# ZUR KLASSENKÖRPERTHEORIE ÜBER UNENDLICHEN PERFEKTEN KÖRPERN

Von

Mikao MORIYA und O. F. G. SCHILLING[1]

## EINLEITUNG.

Man kann für gewisse unendliche perfekte Zahlkörper ein Analogon zur bekannten Klassenkörpertheorie im Kleinen entwickeln. Dies ist unter Ausdehnung der von CL. CHEVALLEY in seinen Thèse[2] entwickelten abzählenden Methoden, die Exponentialfunktionen und Logarithmen des perfekten Körpers benutzen, in einer Abhandlung des ersteren von uns beiden geschehen[3]. CL. CHEVALLEY hat aber in einer späteren Arbeit[4] auch eine Begründung der Klassenkörpertheorie im Kleinen mit hyperkomplexen Hilfsmitteln gegeben. Wir wollen in dieser Arbeit die Hauptsätze der Theorie auch mit der Algebrentheorie ableiten. In der Natur der Untersuchung liegt es, dass insbesondere der Isomorphiesatz und das Reziprozitätsgesetz im Vordergrund der Betrachtung stehen. Zum Existenzsatz muss man die Theorie der Radikalkörper heranziehen.

Unser Vorgehen lässt aber so die Eigenschaften des Grundkörpers, die für die Gültigkeit der Klassenkörpertheorie—d.h. Charakterisierung der abelschen Oberkörper endlichen Grades durch Klassengruppen im Grundkörper—erfüllt sein müssen, klar erkennen.

---

(1) Diese Arbeit entstand im Anschluss an einen Briefwechsel zwischen M. MORIYA und O. F. G. SCHILLING. Letzerer teilte M. MORIYA im Januar 1936 die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit mit. Inzwischen hatte aber M. MORIYA eine andere Begründung dieser Klassenkörpertheorie gefunden. Da die Methoden verschieden sind, haben wir uns entschlossen, auch diese hyperkomplexe Begründung mitzuteilen.

(2) CL. CHEVALLEY, Sur la théorie du corps de classe dans les corps finis et les corps locaux, Thèse Paris (1933), Journ. Fac. Science, Tokyo, Bd. 2, S. 366–476.

(3) M. MORIYA, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, Journ. Fac. Science, Hokkaido, Bd. 5 (1936), S. 9–66.

(4) CL. CHEVALLEY, La théorie du symbole de restes normiques, Journ. d. Math., Bd. 169 (1932), S. 141–157.

# I. ENDLICHE ERWEITERUNGEN VON UNENDLICHEN $\mathfrak{p}$-ADISCHEN KÖRPERN.

Es sei $k_0$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades. Wir betrachten unendliche algebraische Erweiterung $k$ von $k_0$. Bekanntlich(1) ist jeder solche Körper $k$ Grenzkörper einer abzählbaren Kette ......... $\leqq k_i \leqq k_{i+1} \leqq$ ......... von Unterkörpern, deren jeder aber über $k_0$ endlichen Grad besitzt: $k = \lim k_i$. Durch die Primideale $\mathfrak{p}_i$ aus den Körpern $k_i$ ist in $k$ eindeutig ein Primideal $\mathfrak{p}$ bestimmt(2). Dabei ist der Restklassenkörper $r = k/\mathfrak{p}$ der Grenzkörper der Restklassenkörper $r_i = k_i/\mathfrak{p}_i$(3). Schliesslich ist durch die Restklassenbildung mod $\mathfrak{p}$ jedem Element $\alpha$ aus $k$ eindeutig eine Restklasse aus $r$ oder formal das Symbol $\infty$ zugeordnet. Dieser Homomorphismus $k \rightarrow (r, \infty)$ erzeugt eine Bewertung $\varphi$ vom Range 1 im Körper $k$. Nach A. OSTROWSKI(4) braucht aber $k$ nicht bezüglich $\varphi$ perfekt zu sein.

Der Körper $k$ hat über $k_0$ als Grad eine STEINITZsche G-Zahl $N$. Sie ist bestimmt als $\lim_{i\to\infty} n_1 \ldots\ldots n_i$, wenn $n_i$ den Relativgrad $[k_i : k_{i-1}]$ bedeutet. Ebenso ist der Grad von $r$ über $r_0 = k_0/\mathfrak{p}_0$ eine G-Zahl, etwa $F$. Nach STEINITZ(5) reicht die Angabe von $F$ völlig zur Bestimmung von $r$ über $r_0$ (bis auf Isomorphien) aus. J. HERBRAND führte den unendlichen Bestandteil $F^*$ des Grades $F$ ein(6). Darunter wird das Produkt über alle $p_j^\infty$ verstanden, die in $F$ aufgehen. Man kann dann—was später von Bedeutung sein wird—die möglichen Erweiterungen $R$ über $r$ vom Grade $f$ überschauen. Es stellt sich nämlich heraus(7), dass nur solche Erweiterungen $R$ existieren, deren Grade $f$ zum unendlichen Bestandteile $F^*$ des Grades $F$ von $r$ über $r_0$ prim sind.

Wir nehmen nun an, dass über $k$ als Zentrum eine echte Divisionsalgebra $D$ vom Grade $n$ existiert. Unter welchen Bedingungen, das im allgemeinen möglich ist, wird später festgestellt. Dann gilt der

---

(1) STEINITZ, Algebraische Theorie der Körper, Journ. d. Math., Bd. 137 (1910), S. 167–308.

