots, K_j, \ldots$. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{P}_j$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus $K_j\,(j \geqq i)$. Dann induziert die Bewertung φ von $\bar{K}$ (also auch von K) eine zu $\mathfrak{P}_j$ gehörige Bewertung von K_j. Der derivierte Körper $\bar{K}_j$ von K_j hinsichtlich φ ist offenbar in $\bar{K}$ enthalten, und er ist bekanntlich der $\mathfrak{P}_j$-adische Zahlkörper von K_j. Ferner ist

$$\bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta) \qquad (j \geqq i) .$$

Bildet man nun den Vereinigungskörper $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}_i, \bar{K}_{i+1}, \ldots, \bar{K}_j, \ldots$, so ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(\theta) ,$$

(1) Siehe etwa M. S. 113.

(2) Dieser Satz ist im Falle, wo k ein endlicher algebraischer Zahlkörper ist, bereits bekannt.

weil $\mathfrak{K}$ den Hilfskörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ und K enthält. Da nach dem früher Bewiesenen Θ ein algebraisches Element vom Grade n über k und $\bar{k}$ ist, so ist Θ auch vom Grade n über $\mathfrak{k}$:

$$[\mathfrak{K}:\mathfrak{k}] = n = [\bar{K}:\bar{k}]\,,$$

weil $k \leqq \mathfrak{k} \leqq \bar{k}$ ist. Ebenso wie den Hilfskörper von $\bar{k}$ kann man $\mathfrak{K}$ auch leicht folgenderweise charakterisieren:

Der Körper $\mathfrak{K}$ ist derjenige maximale Teilkörper von $\bar{K}$, der über $\bar{k}_0$ algebraisch ist.

Wir nennen also $\mathfrak{K}$ den *Hilfskörper* von $\bar{K}$.

Nun wollen wir einen Spezialfall, wo $\bar{K}$ über $\bar{k}$ normal ist, betrachten. Dann behaupte ich, dass $\mathfrak{K}$ auch über $\mathfrak{k}$ normal ist(1). Da nämlich die sämtlichen Wurzeln von $g(x) = 0$ in $\bar{K}$ enthalten sind, so existiert in $\bar{K}$ ein $\mathfrak{K}$ enthaltender Zerfällungskörper Ω von $g(x) = 0$. Offenbar ist Ω über $\bar{k}_0$ algebraisch. Also muss nach der charakteristischen Eigenschaft des Hilfskörpers $\mathfrak{K}$

$$\Omega = \mathfrak{K}$$

sein, weil $\Omega \geqq \mathfrak{K}$ ist. Also ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ normal.

Weil $g(x) = 0$ eine definierende Gleichung von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ und von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ ist, so sind offenbar die galoissche Gruppe von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{k}$ und die von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ zueinander isomorph. Besonders ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ abelsch, wenn $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch ist, und umgekehrt. Es gilt also

Satz 2. *Es sei $\bar{k}$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k und $\bar{K}$ ein endlicher Erweiterungskörper über $\bar{k}$. Ferner seien $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{k}$ resp. die Hilfskörper von $\bar{K}$, $\bar{k}$. Dann existiert ein primitives Element θ von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$, welches zugleich ein primitives Element von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ wird, und es ist*

$$[\mathfrak{K}:\mathfrak{k}] = [\bar{K}:\bar{k}]\,.$$

Ist besonders $\bar{K}$ über $\bar{k}$ normal, so ist $\mathfrak{K}$ auch normal über $\mathfrak{k}$, und die galoissche Gruppe von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{k}$ isomorph zu der von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$.

Nach STEINITZ können wir über dem p-adischen Zahlkörper $\bar{k}_0$ den algebraisch abgeschlossenen algebraischen Körper Σ bilden(2). Da $\bar{k}_0$ ein perfekter Körper in bezug auf φ und Σ über $\bar{k}_0$ normal ist, so kann

(1) Hierbei soll man aber beachten, dass K über k nicht notwendig normal ist, obwohl $\bar{K}$ über $\bar{k}$ normal ist.

(2) ST. S. 113.

man den Körper Σ eindeutig so bewerten, dass die Bewertung von $\bar{k}_0$ beibehalten ist(1). Diese Bewertung von Σ bezeichne ich mit Φ. Weil der Hilfskörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ über $\bar{k}_0$ algebraisch ist, so ist $\mathfrak{k}$ in Σ enthalten und Σ ist normal über $\mathfrak{k}$. Also können wir in Σ eine erweiterte Bewertung von $\mathfrak{k}$ finden(2), die aber offenbar die Erweiterung der Bewertung φ von $\bar{k}_0$ ist. Also ist die Bewertung φ von $\mathfrak{k}$ durch Φ induziert. Wir können also ohne Missverständnis $\Phi=\varphi$ setzen. Bildet man nun den derivierten Körper $\bar{\Sigma}$ von Σ in bezug auf φ, so enthält $\bar{\Sigma}$ sicher den derivierten Körper $\bar{k}$ von $\mathfrak{k}$. Ebenso enthält $\bar{\Sigma}$ den Körper $\bar{\bar{K}}$.

Wir können also immer das Kompositum von endlich vielen algebraischen Erweiterungskörpern über $\bar{k}$ bilden, weil solche Körper alle in $\bar{\Sigma}$ enthalten sind. Genau so können wir den Körper $\bar{k}$ mit endlich vielen algebraischen Erweiterungskörpern zusammensetzen, welche über $\bar{k}_0$ von endlichem Grade sind.

§ 2. Exponentialreihen und logarithmische Reihen.

Im folgenden betrachten wir einen Körper Δ von der *Charakteristik Null*, welcher in bezug auf eine Exponentenbewertung φ *perfekt* ist. Wir nehmen noch an, dass im Primkörper von Δ mindestens ein Element existiert, dessen Bewertung positiv ist. Ferner bezeichnet e in diesem Paragraphen immer das *Einselement* von Δ.

Wir definieren im Körper Δ zwei folgende Reihen:

1.) *Exponentialreihe:*

$$\exp \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!\, e}.$$

2.) *Logarithmische Reihe:*

$$\log \eta = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(e-\eta)^n}{ne}.$$

Dabei bedeutet ξ bzw. η Element aus Δ.

Wir untersuchen jetzt, für welche Elemente ξ, η die beiden Reihen konvergieren, oder genauer gesagt, für welche Bewertungen von ξ, η die Grenzelemente der beiden Reihen zu Δ gehören. Diese Frage ist im Falle, wo die Bewertung φ *diskret* ist, schon von Herrn HENSEL

(1), (2) Siehe etwa M. S. 127.

beantwortet[1]. In diesem Paragraphen braucht aber φ nicht notwendig diskret zu sein.

Da bekanntlich für das Einselement e

$$\varphi(e) = 0$$

ist, so ist für ein ganzes Vielfach me von e

$$\varphi(me) \geqq \varphi(e) = 0\,.$$

Nach Voraussetzung gibt es im Primkörper von $\varDelta$ ein Element a, dessen Bewertung $\varphi(a)$ positiv ist. Offenbar existieren dann zwei ganze rationale Zahlen m_1, m_2, so dass

$$\frac{m_1 e}{m_2 e} = a$$

wird, weil der Primkörper zum rationalen Zahlkörper isomorph ist. Da

$$\varphi(a) = \varphi(m_1 e) - \varphi(m_2 e) > 0 \quad \text{ist und} \quad \varphi(m_1 e) \geqq 0\,, \quad \varphi(m_2 e) \geqq 0$$

sind, so ist $\varphi(m_1 e) > 0$. Weil aber

$$\varphi(m_1 e) = \varphi(-m_1 e)$$

ist, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit m_1 als positiv annehmen. Es sei nun

$$m_1 = p_1^{a_1} \ldots . p_r^{a_r}$$

die Darstellung von m_1 als das Primzahlpotenzprodukt, wobei p_1, $p_2, \ldots, p_r$ verschiedene Primzahlen sind. Dann folgt

$$\varphi(m_1 e) = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi(p_i e) > 0\,.$$

Es muss also mindestens eine Primzahl, etwa p_1, geben, für die $\varphi(p_1 e) > 0$ wird. Ist nun q eine zu p_1 prime ganze rationale Zahl, so existieren zwei ganze rationale Zahlen x, y, so dass

$$p_1 x + qy = 1$$

(1) HENSEL, Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors, H. A. SCHWARZ-Festschrift, Berlin (1914).

wird. Hieraus folgt sofort

$$0 = \varphi(e) = \varphi(p_1 xe + qye) \geqq \operatorname{Min}(\varphi(p_1 xe),\ \varphi(qye)) .$$

Da aber $\varphi(p_1 xe) \geqq \varphi(p_1 e) > 0$ ist, so muss unbedingt

$$\varphi(qye) = 0$$

sein. Aus $\varphi(q\,y\,e) \geqq \varphi(q\,e) \geqq 0$ folgt also

$$\varphi(qe) = 0 .$$

Damit ist bewiesen:

Es gibt eine und nur einzige Primzahl p, für welche $\varphi(p\,e) > 0$ wird. Für jede zu p prime Zahl q ist aber $\varphi(q\,e) = 0$.

Wir ziehen zunächst die Exponentialreihe in Betracht. Ist $p^{\nu+1} > n \geqq p^{\nu}$, so ist bekanntlich $n\,!$ genau durch $p^{\left[\frac{n}{p}\right]+\cdots\cdot+\left[\frac{n}{p^{\nu}}\right]}$ teilbar, wo p die schon oben bestimmte Primzahl bedeutet. Also ist

$$\begin{aligned}\varphi(n\,!\,e) &= \left(\left[\frac{n}{p}\right]+\cdots\cdot+\left[\frac{n}{p^{\nu}}\right]\right)\varphi(pe)\\ &\leqq n\left(\frac{1}{p}+\cdots\cdot+\frac{1}{p^{\nu}}\right)\varphi(pe)\\ &\leqq \frac{n\left(1-\frac{1}{p^{\nu}}\right)}{p-1}\varphi(pe) .\end{aligned}$$

Daher ist

$$\varphi\left(\frac{\xi^n}{n\,!\,e}\right) = n\varphi(\xi)-\varphi(n\,!\,e) \geqq n\left(\varphi(\xi) - \frac{1-\frac{1}{p^{\nu}}}{p-1}\varphi(pe)\right) .$$

Wenn also für eine positive Zahl ε

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi(pe)}{p-1}(1+\varepsilon)$$

ist, dann ist

$$\varphi\left(\frac{\xi^n}{n\,!\,e}\right) \geqq n\left(1+\varepsilon-1+\frac{1}{p^{\nu}}\right)\frac{\varphi(pe)}{p-1} = n\left(\varepsilon+\frac{1}{p^{\nu}}\right)\frac{\varphi(pe)}{p-1} .$$

Offenbar gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{\xi^n}{n!\,e}\right) \longrightarrow \infty\,.$$

Hieraus folgt wie bekannt:

Für $\varphi(\xi) > \frac{\varphi(p\,e)}{p-1}$ *konvergiert die Exponentialreihe, d.h. für* $\varphi(\xi) > \frac{\varphi(p\,e)}{p-1}$ *stellt* $\exp\xi$ *ein Element aus* Δ *dar.*

Wenn man aber für $\varepsilon \leqq 0$ $\varphi(\xi) = \frac{\varphi(p\,e)}{p-1}(1-\varepsilon)$ setzt, dann wird nicht mehr

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{\xi^n}{n!\,e}\right) \longrightarrow \infty\,,$$

d.h. für $\varphi(\xi) \leqq \frac{\varphi(p\,e)}{p-1}$ ist die Exponentialreihe divergent.

Setzt man für eine Zahl $\varepsilon > 0$ wieder $\varphi(\xi) = (1+\varepsilon)\frac{\varphi(p\,e)}{p-1}$, so folgt aus dem oben Bewiesenen für $n \geqq 2$

$$\varphi\left(\frac{\xi^n}{n!\,e}\right) \geqq \left(\frac{n}{p^\nu} + n\varepsilon\right)\frac{\varphi(pe)}{p-1} \geqq (1+2\varepsilon)\frac{\varphi(pe)}{p-1}\,,$$

weil $n \geqq p^\nu$ ist.

Hieraus folgt sofort

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!\,e}\right) = \varphi\left(\xi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!\,e}\right) = \varphi(\xi)\,,$$

d.h. $\varphi(\exp\xi - e) = \varphi(\xi)$.

Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Die Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!\,e}$ *ist dann und nur dann konvergent, wenn* $\varphi(\xi) > \frac{\varphi(p\,e)}{p-1}$ *ist. Ferner ist*

$$\varphi(\exp\xi - e) = \varphi(\xi)\,,$$

falls $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!\,e}$ *konvergiert.*

Wir können weiter durch formale Rechnung leicht verifizieren:

$$\exp(\xi_1+\xi_2) = \exp\xi_1 \cdot \exp\xi_2 ,$$

falls $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2) > \dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$ sind.

Nun wollen wir uns der Untersuchung der logarithmischen Reihen zuwenden. Setzt man jetzt $n = p^u n_0$ mit $(p, n_0) = 1$, so ist

$$\log n = u \log p + \log n_0{}^{(1)} ,$$

d.h. für $u \neq 0$ ist

$$\frac{1}{u} \geqq \frac{\log p}{\log n} .$$

Berücksichtigt man die obige Ungleichheit, so erhält man ohne weiteres

$$\varphi\left(-\frac{(e-\eta)^n}{ne}\right) = n\varphi(\eta-e) - u\varphi(pe)$$

$$= \begin{cases} n\varphi(\eta-e) & \text{für} \quad u = 0 , \\ u\left[\dfrac{n}{u}\varphi(\eta-e) - \varphi(pe)\right] & \\ \qquad \geqq u\left[\dfrac{n}{\log n}\log(p)\varphi(\eta-e) - \varphi(pe)\right] & \text{für} \quad u \neq 0 , \end{cases}$$

wenn $\varphi(\eta-e) > 0$ ist. Hieraus schliesst man ohne Schwierigkeit

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(-\frac{(e-\eta)^n}{ne}\right) \longrightarrow \infty$$

für $\varphi(\eta-e) > 0$. *Also konvergiert die obige logarithmische Reihe für* $\varphi(\eta-e) > 0$. Wir können aber noch zeigen, dass für $\varphi(\eta-e) \leqq 0$ die logarithmischen Reihen divergent sind.

Nun wollen wir zwecks der weiteren Untersuchung die Bewertung der logarithmischen Reihen für $\varphi(\eta-e) > \dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$ abschätzen. Da $-\dfrac{(e-\eta)^n}{ne} = (\eta-e)\dfrac{(e-\eta)^{n-1}}{ne}$ ist, so ist

$$\varphi\left(-\frac{(e-\eta)^n}{ne}\right) = \varphi(\eta-e) + (n-1)\varphi(\eta-e) - u\varphi(pe) ,$$

wobei wieder $n = p^u n_0$ gesetzt und $(n_0, p) = 1$ ist.

---

(1) $\log n$, $\log p$, $\log n_0$ bedeuten hier natürliche Logarithmen.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

I.) $n=1$. In diesem Fall ist

$$\varphi\Big(-\frac{(e-\eta)^n}{ne}\Big)=\varphi(\eta-e)$$

II.) $n\geqq 2$, aber $0\leqq u\leqq 1$. In diesem Fall ist

$$n=p^u n_0=(p-1+1)^u n_0\,.$$

Also ist

$$n-1\geqq\begin{cases}1 & \text{für}\quad u=0\,,\\ p-1 & \text{für}\quad u=1\,.\end{cases}$$

Daher ist für $\varphi(\eta-e)>\dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$

$$(n-1)\varphi(\eta-e)-u\varphi(pe)>\begin{cases}\dfrac{\varphi(pe)}{p-1}>0 & \text{für}\quad u=0\,,\\ \dfrac{n-1}{p-1}\varphi(pe)-\varphi(pe)\geqq 0 & \text{für}\quad u=1\end{cases}$$

III.) $u\geqq 2$. In diesem Fall ist

$$n=p^u n_0\geqq(p-1)^u+u(p-1)+1\,.$$

Hieraus folgt

$$n-1\geqq(p-1)^u+u(p-1)\,,\quad \text{d.h.}\quad \frac{n-1}{p-1}\geqq(p-1)^{u-1}+u\,.$$

Also ist für $\varphi(\eta-e)>\dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$

$$\begin{aligned}(n-1)\varphi(\eta-e)-u\varphi(pe)&>\frac{n-1}{p-1}\varphi(pe)-u\varphi(pe)\\ &>(p-1)^{u-1}\varphi(pe)>0\,.\end{aligned}$$

Auf jeden Fall hat man bewiesen, dass für $n\geqq 2$

$$\varphi\Big(-\frac{(e-\eta)^n}{ne}\Big)>\varphi(\eta-e)$$

ist, falls $\varphi(\eta-e)>\dfrac{\varphi(\varphi e)}{p-1}$ ist. Also ist für $\varphi(\eta-e)>\dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$

$$\varphi(\log \eta) = \varphi(\eta - e) .$$

Es gilt also folgender

Satz 4. *Die logarithmische Reihe*

$$\log \eta = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(e-\eta)^n}{ne}$$

konvergiert dann und nur dann, wenn $\varphi(\eta - e) > 0$ *ist. Ist besonders* $\varphi(\eta-e) > \frac{\varphi(pe)}{p-1}$, *so ist*

$$\varphi(\log \eta) = \varphi(\eta - e) .$$

Wir können für $\varphi(\eta_1 - e) > 0$ und $\varphi(\eta_2 - e) > 0$ durch formale Rechnung folgende Identität verifizieren:

$$\log(\eta_1 \eta_2) = \log \eta_1 + \log \eta_2 .$$

Betrachtet man nun eine konvergente Exponentialreihe $\exp \xi$, so ist nach Satz 3

$$\varphi(\exp \xi - e) > \frac{\varphi(pe)}{p-1} > 0 .$$

Also ist die logarithmische Reihe $\log(\exp \xi)$ konvergent. Wir können durch eine leichte formale Rechnung folgende Identität beweisen:

$$\log(\exp \xi) = \xi .$$

Wir betrachten nun für $\varphi(\eta - e) > \frac{\varphi(pe)}{p-1}$ die logarithmische Reihe $\log \eta$. Dann ist nach Satz 4

$$\varphi(\log \eta) = \varphi(\eta - e) > \frac{\varphi(pe)}{p-1} .$$

Also ist die Exponentialreihe $\exp(\log \eta)$ konvergent. Durch formale Rechnung können wir bestätigen:

$$\exp(\log \eta) = \eta .$$

Sind in den bisherigen Auseinandersetzungen ξ, η Elemente aus einem Teilkörper $\varDelta'$ von $\varDelta$, welcher in bezug auf φ auch perfekt ist, so stellen offenbar

$$\exp \xi \quad \text{und} \quad \log \eta$$

Elemente aus Δ' dar, falls $\varphi(\xi) > \dfrac{\varphi(pe)}{p-1}$ und $\varphi(\eta - e) > 0$ sind.

