WINKELTREUE TRANSFORMATIONEN UND BEWEGUNGEN IM FINSLERSCHEN RAUME

Von

Shisanji HOKARI

Einleitung. In dem 3-dimensionalen euklidischen Raume E_3 bleiben *die Länge der Kurve* und *der Winkel zweier Vektoren* bei jeder Transformation der Bewegungsgruppe unverändert, d.h. die Massbestimmung des Raumes ändert sich nicht. Dieser Begriff wurde von KILLING zum n-dimensionalen RIEMANNschen Raume R_n erweitert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Massbestimmung bei jeder Transformation der Bewegungsgruppe sich nicht ändert, sind, dass die KILLINGschen Gleichungen sich erfüllen. Die Bewegungsgruppe im FINSLERschen metrischen Raume, welche als neueste Geometrie schnellen Fortschritt machte, hat M. S. KNEBELMAN(1) behandelt, zwar nicht im allgemeinen sondern im von L. BERWALD(2) untersuchten Raume B_n. Es steht dabei an Stelle der *KILLINGschen Gleichungen* für B_n

$$g_{ih}\xi^h{}_{/j}+g_{jh}\xi^h{}_{/i}+g_{ij/h}\xi^h+g_{ijh}\xi^h{}_{/k}p^k=0\ .$$

L. BERWALD hat einen metrischen FINSLERschen Raum folgendermassen eingeführt: Es ist vorausgesetzt, dass die Funktion $\mathfrak{L}(x\,,p)$ für alle Wertesysteme x^i und für alle möglichen Wertesysteme von p^i analytisch regulär und positiv und ausserdem in den p^i positiv-homogen von erster Dimension ist. Das Integral

$$s=\int\mathfrak{L}(x\,,dx)$$

definiert sich auf jeder Kurve als *Bogenlänge* und damit erhält man einen metrischen FINSLERschen Raum B_n, indem BERWALD bei dieser

(1) M. S. KNEBELMAN, Collineations and motions in generalized spaces, American Journal of Mathematics, Bd. 51 (1929), S. 527–564.

(2) L. BERWALD, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 34 (1925), S. 213–220; Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, Mathematische Zeitschrift, Bd. 25 (1926), S. 40–73.

Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. V, Nos. 1–2, 1936.

Funktion die Variationsrechnung anwendet. Aus seiner Arbeit wissen wir, dass die Parallelverschiebung der Figur, die aus gegebenen Vektoren im Punkte und dem ausgezeichneten Linienelemente an diesem Punkte besteht, längs eines willkürlichen Linienelementes im allgemeinen die Länge des Vektors und den Winkel zweier Vektoren in bezug auf das ausgezeichnete Linienelement ändert, mit anderen Worten, kovariantes Differential und kovariante Ableitung des metrischen Tensors 2. Stufe mit den Bestimmungszahlen $g_{ij}(x, p)$ ist nicht gleich Null.

E. CARTAN(1) verbesserte die obenerwähnten Unvollkommenheiten, indem er die Übertragung in anderer Weise definierte. In dieser Arbeit möchten wir im von CARTAN untersuchten Raume F_n winkeltreue Transformationen und Bewegungen untersuchen.

1. *Winkeltreue Transformationen.* Unsere erste Aufgabe ist, die Definitionen scharf zu geben.

Wenn jede Transformation einer kontinuierlichen Gruppe von Punkttransformationen die Länge aller Kurven unverändert bleiben lässt, so sagen wir, dass sie *Bewegung* ist und dass der metrische FINSLERsche Raum F_n Bewegung *gestattet.*

Im FINSLERschen Raume ergeben sich viele Definitionen des Winkels, aber wir benützen hier die von CARTAN gegebene Definition: Der Winkel $d\theta$ zweier ausgezeichneter Linienelemente, welche denselben Mittelpunkt haben und in infinitesimaler benachbarter Umgebung sind, ist durch die folgende Relation gegeben:

$$d\theta^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}_{ij}\,dp^i\,dp^j\,, \tag{1}$$

wobei

$$\mathfrak{L}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial p^i\,\partial p^j}\,.$$