(2) W. KRULL, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, Math. Zeitschr., Bd. 29 (1928), S. 42–54.

(3) J. HERBRAND, Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini, I. Extensions algébriques finies de corps infinis, Math. Ann., Bd. 106 (1932), S. 475–501.

(4) A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Zeitschr., Bd. 39 (1934), S. 269–404.

(5) Vgl. Anm. (1).

(6) Vgl. Anm. (3).

(7) Vgl. Anm. (3).

Satz 1. *$D$ ist eine Erweiterungsalgebra einer Divisionsalgebra $D'$ über einem geeignet gewählten Unterkörper $k'$ von $k$, welche über $k_0$ endlichen Grad besitzt. Die Algebra $D$ enthält einen unverzweigten Körper*(1) *$W^{(n)}$ vom Grade $n$ über $k$, der Erweiterungskörper des unverzweigten Körpers $W^{(n)\prime}$ über $k'$ ist.*

Beweis. Sei $d_1, \ldots\ldots, d_{n^2}$ eine Basis von $D$ über $k$ und $d_i d_j = \sum c_{ijh} d_h$ mit $c_{ijh} \in k$. Wir betrachten den endlichen Erweiterungskörper $k_0(\ldots, c_{ijh}, \ldots) = k'$ über $k_0$. Dann ist $k'(d_1, \ldots, d_{n^2}) = D'$ offenbar eine Divisionsalgebra vom Grade $n$ über $k'$. Und es ist $D' \times k = D$. Da weiterhin $D'$ einen unverzweigten Körper $W^{(n)\prime}$ vom Grade $n$ über $k'$ enthält(2), so ist $D' = (\alpha', W^{(n)\prime}, S')$ in der ausgezeichneten zyklischen Darstellung(3). Für die Erweiterungsalgebra $D = D' \times k$ gilt dann $D = (\alpha', W^{(n)\prime}k, S'^h)$. Hieraus folgt aber, dass $W^{(n)\prime}k = W^{(n)}$ vom Grade $n$ über $k$ ist. Die galoissche Gruppe von $W^{(n)}$ über $k$ ist zyklisch und isomorph zu der von $W^{(n)\prime}$ über $k'$. Ausserdem ist—wie man sich leicht überzeugt—$\mathfrak{p}$ in $W^{(n)}$ unverzweigt, d.h. $(W^{(n)}/\mathfrak{p} : r) = n$(4).

Unter den gleichen Voraussetzungen folgt nach einer eingangs gemachten Bemerkung die

Folgerung. Der Relativgrad $n$ ist prim zu dem unendlichen Bestandteile $F^*$ des Grades $F$ von $r$ über $r_0$.

Denn sonst würde der Grad von $W^{(n)}$ über $k$ kleiner als $n$.

Weiter gilt aber der

Satz 2. *Existiert über $k$ eine echte Divisionsalgebra $D$ vom Grade $n$, so ist $n$ prim zum unendlichen Bestandteile $N^*$ des Grades $N$ von $k$ über $k$.*

Beweis. Es genügt für eine feste Approximationsfolge ......... $\subseteqq k_i \subsetneqq k_{i+1} \subseteqq$ .......... von $k$ zu zeigen, dass die Relativgrade $n_i = [k_{i+1} : k_i]$ zu $n$ prim sind, wenn nur $i$ genügend gross gewählt ist. Sei etwa $(n_i, n) = n_0 > 1$ für mindestens einen Index $i \geqq i_0$ ($k_{i_0}$ enthalte den Körper $k'$ aus Satz 1). Wir betrachten dann $D_i = D' \times k_i$. Die Erweiterungsalgebra $D_{i+1} = D_i \times k_{i+1}$ muss dann nach der als bekannt vorausgesetzten Klassenkörpertheorie im Kleinen eine Matrixal-

---

(1) Ein algebraischer Erweiterungskörper vom Grade $n$ über $k$ heisst *unverzweigt*, wenn er über $k$ den Restklassengrad $n$ besitzt.

(2) H. Hasse, Über $\mathfrak{P}$-adische Zahlkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., Bd. 104 (1931), S. 495–534.

(3) H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann., Bd. 107 (1933), S. 731–760.

(4) Vgl. Anm. (2).

gebra vom Grade $n_0$ abspalten[1]. Dann müsste erst recht $D = D' \times k = D_i \times k$ eine Matrixalgebra abspalten. Dies ist aber unmöglich.