Wir betrachten jetzt eine beliebige natürliche Zahl m und setzen $m = p^a m_0$, wobei $(m_0, p) = 1$ ist. Dann ist für ein Element α aus Δ

$$\varphi\left(\frac{\alpha - e}{me}\right) = \varphi(\alpha - e) - a\varphi(pe).$$

Ist also $\varphi(\alpha - e) > \varphi(pe)\dfrac{a(p-1)+1}{p-1}$, so ist sicher

$$\varphi\left(\frac{\log \alpha}{me}\right) > \varphi(pe)\frac{a(p-1)+1}{p-1} - a\varphi(pe)$$

$$> \frac{\varphi(pe)}{p-1}.$$

Also konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp\left(\frac{\log \alpha}{me}\right)$$

für $\varphi(\alpha - e) > \varphi(pe)\dfrac{a(p-1)+1}{p-1}$. Da aber

$$\left(\exp \frac{\log \alpha}{me}\right)^m = \exp\left[m\left(\frac{\log \alpha}{me}\right)\right] = \exp\left[me\frac{\log \alpha}{me}\right] = \exp(\log \alpha) = \alpha$$

ist, so erhält man

$$\alpha = \beta^m,$$

wenn man $\dfrac{\log \alpha}{me} = \beta$ setzt.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 5. *Es sei α ein Element aus Δ und $m = p^a m_0$ eine natürliche Zahl mit $(p, m_0) = 1$. Ferner sei $\varphi(\alpha - e) > \dfrac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(pe)$. Dann existiert in Δ ein Element β von der Art, dass*

$$\alpha = \beta^m$$

wird.

Ist insbesondere das obige Element α aus dem Teilkörper Δ' herausgegriffen, so kann man sicher in Δ' ein Element β finden, derart dass

$$\alpha = \beta^m$$

wird.

Wir bemerken hierbei noch, dass die bisherige Theorie sogleich auf den im § 1 definierten $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $\bar{k}$ und seinen Erweiterungskörper $\bar{K}$ angewandt werden kann.

§ 3. Normengruppe in einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper.

In diesem Paragraphen bedeutet $\bar{k}$ wie im § 1 wieder einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $k = \{k_i\}$ und $\mathfrak{k}$ den Hilfskörper von $\bar{k}$. Also ist $\mathfrak{k} = \{\bar{k}_i\}$, wobei $\bar{k}_i$ der $\mathfrak{p}_i$-adische Zahlkörper von k_i ist.

Es bezeichne n eine natürliche Zahl, welche genau durch p^a teilbar ist, wobei p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl bedeutet. Dann können wir eine positive Zahl $\frac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(p)$ bestimmen. Dabei bedeutet φ wieder die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung von $\bar{k}$. Da ein von Null verschiedenes Element $\bar{\alpha}$ aus $\bar{k}$ als ein Grenzelement einer Fundamentalreihe aus $\mathfrak{k}$ definiert ist, so kann man in $\mathfrak{k}$ ein Element α von der Art finden, dass

$$\varphi(\bar{\alpha}-\alpha) > \frac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(p) + \varphi(\bar{\alpha})$$

wird. Hieraus folgt sofort

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}-1\right) + \varphi(\bar{\alpha}) > \frac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(p) + \varphi(\bar{\alpha}) ,$$

d.h. $$\varphi\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}-1\right) > \frac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(p) .$$

Nach Satz 5 gilt also folgender

Hilfssatz 1. Für ein von Null verschiedenes Element $\bar{\alpha}$ aus $\bar{k}$ und eine beliebige natürliche Zahl n existiert in $\mathfrak{k}$ ein Element α und in $\bar{k}$ ein Element $\bar{\beta}$, so dass

$$\bar{\alpha} = \alpha\bar{\beta}^n$$

wird.

Ist $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}$, so bildet sie offenbar eine multiplikative (abelsche) Gruppe. Wir betrachten nun in $\bar{A}$ eine Untergruppe $\bar{U}$ vom Exponenten n[1]. Dann nennen wir jede Nebengruppe von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ eine Klasse von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$. Es gilt also die folgende Klasseneinteilung von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$:

$$\bar{A} = \sum_{i=1} \alpha^{(i)} \bar{U}.\text{[2]}$$

Ich will aber hier zeigen, dass als $\alpha^{(i)}$ ein Element aus $\mathfrak{k}$ genommen werden kann. Denn ist $\alpha^{(i)}$ Element aus $\bar{k}$, so kann man nach Hilfssatz 1 ein Element γ aus $\mathfrak{k}$ und ein Element $\bar{\beta}$ aus $\bar{k}$ so finden, dass

$$\alpha^{(i)} = \gamma\bar{\beta}^n$$

wird. Da aber $\bar{\beta}^n$ Element aus $\bar{U}$ ist, so wird γ ein Repräsentant von $\alpha^{(i)}\bar{U}$.

Nun beweisen wir folgenden

Satz 6. *Es sei $\bar{U}$ eine Untergruppe vom Exponenten n in $\bar{A}$ und U der Durchschnitt von $\bar{U}$ mit der Gesamtheit A aller von Null verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{k}$. Dann ist U auch eine Untergruppe vom Exponenten n in A. Es gilt ferner*

$$\bar{A}/\bar{U} \cong A/U\,.$$

Beweis. Dass U eine Untergruppe von A bildet, kann man leicht aus Definition von U einsehen.

Es sei $\alpha^{(k)}\bar{U}$ eine Klasse von $\bar{U}$. Dann kann man nach dem oben Bewiesenen $\alpha^{(k)}$ als ein Element aus $\mathfrak{k}$ annehmen. Offenbar enthält $\alpha^{(k)}\bar{U}$ eine Klasse $\alpha^{(k)}U$ von A nach U. Wir zeigen aber, dass $\alpha^{(k)}\bar{U}$ nur eine einzige Klasse von U enthält. Enthielte nämlich $\alpha^{(k)}\bar{U}$ eine von $\alpha^{(k)}U$ verschiedene Klasse $\alpha^{(h)}U$ von U, so müsste $\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(h)}}$ Element aus $\bar{U}$ sein. Da aber $\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(h)}}$ Element aus A wäre, so müsste $\frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(h)}}$ Element aus U sein, d.h. es wäre $\alpha^{(k)}U = \alpha^{(h)}U$, was Widerspruch wäre.

Umgekehrt muss jede Klasse von A nach U sicher zu einer Klasse von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ gehören. Damit können wir die folgende eindeutige Zuordnung zwischen $\bar{A}/\bar{U}$ und A/U herstellen:

$$\alpha^{(k)}\bar{U} \longleftrightarrow \alpha^{(k)}U\,.$$

---

(1) Eine Untergruppe $\bar{U}$ von $\bar{A}$ heisse vom *Exponenten n*, wenn die n-te Potenz jedes Elementes aus $\bar{A}$ zu $\bar{U}$ gehört.

(2) Die Faktorgruppe $\bar{A}/\bar{U}$ ist allgemein unendliche Gruppe.

Sind nun

$$a^{(k)}\bar{U} \longleftrightarrow a^{(k)}U \quad \text{und} \quad a^{(h)}\bar{U} \longleftrightarrow a^{(h)}U \,,$$

so ist offenbar

$$a^{(k)}\bar{U}\cdot a^{(h)}\bar{U} = a^{(k)}a^{(h)}\bar{U} \longleftrightarrow a^{(k)}a^{(h)}U = a^{(k)}U\cdot a^{(h)}U \,.$$

Also ist

$$\bar{A}/\bar{U} \cong A/U \,.$$

Aus dieser Isomorphierelation folgt sofort, dass U auch eine Untergruppe vom Exponenten n ist.

Wir bezeichnen im folgenden immer mit $\bar{A}$, A resp. die Gesamtheiten aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}$, $\mathfrak{k}$.

Satz 7. *Sind $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$ zwei Untergruppen vom Exponenten n in $\bar{A}$, und $U_1 = \bar{U}_1 \frown A$, $U_2 = \bar{U}_2 \frown A$, so ist dann und nur dann*

$$\bar{U}_1 \geqq \bar{U}_2 \,,$$

wenn $U_1 \geqq U_2$ ist.

Beweis. Aus $\bar{U}_1 \geqq \bar{U}_2$ folgt ohne weiteres $U_1 \geqq U_2$. Es sei umgekehrt $U_1 \geqq U_2$. Ist dann $\bar{\alpha}$ ein beliebiges Element aus $\bar{U}_2$, so ist nach Hilfssatz 1

$$\bar{\alpha} = \alpha\bar{\beta}^n \,,$$

wobei α Element aus A und $\bar{\beta}$ Element aus $\bar{A}$ ist. Da $\bar{U}_2$ vom Exponenten n ist, so gehört $\bar{\beta}^n$ zu $\bar{U}_2$. Also gehört $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}^n}$ auch zu $\bar{U}_2$. Nach Definition von U_2 ist α sicher Element aus U_2.

Da nach Voraussetzung $U_1 \geqq U_2$ ist, so gehört α zu U_1, also zu $\bar{U}_1$ und $\bar{\beta}^n$ zu $\bar{U}_1$, weil $\bar{U}_1$ vom Exponenten n ist, d.h. $\bar{\alpha}$ gehört zu $\bar{U}_1$, w.z.b.w.

Aus Satz 7 folgt ohne Schwierigkeit

Zusatz. Dann und nur dann ist

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \,,$$

wenn $U_1 = U_2$ ist.

Im folgenden bezeichnen wir mit A_ν die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}_\nu$, wobei $\bar{k}_\nu$, wie im § 1 definiert, ein Teilkörper aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ ist.

Es gilt nun folgender

Satz 8. *Es sei $\bar{U}$ eine Untergruppe von endlichem Index in $\bar{A}$ und $U = \bar{U} \frown A$. Dann gibt es einen geeigneten Index ν von der Art, dass für jeden Index $j \geqq \nu$*

$$\bar{A}/\bar{U}, \quad A/U, \quad A_j/U_j$$

zueinander isomorph sind, wo U_j den Durchschnitt von $\bar{U}$ mit A_j bedeutet.

Beweis. Wir bezeichnen den Index von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ durch n. Dann ist $\bar{U}$ offenbar eine Untergruppe vom Exponenten n in $\bar{A}$.

Nach Satz 6 gilt also

$$\bar{A}/\bar{U} \cong A/U .$$

Daher ist der Index von A nach U auch gleich n.

Es sei $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ (1) ein Repräsentantensystem von verschiedenen Klassen von A nach U. Dann kann $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$, wie schon gezeigt, auch als ein Repräsentantensystem von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ angenommen werden. Nach Struktur von $\mathfrak{k}$ gehören $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ schon zu einem passenden Teilkörper $\bar{k}_\nu$ von $\mathfrak{k}$, um so mehr zu jedem Körper $\bar{k}_j$ mit $j \geqq \nu$ aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$.

Da U die Klasse U_j enthält, so stellen

$$\alpha^{(1)} U_j, \quad \ldots., \quad \alpha^{(n)} U_j$$

offenbar n verschiedene Klassen von A_j nach U_j dar, wobei $j \geqq \nu$ ist. Ist nun αU_j eine beliebige Klasse von A_j nach U_j, so muss αU_j in A sicher zu irgendeinem von $\alpha^{(1)}U, \ldots, \alpha^{(n)}U$ gehören. Es sei also etwa

$$\alpha U_j < \alpha^{(k)} U ,$$

wobei $1 \leqq k \leqq n$ ist. Dann gibt es in U sicher ein Element η, so dass

$$\alpha = \alpha^{(k)} \eta$$

wird. Da α, $\alpha^{(k)}$ beide Elemente aus $\bar{k}_j$ sind, so muss η auch Element aus $\bar{k}_j$ sein, d.h. η gehört zu U_j. Also ist

$$\alpha U_j = \alpha^{(k)} U_j .$$

Es gibt also genau n verschiedene Klassen von A_j nach U_j. Wir können also die folgende eindeutige Zuordnung

(1) Unter $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots., \alpha^{(n)}$ ist eines sicher Element aus U.

$$a^{(k)}\,U \longleftrightarrow a^{(k)}\,U_j$$

herstellen. Dann können wir auch leicht bestätigen, dass diese Zuordnung einen Isomorphismus von A/U zu A_j/U_j ergibt.

Es gilt also

$$A_\nu/U_\nu \cong A_{\nu+1}/U_{\nu+1} \cong \ldots\ldots \cong A/U \cong \bar{A}/\bar{U}\,,$$

w.z.b.w.

Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnungen folgt noch

Zusatz. Man kann in $\bar{k}_\nu$ ein Repräsentantensystem aller Klassen von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ finden, welches auch ein Repräsentantensystem aller Klassen von A nach U und von A_j nach U_j bildet $(j \geqq \nu)$.

Wir betrachten nun einen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$ vom Grade n über $\bar{k}$, und bezeichnen im folgenden die Norm[1] eines Elementes $\bar{\Gamma}$ aus $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ mit $\bar{N}(\bar{\Gamma})$. Aus Definition der Norm kann man leicht bestätigen, dass $\bar{N}(\bar{\Gamma})$ dann und nur dann gleich 0 ist, wenn $\bar{\Gamma} = 0$ ist.

Sind nun $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}_2$ Elemente aus $\bar{K}$, so folgt leicht aus Definition der Norm

$$\bar{N}(\bar{\Gamma}_1\bar{\Gamma}_2) = \bar{N}(\bar{\Gamma}_1)\bar{N}(\bar{\Gamma}_2)\,.$$

Insbesondere ist für ein Element $\bar{\gamma}$ aus $\bar{k}$

$$\bar{N}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}^n\,.$$

Nun betrachten wir die Gesamtheit $\bar{H}$ der Normen aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ nach $\bar{k}$. Dann bildet $\bar{H}$ offenbar eine Untergruppe von $\bar{A}$. Diese Gruppe $\bar{H}$ wollen wir einfach die $\bar{K}$ zugeordnete *Normengruppe* in $\bar{k}$ und $\bar{A}/\bar{H}$ die Normklassengruppe von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ nennen. Ich beweise jetzt folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2. Es sei $\bar{\Gamma} \neq 0$ ein Element aus $\bar{K}$ und M eine positive Zahl. Dann ist

$$\varphi(\bar{N}(1+\bar{\Gamma})-1)$$

grösser als M, wenn die Bewertung von $\bar{\Gamma}$ hinreichend gross ist.

Beweis. Wir verstehen unter einer Bewertung von $\bar{K}$ immer eine erweiterte Bewertung von $\bar{k}$, welche aber, wie im § 1 bewiesen, eindeutig bestimmt wird. Wir bezeichnen also die Bewertung von $\bar{K}$ auch durch φ.

(1) V. D. WAERDEN, Moderne Algebra, I. Teil, Berlin (1930). S. 122.