Lässt jede Transformation einer kontinuierlichen Gruppe von Punkttransformationen den Winkel (1) unverändert bleiben, so sagen wir, dass sie *winkeltreue Transformation von erster Art* ist und dass der metrische FINSLERsche Raum F_n winkeltreue Transformation von erster Art *gestattet.*

---

(1) E. CARTAN, Sur les espaces de FINSLER, Comptes Rendus, Bd. 196 (1933), S. 582–586; Les espaces de FINSLER, Actualités scient. et industr. Nr. 79, Exposés de géométrie, Publiés de E. CARTAN, II.

Wir denken uns nun die folgenden infinitesimalen Punkttransformationen, um die Bedingungen für winkeltreue Transformation von erster Art zu untersuchen:

$$x^{i'} = x^i + \xi^i(x)\delta t\,, \tag{2}$$

wobei die Funktionen $\xi^i(x)$ analytisch regulär nur in bezug auf x^i sind.

Satz 1. *Dafür, dass in F_n die Transformationen (2) infinitesimale winkeltreue Transformationen von erster Art sein sollen, ist es notwendig, dass den Funktionen $\xi^i(x)$ die folgenden $n(n+1)/2$ Gleichungen genügen:*

$$h_{ij} \equiv \mathfrak{L}\, k_{ij} - \mathfrak{L}_{ij} k = 0\,,$$

wobei

$$k \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^k}\xi^k + \mathfrak{L}_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} p^l\,.$$

Beweis. Da p^i die Bestimmungszahlen eines Vektors sind, lassen sie sich mittels (2) in folgender Weise transformieren:

$$p^{i'} = p^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} p^j \delta t\,. \tag{3}$$

Differenzierend (3), erhalten wir

$$dp^{i'} = dp^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dp^j \delta t\,. \tag{4}$$

Die Änderung von $d\theta^2$ ist gemäss (1), (2), (3) und (4) folgendermassen gegeben:

$$d\theta'^2 = d\theta^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}^2}(\mathfrak{L}\, k_{ij} - \mathfrak{L}_{ij} k) dp^i dp^j \delta t + [2]\,,$$

wobei [2] Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf δt zusammen darstellt. Für Invarianz des Winkels erhalten wir die folgende Relation, indem wir die Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezug auf δt fortfallen lassen:

$$h_{ij} dp^i dp^j = 0\,.$$

Da h_{ij} in bezug auf i und j symmetrisch sind und dp^i nicht enthalten, so haben wir

$$h_{ij} = 0\,.$$

Die Länge des Vektors v^i wird in bezug auf den Fundamentaltensor g_{ij} in F_n durch

$$v^2 = g_{ij}v^i v^j$$

definiert und der Winkel zweier Vektoren mit den Bestimmungszahlen v^i und w^i wie üblich folgendermassen:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}v^i w^j}{vw}, \tag{5}$$

wobei v^i sowie w^i keine Nullvektoren sind. Wenn jede Transformation einer kontinuierlichen Gruppe von Punkttransformationen den Winkel (5) unverändert bleiben lässt, so sagen wir, dass sie *winkeltreue Transformation von zweiter Art* ist und dass der metrische FINSLERsche Raum F_n winkeltreue Transformation von zweiter Art *gestattet*. Wir möchten die Bedingungen für winkeltreue Transformation von zweiter Art untersuchen.