Wir zeigen nun, dass diese notwendige Bedingung für die G-Zahl $N$ auch hinreichend ist. Nämlich es gilt

Satz 3. *Ist $n$ prim zum unendlichen Bestandteile $N^*$ von $N$, so existieren über $k$ echte Divisionsalgebren $D$ vom Grade $n$.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass in der definierenden Körperfolge von $k$ von einem gewissen Index $i$ ab nur Relativgrade $n_j^{(2)}$ auftreten ($j \geqq i$), die zu $n$ teilerfremd sind. Über solch einem Körper $k_i$ konstruieren wir mit Hilfe eines $W_i^{(n)}$ vom Grade $n$ eine Divisionsalgebra $D_i$. Es ist dann $D_i \times k_{i+\nu} = D_{i+\nu}$ für alle $\nu \geqq 1$ eine echte Divisionsalgebra. Daher ist $D = D_i \times k$ eine echte Divisionsalgebra über $k$, denn jede Abspaltung oder Zerfällung durch $k$ müsste schon durch einen endlichen Erweiterungskörper von $k_i$ bewirkt werden. Das hiesse aber nach der bekannten Klassenkörpertheorie im Kleinen, dass der Relativgrad jenes Körpers nicht zu $n$ prim wäre. Das steht aber in Widerspruch zur Konstruktion und zur Voraussetzung über $N$. Gleichzeitig ist wieder die Existenz eines unverzweigten Körpers $W^{(n)}$ über $k$ gezeigt.

Weiterhin ergibt sich, dass zwei über $k_i$ unähnliche Divisionsalgebren $D_i^{(1)}$ und $D_i^{(2)}$ der Grade $n^{(1)}$ und $n^{(2)}$, welche zu $N^*$ prim sind, beim Übergang zu $k$ unähnlich bleiben. Eine Ähnlichkeit müsste natürlich schon in einer endlichen Erweiterung von $k_i$ stattfinden. Wegen der Voraussetzungen über die Folge $k_i$ ist das aber wieder unmöglich. Hieraus folgt aber unter Benutztung von HASSEschen Resultaten[3] der

Satz 4. *Ist $n$ prim zu $N^*$, so existieren genau $\varphi(n)$ Typen von Divisionsalgebren $D$ des Grades $n$ über $k$. Die Klassengruppe der Algebren vom Index $\tilde{n}|n$ ist zyklisch von der Ordnung $n$.*

Nun folgt leicht

Satz 5. *Wenn über $k$ eine echte Divisionsalgebra $D$ vom Grade $n$ existiert, so ist jeder Körper $K$ vom Grade $n$ über $k$ ein Zerfällungskörper von $D$, also isomorph einbettbar.*

Beweis. Sei $k_i$ wieder ein Körper der zu $k$ gehörenden Approximationsfolge, über dem eine Divisionsalgebra $D_i$ mit $D_i \times k = D$ existiert. Ein primitives Element[4] $\theta$ von $K$ über $k$ genügt einer irre-

(1) Vgl. Anm. (2) in S. 191 oder die Arbeit von G. KÖTHE, Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren, Math. Ann., Bd. 107 (1933), S. 761–766.
(2) $n_i$ ist wie im Beweis von Satz 2 definiert.
(3) Vgl. Anm. (2) in S. 191.
(4) Ein solches $\theta$ existiert sicher, weil $K$ ein Körper von der Charakteristik Null ist.

duziblen Gleichung $n$-ten Grades in $k$. Die Koeffizienten dieser Gleichung adjungieren wir zu $k_i$, der entstehende Körper sei $k_I$. Dann ist $K_I = k_I(\theta)$ vom Grade $n$ über $k_I$ und ein Approximationskörper von $K$. Über $k_I$ gilt nun[1]

$$D_i \times k_I \times K_I = D_I \times K_I \sim K_I .$$

Anschliessende Erweiterung mit $k$ ergibt

$$D_I \times K_I \times k = D_I \times k \times K_I \times k = D \times K \sim K_I \times k = K .$$

Ist $K = Z$ insbesondere zyklisch über $k$, so gilt der

Satz 6. *Unter den gleichen Voraussetzungen im vorhergehenden Satz gilt, dass die Gruppe der von $Z$ zerfällten Algebrenklassen zyklisch von der Ordnung $n$ ist.*

Beweis. Die Gruppe der von $Z$ zerfällten Algebrenklassen fällt mit der Gruppe der verschränkten Produkte zu $W^{(n)}$ zusammen. Letzteres ist aber nach Satz 4 zyklisch von der Ordnug $n$.

Da die Algebrenklassengruppe zu einem zyklischen Körper $Z$ isomorph zu der Normenklassengruppe $k^*/N_{Zk} Z^*$[2] ist, so erhalten wir schliesslich den

Hauptsatz. *Die Normenklassengruppe des zyklischen Körpers $Z$ vom Grade $n$ über $k$ ist dann und nur dann zyklisch von der Ordnung $n$, wenn $n$ prim zum unendlichen Bestandteile $N^*$ des Grades $N$ von $k$ über $k_0$ ist.*

Hiermit sind allgemein die zyklischen Klassenkörper über $k$ durch den Grad $N^*$ charakterisiert.

Wir wollen nun für einige Indizes (bzw. Gruppen) eine direkte Darstellung durch die zu der Bewertung $\varphi$ von $k$ gehörige Wertgruppe $\Gamma$ angeben. Sie erweist sich später (wie auch bei anderen Untersuchungen) als nützlich. Wir nehmen wieder an, dass für die Zahl $n$ ein unverzweigter zyklischer Körper $W^{(n)}$ über $k$ existiert. Dann gilt

Satz 7. $k^*/N\, W^{(n)*} \cong \Gamma/n\Gamma$ *ist von der Ordnung $n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede Einheit aus $k$ Norm einer Einheit aus $W^{(n)}$ ist. Nämlich nach Struktur von $k$ gehört eine Einheit $\varepsilon$ aus $k$ bereits zu einem passend gewählten Approximationskörper $k_i$, derart dass das Kompositum von $k$ und dem unverzweigten Körper

(1) Vgl. Anm. (4) in S. 189.