Bekanntlich können wir als ein primitives Element von $\bar{K}$ über k ein ganzes Element $\bar{\Omega}$ aus $\bar{K}$ nehmen. Dann bildet

$$1, \bar{\Omega}, \ldots\ldots, \bar{\Omega}^{n-1}$$

ein Basissystem von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$. Es gilt nun:

$$\bar{\Gamma}\cdot 1 = \bar{a}_{11}+\bar{a}_{12}\bar{\Omega}_1+\ldots\ldots+\bar{a}_{1n}\bar{\Omega}^{n-1}$$

$$\bar{\Gamma}\cdot\bar{\Omega} = \bar{a}_{21}+\bar{a}_{22}\bar{\Omega}_1+\ldots\ldots+\bar{a}_{2n}\bar{\Omega}^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$\bar{\Gamma}\cdot\bar{\Omega}^{n-1} = \bar{a}_{n1}+\bar{a}_{n2}\bar{\Omega}_1+\ldots\ldots+\bar{a}_{nn}\bar{\Omega}^{n-1},$$

wobei $\bar{a}_{ik}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ Elemente aus $\bar{k}$ sind. Wenn jetzt $\varphi(\bar{\Gamma})$ hinreichend gross ist, so sind alle $\varphi(a_{ik})$ grösser als M(1). Ist nun die Hauptgleichung von $\bar{\Gamma}$

$$\Phi(x) = x^n+\bar{a}_1x^{n-1}+\ldots\ldots+\bar{a}_n = 0,$$

so sind die Koeffizienten von $\Phi(x)$ alle lineare Kombinationen von gewissen Unterdeterminanten von

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots\cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & & \\ \bar{a}_{n1} & \cdots\cdots & \bar{a}_{nn} \end{vmatrix} = \bar{N}(\bar{\Gamma})\,{}^{(2)} .$$

Da die Unterdeterminanten der obigen Determinante alle ganze rationale Funktionen von $\bar{a}_{ik}$ $(i, k=1, \ldots, n)$ sind, deren Koeffizienten ganze Elemente aus $\bar{k}$ sind, so sind die Bewertungen solcher Unterdeterminanten grösser als M. Also sind $\varphi(\bar{a}_1), \ldots, \varphi(\bar{a}_n)$ alle grösser als M.

Setzt man nun $x=y-1$ in die Hauptgleichung $\Phi(x)=0$ von $\bar{\Gamma}$ ein, so erhält man die Hauptgleichung

$$\Phi(y-1)=0$$

von $\bar{\Gamma}+1$. Aus Definition der Norm folgt also

$$(-1)^n\Phi(-1) = 1-\bar{a}_1+\ldots\ldots+\bar{a}_n = \bar{N}(\bar{\Gamma}+1).$$

Daher ist

$$\varphi(\bar{N}(\bar{\Gamma}+1)-1) \geqq \operatorname{Min}(\varphi(\bar{a}_1), \ldots\ldots, \varphi(\bar{a}_n)) > M.$$

(1) Siehe etwa M. S. 129.

(2) Siehe etwa KOWALEWSKI, Determinantentheorie, Berlin (1925). S. 114-115.

Wie wir schon in Satz 2 gezeigt haben, existiert in $\overline{K}$ ein primitives Element θ, welches ein algebraisches Element n-ten Grades über $\mathfrak{k}$ ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{k}(\theta)$ durch $\mathfrak{K}$. Dann ist $\mathfrak{K}$ der Hilfskörper von $\overline{K}$. Nach Struktur von $\mathfrak{k}$ gibt es offenbar einen Index i, derart dass für alle Körper $\bar{k}_j$ mit $j \geqq i$ das Element θ über $\bar{k}_j$ vom Grade n ist, d.h. θ genügt einer irreduziblen Gleichung vom Grade n, deren Koeffizienten alle in $\bar{k}_i$ enthalten sind.

Wählt man jetzt $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ als ein Basissystem von $\overline{K}$ nach $\bar{k}$ und bestimmt die Normen der Elemente aus $\overline{K}$ nach $\bar{k}$ durch dieses Basissystem, so ist offenbar für ein Element Γ_j aus $\overline{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$ $(j \geqq i)$

$$\overline{N}(\Gamma_j) = N_{\mathfrak{K}\mathfrak{k}}(\Gamma_j) = N_{\overline{K}_j \bar{k}_j}(\Gamma_j) ,$$

weil $1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$ auch ein Basissystem von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ und von $\overline{K}_j$ über $\bar{k}_j$ ist. Im folgenden bezeichnen wir kurz $N_{\mathfrak{K}\mathfrak{k}}(\Gamma_j)$ durch $N(\Gamma_j)$ und $N_{\overline{K}_j \bar{k}_j}(\Gamma_j)$ durch $N_j(\Gamma_j)$.

Für einen Index $j \geqq i$ betrachten wir die $\overline{K}_j$ zugeordnete Normengruppe H_j in $\bar{k}_j$. Dann ist offenbar H_j eine Untergruppe von A_j. Ebenso bildet die $\mathfrak{K}$ zugeordnete Normengruppe H in $\mathfrak{k}$ eine Untergruppe von A. Dann gilt folgender

Satz 9. *Der Durchschnitt der $\overline{K}$ zugeordneten Normengruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$ mit $\mathfrak{k}$ ist die $\mathfrak{K}$ zugeordnete Normengruppe H in $\mathfrak{k}$.*

Beweis. Wie wir schon früher bemerkten, ist für ein Element Γ aus $\mathfrak{K}$

$$N(\Gamma) = \overline{N}(\Gamma) .$$

Also ist H in $\overline{H}$ enthalten. Es gilt also:

$$\overline{H} \frown \mathfrak{k} \geqq H .$$

Es sei nun α ein Element aus $\overline{H} \frown \mathfrak{k}$. Dann existiert nach Definition von $\overline{H}$ ein Element $\overline{\Gamma}$ aus $\overline{K}$, so dass

$$\overline{N}(\overline{\Gamma}) = \alpha$$

wird. Da $\overline{\Gamma}$ als ein Grenzelement einer Fundamentalreihe aus $\mathfrak{K}$ definiert ist, so kann man sicher in $\mathfrak{K}$ ein Element Γ finden, derart dass

$$\varphi(\overline{\Gamma}) = \varphi(\Gamma)$$

und

$$\varphi(\overline{\Gamma} - \Gamma) > M$$

sind, wobei M eine noch nachher zu bestimmende positive Zahl bedeutet. Setzt man also

$$\bar{\Gamma} = \Gamma + \bar{\Pi}\,,$$

so ist

$$\varphi(\bar{\Pi}) > M\,.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma} = 1 + \frac{\bar{\Pi}}{\Gamma}\,.$$

Da $\varphi(\bar{\Gamma}) = \varphi(\Gamma)$ eine bestimmte Zahl ist, so kann man nach Hilfssatz 2 dieses Paragraphen die Bewertung von

$$\bar{N}\left(1 + \frac{\bar{\Pi}}{\Gamma}\right) - 1$$

grösser machen als $\dfrac{a(p-1)+1}{p-1}\,\varphi(p)$, falls $\varphi(\bar{\Pi})$, also auch M, hinreichend gross gewählt ist. Dabei bedeutet a den genauen Exponenten von p, mit dem p in n aufgeht. Wir nehmen also jetzt an, dass M von vornherein so gross gewählt ist, dass

$$\varphi\left(\bar{N}\left(1 + \frac{\bar{\Pi}}{\Gamma}\right) - 1\right) > \frac{a(p-1)+1}{p-1}\varphi(p)$$

wird. Da aber

$$\bar{N}\left(1 + \frac{\bar{\Pi}}{\Gamma}\right) = \bar{N}\left(\frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma}\right) = \frac{\alpha}{N(\Gamma)}$$

ist, so wird

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{N(\Gamma)} - 1\right) > \frac{a(p-1)+1}{p-1}\,\varphi(p)\,.$$

Nach Struktur von $\mathfrak{K}$ ist $N(\Gamma)$ schon in einem passenden Teilkörper $\bar{k}_\mu$ von $\mathfrak{k}$ enthalten, wobei aber $\mu \geqq i$ ist. Wenn man diesen Index μ von vornherein so gross wählt, dass α auch zu $\bar{k}_\mu$ gehört, dann kann man nach dem im § 2 Bemerkten in $\bar{k}_\mu$ ein Element β_μ finden, derart dass

$$\frac{\alpha}{N(\Gamma)} = \beta_\mu^n$$

wird, weil $\bar{k}_\mu$ in bezug auf φ perfekt ist. Da aber $\beta_\mu^n = N(\beta_\mu)$ ist, so wird

$$\alpha = N(I\,\beta_\mu)\ ,$$

d.h. α ist eine Norm eines Elementes aus $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{k}$. Also gehört α zu H. Damit ist bewiesen:

$$\overline{H} \frown \mathfrak{k} \leqq H\ .$$

Aus dem früher Bewiesenen folgt jetzt

$$\overline{H} \frown \mathfrak{k} = H\ ,$$

w.z.b.w.

Im folgenden bezeichnen wir den Durchschnitt von $\dot{H}$ mit $\bar{k}_j$ durch $\overline{H}_j$, wobei aber $j \geqq i$ ist. Dann ist offenbar

$$\overline{H}_j = \overline{H} \frown \bar{k}_j = H \frown \bar{k}_j$$

und $\overline{H}_j$ ist sicher eine Untergruppe von A_j. Da offenbar die $\overline{K}_j$ zugeordnete Normengruppe H_j in $\bar{k}_j$ eine Teilmenge von $\overline{H}$ ist, so ist

$$\overline{H}_j \geqq H_j\ .$$

Also ist

$$[A_j : H_j] = [A_j : \overline{H}_j]\,[\overline{H}_j : H_j]\ .$$

Weil nach dem bekannten *Abgrenzungssatz*(1) $[A_j : H_j]$ ein Teiler von $[\overline{K}_j : \bar{k}_j] = n$ ist, so ist

$$[A_j : \overline{H}_j]$$

auch ein Teiler von n.

Wir wollen nun zeigen, dass die Faktorgruppe

$$A\,/\,H$$

von einem endlichen Index ist, welcher nicht grösser ist als n. Nämlich sonst besitzt A/H mindestens $n+1$ Klassen nach H. Wählt man aber aus $\mathfrak{k}$ einen geeigneten Teilkörper k_l mit $l \geqq i$, so kann man schon in $\bar{k}_l$ ein Repräsentantensystem $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n+1)}$ der obigen $n+1$ Klassen nach H finden. Da H offenbar $\overline{H}_l$ enthält, so muss es in $A_l/\overline{H}_l$ auch

(1) CH. S. 461 oder SCH. S. 158.

mindestens $n+1$ verschiedene Klassen nach $\bar{H}_l$ geben, was aber unmöglich ist, weil für $l \geqq i$

$$[A_l : \bar{H}_l]$$

ein Teiler von n ist. Also ist A/H eine endliche Gruppe.

Da A/H eine endliche Gruppe ist, so ist nach Satz 7

$$\bar{A}/\bar{H}$$

auch endliche Gruppe. Wendet man also Satz 8 auf diesen Fall an, so findet man in $\mathfrak{k}$ einen geeigneten Teilkörper $\bar{k}_\nu$ von der Art, dass für jeden Index $j \geqq \nu$

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A/H \cong A_j/\bar{H}_j$$

wird. Wir betrachten nun einen Index $j \geqq \operatorname{Max}(\nu, i)$. Dann ist nach dem oben Bewiesenen $[A_j : \bar{H}_j]$ ein Teiler von n. Hieraus folgt ohne weiteres, dass

$$[\bar{A} : \bar{H}]$$

ein Teiler von n ist.

Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnungen gilt also folgender Satz:

Satz 10. *Es existiert in $\mathfrak{k} = \{\bar{k}_i\}$ ein Teilkörper $\bar{k}_\nu$ von der Art, dass für jeden Index $j \geqq \nu$*

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A/H \cong A_j/\bar{H}_j$$

wird. Die Ordnung $\bar{A}/\bar{H}$ ist ein Teiler des Grades von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$. Ferner gibt es im Körper $\bar{k}_\nu$ ein Repräsentantensystem aller Klassen von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$, welches auch ein Repräsentantensystem aller Klassen von A nach H und von A_j nach $\bar{H}_j$ bildet $(j \geqq \nu)$.

§ 4. Abelsche Erweiterungskörper über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper.

In diesem Paragraphen bedeutet $\bar{k}$ wieder wie im § 1 und § 3 einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $k = \{k_j\}$. Bezeichnet man das durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primideal aus k_j durch $\mathfrak{p}_j$, den Relativgrad und den Exponenten von $\mathfrak{p}_{j+1}$ nach k_j resp. durch f_j, e_j, so ist bekanntlich $n_j = e_j f_j$ der Relativgrad von $\bar{k}_{j+1}$ nach $\bar{k}_j$.

Bedeutet nun f_0 bzw. e_0 den Grad bzw. den Exponenten von $\mathfrak{p}_1$ nach dem rationalen Zahlkörper k_0, so ist

$$F_j = f_0 f_1 \ldots . f_j \qquad \text{bzw.} \qquad E_j = e_0 e_1 \ldots . e_j$$

der Grad bzw. der Exponent von $\mathfrak{p}_{j+1}$ nach k_0. Wir definieren hierbei wie HERBRAND

$$\lim_{j\to\infty} F_j \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{j\to\infty} E_j$$

als den *absoluten Grad* bzw. *absoluten Exponenten* von $\mathfrak{p}$[1].

Offenbar sind nach Definition

$$F_i \mid F_j \quad \text{und} \quad E_i \mid E_j$$

falls $j \geqq i$ ist. Es sei l eine Primzahl und l^t eine beliebige (hohe) Potenz von l, wobei aber t als positiv vorausgesetzt ist. Ist dann für hinreichend grosses j F_j bzw. E_j durch l^t teilbar, so sagt man, dass *l im unendlichen Teile des absoluten Grades bzw. Exponenten von $\mathfrak{p}$ aufgeht.* Sonst heisse *l prim zum unendlichen Teile des absoluten Grades bzw. Exponenten von $\mathfrak{p}$.*

Offenbar ist

$$N_j = F_j E_j = (f_0 e_0)(f_1 e_1) \ldots . (f_i e_j) = n_0 n_1 \ldots . n_j$$

der Grad von $\bar{k}_j$ nach $\bar{k}_0$. Wir definieren also

$$\lim_{j\to\infty} N_j$$

als den *absoluten Grad* von $\mathfrak{k} = \{\bar{k}_j\}$. Dann kann man leicht zeigen, dass $\lim_{j\to\infty} N_j$ durch $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt, aber von der Wahl der Körperreihe $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_j, \ldots$ ganz unabhängig ist[2]. Da aber $\mathfrak{k}$ als der Hilfskörper von $\bar{k}$ eindeutig besimmt ist, so will ich $\lim_{j\to\infty} N_j$ auch schlechthin den *absoluten Grad* von $\bar{k}$ nennen.

Geht nun eine Primzahlpotenz l^t mit beliebigem positiven t in N_j auf, falls j hinreichend gross ist, so sagt man, dass *l im unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ aufgeht;* sonst heisse *l prim zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$.* Wir gebrauchen auch

---

(1) HERBRAND, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, Math. Ann., Bd. 106 (1932), S. 478.

(2) D. h. $\lim_{j\to\infty} N_j$ ist als eine *G-Zahl* eindeutig bestimmt (siehe ST. S. 79).

im folgenden den Ausdruck, dass eine ganze rationale Zahl *m zum unendlichen Teile des absoluten Grades* von $\bar{k}$ (auch *des absoluten Grades bzw. absoluten Exponenten* von $\mathfrak{p}$) *prim ist*, falls jeder Primteiler von *m zum unendlichen Teile des absoluten Grades* von $\bar{k}$ (auch *des absoluten Grades bzw. Exponenten* von $\mathfrak{p}$) prim ist.

Aus Definition folgt ohne weiteres:

Dann und nur dann geht eine natürliche Zahl m im unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ auf, wenn m im unendlichen Teile des absoluten Grades oder des absoluten Exponenten von $\mathfrak{p}$ aufgeht.

Es sei $\bar{K}$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}$. Ist dann der Grad von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ prim zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$, so heisse $\bar{K}$ ein *regulärer Körper* über $\bar{k}$.

Im folgenden betrachten wir besonders einen *abelschen* Erweiterungskörper $\bar{K}$ vom Grade n über $\bar{k}$. Nach Satz 2 existiert in $\bar{K}$ ein primitives Element θ über $\bar{k}$, welches einer irreduziblen Gleichung n-ten Grades in $\mathfrak{k}$ genügt. Dann ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(\theta)$ auch vom Grade n und abelsch über $\mathfrak{k}$. Wir können ferner in $\mathfrak{k}$ einen Teilkörper $\bar{k}_i$ finden, derart dass die Koeffizienten der irreduziblen Gleichung n-ten Grades in $\mathfrak{k}$, welcher θ genügt, schon alle zu $\bar{k}_i$ gehören und $\bar{k}_i(\theta) = \bar{K}_i$ über $\bar{k}_i$ abelsch ist. Dann folgt hieraus ohne Schwierigkeit, dass für $j \geqq i$

$$\bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$$

über $\bar{k}_j$ *vom Grade n* und *abelsch* ist.