Satz 2. *Die Funktionen $\xi^i(x)$ müssen folgenden Gleichungen genügen, um die Transformationen (2) in F_n als infinitesimale winkeltreue Transformationen von zweiter Art darzustellen:*

$$2g_{(ij}\mathfrak{a}_{k)(n}g_{lm)} = \mathfrak{a}_{(mn}g_{l)(k}g_{ij)} + \mathfrak{a}_{(ij}g_{k)(l}g_{mn)},$$

wobei

$$\mathfrak{a}_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\xi^k + g_{ijk}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}p^l + g_{kj}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}.$$

Beweis. Unter den Transformationen (2) transformieren sich v^i und w^i ähnlich wie p^i, weil v^i und w^i die Bestimmungszahlen des Vektors sind. Also erhalten wir

$$v^{i\prime} = v^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}v^j\delta t,$$

$$w^{i\prime} = w^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}w^j\delta t,$$

$$g_{ij}{}'v^{i\prime}w^{j\prime} = g_{ij}v^i w^j + \mathfrak{a}_{ij}v^i w^j\delta t + [2],$$

$$g_{ij}{}'v^{i\prime}v^{j\prime} = g_{ij}v^i v^j + \mathfrak{a}_{ij}v^i v^j\delta t + [2],$$

$$g_{ij}{}'w^{i\prime}w^{j\prime} = g_{ij}w^i w^j + \mathfrak{a}_{ij}w^i w^j\delta t + [2].$$

Aus diesen Relationen und (5) folgt die folgende Gleichung

$$\cos\theta' = \cos\theta + \frac{1}{vw}\left(\mathfrak{a}_{ij}v^i w^j - \frac{1}{2v^2}g_{kl}v^k w^l\mathfrak{a}_{ij}v^i v^j - \frac{1}{2w^2}g_{kl}v^k w^l\mathfrak{a}_{ij}w^i w^j\right)\delta t + [2].$$

Damit der Winkel invariant bleibe, erhalten wir die folgenden Gleichungen, indem wir Glieder zweiter und höherer Ordnung in bezuf auf δt fortfallen lassen:

$$(2g_{ij}\mathfrak{a}_{kn}g_{ml} - \mathfrak{a}_{ij}g_{kn}g_{ml} - g_{ij}g_{kn}\mathfrak{a}_{ml})v^i v^j v^k w^l w^m w^n = 0 .$$

Da v^i und w^i beliebig sind, liefert die letzte Relation uns

$$2g_{(ij}\mathfrak{a}_{k)(n}g_{ml)} = \mathfrak{a}_{(ij}g_{k)(n}g_{ml)} + g_{(ij}g_{k)(n}\mathfrak{a}_{ml)} .$$

Durch (5) haben wir den endlichen Winkel definiert. Wenn wir als v^i bzw. w^i besonders p^i bzw. $p^i + dp^i$ annehmen, so folgt

$$\cos d\theta = \frac{g_{mn}p^m(p^n + dp^n)}{\sqrt{g_{ij}p^i p^j}\sqrt{g_{kl}(p^k + dp^k)(p^l + dp^l)}}$$

$$= \frac{\mathfrak{L} + \mathfrak{L}\mathfrak{L}_i dp^i}{\mathfrak{L}\sqrt{\mathfrak{L} + 2\mathfrak{L}\mathfrak{L}_i dp^i + g_{ij}dp^i dp^j}} .$$

Entwickeln wir die beiden Seiten dieser Gleichung, so haben wir

$$d\theta^2 = \frac{1}{\mathfrak{L}}\mathfrak{L}_{ij}dp^i dp^j ,$$

es ist sogenanntes "*métrique angulaire*". Der durch (5) gegebene Winkel enthält als spezialen Fall den durch (1) gegebenen infinitesimalen Winkel. Somit können wir den folgende Satz aussprechen:

Satz 3. *Stellen die Transformationen (2) infinitesimale winkeltreue Transformationen von zweiter Art dar, so sind sie natürlich infinitesimale winkeltreue Transformationen von erster Art.*

2. *Konforme Eigenschaft.* St. GOŁAB(1) hat zwei Fälle als konforme Repräsentation zweier metrischer Räume gegeben: Erstens bleibt der Winkel invariant, zweitens steht die Länge im Verhältnis. Erstere ist eine sogenannte winkeltreue Transformation und wir haben dies in Nr. 1 erklärt. Letztere nennen wir *die konforme Transformation* und möchten sie in diesem Abschnitt untersuchen.