(2) $k^*$, $Z^*$ bezeichnen resp. die Mengen aller von Null verschiedenen Elemente aus $k$ und $Z$.

$W_i^{(n)}$ vom Grade $n$ über $k_i$ mit $W^{(n)}$ identisch wird. Dann ist $\varepsilon$ Norm einer Einheit aus $W_i^{(n)}$, um so mehr aus $W^{(n)}$[1].

Nun kann jedes Element $\alpha$ aus $k$ als Produkt aus einem Element $\alpha_0$, das den gleichen Wert wie $\alpha$ hat, und einer Einheit $\varepsilon$ dargestellt werden. Wenn also $\alpha_0$ Norm aus $W^{(n)}$ wird, so werden es auch die sämtlichen assoziierten Elemente $\alpha = \alpha_0\{\varepsilon\}$. D. h. aber, dass

$$k^*/N\ W^{(n)*} \cong k^*/\varepsilon\Big/N\ W^{(n)*}/N\ E \cong k^*/\varepsilon\Big/N\ W^{(n)*}/\varepsilon$$

wird. Das Normenverhalten dieser Restklassen kann allein durch die Wertgruppen beschrieben werden. Da konjugierte Elemente gleiche Werte haben und $\mathfrak{p}$ in $W^{(n)}$ unverzweigt ist (die Wertmenge erfährt also keine Erweiterung!), so wird die betrachtete Gruppe zu $\Gamma/n\Gamma$ isomorph. Wegen der Voraussetzung über $n$ ($n$ ist prim zum unendlichen Bestandteile $N^*$ von $N$) ist sie zyklisch von der Ordnung $n$.

Für die zyklischen Erweiterungen $Z$ vom Grade $n$ über $k$ kann auch eine Führertheorie entwickelt werden[2]. Es gilt nämlich

Satz 8. *Zu jedem zyklischen Körper $Z$ über $k$ existiert ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ in $k$, derart dass aus der Kongruenz $\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ die Darstellbarkeit von $\varepsilon$ als Norm aus $Z$ folgt.*

Beweis. Es sei wieder $\{k_i\}$ eine approximierende Folge von $k$ und $\{Z_i\}$ die zu $Z$ gehörende Folge. Also ist $Z_i = k_i(\theta)$ für $i \geqq i_0$, und $Z_i$ zyklisch über $k_i$, wobei $\theta$ ein primitives Element von $Z$ über $k$ bedeutet. Offenbar gehört jede Einheit von $k$ schon zu einem passend gewählten Teilkörper von $k$, etwa zu $k_i$. Durch $Z_i$ ist in $k_i$ eindeutig ein Führer $\mathfrak{f}_i$ festgelegt. Ebenso ist in $k_{i+1}$ eindeutig der Führer $\mathfrak{f}_{i+1}$ festgelegt. Da aber $Z_{i+1} = k_{i+1}Z_i$ ist, so folgt aus dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie im Kleinen, dass $\mathfrak{f}_i$ als Ideal aus $k_{i+1}$ ein Multiplum von $\mathfrak{f}_{i+1}$ ist. Hiermit ist eine Teilerkette $\ldots\ldots \leqq \mathfrak{f}_i \leqq \mathfrak{f}_{i+1} \leqq \ldots\ldots$ festgelegt. Durch diese Kette ist in $k$ eindeutig ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ bestimmt[3]. $\mathfrak{f}$ ist offenbar unabhängig von der speziellen Approximation $\{k_i\}$.

Es sei nun für eine Einheit $\varepsilon$ aus $k$

$$\varepsilon \equiv 1 \quad \mod \ \mathfrak{f}.$$

Dann gehört $\varepsilon - 1$ nach Struktur von $\mathfrak{f}$ zu einem $\mathfrak{f}_i$, falls $i$ genügend gross gewählt ist. Es gibt also eine geeignete Einheit $E$ aus $Z_i$, so dass

(1) Vgl. Anm. (2) in S. 191.
(2) Vgl. Anm. (2) in S. 189.
(3) Vgl. Anm. (2) in S. 190.

$$\varepsilon = N_{Z_i k_i}(E) = N_{Zk}(E)$$

ist. Damit ist der Beweis beendet.

Nach Voraussetzung über den Grad $n$ existiert in einer approximierenden Körperfolge $\{k_i\}$ von $k$ ein Körper $k_{i_1}$, so dass für ein geeignetes primitives Element $\theta$ von $Z$ über $k$ $k_{i_1}(\theta) = Z_{i_1}$ über $k_{i_1}$ zyklisch und vom Grade $n$ ist, und für einen Körper $k_i$ mit $i \geqq i_1$ aus der Körperfolge $\{k_i\}$ der Grad $[k_i : k_{i_1}]$ zu $n$ prim ist. Ist $\varepsilon_i$ eine beliebige Einheit aus $k_i$, welche $\equiv 1$ mod $\mathfrak{f}_i^* = \mathfrak{f} \frown k_i$ ist, so gibt es nach Satz 8 eine Einheit $E_j$ aus $Z_j$, so dass