Wir bezeichnen nun mit $\bar{H}$, H, H_j resp. die $\bar{K}$, $\mathfrak{K}$, $\bar{K}_j$ zugeordneten Normengruppen in $\bar{k}$, $\mathfrak{k}$, $\bar{k}_j$, wo $j \geqq i$ ist. Wählt man hier den Index i genügend gross, so wird nach Satz 10

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A/H \cong A_j/\bar{H}_j \qquad (j \geqq i)\,,$$

wo $\bar{H}_j = H \frown \bar{k}_j$ ist. Ferner kann man im Körper $\bar{k}_i$ schon ein Repräsentantensystem von $\bar{A}/\bar{H}$, A/H und $A_j/\bar{H}_j$ finden. Im folgenden nehmen wir an, dass der Index j von vornherein so gewählt ist, dass die obige Tatsache gilt.

Wir wollen nun zeigen, dass der Index $[\bar{A} : \bar{H}|$ von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ *prim* ist. Ist $[\bar{A} : \bar{H}]$ durch eine Primzahl l, welche im unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ aufgeht, teilbar, so kann man sicher unter allen Klassen von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ eine Klasse finden, deren Ordnung gleich l ist. Nach der Bestimmung des Körpers $\bar{k}_i$ kann man sicher im Körper $\bar{k}_i$ einen Repräsentanten α der obigen Klasse von der Ordnung l finden.

Nach der Isomorphierelation $\bar{A}/\bar{H} \cong A_i/\bar{H}_i$ ist die Ordnung der Klasse $\alpha\bar{H}_i$ nach $\bar{H}_i$ gleich l. Da H_i, wie auf S. 37 gesagt, eine Untergruppe von $\bar{H}_i$ mit einem endlichen Index ist, so ist die Ordnung m von α nach H_i sicher durch l teilbar. Es sei m genau durch l^e teilbar. Dann kann man aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ einen Erweiterungskörper $\bar{k}_\rho$ über $\bar{k}_i$ finden, derart dass der Grad von $\bar{k}_\rho$ nach $\bar{k}_i$ durch l^e teilbar wird. Denn sonst würde l zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim.

Nun betrachten wir das Element $\alpha^{\frac{m}{l^e}} = \alpha'$. Dann gehört α' nicht zu $\bar{H}$, weil $\frac{m}{l^e}$ zu l prim ist. Nach dem bekannten *Verschiebungssatz* gilt aber im Körper $\bar{K}_\rho = \bar{k}_\rho(\theta) = \bar{K}_i\,\bar{k}_\rho$ folgendes:

Die $\bar{K}_\rho$ zugeordnete Normengruppe H_ρ in $\bar{k}_\rho$ besteht aus allen derjenigen Elemente in $\bar{k}_\rho$, deren Normen nach $\bar{k}_i$ in die $\bar{K}_i$ zugeordnete Normengruppe H_i in $\bar{k}_i$ fallen.[1]

Da α' ein Element aus $\bar{k}_i$ ist, so ist

$$N_{\bar{k}_\rho \bar{k}_i}(\alpha') = (\alpha')^g ,$$

wobei g den Grad von $\bar{k}_\rho$ nach $\bar{k}_i$ bedeutet. Da nach unserer Annahme der Grad g durch l^e teilbar ist, so gehört

$$(\alpha')^g = \alpha^{\frac{m}{l^e}g} = (\alpha^m)^{\frac{g}{l^e}}$$

zu H_i. Also muss α' sicher zu H_ρ gehören. Da aber H_ρ in $\bar{H}_\rho = \bar{H} \cap \bar{k}_\rho$ enthalten ist, so gehört α' zu $\bar{H}$, was aber Widerspruch wäre. Damit ist bewiesen:

Der Index von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ ist prim zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$.

Es sei nun n_0 der grösste Teiler von n (dem Grade von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$), welcher zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist. Dann kann man sicher einen Körper $\bar{k}_\nu$ aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ finden, derart dass für jeden Index $j \geqq \nu$ der Grade $[\bar{k}_j : \bar{k}_\nu]$ zu n_0 prim wird. Denn sonst hätte ja n_0 mindestens einen Primteiler, welcher im unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ aufginge. Wählt man hierbei den Index ν so, dass er grösser wird als der früher bestimmte Index i, so sind

$$\bar{K}_\nu,\ \bar{K}_{\nu+1},\ \ldots\ldots,\ \bar{K}_j,\ \ldots\ldots$$

(1) CH. S. 460.

resp. abelsch und vom Grade n über $\bar{k}_\nu$, $\bar{k}_{\nu+1}$, ..., $\bar{k}_j$, ...

Nach dem bekannten *Isomorphiesatz*(1) ist die Ordnung von A_ν / H_ν gleich n. Da n_0 ein Teiler von n ist, so gibt es in A_ν eine H_ν enthaltende Untergruppe H'_ν vom Index n_0, d.h. A_ν / H'_ν ist eine Gruppe von der Ordnung n_0. Es seien $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n_0)}$ die Repräsentanten aller Klassen von A_ν nach H'_ν. Dann will ich zeigen, dass $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n_0)}$ in $\mathfrak{k}$ auch zu n_0 verschiedenen Klassen nach H gehören. Nämlich es gehören zwei verschiedene Elemente von $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n_0)}$, also etwa $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$, zu ein und derselben Klasse nach H. Dann ist offenbar $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ Element aus H. Nach Definition von H existiert aber im Körper $\mathfrak{K}$ ein Element Γ, dessen Norm nach $\mathfrak{k}$ gleich $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ ist. Dieses Element Γ gehört aber nach Struktur von $\mathfrak{K}$ schon einem passenden Teilkörper $\bar{K}_\mu$ aus der Körperreihe von $\mathfrak{K}=\{\bar{K}_j\}$ an. Dabei können wir annehmen, dass μ nicht kleiner ist als ν. Es ist also

$$\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}} = N(\Gamma) = N_\mu(\Gamma) ,$$

d.h. $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ gehört der $\bar{K}_\mu$ zugeordneten Normengruppe H_μ in $\bar{k}_\mu$ an. Weil aber $\bar{K}_\mu = \bar{K}_\nu \bar{k}_\mu$ ist, so muss nach dem bekannten *Verschiebungssatz*(2)

$$N_{\bar{k}_\mu \bar{k}_\nu}\left(\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}\right)$$

zu H_ν, um so mehr zu H'_ν, gehören. Bezeichnet man nun mit g den Grad von $\bar{k}_\mu$ nach $\bar{k}_\nu$, so ist offenbar

$$N_{\bar{k}_\mu \bar{k}_\nu}\left(\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}\right) = \left(\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}\right)^g ,$$

weil $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ Element aus $\bar{k}_\nu$ ist. Also muss g sicher durch die Ordnung von $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ nach H'_ν teilbar sein. Da die Ordnung von $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ nach H'_ν ein Teiler von n_0, und n_0 nach der Wahl des Körpers $\bar{k}_\nu$ zu g prim ist, so ist die Ordnung von $\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}}$ nach H'_ν gleich 1, d.h. $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ gehören entgegen der Annahme zu derselben Klasse nach H'_ν. Es existieren also in A/H mindestens n_0 verschiedene Klasssen nach H. Da nach Satz 10

(1) CH. S. 458, oder H. S. 150.
(2) CH. S. 460.

$$\bar{A}/\bar{\bar{H}} \cong A/H$$

ist, so gibt es in $\bar{A}/\bar{\bar{H}}$ mindestens n_0 verschiedene Klassen nach $\bar{H}$, d.h. $[\bar{A}:\bar{\bar{H}}] \geqq n_0$. Ferner ist nach Satz 10 $[\bar{A}:\bar{H}]$ ein Teiler von n. Hieraus folgt also nach dem früher Bewiesenen (siehe S. 41)

$$[\bar{A}:\bar{\bar{H}}] \leqq n_0 .$$

Also muss sicher

$$[\bar{A}:\bar{\bar{H}}] = n_0$$

sein.

Da nach der Wahl des Körpers $\bar{k}_\nu$

$$\bar{A}/\bar{\bar{H}} \cong A/H \cong A_\nu/\bar{H}_\nu$$

ist, so ist

$$[A_\nu:\bar{H}_\nu] = n_0 .$$

Also sind $\bar{H}_\nu$, H'_ν beide die H_ν enthaltenden Untergruppen vom Index n_0 in A_ν, wobei $\left(n_0, \frac{n}{n_0}\right) = 1$ ist. Aus dem folgenden, leicht beweisbaren Hilfssatz über die abelschen Gruppen schliesst man sofort

$$\bar{H}_\nu = H'_\nu .$$

Der jetzt zu beweisende Hilfssatz lautet folgendermassen:

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe von der Ordnung n und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ seien zwei Untergruppen vom Index n_0 in $\mathfrak{A}$. Ferner sei $\left(n_0, \frac{n}{n_0}\right) = 1$. Dann ist $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Man kann diesen Hilfssatz leicht nach einer grundlegenden Tatsache der endlichen abelschen Gruppe beweisen, dass jede endliche abelsche Gruppe als ein direktes Produkt von einfachen (zyklischen) Gruppen von Primzahlpotenzordnungen darstellbar ist.

Die obigen Resultate zusammenfassend erhalten wir

Satz 11. *Es sei $\bar{K}$ ein abelscher Erweiterungskörper vom Grade n über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper $\bar{k}$, und $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann ist der Index von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ der grösste Teiler von n, dessen Primteiler alle zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim sind.*

Wenn insbesondere der abelsche Körper $\overline{K}$ ein regulärer Körper über $\bar{k}$ ist, dann gilt nach Satz 11 unter Benutzung aller bisherigen Bezeichnungen

Satz 12. *Ist $\overline{K}$ ein regulärer abelscher Körper vom Grade n über $\bar{k}$, so ist*

$$[\bar{A}:\overline{H}] = n .$$

Mit Hilfe von Satz 12 können wir noch folgenden Satz beweisen:

Satz 13. *Es sei $\overline{K}$ ein abelscher Erweiterungskörper vom Grade n über $\bar{k}$, und n_0 der grösste Teiler von n, welcher zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist. Dann existiert in $\overline{K}$ ein Teilkörper*[1] *$\overline{K}^{(0)}$ vom Grade n_0 über $\bar{k}$ von der Art, dass die $\overline{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ identisch ist mit der $\overline{K}$ zugeordneten Normengruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$.*

Beweis. Es sei θ ein primitives Element[2] von $\overline{K}$ über $\bar{k}$, welches zugleich algebraisch und vom Grade n über einem passenden Teilkörper $\bar{k}_\nu$ aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ ist. Ferner können wir von vornherein annehmen, dass ν so gross gewählt ist, dass für jeden Index $j \geqq \nu$

$$\overline{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$$

abelsch und vom Grade n über $\bar{k}$ ist, und

$$\bar{A}/\overline{H} \cong A_\nu/\overline{H}_\nu\text{[3]}$$

ist, wobei $\overline{H}_\nu = H \frown \bar{k}_\nu$ ist.

Nach dem bekannten *Existenzsatz*[4] existiert über $\bar{k}_\nu$ ein abelscher Körper $\overline{K}_\nu^{(0)}$, welcher $\overline{H}_\nu$ als die ihm zugeordnete Normengruppe besitzt. Aus $[\bar{A}:\overline{H}] = n_0 = [A_\nu:\overline{H}_\nu]$[5] folgt also

$$[\overline{K}_\nu^{(0)}:\bar{k}_\nu] = n_0 .$$

Bezeichnet man die $\overline{K}_\nu$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_\nu$ durch H_ν, so ist nach dem früher Bewiesenen

$$\overline{H}_\nu \geqq H_\nu .$$

(1) Nach dem Existenzsatz, welcher nachher im § 6 bewiesen wird, können wir zeigen, dass $\overline{K}^{(0)}$ der einzige Körper mit der genannten Eigenschaft ist.

(2) Die Existenz dieses Elementes θ ist von Satz 2 gesichert.

(3) Satz 10.

(4) CH. S. 459 oder SCH. S. 166.

(5) Vgl. Satz 11.

Zufolge des bekannten *Anordnungssatzes*[1] ist also $\overline{K}_\nu^{(0)}$ ein Teilkörper von $\overline{K}_\nu$ über $\overline{k}_\nu$ und es ist

$$[\overline{K}_\nu : \overline{K}_\nu^{(0)}] = \frac{n}{n_0} .$$

Also ist θ ein algebraisches Element vom Grade $\frac{n}{n_0}$ über $\overline{K}_\nu^{(0)}$. Bildet man nun das Kompositum von $\overline{K}_\nu^{(0)}$ und $\overline{k}$, so ist $\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k}$ sicher ein Teilkörper von $\overline{K}$ über $\overline{k}$. Ich behaupte aber, dass $[\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k} : \overline{k}] = n_0$ ist. Denn sonst folgte aus den Gradrelationen

$$n = [\theta : \overline{k}] = [\theta : \overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k}][\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k} : \overline{k}] \quad \text{und}$$

$$[\theta : \overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k}] \leqq [\theta : \overline{K}_\nu^{(0)}] = \frac{n}{n_0}$$

$$n = [\theta : \overline{k}] < n ,$$

was Widerspruch wäre. Es ist also $[\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k} : \overline{k}] = n_0$.

Wir setzen nun $\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k} = \overline{K}^{(0)}$. Da aber für jeden Index $j \geqq \nu$ θ ein algebraisches Element vom Grade n über $\overline{k}_j$ ist, so kann man ebenso wie oben beweisen, dass der Grad des Teilkörpers $\overline{K}_j^{(0)} = \overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k}_j$ von $\overline{K}_j$ nach $\overline{k}_j$ gleich n_0 ist. Bezeichnet man nun mit H_j' die $\overline{K}_j^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\overline{k}_j$, so gilt nach dem *Isomorphiesatz*[2]

$$[A_j : H_j'] = n_0 .$$

Da $\overline{K}_\nu^{(0)}\overline{k}_j = \overline{K}_j^{(0)}$ ein Teilkörper von $\overline{K}_j$ über $\overline{k}_j$ ist, so folgt nach dem *Anordnungssatz*[3]

$$H_j' \geqq H_j ,$$

wobei H_j die $\overline{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\overline{k}_j$ bedeutet.

Nach der Bestimmung von n_0 kann man also mit Hilfe vom Hilfssatz beweisen, dass

$$H_j' = \bar{H}_j ,$$

ist, weil $\overline{H}_j$ auch eine H_j enthaltende Untergruppe vom Index n_0 in A_j ist.

---

(1) CH. S. 459 oder H. S. 152.
(2) CH. S. 458 oder H. S. 158.
(3) CH. S. 459 oder H. S. 152.

Betrachtet man nun den Körper $\overline{K}_\nu^{(0)}\mathfrak{k} = \mathfrak{K}^{(0)}$, so ist er ein abelscher Teilkörper von $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(\theta)$ und vom Grade n_0 über $\mathfrak{k}$, weil sonst der Grad von $\overline{K}^{(0)}$ nach $\overline{k}$ kleiner wäre als n_0. Bedeutet nun H' die $\mathfrak{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\mathfrak{k}$, so enthält H' nach Struktur von $\mathfrak{K}^{(0)}$ sicher $H'_\nu = \overline{H}_\nu$, $H'_{\nu+1} = \overline{H}_{\nu+1}, \ldots, H'_j = \overline{H}_j, \ldots$. Also ist

$$H' \geqq H = \overline{H} \frown \mathfrak{k} .$$

Ist umgekehrt $\Gamma^{(0)}(\neq 0)$ ein Element aus $\mathfrak{K}^{(0)}$, so gehört $\Gamma^{(0)}$ einem Körper $\overline{K}_j^{(0)}$ mit $j \geqq \nu$ an. Die Norm von $\Gamma^{(0)}$ nach $\mathfrak{k}$ wird also Element aus $\overline{H}_j$, um so mehr aus H. Daher ist

$$H' \leqq H .$$

Hieraus folgt

$$H' = H .$$

Da $\mathfrak{K}^{(0)}$ der Hilfskörper von $\overline{K}^{(0)}$ ist, so folgt nach Satz 9, dass H' der Durchschnitt der $\overline{K}^{(0)}$ zugeordneten Normengruppe $\overline{H}'$ in $\overline{k}$ mit $\mathfrak{k}$ ist. Ferner sind die Gruppen $\overline{H}'$ und $\overline{H}$ beide vom gleichen Exponenten in $\overline{A}$.

Weil aber $H = \overline{H} \frown \mathfrak{k}$ und $H' = \overline{H}' \frown \mathfrak{k}$, und $H' = H$ sind, so kann man aus Zusatz von Satz 7 schliessen:

$$\overline{H} = \overline{H}' .$$

$\overline{H}$ ist also die $\overline{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\overline{k}$, w.z.b.w.

§ 5. Endliche algebraische Erweiterungskörper über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper.