Wir nehmen eine bestimmte Funktion $\varphi(x, p, a)$ an, welche in dem Bereich $\mathfrak{D}$ gegeben ist, wobei p^i bzw. a das ausgezeichnete Linienelement im Punkte x^i bzw. Parameter ist.

---

(1) St. GOŁAB, Sur la représentation conforme de deux espaces de FINSLER, Comptes Rendus, Bd. 196 (1933), S. 1356–1358.

Zuerst möchten wir den Fall untersuchen, wobei die Länge bei den Transformationen (2) sich folgendermassen transformiert:

$$ds' = ds(1+\varphi(x\,,\,p\,,\,\delta t))\,. \tag{6}$$

Wenn $\delta t = 0$, so sind die Transformationen (2) identisch. Da in diesem Falle $ds' = ds$ sein muss, so setzen wir voraus, dass

$$\varphi(x\,,\,p,\,\delta t) = \varphi(x\,,\,p)\delta t\,.$$

Demnach folgt aus (6)

$$(1+\varphi\delta t)\mathfrak{L} = \mathfrak{L}+k\delta t+[\,2\,]\,.$$

Wir erhalten also die folgenden Ergebnisse, indem wir die Glieder von zweiter und höherer Ordnung in bezug auf δt fortfallen lassen,

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^i}\xi^i+\mathfrak{L}_i\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}p^j \\ &= \mathfrak{L}\varphi\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Im F_n gilt daher:

Satz 4. *Damit die Transformationen (2) konforme Transformationen sind, müssen die Funktionen $\xi^i(x)$ der Gleichung (7) genügen.*

Wir können aus (7) durch zweimalige Differentiation nach p^i und p^j

$$\xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijk}\xi^k{}_{/0} = 2g_{ij}\varphi+4\mathfrak{L}\mathfrak{L}_{(i}\varphi_{j)} + \mathfrak{L}^2\varphi_{ij} \tag{8}$$

ableiten. Hängt die Funktion φ nur vom Ort ab, so gilt in diesem Falle aus (7) bzw. (8)

$$k = \mathfrak{L}\varphi$$

bzw.

$$k_{ij} = \mathfrak{L}_{ij}\varphi\,.$$

Somit wird h_{ij} identisch verschwinden. Nun können wir behaupten:

Satz 5. *Wenn die Funktionen $\xi^i(x)$ konforme Transformation definiert und die gegebene Funktion φ nur vom Ort abhängt, so stellen die Transformation winkeltreue Transformation von erster Art dar.*

3. *Bewegungen.* Von der Funktion $\varphi(x)$ setzen wir noch dazu voraus, dass sie identisch verschwindet, somit gibt (8) uns

$$\xi_{i/j}+\xi_{j/i}+2C_{ijk}\xi^k{}_{/0} = 0\,, \tag{9}$$

d.h. sie sind die Bedingungen für längentreue Transformationen. Da unter diesen Bedingungen auch der Winkel unverändert bleibt, so erhalten wir durch die erklärte Definition:

Satz 6. *Die Funktionen $\xi^i(x)$ müssen den Gleichungen (9) genügen, um bei den Transformationen (2) Bewegungen darzustellen.*

Da im n-dimensionalen RIEMANNschen Raume R_n die Grössen C_{ijk} identisch verschwinden, werden (9) folgendermassen umgeschrieben:

$$\xi_{i/j}+\xi_{j/i}=0\,,$$

d.h. sie sind sogenannte KILLINGsche Gleichungen für den RIEMANNschen Raum R_n. Demnach sind die Gleichungen (9) die unmittelbare Erweiterung der KILLINGschen Gleichungen für den RIEMANNschen Raum R_n. Wir können also ohne Schwierigkeit die Sätze für den RIEMANNschen Raum R_n im FINSLERschen F_n erweitern. In der Tat wollen wir nun einige davon geben.