$$\varepsilon_i = N_{Zk}(E_j) = N_{Z_j k_j}(E_j)$$

wird, wobei $j \geqq i$ ist. Nach dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie im Kleinen gehört also $N_{k_j k_i}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^m$ zu der $Z_i$ zugeordneten Normengruppe $H_i$ in $k_i$, wobei $m$ den Grad von $k_j$ nach $k_i$ bedeutet. Da aber offenbar $\varepsilon_i^n$ auch Element aus $H_i$ und $(n, m) = 1$ ist, so ist $\varepsilon_i$ selbst Element aus $H_i$. Also sind alle Einheiten aus $k_i$, welche $\equiv 1$ mod $\mathfrak{f}_i^*$ sind, Normen der Einheiten aus $Z_i$ nach $k_i$. Also ist $\mathfrak{f}_i$ ein Teiler von $\mathfrak{f}_i^*$. Da aber offenbar $\mathfrak{f}_i^* = \mathfrak{f} \frown k_i$ ein Teiler von $\mathfrak{f}_i$ ist, so muss

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{f}_i^*$$

sein.

Es sei nun $\mathfrak{f}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$. Dann existiert ein Körper $k_i$ mit $i \geqq i_1$, derart dass $\mathfrak{f}_i' = \mathfrak{f}' \frown k_i$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}_i$ ist, weil sonst $\mathfrak{f}' = \mathfrak{f}$ würde. Dann gibt es in $k_i$ diejenigen Einheiten $\eta_i$, für welche

$$\eta_i \equiv 1 \quad \text{mod} \quad \mathfrak{f}_i',$$

aber

$$\eta_i \not\equiv 1 \quad \text{mod} \quad \mathfrak{f}_i$$

gelten. Da aber $\mathfrak{f}_i$ der Führer von $Z_i$ über $k_i$ ist, so gibt es unte. allen $\eta_i$ mindestens eines, welches keine Norm der Elemente aus $Z_i$ ist. Diese Einheit $\eta_i$ wird nach Bestimmung des Index $i_1$ keine Norm aus $Z$. Somit ist gezeigt:

*Das in Satz 8 bestimmte Ideal $\mathfrak{f}$ ist das umfassendste (ganze) Ideal in $k$, derart dass aus $\varepsilon \equiv 1$ mod $\mathfrak{f}$ die Darstellbarkeit von $\varepsilon$ als Norm aus $Z$ folgt.*

Das Ideal $\mathfrak{f}$ nennen wir also den *Führer* von $Z$ über $k$.

Wir bezeichnen nun mit $\varepsilon$ die ganze Gruppe der Einheiten aus $k$ und mit $N(E)$ die Gruppe aller derjenigen Einheiten, welche Normen der Einheiten aus $Z$ nach $k$ sind. Dann zeigen wir, dass

$$[\varepsilon : N(E)] = e$$

ist, wobei $e$ die Verzweigungsordnung von $Z$ über $k$ ist. Wir betrachten wieder einen Körper $k$ mit $i \geqq i_1$, wobei $i_1$ der schon früher bestimmte Index ist. Dann bezeichnen wir mit $\varepsilon_i$ die Gruppe aller Einheiten aus $k_i$ und mit $N_i(E_i)$ die Gruppe derjenigen Einheiten, welche Normen der Einheiten aus $Z_i$ nach $k_i$ sind. Dann ist bekanntlich $[\varepsilon_i : N_i(E_i)] = e_i$, wobei $e_i$ die Verzweigungsordnung von $Z_i$ über $k_i$ ist. Offenbar ist $\varepsilon$ die Vereinigungsmenge von $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_1+1}, \ldots\ldots, \varepsilon_i, \ldots\ldots$ und $N(E)$ die von $N_{i_1}(E_{i_1}), \ldots\ldots, N_i(E_i), \ldots\ldots$ Wenn man aber den Index $i_1$ hinreichend gross wählt, dann wird

$$e_{i_1} = e_{i_1+1} = \ldots\ldots = e_i = \ldots\ldots = e\,.$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$[\varepsilon : N(E)] \leqq e\,.$$

Nun sei $\varepsilon_1^{(i_1)}, \ldots\ldots, \varepsilon_e^{(i_1)}$ ein System der Repräsentanten der sämtlichen Klassen von $\varepsilon_{i_1}$ nach $N_{i_1}(E_{i_1})$. Dann gehören diese $e$ Repräsentanten auch zu den $e$ verschiedenen Klassen von $\varepsilon$ nach $N(E)$. Gehören nämlich etwa $\varepsilon_1^{(i_1)}, \varepsilon_2^{(i_1)}$ zu derselben Klasse von $\varepsilon$ nach $N(E)$, so existiert eine Einheit $E'$ aus $Z$, so dass

$$\varepsilon_1^{(i_1)} = N(E')\,\varepsilon_2^{(i_1)}$$

wird, d. h. es gibt einen passend gewählten Körper $k_i \geqq k_{i_1}$, derart dass

$$\frac{\varepsilon_1^{(i_1)}}{\varepsilon_2^{(i_1)}}$$

Norm einer Einheit aus $Z_i$ nach $k_i$ wird. Daher ist nach dem früher Gezeigten $\frac{\varepsilon_1^{(i_1)}}{\varepsilon_2^{(i_1)}}$ Norm einer Einheit aus $Z_{i_1}$ nach $k_{i_1}$, was aber Widerspruch ist. Also ist $[\varepsilon : N(E)] \geqq e$. Damit ist bewiesen:

$$[\varepsilon : N(E)] = e\,.$$

Bisher haben wir über $k$ bloss die zyklischen Erweiterungskörper endlichen Grades betrachtet. Um die abelschen Körper über $k$ zu behandeln, führen wir jetzt die Invarianten der Algebren und dann mit Hilfe der Invarianten die Normenrestsymbole ein.