Wie im vorigen Paragraphen bedeutet $\overline{k}$ wieder einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $k = \{k_j\}$, und $\mathfrak{k}$ den Hilfskörper von $\overline{k}$: $\mathfrak{k} = \{\overline{k}_j\}$. In diesem Paragraphen widmen wir uns der Untersuchung der beliebigen algebraischen (nicht notwendig abelschen) Erweiterungskörper von endlichem Grade über $\overline{k}$.

Es sei $\overline{K}$ ein algebraischer Erweiterungskörper vom Grade n über $\overline{k}$. Dann kann man, wie in Satz 2 bewiesen, ein primitives Element θ von $\overline{K}$ über $\overline{k}$ finden, welches auch ein algebraisches Element vom Grade n über $\overline{k}_i, \overline{k}_{i+1}, \ldots, \overline{k}_j, \ldots$ ist, wobei $\overline{k}_i$ einen geeigneten Teilkörper von $\mathfrak{k}$ bedeutet. Es sind also

$$\bar{K}_i = \bar{k}_i(\theta)\,,\ \bar{K}_{i+1} = k_{i+1}(\theta)\,,\ \ldots\ldots,\ \bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta)\,,\ \ldots\ldots$$

resp. vom Grade n über $\bar{k}_i$, $\bar{k}_{i+1}$, ..., $\bar{k}_j$, ...

Wir betrachten nun über $\bar{k}$ den maximalen abelschen Teilkörper $\bar{K}^{(1)}$ von $\bar{K}$, welcher durch $\bar{K}$ eindeutig bestimmt wird. Den Grad von $\bar{K}^{(1)}$ nach $\bar{k}$ bezeichne ich mit n_1. Nach Satz 2 können wir ein primitives Element θ_1 von $\bar{K}^{(1)}$ über $\bar{k}$ finden, welches auch ein algebraisches Element vom Grade n_1 über $\mathfrak{k}$ ist. Also ist $\mathfrak{K}^{(1)} = \mathfrak{k}(\theta_1)$ ein algebraischer Erweiterungskörper vom Grade n_1 über $\mathfrak{k}$. Gemäss der charakteristischen Eigenschaft des Hilfskörpers $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}$ muss $\mathfrak{K}^{(1)}$ sicher in $\mathfrak{K}$ enthalten sein, weil $\mathfrak{K}^{(1)}$ über dem p-adischen Zahlkörper algebraisch und in $\bar{K}$ enthalten ist.

Nach Satz 2 ist der Körper $\mathfrak{K}^{(1)}$ auch abelsch über $\mathfrak{k}$. Nun sei $\mathfrak{L}$ der maximale abelsche Teilkörper von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$. Dann ist der derivierte Körper $\bar{\mathfrak{L}}$ von $\mathfrak{L}$ auch abelsch über $\bar{k}$[1]. Es gilt noch

$$[\mathfrak{L} : \mathfrak{k}] = [\bar{\mathfrak{L}} : \bar{k}]\,.$$

Ferner enthält $\bar{K}^{(1)}$ nach der Annahme den Körper $\bar{\mathfrak{L}}$, und $\mathfrak{L}$ den Körper $\mathfrak{K}^{(1)}$. Es ist also

$$n_1 = [\mathfrak{K}^{(1)} : \mathfrak{k}] \leqq [\mathfrak{L} : \mathfrak{k}] = [\bar{\mathfrak{L}} : \bar{k}] \leqq [\bar{K}^{(1)} : \bar{k}] = n_1\,.$$

Daher muss sicher

$$\mathfrak{K}^{(1)} = \mathfrak{L}$$

sein. Damit ist gezeigt:

Der Körper $\mathfrak{K}^{(1)} = \mathfrak{k}(\theta_1)$ ist der maximale abelsche Teilkörper von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$.

Nach Struktur von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{K}$ können wir aus der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ einen Körper $\bar{k}_\mu$ herausgreifen, derart dass θ, θ_1 resp. algebraische Elemente vom Grade n, n_1 über $\bar{k}_\mu$ sind und überdies $\bar{k}_\mu(\theta_1)$, $\bar{k}_{\mu+1}(\theta_1)$, ... $\bar{k}_j(\theta_1)$, ... resp. über $\bar{k}_\mu$, $\bar{k}_{\mu+1}$, ... , $\bar{k}_j$, ... abelsch sind.

Es sei nun $\bar{K}_\mu^{(1)}$ der maximale abelsche Teilkörper von $\bar{K}_\mu$ über $\bar{k}_\mu$. Dann ist das Kompositum $\mathfrak{Z}$ von $\bar{K}_\mu^{(1)}$ und $\mathfrak{k}$ auch über $\mathfrak{k}$ abelsch. Ferner gilt

$$[\mathfrak{Z} : \mathfrak{k}] = [\bar{K}_\mu^{(1)} : \bar{k}_\mu]\,.$$

Nämlich es gilt offenbar folgende Gradrelation:

$$[\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] = [\mathfrak{K} : \mathfrak{Z}][\mathfrak{Z} : \mathfrak{k}] = n\,.$$

(1) M. S. 160.

Da aber $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}(\theta)$ ist, so ist

$$[\mathfrak{K}:\mathfrak{Z}] = [\theta:\mathfrak{Z}] \leqq [\theta:\overline{K}_\mu^{(1)}] .$$

Ist nun $[\mathfrak{Z}:\mathfrak{k}] < [\overline{K}_\mu^{(1)}:\overline{k}_\mu]$, so ist

$$n = [\mathfrak{K}:\mathfrak{Z}][\mathfrak{Z}:\mathfrak{k}] < [\theta:\overline{K}_\mu^{(1)}][\overline{K}_\mu^{(1)}:\overline{k}_\mu] = n ,$$

was aber Widerspruch ist. Also ist offenbar

$$[\mathfrak{Z}:\mathfrak{k}] = [\overline{K}_\mu^{(1)}:\overline{k}_\mu] .$$

Da aber $\mathfrak{Z}$ über $\mathfrak{k}$ abelsch ist, so muss $\mathfrak{Z}$ sicher im maximalen abelschen Teilkörper $\mathfrak{K}^{(1)}$ von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ enthalten sein. Also gilt einerseits

$$n_1 \geqq [\mathfrak{Z}:\mathfrak{k}] = [\overline{K}_\mu^{(1)}:\overline{k}_\mu] ,$$

und anderseits nach der Bestimmung des Index μ

$$[\overline{K}_\mu^{(1)}:\overline{k}_\mu] \geqq [\overline{k}_\mu(\theta_1):\overline{k}_\mu] = n_1 .$$

Es muss also

$$[K_\mu^{(1)}:k_\mu] = n_1$$

und infolgedessen

$$\overline{K}_\mu^{(1)} = \overline{k}_\mu(\theta_1)$$

sein, weil $\overline{K}_\mu^{(1)} \geqq \overline{k}_\mu(\theta_1)$ ist.

Aus dem bisher Gezeigten behaupte ich folgenden

Satz 14. *Es sei $\overline{K}^{1)}$ der maximale abelsche Teilkörper von $\overline{K}$ über $\overline{k}$ und n_1 der Grad von $\overline{K}^{(1)}$ nach $\overline{k}$. Dann existiert im Hilfskörper $\mathfrak{K} = \{\overline{K}_j\}$ von $\overline{K}$ ein primitives Element θ_1 von $\overline{K}^{(1)}$ über $\overline{k}$. Ferner ist $\mathfrak{K}^{(1)} = \mathfrak{k}(\theta_1)$ der maximale abelsche Teilkörper n_1-ten Grades von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$, und es existiert in der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ ein Teilkörper $\overline{k}_\mu$ von der Art, dass für jeden Index $j \geqq \mu$ der Körper $\overline{k}_j(\theta_1)$ der maximale abelsche Teilkörper von $\overline{K}_j$ und vom Grade n_1 über $\overline{k}_j$ ist.*

Wir bezeichnen nun mit $\overline{H}$ die $\overline{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\overline{k}$. Ist dann $\bar{\gamma}$ ein Element aus $\overline{H}$, so existiert nach Hilfssatz 1 im § 3 ein Element γ bzw. $\bar{\beta}$ aus $\mathfrak{k}$ bzw. $\overline{k}$, so dass

$$\bar{\gamma} = \gamma\bar{\beta}^n$$

wird, wobei n den Grad von $\overline{K}$ nach $\overline{k}$ bedeutet. Da

$$\gamma = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}^n}$$

Element aus $\mathfrak{k}$ und $\overline{H}$ ist, so gehört γ sicher zu $H = \overline{H} \frown \mathfrak{k}$. Weil nach Satz 9 H die $\mathfrak{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\mathfrak{k}$ ist, so existiert in $\mathfrak{K}$ ein Element Γ, so dass

$$N(\Gamma) = \gamma$$

wird. Nach Struktur von $\mathfrak{K}$ kann man aus $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}(\theta)$ einen geeigneten Teilkörper $\overline{K}_i = \overline{k}_i(\theta)$ vom Grade n über $\overline{k}_i$ herausgreifen, derart dass Γ Element aus $\overline{K}_i$ wird. Dann ist offenbar

$$\gamma = N(\Gamma) = N_i(\Gamma) .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man dabei annehmen, dass der Körper $\overline{k}_i$ den in Satz 14 bestimmten Körper $\overline{k}_\mu$ enthält.

Da $\gamma = N_i(\Gamma)$ ist, so gehört γ der $\overline{K}_i$ zugeordneten Normengruppe H_i in $\overline{k}_i$ an. Aber diese Normengruppe ist identisch mit der $\overline{K}_i^{(1)}$ zugeordneten Normengruppe in $\overline{k}_i$, falls $\overline{K}_i^{(1)}$ der maximale abelsche Teilkörper von $\overline{K}_i$ über $\overline{k}_i$ ist(1).

Es existiert also in $\overline{K}_i^{(1)}$ ein Element Γ_1 von der Art, dass

$$N_{\overline{K}_i^{(1)}\overline{k}_i}(\Gamma_1) = \gamma$$

wird. Da Γ_1 zum maximalen abelschen Teilkörper $\mathfrak{K}^{(1)}$ von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ gehört, so bestätigt man ohne Schwierigkeit, dass

$$\gamma = N_{\mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{k}}(\Gamma_1) = N_{\overline{K}^{(1)}\overline{k}}(\Gamma_1)^{(2)}$$

ist, wo $\overline{K}^{(1)}$ der maximale abelsche Teilkörper von $\overline{K}$ über $\overline{k}$ ist.

Da der Grad von $\overline{K}^{(1)}$ nach $\overline{k}$ gleich n_1 ist, so ist

$$\bar{\beta}^n = \left(\bar{\beta}^{\frac{n}{n_1}}\right)^{n_1} = N_{\overline{K}^{(1)}\overline{k}}\left(\bar{\beta}^{\frac{n}{n_1}}\right) .$$

Es ist also

$$\bar{\gamma} = \gamma\bar{\beta}^n = N_{\overline{K}^{(1)}\overline{k}}\left(\Gamma_1\bar{\beta}^{\frac{n}{n_1}}\right) ,$$

d.h. $\bar{\gamma}$ gehört der $\overline{K}^{(1)}$ zugeordneten Normengruppe $\overline{H}^{(1)}$ in k an. Damit ist gezeigt:

$$\overline{H} \leqq \overline{H}^{(1)} .$$

---

(1) CH. S. 461.

(2) Diese Gleichung folgt leicht aus der Tatsache, dass man mit Hilfe des in Satz 14 bestimmten Elementes θ_1, welches zugleich ein primitives Element von $\mathfrak{K}^{(1)}$ über $\mathfrak{k}$ und $\overline{K}^{(1)}$ über $\overline{k}$ ist, die Norm von Γ_1 nach $\mathfrak{k}$ bzw. nach $\overline{k}$ bestimmen kann.

Ist umgekehrt $\bar{\eta}$ ein Element aus $\bar{H}^{(1)}$, so kann man wieder in $\mathfrak{k}$ ein Element η finden, so dass

$$\bar{\eta} = \eta\bar{\delta}^n = \eta\left(\bar{\delta}^{\frac{n}{n_1}}\right)^{n_1}$$

wird, wobei $\bar{\delta}$ ein Element aus $\bar{k}$ bedeutet. η gehört also zu $H^{(1)} = \bar{H}^{(1)} \frown \mathfrak{k}$. Ferner ist nach Satz 9 $H^{(1)}$ die $\mathfrak{K}^{(1)}$ zugeordnete Normengruppe in $\mathfrak{k}$. Also existiert in $\mathfrak{K}^{(1)}$ ein Element $\varDelta_1$ von der Art, dass

$$N_{\mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{k}}(\varDelta_1) = \eta$$

wird. Nach Struktur von $\mathfrak{K}^{(1)}$ gehört $\varDelta_1$ zu einem Teilkörper $\bar{K}_l^{(1)} = \bar{k}_l(\theta_1)$ von $\mathfrak{K}^{(1)}$. Dabei kann man den Körper $\bar{k}_l$ von vornherein so wählen, dass er den in Satz 14 bestimmten Körper $\bar{k}_\mu$ enthält. η gehört also der $\bar{K}_l^{(1)}$ (dem maximalen abelschen Teilkörper) zugeordneten Normengruppe $H_l^{(1)}$ in $\bar{k}_l$ an. Da aber $H_l^{(1)}$ mit der $\bar{K}_l$ zugeordneten Normengruppe identisch ist[1], so existiert in $\bar{K}_l$ ein Element $\varDelta$, so dass

$$\eta = N_l(\varDelta)$$

wird.

Mit Hilfe des Elementes θ, welches zugleich ein primitives Element von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ bzw. von $\bar{K}_l$ über $\bar{k}_l$ ist, beweist man leicht

$$\eta = N_l(\varDelta) = \bar{N}(\varDelta) .$$

Da aber $\bar{\delta}^n = \bar{N}(\bar{\delta})$ ist, so ist

$$\bar{\eta} = \bar{N}(\varDelta\bar{\delta}) ,$$

d.h. $\bar{\eta}$ gehört zu $\bar{H}$. Also ist

$$\bar{H}^{(1)} \leqq \bar{H} .$$

Nach dem früher Gezeigten gilt also

$$\bar{H}^{(1)} = \bar{H} .$$

Es sei nun $\bar{K}^{(0)}$ derjenige maximale abelsche Teilkörper[2] von $\bar{K}$ über $\bar{k}$, dessen Grad n_0 nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist. Dann ist $\bar{K}^{(0)}$ sicher in $\bar{K}^{(1)}$ enthalten. Ferner muss $\frac{n_1}{n_0}$ unbedingt zu n_0 prim sein. Denn sonst gäbe es in $\bar{K}^{(1)}$ einen echten Erweiterungskörper von $\bar{K}^{(0)}$, welcher über $\bar{k}$ abelsch wäre und

(1) CH. S. 461.

(2) Dieser Körper $\bar{K}^{(0)}$ ist durch $\bar{K}$ eindeutig bestimmt.

dessen Grad nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim wäre, was aber Widerspruch wäre. Also ist n_0 der grösste Teiler von n_1, welcher zum unendlichen Teile des absoluten Grades von k prim ist. Nach Satz 13 ist die $\bar{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ identisch mit der $\bar{K}^{(1)}$ zugeordneten Normengruppe $\bar{H}^{(1)}$ in $\bar{k}$. Da aber $\bar{H} = \bar{H}^{(1)}$ ist, so folgt

Satz 15. *Es sei $\bar{K}$ ein algebraischer Erweiterungskörper von endlichem Grade über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Ferner sei $\bar{K}^{(0)}$ derjenige maximale abelsche Teilkörper von $\bar{K}$ über $\bar{k}$, dessen Grad nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist. Dann ist $\bar{H}$ auch die $\bar{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Ferner ist*

$$[\bar{A}:\bar{H}] = [\bar{K}^{(0)}:\bar{k}]\,.^{(1)}$$

Aus Satz 15 folgt ein Zusatz, welcher ein Teil des nachher zu beweisenden *Abgrenzungssatzes* ist.

Zusatz. Ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ nicht abelsch, so ist der Index von $\bar{A}$ nach $\bar{H}$ ein echter Teiler von $[\bar{K}:\bar{k}]$.

Es sei $\bar{U}$ eine Untergruppe von $\bar{A}$. Dann bezeichnen wir mit U die Gruppe $\bar{U} \frown \mathfrak{k}$. Wie im § 1 gezeigt, enthält $\mathfrak{k}$ den p-adischen Zahlkörper k_0. Wenn in $\bar{k}$ ein Teilkörper $\bar{k}_*$ von endlichem Grade über $\bar{k}_0$, welcher folgende Eigenschaft besitzt, existiert, dann heisse $\bar{U}$ eine *K-Gruppe* in $\bar{A}$. Die Eigenschaft, welche $\bar{k}_*$ besitzen soll, lautet folgendermassen:

Für jeden Teilkörper Σ von $\bar{k}$, welcher ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}_*$ ist, besteht $\bar{U} \frown \Sigma$ aus allen derjenigen Elemente aus Σ, deren Normen nach $\bar{k}_*$ in $U_* = \bar{U} \frown k_*$ fallen.