Für den gegebenen Vektor ξ^i, welcher die Bewegung definiert, können wir der Kürze halber, ohne die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken, $\xi^i=\delta^i_1$ annehmen. In diesem Falle erhalten wir aus (9)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}=0\,.$$

Es gilt demnach der Satz:

Satz 7. *Für den Fundamentaltensor g_{ij} des Raumes F_n, der infinitesimale Bewegungen gestattet, können wir die besonderen Koordinaten annehmen, bei denen alle g_{ij} von x^1 unabhängig sind.*

Die endlichen Transformationen der eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe entstehen durch unendlichmalige Wiederholung der infinitesimalen Transformationen (2). Um zu einer endlichen Transformation zu gelangen, müssen wir uns daher die unendlich kleine Bewegung denken, welche die infinitesimale Transformation darstellt, während unendlich vieler Zeitabschnitte δt wiederholt. Demnach wird die endliche Transformation, die den Vektor δ^i_1 gemäss definiert wird, durch

$$x^{i\prime}=x^i+\delta^i_1 a$$

gegeben. Selbstverständlich bleibt die Länge der Kurve invariant und g_{ij} sind von x^1 unabhängig. Zusammenfassend sprechen wir den Satz aus:

Satz 8. *Im Raume, welcher eine infinitesimale Bewegung gestattet, ergibt sich die eingliedrige kontinuierliche Gruppe der durch infinitesimale Bewegung erzeugten Bewegungen.*

Hierzu ist es nötig, die Differentialgleichungen dieser Bewegung zu integrieren, d.h. das simultane System:

$$\frac{dx^1}{\xi^1} = \frac{dx^2}{\xi^2} = \dots\dots = \frac{dx^n}{\xi^n} = \delta t\,.$$

Wir wollen die Integrale der letzten Gleichungen als *die Bahnkurven* der infinitesimalen Transformationen (2) bezeichnen. Es gibt offenbar ∞^{n-1} verschiedene Bahnkurven. Es ist leicht, für einen gegebenen Punkt x_0^i und eine gegebene Richtung ξ_0^i, die Gleichungen der durch den Punkt hindurchgehenden und in der Richtung liegenden Bahnkurve aufzustellen.

Zwei Vektoren ξ_1^i und ξ_2^i heissen *voneinander unabhängig,* wenn die Gleichung

$$c^1\xi_1^i + c^2\xi_2^i = 0\,,$$

in welcher c^1 und c^2 von den x^i unabhängige Grössen sind, nur dadurch befriedigt werden kann, dass c^1 und c^2 sämtlich gleich Null gesetzt werden. Oder etwas kürzer: Die zwei Vektoren ξ_1^i und ξ_2^i heissen voneinander unabhängig, wenn keine derselben sich aus den übrigen linear ableiten lässt.

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage: *Können die zwei infinitesimalen linearen unabhängigen Bewegungen dieselbe Bahnkurve besitzen?*

Zu diesem Zwecke setzen wir ohne die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken voraus, dass die Bestimmungszahlen eines eine Bewegung definierten Vektors δ_1^i sind. Besässe aber die zweite infinitesimale Bewegung dieselbe Bahnkurve, würde der Vektor die Bestimmungszahlen $\rho(x)\delta_1^i$ haben. Also ergibt sich aus (7) $\frac{d\rho}{dt}\,\mathfrak{L}_1 = 0$. Da $\mathfrak{L}_1$ identisch nicht verschwindet, muss die Funktion $\rho(x)$ eine Konstante sein, d.h. die beiden infinitesimalen Bewegungen sind nicht voneinander unabhängig. Wir haben daher den

Satz 9. *Zwei voneinander linear unabhängige infinitesimale Bewegungen besitzen dieselbe Bahnkurve nicht.*

Am 4. Februar 1936.