Es seien $p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_j < \ldots\ldots$ die sämtlichen Primzahlen, welche zu $N^*$ prim sind. Dann kann man, wie auf S. 192 gesehen, in einer approximierenden Folge von $k$ einen Teilkörper $k_{i_j}$ finden, derart dass für jeden Teilkörper $k_i$ von $k$ endlichen Grades über $k_{i_j}$ der Grad $[k_i : k_{i_j}]$ zu $p_j$ prim wird. Ist nun $D_j$ eine Divisionsalgebra vom Index $p_j^{a_j}$, wobei $p_j$ eine zu $N^*$ prime Primzahl und $a_j$ eine natürliche Zahl ist (die Existenz von $D_j$ ist nach Satz 3 gesichert), so gibt es über $k_{i_j}$ eine Divisionsalgebra $D'_j$ vom Index $p_j^{a_j}$, derart dass

$$D'_j \times k = D_j$$

wird. Nämlich es gibt bekanntlich über $k_{i_j}$ $\varphi(p_j^{a_i})$ unähnliche Divisionsalgebren vom Index $p_j^{a_j}$, welche bei der Koeffizientenkörpererweiterung zu $k$ auch voneinander unähnlich sind. Da aber nach Satz 4 über $k$ auch $\varphi(p_j^{a_j})$ unähnliche Divisionsalgebren vom Index $p_j^{a_j}$ existieren, so folgt ohne weiteres unsere Behauptung. Wir definieren nun die Invariante[(1)] von $D'_j$ auch als die *Invariante* von $D_j$[(2)]. Also ist die Invariante $\rho_j$ von $D_j$ mod 1 zu $\frac{\mu_j}{p_j^{a_i}}$ kongruent, wobei $\mu_i$ eine ganze rationale Zahl bedeutet. Da $D'_j$ durch $D_j$ und $k_{i_j}$ eindeutig bestimmt ist, so ist die Invariante von $D_j$ durch $k_{i_j}$ und $D_j$ eindeutig bestimmt.

Es sei nun $D$ eine Divisionsalgebra vom Index $n$ über $k$, welcher zu $N^*$ prim ist. Dann erhält man aus der Primfaktorzerlegung von $n = q_1^{b_1} \ldots\ldots q_r^{b_r}$ ein direktes Produkt

$$D = D_1 \times \ldots\ldots \times D_r \,,$$

wobei $D_j$ eine Divisionsalgebra vom Primzahlpotenzindex $q_j^{b_j}$ über $k$ bedeutet $(r \geqq j \geqq 1)$. Da nach dem oben Gezeigten für jedes $D_j$ die Invariante $\rho_j$ definiert ist, so definieren wir die *Invariante* von $D$ durch folgende Kongruenz:

$$\sum_{j=1}^{r} \rho_j \equiv \rho \qquad \mathrm{mod}\ 1 \,.$$

Da $D_1, \ldots\ldots, D_r$ durch $D$ eindeutig bestimmt sind, so ist die Invariante von $D$ durch $D$ und die $k_{i_j}$ eindeutig bestimmt.

Ferner definieren wir die *Invariante* einer Algebrenklasse über $k$ als die der in dieser Algebrenklasse liegenden Divisionsalgebra. Aus dieser Definition schliesst man leicht, dass die Invariante von zwei

(1) Vgl. Anm. (3) in S. 191.
(2) Diesen Gedanken verdanken wir Herrn T. NAKAYAMA.

Algebrenklassen die Summe der Invarianten der beiden Algebrenklassen ist, wenn die Körper $k_{ij}$ festgelegt sind.

Mit Hilfe der oben definierten Invarianten der Algebren kann man für ein Element aus $k$ bezüglich eines endlichen zyklischen Erweiterungskörpers über $k$, dessen Grad nach $k$ zu $N^*$ prim ist, Normenrestsymbol einführen. Es sei nämlich $Z$ ein zyklischer Erweiterungskörper vom Grade $n$ über $k$ und $\alpha$ ein beliebiges Element aus $k$, wobei $n$ zu $N^*$ prim ist. Dann bilden wir eine zyklische Algebra

$$(\alpha, Z, S),$$

wobei $S$ irgendein erzeugender Automorphismus von $Z$ über $k$ ist. Für die Invariante $\rho$ von $(\alpha, Z, S)$ sei jetzt

$$\rho \equiv \frac{\nu}{n} \mod 1 .$$

Dann definieren wir $S^{-\nu} = \left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}}\right)$ als das Normenrestsymbol von $\alpha$ bezüglich $Z$[1]. Aus dieser Definition folgt:

*Dann und nur dann ist*

$$\left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}}\right) = 1 ,$$

*wenn $\alpha$ Norm eines Elementes aus $Z$ nach $k$ ist.*

Nämlich es gibt eine Divisionsalgebra $D$ über $k$, so dass

$$D \sim (\alpha, Z, S)$$

ist. Dann existiert eine Divisionsalgebra $D'$ über einem passend gewählten Approximationskörper $k_{i_0}$, derart dass

$$D' \times k = D$$

wird. Wenn also $S^{-\nu}$ das Einheitselement, d. h. $\frac{\nu}{n} \equiv 0 \mod 1$ ist, dann folgt aus Definition der Invariante

$$D' \sim k_{i_0} ,$$

ist also $k \sim D \sim (\alpha, Z, S)$. Hieraus folgt, dass $\alpha$ Norm eines Elementes aus $Z$ ist.