Aus Definition der K-Gruppe folgt jetzt

Satz 16. *Es sei $\bar{K}$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann ist H eine K-Gruppe.*

Beweis. Ist $\bar{K}^{(0)}$ derjenige maximale abelsche Teilkörper von $\bar{K}$ über $\bar{k}$, dessen Grad n_0 nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist, so ist $\bar{H}$ nach Satz 15 die $\bar{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Also ist $[\bar{A}:\bar{H}] = [\bar{K}^{(0)}:\bar{k}] = n_0$.

Wendet man nun Satz 14 auf $\bar{K}^{(0)}$ an, so gibt es in der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ einen Körper $\bar{k}_\mu$ und über $\bar{k}_\mu$ ein algebraisches Element θ_0 vom

(1) Man kann leicht diese Gleichheit nach Satz 12 beweisen.

Grade n_0, welches ein primitives Element von $\bar{K}^{(0)}$ über $\bar{k}$ ist. Ferner kann noch angenommen werden, dass $\bar{k}_\mu(\theta_0)$ über $\bar{k}_\mu$ abelsch ist. Für einen beliebigen endlichen Erweiterungskörper Σ von $\bar{k}_\mu$ in $\bar{k}$ ist sicher $\Sigma(\theta_0)$ abelsch und vom Grade n_0 über Σ.

Wählt man aber den Index μ von vornherein so gross, dass man Satz 10 auf diesen Fall anwenden kann, so gilt für $\overline{H}_\mu = A_\mu \frown \overline{H}$

$$[A_\mu : \overline{H}_\mu] = n_0 .$$

Also ist $\overline{H}_\mu$ die $\bar{k}_\mu(\theta_0)$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_\mu$, weil die $\bar{k}_\mu(\theta_0)$ zugeordnete Normengruppe H_μ in $\bar{k}_\mu$ vom Index n_0 und $\overline{H}_\mu \geqq H_\mu$ ist.

Es bedeute Σ wieder ein beliebiger endlicher Erweiterungskörper von $\bar{k}_\mu$ in $\bar{k}$. Dann kann man wie auf S. 38 leicht zeigen[1], dass $\overline{H}_\Sigma = \overline{H} \frown \Sigma$ eine Untergruppe vom Index n_0 in A_Σ ist, wo A_Σ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus Σ ist. Da $\Sigma(\theta_0)$ sicher ein abelscher Erweiterungskörper vom Grade n_0 über Σ ist, so ist die $\Sigma(\theta_0)$ zugeordnete Normengruppe H_Σ in Σ nach dem *Isomorphiesatz*[2] eine Untergruppe vom Index n_0 in A_Σ. Da aber offenbar $\overline{H}_\Sigma \geqq H_\Sigma$ ist, so ist sicher

$$\overline{H}_\Sigma = H_\Sigma ,$$

weil $[A_\Sigma : \overline{H}_\Sigma] = n_0 = [A_\Sigma : H_\Sigma]$ ist. Da $\Sigma(\theta_0) = \Sigma\bar{k}_\mu(\theta_0)$ ist, so erhält man nach dem *Verschiebungssatz*[3] folgendes:

Die $\Sigma(\theta_0)$ zugeordnete Normengruppe $H_\Sigma = \overline{H}_\Sigma = \overline{H} \frown \Sigma$ besteht aus allen derjenigen Elemente aus Σ, deren Normen nach $\bar{k}_\mu$ in $H_\mu = \overline{H}_\mu$ fallen.

Wählt man jetzt den Körper $\bar{k}_\mu$ als den in Definition der K-Gruppen angegebenen Körper $\bar{k}_*$, so wird $\overline{H}$ sicher eine K-Gruppe.

Satz 17. *Es sei $\overline{U}$ eine K-Gruppe vom endlichen Index m in $\bar{A}$. Dann ist m zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim.*

Beweis. Wir bezeichnen nun mit $\bar{k}_*$ den in Definition der K-Gruppen auftretenden Körper und mit U bzw. $\overline{U}_j$ den Durchschnitt von $\overline{U}$ mit $\mathfrak{k}$ bzw. $\bar{k}_j$. Da $\bar{A}/\overline{U}$ eine endliche Gruppe ist, so kann man nach

(1) Nach der charakteristischen Eigenschaft von $\mathfrak{k}$ ist Σ ein Teilkörper von $\mathfrak{k}$. Den auf S. 38 ausgeführten Beweis kann man also auf Σ anwenden, indem man Σ wie ein $\bar{k}_j$ mit $j \geqq \mu$ annimmt.

(2) CH. S. 458 oder H. S. 150.

(3) CH. S. 460. Der Körper $\bar{k}_\mu(\theta_0)$ ist der $\overline{H}_\mu$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}_\mu$. Also kann man den Verschiebungssatz auf diesen Fall anwenden.

Satz 8 und Zusatz von Satz 8 im Hilfskörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ einen $\bar{k}_*$ enthaltenden Körper $\bar{k}_\nu$ finden, derart dass für jeden Index $j \geqq \nu$

$$A/\bar{U} \cong A/U \cong A_j/\bar{U}_j$$

wird. Ferner können wir in $\bar{k}_\nu$ die Repräsentanten aller Klassen von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ finden.

Ist der Index m von $\bar{A}$ nach $\bar{U}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ nicht prim, so ist m durch eine Primzahl l teilbar, die im unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ aufgeht. Da $\bar{A}/\bar{U} \cong A_\nu/\bar{U}_\nu$ ist, so existiert eine Klasse nach $\bar{U}_\nu$, deren Ordnung gleich l ist. Es sei α ein Element aus einer solchen Klasse nach $\bar{U}_\nu$. Dann gehört α^l offenbar zu $\bar{U}_\nu$. Da der unendliche Teil des absoluten Grades von $\bar{k}$ durch l teilbar ist, so kann man sicher in der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ einen Körper $\bar{k}_j$ mit $j > \nu$ finden, so dass der Grad von $\bar{k}_j$ nach $\bar{k}_\nu$ durch l teilbar ist. Wie man leicht bestätigt, gilt nun eine Normgleichung

$$N_{\bar{k}_j \bar{k}_*}(\alpha) = N_{\bar{k}_\nu \bar{k}_*}(\alpha^g) ,$$

weil α Element aus $\bar{k}_\nu$ ist. Dabei bedeutet g den Grad von $\bar{k}_j$ nach $\bar{k}_\nu$. Also ist g durch l teilbar. Da

$$\alpha^g = (\alpha^l)^{\frac{g}{l}}$$

ist, so gehört α^g zu $\bar{U}_\nu$. Gemäss der Eigenschaft von $\bar{U}$ muss aber $N_{\bar{k}_\nu k_*}(\alpha^g) = N_{\bar{k}_j \bar{k}_*}(\alpha)$ zu $\bar{U}_* = \bar{U} \frown \bar{k}_*$ gehören. Hieraus folgt aus Definition der K-Gruppen, dass α zu $\bar{U}_j$ und infolgedessen zu $\bar{U}_\nu$ gehört, weil $\bar{U}_\nu = \bar{U}_j \frown \bar{k}_\nu$ ist. Dies ist aber Widerspruch. Also muss m unbedingt zu l prim sein. Somit ist bewiesen, dass m zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist.

§ 6. Klassenkörper.

In diesem Paragraphen bedeutet $\bar{k}$ wieder einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers k wie im § 1. Wir betrachten über $\bar{k}$ einen algebraischen Erweiterungskörper $\bar{K}$ vom Grade n, und bezeichnen mit $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Ist dann

$$[\bar{A} : \bar{H}] = n = [\bar{K} : \bar{k}] ,$$

so heisse $\bar{K}$ *ein $\bar{H}$ zugeordneter Klassenkörper über* $\bar{k}$.

Ich beweise für die weitere Untersuchung folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. Es sei $\bar{K}$ ein Klassenkörper vom Grade n über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann existiert ein primitives Element θ von $\bar{K}$ über $\bar{k}$, welches auch ein algebraisches Element n-ten Grades über $\mathfrak{k}$ ist und folgende Eigenschaften besitzt:

1.) In $\mathfrak{k} = \{\bar{k}_j\}$ gibt es einen Teilkörper $\bar{k}_\nu$ von der Art, dass für jedes $j \geqq \nu$ $\bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$ über $\bar{k}_j$ abelsch und vom Grade n ist.

2.) $\bar{H}_j = \bar{H} \frown \bar{k}_j$ ist die $\bar{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j$, falls $j \geqq \nu$ ist.

Beweis. Dass es einen Teilkörper $\bar{k}_\nu$ mit der Eigenschaft 1.) gibt, hat man schon gezeigt (siehe S. 52).

Wenn man aber den Index ν hinreichend gross wählt, dann gilt nach Satz 10

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A_j/\bar{H}_j,$$

falls $j \geqq \nu$ ist. Da aber $\bar{K}$ Klassenkörper über $\bar{k}$ ist, so ist offenbar

$$[\bar{A} : \bar{H}] = n = [A_j : \bar{H}_j].$$

Nach Definition von $\bar{H}_j$ enthält $\bar{H}_j$ sicher die $\bar{K}_j$ zugeordnete Normengruppe H_j in $\bar{k}_j$: $\bar{H}_j \geqq H_j$. Dann gilt nach dem *Isomorphiesatz*(1)

$$n = [\bar{K}_j : \bar{k}_j] = [A_j : H_j] = [A_j : \bar{H}_j][\bar{H}_j : H_j] = n[\bar{H}_j : H_j],$$

weil $\bar{K}_j$ der H_j zugeordnete Klassenkörper ist. Also ist $[\bar{H}_j : H_j] = 1$, d.h. $H_j = \bar{H}_j$, weil $\bar{H}_j \geqq H_j$ ist.

Satz 18. *Ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper $\bar{K}$ über $\bar{k}$ ist dann und nur dann Klassenkörper, wenn er über $\bar{k}$ abelsch und regulär ist.*(2)

Beweis. Ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch und regulär, so ist nach Satz 12

$$[\bar{A} : \bar{H}] = [\bar{K} : \bar{k}],$$

wobei $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ bedeutet. Also ist nach Definition $\bar{K}$ Klassenkörper über $\bar{k}$.

Es sei umgekehrt $\bar{K}$ ein Klassenkörper vom Grade n über $\bar{k}$. Dann ist der Definition gemäss

$$[\bar{A} : \bar{H}] = n = [\bar{K} : \bar{k}].$$

Nach Satz 15 existiert nun ein maximaler abelscher Teilkörper $\bar{K}^{(0)}$ von

(1) CH. S. 458 oder H. S. 150.

(2) Die Bedingung, dass $\bar{K}$ über k *regulär* sein soll, ist für die HENSELschen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper immer erfüllt.

$\bar{K}$ über $\bar{k}$, dessen Grad nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ prim ist. Ferner wird $\bar{H}$ die $\bar{K}^{(0)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$, und

$$[\bar{A}:\bar{H}] = [\bar{K}^{(0)}:\bar{k}] .$$

Da aber $[\bar{K}^{(0)}:\bar{k}] \leqq n$ und $[\bar{A}:\bar{H}] = n$ sind, so muss

$$[\bar{K}^{(0)}:\bar{k}] = n = [\bar{A}:\bar{H}] .$$

sein. Aus $\bar{K}^{(0)} \leqq \bar{K}$ folgt also ohne weiteres

$$\bar{K}^{(0)} = \bar{K} , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aus Satz 15 und Satz 18 folgt folgender Satz, welchen ich den *Abgrenzungssatz* nennen will:

Satz 19. Abgrenzungssatz. *Es sei $\bar{K}$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper vom Grade n über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann ist $[\bar{A}:\bar{H}]$ immer ein Teiler von n. Ist insbesondere*

$$[\bar{A}:\bar{H}] = n ,$$

so ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch und regulär.

Satz 20. Isomorphiesatz. *Es sei $\bar{K}$ ein Klassenkörper über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann ist die galoissche Gruppe von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ isomorph zu $\bar{A}/\bar{H}$.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz existiert in $\mathfrak{k}$ ein passender Teilkörper $\bar{k}_\nu$ und ein algebraisches Element θ vom Grade n über $\bar{k}_\nu$, welches auch ein primitives Element von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ ist, wo n der Grad von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ ist. Ferner ist $\bar{H}_j = \bar{H} \frown \bar{k}_j$ die $\bar{k}_j(\theta) = \bar{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j$ und $\bar{K}_j$ über $\bar{k}_j$ abelsch, falls $j \geqq \nu$ ist.

Wenn man hier einen Index j ($\geqq \nu$) hinreichend gross wählt, so gilt nach Satz 10

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A_j/\bar{H}_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Für den Körper $\bar{K}_j$ gilt nach dem bekannten *Isomorphiesatz*[1]

$$A_j/\bar{H}_j \cong \mathfrak{G}_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

wobei $\mathfrak{G}_j$ die galoissche Gruppe von $\bar{K}_j$ nach $\bar{k}_j$ ist.

(1) CH. S. 458 oder H. S. 150.

Da aber θ ein primitives Element von $\bar{K}_j$ über $\bar{k}_j$ und von $\bar{K}$ über $\bar{k}$ ist, und $[\theta : \bar{k}_j] = [\theta : \bar{k}]$ ist, so ist die galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ isomorph zu $\mathfrak{G}_j$:

$$\mathfrak{G}_j \cong \mathfrak{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\bar{A} / \bar{H} \cong \mathfrak{G} .$$

Satz 21. Anordnungs- und Eindeutigkeitssatz. *Es seien $\bar{K}$, $\bar{K}'$ beide Klassenkörper über $\bar{k}$, und $\bar{H}$, $\bar{H}'$ resp. die $\bar{K}$, $\bar{K}'$ zugeordneten Normengruppen in $\bar{k}$. Dann gilt:*

1.) $\bar{H} \leqq \bar{H}'$, *falls* $\bar{K} \geqq \bar{K}'$ *ist.*

2.) $\bar{K}' \leqq \bar{K}$, *falls* $\bar{H} \leqq \bar{H}'$ *ist.*

Insbesondere ist dann und nur dann $K = K'$, *wenn* $\bar{H} = \bar{H}'$ *ist.*

Beweis. 1.) Es sei $\bar{K} \geqq \bar{K}'$. Ist dann $\bar{a}$ ein Element aus $\bar{H}$, so existiert in $\bar{K}$ ein Element $\bar{\Gamma}$, so dass

$$\bar{N}(\bar{\Gamma}) = \bar{a}$$

wird. Es gilt aber

$$\bar{a} = \bar{N}(\bar{\Gamma}) = N_{\bar{K}'/\bar{k}}(N_{\bar{K}\bar{K}'}(\bar{\Gamma}))^{(1)} .$$

Da aber $N_{\bar{K}\bar{K}'}(\bar{\Gamma})$ Element aus $\bar{K}'$ ist, so gehört

$$\bar{a} = N_{\bar{K}'/\bar{k}}(N_{\bar{K}\bar{K}'}(\bar{\Gamma}))$$

zu $\bar{H}'$. Also ist

$$\bar{H} \leqq \bar{H}' .$$

2.) Umgekehrt sei jetzt $\bar{H} \leqq \bar{H}'$. Dann existiert nach dem Hilfssatz im Hilfskörper $\mathfrak{k}$ ein Körper $\bar{k}_\nu$ mit folgenden Eigenschaften, weil $\bar{K}$, $\bar{K}'$ über $\bar{k}$ Klassenkörper sind:

a.) Im Körper $\bar{K}$ bzw. $\bar{K}'$ existiert ein primitives Element θ bzw. θ' über $\bar{k}$, welches auch algebraisches Element über $\bar{k}_\nu$ ist. Ferner ist für jeden Index $j \geqq \nu$ $\bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$ bzw. $\bar{K}'_j = \bar{k}_j(\theta')$ über $\bar{k}_j$ abelsch und es sind

(1) Diese Gleichheit kann man ebenso wie in der algebraischen Zahlentheorie beweisen. Siehe HECKE, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig (1923), S. 141.

$$[\overline{K}_j:\overline{k}_j]=[\overline{K}:\overline{k}]\,,\quad [\overline{K}'_j:\overline{k}_j]=[\overline{K}':\overline{k}]\,.$$

b.) $\overline{H}_j=\overline{H}\frown\overline{k}_j$ bzw. $\overline{H}'_j=\overline{H}'\frown\overline{k}_j$ ist die $\overline{K}_j$ bzw. $\overline{K}'_j$ zugeordnete Normengruppe in $\overline{k}_j$, falls $j\geqq\nu$ ist. Da $\overline{H}\leqq\overline{H}'$ ist, so ist sicher

$$\overline{H}_\nu\leqq\overline{H}'_\nu\,.$$

Weil aber $\overline{K}_\nu$, $\overline{K}'_\nu$ resp. die $\overline{H}_\nu$, $\overline{H}'_\nu$ zugeordneten Klassenkörper über $\overline{k}_\nu$ sind, so ist nach dem bekannten *Anordnungssatz*(1)

$$\overline{K}_\nu\geqq\overline{K}'_\nu\,.$$

Da offenbar $\overline{K}=\overline{k}(\theta)=\overline{k}\overline{K}_\nu$ und $\overline{K}'=\overline{k}(\theta')=\overline{k}\overline{K}'_\nu$ sind, so ist sicher

$$\overline{K}\geqq\overline{K}'\,.$$

Aus 1.) und 2.) schliesst man sofort die letzte Behauptung.

Satz 22. Existenzsatz. *Es sei $\overline{H}$ eine K-Gruppe von endlichem Index in $\overline{A}$. Dann existiert ein (und sogar nach Satz 21 der einzige) $\overline{H}$ zugeordneter Klassenkörper über $\overline{k}$.*

Beweis. Nach Definition der K-Gruppen existiert im Hilfskörper $\mathfrak{k}$ von $\overline{k}$ ein Teilkörper $\overline{k}_*$, welcher ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über dem p-adischen Zahlkörper $\overline{k}_0$ ist. Ferner ist für jeden Teilkörper $\varDelta$ von $\overline{k}$, welcher ein endlicher Erweiterungskörper über $\overline{k}_*$ ist, $\overline{H}_\varDelta=\overline{H}\frown\varDelta$ eine multiplikative (abelsche) Gruppe, welche aus allen derjenigen Elemente besteht, deren Normen nach $\overline{k}_*$ in $\overline{H}_*=\overline{H}\frown\overline{k}_*$ fallen.

In einer beliebigen Körperreihe von $\mathfrak{k}$ existieren entweder zwei Körper, zwischen denen $\overline{k}_*$ eingeschaltet ist, oder ein Körper, der mit $\overline{k}_*$ identisch ist. Aus dieser Tatsache kann man immer eine Körperreihe, welche $\overline{k}_*$ als eines ihrer Glieder besitzt, konstruieren. Zur Vereinfachung können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\overline{k}_0$, $\overline{k}_1$, ..., $\overline{k}_j$, ... schon eine solche Körperreihe ist. Es sei also etwa

$$k_*=k_\mu\,.$$

Dann existiert nach dem bekannten *Existenzsatz*(2) der $\overline{H}_\mu=\overline{H}\frown\overline{k}_\mu$ zugeordnete Klassenkörper $\overline{K}_\mu$ über $\overline{k}_\mu$.

Anderseits existiert nach Satz 8 in $\mathfrak{k}$ ein geeigneter Körper $\overline{k}_\nu$ von der Art, dass für jeden Index $j\geqq\nu$

(1) CH. S. 459 oder S. 152.
(2) CH. S. 459 oder SCH. S. 166.

$$\bar{A}/\bar{H} \cong A/H \cong A_j/\bar{H}_j$$

ist, wobei $H_j = \bar{H} \frown \bar{k}_j$ ist. Wenn man hierbei ν hinreichend gross wählt, so wird $\nu \geqq \mu$.

Betrachtet man nun das Kompositum $\bar{k}_j \bar{K}_\mu = \bar{K}_j$, so ist $\bar{K}_j$ nach dem bekannten *Verschiebungssatz*[1] der $\bar{H}_j$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}_j$, weil gemäss der Eigenschaft der K-Gruppen $\bar{H}_j$ aus allen derjenigen Elemente in $\bar{k}_j$ besteht, deren Normen nach $\bar{k}_\mu$ in $\bar{H}_\mu$ fallen. Wenn man den Vereinigungskörper $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}_\nu, \bar{K}_{\nu+1}, \ldots\ldots, \bar{K}_j, \ldots\ldots$ bildet, dann ist $\mathfrak{K}$ ein abelscher Körper über $\mathfrak{k}$ und die $\mathfrak{K}$ zugeordnete Normengruppe H' enthält sicher die Vereinigungsmenge von $\bar{H}_\nu$, $\bar{H}_{\nu+1}, \ldots\ldots, \bar{H}_j, \ldots\ldots$, also auch $H = \bar{H} \frown \mathfrak{k} : H' \geqq H$. Wir können aber leicht zeigen, dass auch $H' \leqq H$ ist.[2] Also ist

$$H' = H .$$

Da aber für jeden Index $j \geqq \nu$

$$[\bar{K}_j : \bar{k}_j] = [A_j : \bar{H}_j]$$

ist, so kann man aus der Wahl des Index ν leicht schliessen, dass

$$[\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] = [\bar{K}_\nu : \bar{k}_\nu] = [\bar{K}_{\nu+1} : \bar{k}_{\nu+1}] = \ldots\ldots .$$

ist, weil $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}\bar{K}_\nu$ ist. Ferner folgt noch

$$[\mathfrak{K} : \mathfrak{k}] = [\bar{K}_\nu : \bar{k}_\nu] = [A_\nu : \bar{H}_\nu] = [A : H] .$$

Wir bezeichnen nun den Grad von $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{k}$ durch n. Dann ist der derivierte Körper $\bar{K}$ von $\mathfrak{K}$ (in bezug auf die Bewertung von $\bar{k}$) ein abelscher Erweiterungskörper vom Grade n über $\bar{k}$[3] und $\mathfrak{K}$ offenbar der Hilfskörper von $\bar{K}$. Ist $\bar{H}'$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$, so ist nach Satz 9 sicher

$$\bar{H}' \frown \mathfrak{k} = H' ,$$

weil $\mathfrak{K}$ der Hilfskörper von $\bar{K}$ ist. Da aber $\bar{H}'$, $\bar{H}$ beide Untergruppen vom Exponenten n in $\bar{A}$ und $\bar{H}' \frown \mathfrak{k} = H = \bar{H} \frown \mathfrak{k}$ sind, so muss nach Zusatz von Satz 7

$$\bar{H}' = \bar{H}$$

(1) CH. S. 460.
(2) Siehe S. 46.
(3) M. S. 153.

sein. Ferner ist

$$[\bar{A}:\bar{H}] = [A:H] = [\mathfrak{K}:\mathfrak{k}] = [\bar{K}:\bar{k}]\,.$$

Nach Definition ist also $\bar{K}$ ein $\bar{H}$ zugeordneter Klassenkörper über $\bar{k}$.

Satz 23. Verschiebungssatz. *Es sei $\bar{K}$ ein Klassenkörper über $\bar{k}$ und $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Ferner sei $\bar{k}^*$ ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper über $\bar{k}$. Dann ist das Kompositum $\bar{K}^*$ von $\bar{K}$ und $\bar{k}^*$ ein Klassenkörper über $\bar{k}^*$, und die $\bar{K}^*$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}^*$ besteht aus allen derjenigen Elemente aus $\bar{k}^*$, deren Normen nach $\bar{k}$ in $\bar{H}$ fallen.*

Beweis. Wir bezeichnen den Grad von $\bar{K}$ bzw. $\bar{k}^*$ nach $\bar{k}$ durch n bzw. m. Dann kann man nach Satz 2 ein primitives Element θ bzw. θ^* von $\bar{K}$ bzw. k^* über $\bar{k}$ finden, welches auch ein algebraisches Element vom Grade n bzw. m über $\mathfrak{k}$ ist. Dabei ist $\mathfrak{k}$ wie immer der Hilfskörper von $\bar{k}$. Nun können wir in der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ einen Körper $\bar{k}_\nu$ finden, derart dass für jeden Index $j \geqq \nu$ der Körper $\bar{K}_j = \bar{k}_j(\theta)$ bzw. $\bar{k}_j^* = \bar{k}_j(\theta^*)$ vom Grade n bzw. m nach $\bar{k}_j$ wird. Ferner kann man noch annehmen, dass ν von vornherein so gross gewählt ist, dass $\bar{K}_j$ über $\bar{k}_j$ abelsch und $\bar{H}_j = \bar{H} \frown \bar{k}_j$ die $\bar{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j$ ist (nach dem Hilfssatz).

Bezeichnet man nun mit g_j bzw. g_j^* den Grad von $\bar{k}_j$ bzw. $\bar{k}_j^*$ nach $\bar{k}_0$ (dem p-adischen Zahlkörper), so ist sicher für $j \geqq \nu$

$$g_j^* = m g_j\,.$$

Also ist nach Definition

$$\lim_{j\to\infty} g_j^* = m \lim_{j\to\infty} g_j$$

der absolute Grad von $\bar{k}^*$. Da $\bar{K}$ ein Klassenkörper über $\bar{k}$ ist, so ist der Grad n von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$ —$\lim\limits_{j\to\infty} g_j$— prim. Daraus folgt leicht nach Definition des absoluten Grades von $\bar{k}^*$, dass n zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}^*$ prim ist. Da $\bar{K}$ über $\bar{k}$ galoissch (sogar hierbei abelsch) ist, so ist der Grad n_0 von $\bar{K}^*$ nach $\bar{k}^*$ ein Teiler von n, d.h. $\bar{K}^*$ wird ein regulärer Körper über $\bar{k}^*$. Ferner ist $\bar{K}^*$ abelsch über $\bar{k}^*$. Hieraus folgt nach Satz 18 ohne weiteres:

$\bar{K}^*$ ist ein Klassenkörper über $\bar{k}^*$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{k}^*$ den Körper $\mathfrak{k}(\theta)$ bzw. $\mathfrak{k}(\theta^*)$. Also ist $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{k}^*$ der Hilfskörper von $\bar{K}$ bzw. $\bar{k}^*$. Wir bilden nun das Kompositum $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}\mathfrak{k}^*$ und dann den derivierten Körper $\bar{\mathfrak{K}}^*$ von $\mathfrak{K}^*$. Dann enthält $\bar{\mathfrak{K}}^*$ offenbar die Körper $\bar{K}$, $\bar{k}^*$, also den Körper $\bar{K}^*$. Umgekehrt ist $\bar{K}^*$ ein perfekter Körper und enthält $\mathfrak{K}^*$, also den Körper $\bar{\mathfrak{K}}^*$, weil $\bar{\mathfrak{K}}^*$ der derivierte Körper von $\mathfrak{K}^*$ ist. Also ist $\bar{K}^* = \bar{\mathfrak{K}}^*$ d.h. $\mathfrak{K}^*$ ist der Hilfskörper von $\bar{K}^*$. Wie man leicht bestätigen kann, ist $\mathfrak{K}^*$ der Vereinigungskörper von $\bar{K}_\nu^*$, $\bar{K}_{\nu+1}^*$, ..., $\bar{K}_j^*$, ..., wobei $\bar{K}_j^* = \bar{K}_j \bar{k}_j^*$ ist $(j \geqq \nu)$.

Bezeichnet man nun mit $\bar{H}^*$ die $\bar{K}^*$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}^*$, so existiert nach dem Hilfssatz ein Index $\mu \geqq \nu$ von der Art, dass für jeden Index $j \geqq \mu$ $\bar{H}_j^* = \bar{H}^* \frown \bar{k}_j^*$ die $\bar{K}_j^*$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j^*$ wird, weil $\bar{K}^*$ ein Klassenkörper über $\bar{k}^*$ ist.

Es sei $\bar{\gamma}^*$ ein Element aus $\bar{H}^*$. Dann existiert nach Hilfssatz 1 im § 3 ein Element γ^* aus $\mathfrak{k}^*$ bzw. ein Element $\bar{\beta}^*$ aus $\bar{k}^*$, so dass

$$\bar{\gamma}^* = \gamma^*(\bar{\beta}^*)^n$$

wird. Also ist $\gamma^* = \dfrac{\bar{\gamma}^*}{\left(\bar{\beta}^{*\frac{n}{n_0}}\right)^{n_0}}$ Element aus $H^* = \bar{H}^* \frown \mathfrak{k}^*$, weil $\bar{\gamma}^*$ und $\left(\bar{\beta}^{*\frac{n}{n_0}}\right)^{n_0}$ Elemente aus $\bar{H}^*$ sind. Nach Satz 9 ist aber H^* die $\mathfrak{K}^*$ zugeordnete Normengruppe in $\mathfrak{k}^*$. Wir bilden nun die Norm von $\bar{\gamma}^*$ nach $\bar{k}$. Dann erhalten wir

$$N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\gamma}^*) = N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\gamma^*)N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\beta}^{*n}) .$$

Nach Struktur von $\mathfrak{k}^*$ gehört γ^* zu einem passenden Teilkörper $\bar{k}_j^*$ von $\mathfrak{k}^*$, also zu $\bar{H}_j^*$, wobei $j \geqq \mu$ ist. Unter Benutzung des primitiven Elementes θ^* von $\bar{k}^*$ über $\bar{k}$ gilt nun

$$N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\gamma^*) = N_{\mathfrak{k}^*\mathfrak{k}}(\gamma^*) = N_{\bar{k}_j^*\bar{k}_j}(\gamma^*) .$$

Da nach unserer Annahme $\bar{H}_j^*$ die $\bar{K}_j^*$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j^*$ und $\bar{K}_j$ über $\bar{k}_j$ abelsch ist, so besteht $\bar{H}_j^*$ nach dem bekannten *Verschiebungssatz*[1] aus allen derjenigen Elemente aus $\bar{k}_j^*$, deren Normen nach $\bar{k}_j$ der $\bar{K}_j$ zugeordneten Normengruppe $\bar{H}_j$ in $\bar{k}_j$ angehören. Also ist

$$N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\gamma^*) = N_{\bar{k}_j^*\bar{k}_j}(\gamma^*)$$

Element aus $\bar{H}$. Da aber $N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\beta}^{*n}) = \left(N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\beta}^*)\right)^n$ auch zu $\bar{H}$ gehört, so ist $N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\gamma}^*)$ Element aus $\bar{H}$. Damit ist bewiesen:

(1) CH. S. 460.

Die Normen der Elemente aus $\bar{H}^*$ nach $\bar{k}$ gehören alle zu $\bar{H}$.

Umgekehrt sei jetzt $\bar{\delta}^*$ ein Element aus $\bar{k}^*$, dessen Norm nach $\bar{k}$ zu $\bar{H}$ gehört. Dann kann man nach Hilfssatz 1 im § 3 in $\mathfrak{k}^*$ und $\bar{k}^*$ resp. Elemente δ^* und ζ^* finden, so dass

$$\bar{\delta}^* = \delta^*(\bar{\zeta}^*)^n$$

wird. Durch Normbildung erhält man

$$N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\delta^*) = \frac{N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\delta}^*)}{(N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\bar{\zeta}^*))^n}\,.$$

Dieses Element gehört aber einerseits zu $\bar{H}$ und anderseits zu $\mathfrak{k}$, weil

$$N_{\bar{k}^*\bar{k}}(\delta^*) = N_{\mathfrak{k}^*\mathfrak{k}}(\delta^*)$$

ist. Nach Struktur von $\mathfrak{k}^*$ gehört δ^* schon einem passenden Teilkörper $\bar{k}_j{}^*$ an, wobei $j \geqq \mu \geqq \nu$ ist, und μ, ν die früher bestimmten Indizes sind. Da offenbar

$$N_{\mathfrak{k}^*\mathfrak{k}}(\delta^*) = N_{\bar{k}_j^*\bar{k}_j}(\delta^*)$$

ist, so ist $N_{\bar{k}_j^*\bar{k}_j}(\delta^*)$ Element aus $\bar{H}_j = \bar{H} \frown \bar{k}_j$. Aber wir wissen schon, dass $\bar{K}_j{}^*$ der $\bar{H}_j{}^*$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}_j{}^*$ ist. Nach dem bekannten *Verschiebungssatz*[1] gehört also δ^* aus $\bar{k}_j{}^*$ zu $\bar{H}_j{}^*$. Da nach Definition von $\bar{H}^*$ die Normengruppe $\bar{H}_j{}^*$ in $\bar{H}^*$ enthalten ist, so ist δ^* Element aus $\bar{H}^*$. Offenbar ist $(\zeta^*)^n = \left(\zeta^{*\frac{n}{n_0}}\right)^{n_0}$ Element aus $\bar{H}^*$. Also ist $\bar{\delta}^*$ Element aus $\bar{H}^*$. Damit ist gezeigt:

Jedes Element aus $\bar{k}^*$, dessen Norm nach $\bar{k}$ zu $\bar{H}$ gehört, ist ein Element aus $\bar{H}^*$.

Zusammenfassend diese und jene schon früher bewiesene Tatsache erhält man die Behauptung des Satzes.

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes können wir folgenden Satz, welcher eine gewisse Ergänzung zum Anordnungssatz ist, beweisen:

Satz 24. *Es seien $\bar{K}^{(1)}$, $\bar{K}^{(2)}$ Klassenkörper über $\bar{k}$ und $\bar{H}^{(1)}$, $\bar{H}^{(2)}$ resp. die $\bar{K}^{(1)}$, $\bar{K}^{(2)}$ zugeordneten Normengruppen in $\bar{k}$. Dann ist $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)}$ die $\bar{K}^{(1)}\bar{K}^{(2)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ und $\bar{H}^{(1)} \cdot \bar{H}^{(2)}$ die $\bar{K}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$.*

Beweis. Wir bezeichnen kurz mit $\bar{K}$ das Kompositum $\bar{K}^{(1)}\bar{K}^{(2)}$ von $\bar{K}^{(1)}$ und $\bar{K}^{(2)}$, und mit $\bar{H}$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$.