---

(1) Offenbar ist das Normenrestsymbol $\left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}}\right)$ durch $\alpha$ und $Z$ nicht eindeutig bestimmt, sondern es hängt auch von der Wahl der Körper $k_{ij}$ ab. Bei Verwendung der Normenrestsymbole kann man also durch passende Wahl der Körper $k_{ij}$ sie so bestimmen, dass sie dem Zweck geeignet sind.

Ist umgekehrt $\alpha$ Norm eines Elementes aus $Z$, so muss $(\alpha, Z, S) \sim D \sim k$ und infolgedessen nach der Wahl des Körpers $k_{i_0}$ unbedingt

$$D' \sim k'_{i_0}$$

sein, d.h. $\frac{\nu}{n} \equiv 0 \bmod 1$. Also ist

$$\left(\frac{\alpha, Z}{\mathfrak{p}}\right) = 1 .$$

Man kann ferner zeigen, dass für die oben definierten Normenrestsymbole alle Sätze, welche für einen endlichen perfekten Körper als Grundkörper bestehen, auch für einen unendlichen perfekten Körper $k$ als Grundkörper gültig bleiben.

Es sei nun $K$ ein abelscher Körper vom Grade $n$ über $k$ und $n$ prim zu $N^*$. Dann kann man bekanntlich $K$ als ein Kompositum von endlich vielen zyklischen Körpern über $k$ darstellen, wobei die Grade solcher zyklischen Körper über $k$ alle zu $N^*$ prim sind. Hierauf kann man wie üblich mit Hilfe der Normenrestsymbole die Theorie der abelschen Klassenkörper aufbauen.

Die gesamten Algebrenklassengruppen über $k$ können unter Beachtung der vorhergehenden Ergebnisse (besonders Satz 7 !) durch den folgenden Satz beschrieben werden:

Satz 9. *Die Algebrenklassengruppe über $k$ ist isomorph zur Additionsgruppe aller Brüche mod 1, deren Nenner prim zum unendlichen Bestandteile $N^*$ des Grades $N$ von $k$ nach $k_0$ sind.*

Beweis. Sind einmal die zulässigen Nenner $n$ bestimmt, so folgt der Beweis unter Beachtung der allgemeinen Sätze über die Zusammensetzung der Invarianten bei direkter Produktbildung. Zulässig sind genau die Nenner $n$, für welche $[\Gamma : n\Gamma] = n$ ist.

Zusatz 1.) Jede Divisionsalgebra $D$ vom Grade $n$ kann in der Form

$$D = (\pi, W^{(n)}, S^r)$$

dargestellt werden. Dabei ist $\pi$ ein passend gewähltes Primelement eines $D_i$, und die innere Transformation von $W_i^{(n)}$ durch $\pi$ erzeugt gerade den Automorphismus $S^r$ $[(r, n) = 1]$.

2.) $D_i$ enthält den vollverzweigten Körper $k_i(\sqrt[n]{p_i})$. Hieraus ergibt sich, dass $D$ für ein genügend grosses $I$ den Grenzkörper $\{k_i(\sqrt[n]{p_i})\} = k(\sqrt[n]{p_I})$ enthält.

3.) Die Maximalordnungen $\mathfrak{o}_i$ von $D_i$ erzeugen in $D$ die einzige Maximalordnung $\mathfrak{o}$. Der Ring $\mathfrak{o}$ kann hiernach als die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $D$ bestimmt werden, deren Normen in $k$ Werte $\geqq 0$ besitzen (Denn jedes Element aus $\mathfrak{o}$ liegt in einem $\mathfrak{o}_i$!).

4.) Das einzige (zweiseitige) Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{o}$ ist durch die Elemente bestimmt, deren Normen grössere Werte als 0 besitzen. Hierdurch ist in $D$ eine Bewertung $\Phi$ bestimmt, die eine Erweiterung der Bewertung $\varphi$ von $k$ ist.

## II. ENDLICHE ERWEITERUNGEN DES DERIVIERTEN KÖRPERS.

In einer früheren Arbeit[1] zeigt der erstere von uns, dass zu dem unendlichen perfekten Körper $k$ ein eindeutig bestimmter derivierter Körper $\bar{k}$ existiert. Der Körper $\bar{k}$ ist dann perfekt bezüglich der Bewertung $\varphi$ von $k$. Insbesondere stimmen die Wertgruppen $\Gamma$ von $k$ und $\bar{\Gamma}$ von $\bar{k}$ überein. Das ist von besonderer Bedeutung.