(1) CH. S. 460.

Bekanntlich ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch und der Grad von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ ist ein Teiler von $[\bar{K}^{(1)}:\bar{k}]\,[\bar{K}^{(2)}:\bar{k}]$, ist also prim zum unendlichen Teile des absoluten Grades von $\bar{k}$, weil $[\bar{K}^{(1)}:\bar{k}]$, $[\bar{K}^{(2)}:\bar{k}]$ auch so sind. Nach Satz 18 ist also $\bar{K}$ der $\bar{H}$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}$.

Nach Satz 21 folgen aus $\bar{K} \geqq \bar{K}^{(1)}$ und $\bar{K} \geqq \bar{K}^{(2)}$

$$\bar{H} \leqq \bar{H}^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{H} \leqq \bar{H}^{(2)} .$$

Also ist

$$\bar{H} \leqq \bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)} .$$

Es sei nun $\bar{\gamma}$ ein beliebiges Element aus $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)}$. Dann gibt es in $\bar{K}^{(2)}$ ein Element $\bar{\gamma}'$, so dass

$$N_{\bar{K}^{(2)}\bar{k}}(\bar{\gamma}') = \bar{\gamma}$$

wird, weil $\bar{\gamma}$ sicher ein Element aus $\bar{H}^{(2)}$ und $\bar{H}^{(2)}$ die $\bar{K}^{(2)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $\bar{H}'$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{K}^{(2)}$. Dann gehört $\bar{\gamma}'$ nach Satz 23 zu $\bar{H}'$, weil $N_{\bar{K}^{(2)}\bar{k}}(\bar{\gamma}') = \bar{\gamma}$ zu $\bar{H}^{(1)}$ gehört. Es existiert also in $\bar{K}$ ein Element $\bar{\Gamma}$, dessen Norm nach $\bar{K}^{(2)}$ gleich $\bar{\gamma}'$ ist: $N_{\bar{K}\bar{K}^{(2)}}(\bar{\Gamma}) = \bar{\gamma}'$. Bildet man nun die Norm von $\bar{\Gamma}$ nach $\bar{k}$, so muss sie zu $\bar{H}$ gehören. Anderseits ist aber

$$N_{\bar{K}\bar{k}}(\bar{\Gamma}) = N_{\bar{K}^{(2)}\bar{k}}(N_{\bar{K}\bar{K}^{(2)}}(\bar{\Gamma})) = N_{\bar{K}^{(2)}\bar{k}}(\bar{\gamma}') = \bar{\gamma} < \bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)}.$$

Also gehört jedes Element aus $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)}$ zu $\bar{H}$: $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)} \leqq \bar{H}$.

Es folgt also

$$\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)} = \bar{H} .$$

Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Nun bezeichnen wir mit $\bar{H}^{(0)}$ die $\bar{K}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}$. Dann folgen leicht aus Satz 21

$$\bar{H}^{(0)} \geqq \bar{H}^{(1)} \quad \text{und} \quad \bar{H}^{(0)} \geqq \bar{H}^{(2)} ,$$

weil $\bar{K}^{(1)} \geqq \bar{K}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)}$ und $\bar{K}^{(2)} \geqq \bar{K}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)}$ sind. Es ist also

$$\bar{H}^{(0)} \geqq \bar{H}^{(1)} \cdot \bar{H}^{(2)} .$$

Da aber $\bar{K}^{(1)}\bar{K}^{(2)}$ der $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)}$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}$ ist, so ist nach Definition

$$[\bar{K}^{(1)}\bar{K}^{(2)}:\bar{k}] = [\bar{A}:\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)}] .$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$[\overline{K}^{(1)}\overline{K}^{(2)} : \overline{K}^{(1)}][\overline{K}^{(1)} : \overline{k}] = [\overline{K}^{(1)}\overline{K}^{(2)} : \overline{k}] = [\overline{A} : \overline{H}^{(1)} \frown \overline{H}^{(2)}]$$
$$= [\overline{A} : \overline{H}^{(1)}][\overline{H}^{(1)} : \overline{H}^{(1)} \frown \overline{H}^{(2)}] .$$

Da nach Voraussetzung $\overline{K}^{(1)}$ der $\overline{H}^{(1)}$ zugeordnete Klassenkörper ist, so ist nach Definition

$$[\overline{K}^{(1)} : \overline{k}] = [\overline{A} : \overline{H}^{(1)}] .$$

Also ist

$$[\overline{K}^{(1)}\overline{K}^{(2)} : \overline{K}^{(1)}] = [\overline{H}^{(1)} : \overline{H}^{(1)} \frown \overline{H}^{(2)}] .$$

Offenbar ist

$$[\overline{K}^{(1)}\overline{K}^{(2)} : \overline{K}^{(1)}] = [\overline{K}^{(2)} : \overline{K}^{(1)} \frown \overline{K}^{(2)}] = \frac{[\overline{K}^{(2)} : \overline{k}]}{[\overline{K}^{(1)} \frown \overline{K}^{(2)} : \overline{k}]} ,$$

weil $\overline{K}^{(2)}$ über $\overline{k}$ abelsch ist. Ferner folgt noch

$$\overline{H}^{(1)}/\overline{H}^{(1)} \frown \overline{H}^{(2)} \cong \overline{H}^{(1)} \cdot \overline{H}^{(2)}/\overline{H}^{(2)} .$$ (1)

Also ist $$\frac{[\overline{A} : \overline{H}^{(2)}]}{[\overline{A} : \overline{H}^{(1)} \cdot \overline{H}^{(2)}]} = [\overline{H}^{(1)} \cdot \overline{H}^{(2)} : \overline{H}^{(2)}] = [\overline{H}^{(1)} : \overline{H}^{(1)} \frown \overline{H}^{(2)}]$$
$$= \frac{[\overline{K}^{(2)} : k]}{[\overline{K}^{(1)} \frown \overline{K}^{(2)} : \overline{k}]} .$$

Da $\overline{K}^{(2)}$ der $\overline{H}^{(2)}$ zugeordnete Klassenkörper ist, so ist

$$[\overline{K}^{(2)} : \overline{k}] = [\overline{A} : \overline{H}^{(2)}] .$$

Hieraus folgt sofort

$$[\overline{A} : \overline{H}^{(1)} \cdot \overline{H}^{(2)}] = [\overline{K}^{(1)} \frown \overline{K}^{(2)} : \overline{k}] = [\overline{A} : \overline{H}^{(0)}] .$$

Also muss

$$\overline{H}^{(1)}\overline{H}^{(2)} = \overline{H}^{(0)}$$

sein, weil $\overline{H}^{(1)} \cdot \overline{H}^{(2)} \leqq \overline{H}^{(0)}$ ist.

Durch mehrmalige Anwendung von Satz 24 können wir folgenden Zusatz beweisen:

---

(1) Siehe etwa V. D. WAERDEN, Moderne Algebra, I. Teil, S. 136.

Zusatz. Es seien $\bar{K}^{(1)}, \bar{K}^{(2)}, \ldots, \bar{K}^{(m)}$ resp. die $\bar{H}^{(1)}, \bar{H}^{(2)}, \ldots, \bar{H}^{(m)}$ zugeordneten Klassenkörper über $\bar{k}$. Dann ist das Kompositum von $\bar{K}^{(1)}, \bar{K}^{(2)}, \ldots, \bar{K}^{(m)}$ der $\bar{H}^{(1)} \frown \bar{H}^{(2)} \frown \ldots \frown \bar{H}^{(m)}$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}$ und $\bar{K}^{(1)} \frown \bar{K}^{(2)} \frown \ldots \frown \bar{K}^{(m)}$ der $\bar{H}^{(1)} \cdot \bar{H}^{(2)} \cdot \ldots \cdot \bar{H}^{(m)}$ zugeordnete Klassenkörper über $\bar{k}$.

Satz 25. *Es sei $\bar{k}^*$ ein endlioher zyklischer Erweiterungskörper über $\bar{k}$ und $\bar{K}$ ein Klassenkörper über $\bar{k}^*$. Ferner sei σ ein erzeugendes Element der galoisschen Gruppe von $\bar{k}^*$ nach $\bar{k}$, und $\bar{H}^*$ die $\bar{K}$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}^*$. Dann gilt:*

a) Dann und nur dann ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ galoissch, wenn $\sigma\bar{H}^* = \bar{H}^*$ ist.

b) Dann und nur dann ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch, wenn jede Klasse von $\bar{A}^*$ nach $\bar{H}^*$ bei Anwendung von σ invariant bleibt, wobei $\bar{A}^*$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}^*$ bedeutet.

Bewesi. Da $\bar{k}^*$ über $\bar{k}$ zyklisch ist, so kann man nach Satz 2 ein primitives Element θ^* von $\bar{k}^*$ über $\bar{k}$ finden, welches auch ein primitives Element des Hilfskörpers $\mathfrak{k}^*$ von $\bar{k}^*$ über dem Hilfskörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ ist: $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{k}(\theta^*)$. Ebenso gibt es ein primitives Element θ von $\bar{K}$ über $\bar{k}^*$, welches auch ein primitives Element des Hilfskörpers $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}$ über $\mathfrak{k}^*$ ist: $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}^*(\theta)$.

Nach Struktur von $\mathfrak{k}^*$ und $\mathfrak{K}$ existiert in der Körperreihe von $\mathfrak{k}$ ein Teilkörper $\bar{k}_\nu$ mit den folgenden Eigenschaften:

1.) Für jeden Index $j \geqq \nu$ sind

$$[\mathfrak{k}^* : \mathfrak{k}] = [\bar{k}_j(\theta^*) : \bar{k}_j] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{K} : \mathfrak{k}^*] = [\bar{k}_j(\theta^*, \theta) : \bar{k}_j(\theta^*)] .$$

2.) $\bar{k}_j(\theta^*) = \bar{k}_j^*$ ist über $\bar{k}_j$ zyklisch.

3.) $\bar{k}_j(\theta^*, \theta) = \bar{K}_j$ ist ein abelscher Körper über $\bar{k}_j^*$ und $\bar{H}_j^* = \bar{H}^* \frown \bar{k}_j^*$ ist die $\bar{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j^*$ (nach dem Hilfssatz).

4.) Man kann ferner in $\bar{k}_\nu^*$ ein Elementsystem finden, welches ein Repräsentantensystem sowohl aller Klassen von A_ν^* nach $\bar{H}_\nu^*$ als von $\bar{A}^*$ nach $\bar{H}^*$ bildet. Dabei ist A_ν^* die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}_\nu^*$.

Beweis von a). Es sei zunächst $\sigma\bar{H}^* = \bar{H}^*$. Dann induziert σ nach Bestimmung des Index ν ein erzeugendes Element der galoisschen Gruppe von $\bar{k}_\nu^*$ nach $\bar{k}_\nu$. Daher ist sicher

$$\sigma\bar{H}_\nu^* = \bar{H}_\nu^* .$$

Hieraus folgt, dass $\overline{K}_\nu$ über $\bar{k}_\nu$ galoissch ist.[1] Da offenbar $\overline{K}_\nu \bar{k} = \overline{K}$ ist, so ist $\overline{K}$ galoissch über $\bar{k}$.

Es sei umgekehrt $\overline{K}$ über $\bar{k}$ galoissch. Dann ist nach Satz 2 $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ galoissch. Offenbar existiert in $\mathfrak{k}$ ein Teilkörper $\bar{k}_\mu$ mit $\mu \geqq \nu$, so dass für jedes $j \geqq \mu$ $\overline{K}_j$ über $\bar{k}_j$ galoissch wird. Es existiert also ein Automorphismus von $\overline{K}_j$ über $\bar{k}_j$, welcher in $\bar{k}_\nu^*$ den Automorphismus σ induziert. Wir bezeichnen nun der Kürze wegen mit σ einen solchen Automorphismus von $\overline{K}_j$ über $\bar{k}_j$. Dann entsteht durch Anwendung von σ auf $\overline{K}_j$ ein Klassenkörper $\sigma\overline{K}_j$ über $\bar{k}_j^*$, und $\sigma\overline{H}_j^*$ ist die $\sigma\overline{K}_j$ zugeordnete Normengruppe in $\bar{k}_j^*$. Da nach Voraussetzung $\sigma\overline{K}_j = \overline{K}_j$ sein muss, so ist nach dem bekannten *Eindeutigkeitssatz*[2]

$$\sigma\overline{H}_j^* = \overline{H}_j^* .$$

Setzt man nun $H^* = \overline{H}^* \quad \mathfrak{k}^*$, so ist offenbar

$$\sigma H^* = H^* ,$$

weil H^* die Vereinigungsmenge von $\overline{H}_\mu^*$, $\overline{H}_{\mu+1}^*$, ..., $\overline{H}_j^*$, ... ist.

Nach Hilfssatz 1 im §3 ist jedes Element aus $\overline{H}^*$ von der Form $\alpha\bar{\beta}^n$, wobei α Element aus $\mathfrak{k}^*$, $\bar{\beta}$ Element aus $\bar{k}^*$ und n der Index von $\overline{A}^*$ nach $\overline{H}^*$ ist. Hieraus folgt leicht, dass α Element aus H^* ist. Da $\overline{H}^*$ eine Untergruppe vom Index n in $\overline{A}^*$ ist, so ist $(\sigma\bar{\beta})^n = \sigma(\bar{\beta})^n$ Element aus $\overline{H}^*$. Da $\sigma(\alpha)$ zu $\sigma H^* = H^*$ gehört, so ist $\sigma(\alpha\bar{\beta}^n)$ Element aus $\overline{H}^*$. Damit ist gezeigt, dass

$$\sigma\overline{H}^* = \overline{H}^*$$

ist, falls $\overline{K}$ über $\bar{k}$ galoissch ist.

Beweis von b). Es sei *jede Klasse* von $\overline{A}^*$ nach $\overline{H}^*$ bei Anwendung von σ invariant. Dann kann man schliessen, dass im Körper $\bar{k}_\nu^*$ jede Klasse von A_ν^* nach $\overline{H}_\nu^*$ bei Anwendung von σ invariant ist. Nämlich es ist offenbar wie im Beweis von a)

$$\sigma\overline{H}_\nu^* = \overline{H}_\nu^* .$$

Ist nun $\alpha\overline{H}^*$ eine Klasse von $\overline{A}^*$ nach $\overline{H}^*$, so kann man gemäss der Bestimmung von ν annehmen, dass α Element aus $\bar{k}_\nu^*$ ist. Da aber

$$\sigma(\alpha\overline{H}^*) = \alpha\overline{H}^*$$

(1) H. S. 153.

(2) CH. S. 459 oder H. S. 152.

ist, so gibt es in $\bar{H}^*$ ein Element η^*, so dass

$$\sigma(a) = a\eta^*$$

wird. Weil $\sigma(a)$, a zu $\bar{k}_\nu^*$ gehören, so ist η^* Element aus $\bar{k}_\nu^*$. Also ist η^* sicher Element aus $\bar{H}_\nu^*$. Aus $\sigma(\bar{H}_\nu^*) = \bar{H}_\nu^*$ folgt also

$$\sigma(a\bar{H}_\nu^*) = a\eta^* \bar{H}_\nu^* = a\bar{H}_\nu^* .$$

Gemäss der Eigenschaft 4) von $\bar{k}_\nu^*$ ist gezeigt, dass jede Klasse von A_ν^* nach $\bar{H}_\nu^*$ bei Anwendung von σ invariant ist. Hieraus folgt bekanntlich, dass $\bar{K}_\nu$ über $\bar{k}_\nu$ abelsch ist(1). Da

$$\bar{K}_\nu \bar{k} = \bar{K}$$

ist, so ist $\bar{K}$ abelsch über $\bar{k}$.

Umgekehrt sei jetzt $\bar{K}$ über $\bar{k}$ abelsch. Dann kann man wie im Beweis von a) schliessen, dass es einen passenden Index $\mu \geqq \nu$ gibt, derart dass für jeden Index $j \geqq \mu$ $\bar{K}_j$ über $\bar{k}_j$ abelsch ist. Hieraus folgt, dass jede Klasse von A_j^* nach $\bar{H}_j^*$ bei Anwendung von σ invariant ist(2), wobei A_j^* die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{k}_j^*$ bedeutet.

Da man nach Annahme in $\bar{k}_j^*$ ein Elementsystem als ein Repräsentantensytem sowohl aller Klassen von A_j^* nach $\bar{H}_j^*$ als von $\bar{A}^*$ nach $\bar{H}^*$ nehmen kann, so folgt aus dem oben Bewiesenen, dass jede Klasse von $\bar{A}^*$ nach $\bar{H}^*$ bei Anwendung von σ invariant ist.

---

(1), (2) CH. S. 454 oder H. S. 153.