In diesem Abschnitte sollen die Ergebnisse, die wir für $k$ erhalten konnten, auf $\bar{k}$ übertragen werden. Es stellt sich dabei heraus, dass zwischen den jeweiligen Aussagen eine eindeutige Beziehung hergestellt werden kann. Wir bemerken vorher, dass die Restklassenkörper $k/\mathfrak{p}$ und $\bar{k}/\mathfrak{p}$[2] isomorph sind.

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, welcher in der folgenden Untersuchung oft benutzt wird:

Hilfssatz. Es sei $n\,(>1)$ eine natürliche Zahl und $\varepsilon$ eine Einheit aus $\bar{k}$. Ist dann $\varphi(\varepsilon-1)>\varphi(n^2)$, so ist $\varepsilon$ eine $n$-te Potenz einer Einheit aus $\bar{k}$.

Beweis. Wir können in $\bar{k}$ ein ganzes Element $\pi$[3] mit $\varphi(\pi)>0$ finden, derart dass

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon-1}{n^2}\right)\geqq\varphi(\pi)$$

ist. Ist nun $n$ genau durch $\pi^e$ teilbar, so kann man leicht verifizieren,

(1) M. Moriya, Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Fac. Science, Hokkaido, Bd. 3 (1935), S. 107–190.

(2) Das Primideal $\mathfrak{p}$ aus $k$ bleibt auch Primideal in $\bar{k}$.

(3) Nach Struktur des Körpers $\bar{k}$ gibt es sicher ein solches Element $\pi$. Insbesondere, wenn die Bewertung $\varphi$ diskret ist, kann man als $\pi$ ein Primelement nehmen.

dass für ein ganzes Element $a_1 = \dfrac{\varepsilon - 1}{n\pi^{e+1}}$

$$\varepsilon \equiv (1 + a_1\pi^{e+1})^n \qquad \mathrm{mod} \quad \pi^{2e+2}$$

ist. Wir setzen nun $\varepsilon_1 = 1 + a_1\pi^{e+1}$. Ist nun

$$a_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1^n}{n\pi^{e+2}\varepsilon_1^{n-1}}$$

gesetzt, so ist $a_2$ ein ganzes Element aus $\bar{k}$, und es ist

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_1 + a_2\pi^{e+2})^n \qquad \mathrm{mod} \quad \pi^{2e+2^2} .$$

Wir setzen alsdann

$$\varepsilon_1 + a_2\pi^{e+2} = \varepsilon_2 .$$

Ist also $\varepsilon_{\nu-1}$ eine Einheit aus $\bar{k}$, für welche

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{\nu-1}^n \qquad \mathrm{mod} \quad \pi^{2e+2^{\nu-1}}$$

gilt, so ist für ein ganzes Element $a_\nu = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_{\nu-1}^n}{n\pi^{e+2^{\nu-1}}\varepsilon_{\nu-1}^{n-1}}$

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_{\nu-1} + a_\nu\pi^{e+2^{\nu-1}})^n \qquad \mathrm{mod} \quad \pi^{2e+2^\nu} .$$

Wir bezeichnen $\varepsilon_{\nu-1} + a_\nu\pi^{e+2^{\nu-1}}$ mit $\varepsilon_\nu$. Dann erhält man eine unendliche Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$, welche zu einem Element $\eta$ aus $\bar{k}$ konvergiert, weil $\bar{k}$ perfekt ist. Offenbar ist

$$\varepsilon = \eta^n , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es gilt nun folgender

Satz 10. *Jeder endliche Oberkörper $\bar{K}$ von $k$ ist Erweiterungskörper eines passenden Oberkörpers $K$ von $k$, so dass $\bar{K} = K\bar{k}$ wird, und es ist $[\bar{K} : \bar{k}] = [K : k]$. Wenn insbesondere $\bar{K}$ über $\bar{k}$ galoissch ist, dann ist es auch $K$ über $k$, und die beiden galoisschen Gruppen sind isomorph*(1).

Hiermit ist eine eindeutige Zuordnung zwischen den Oberkörpern von $\bar{k}$ und $k$ hergestellt.

Am Ende des vorigen Abschnittes sahen wir, dass in jeder Divisionsalgebra $D$ über $k$ eine Bewertung $\Phi$ existiert. Zu $D$ kann man wie im kommutativen Falle die derivierte Divisionsalgebra $\bar{D}$ bilden. $\bar{D}$ enthält einen zu $\bar{k}$ isomorphen Körper, da $\Phi$ eine Erweiterung von $\varphi$ ist.

---

(1) Vgl. Anm. (3) in S. 189.

Satz 11. *Es wird*

$$\bar{D} = D \times \bar{k} .$$

Beweis. Auf jeden Fall ist $D \times \bar{k} \leqq \bar{D}$. Wir können aber anderseits beweisen, dass $D \times \bar{k} \geqq \bar{D}$ ist(1).

Hiermit ist die Existenz von echten Divisionsalgebren über $\bar{k}$ gezeigt. Sie existieren also dann, wenn ihre Grade zum unendlichen Bestandteile $N^*$ von $N$ prim sind.

Wir betrachten nun über $\bar{k}$ einen zyklischen Körper $\bar{Z}$ vom Grade $n$ und bilden eine von $\bar{Z}$ zerfällte zyklische Algebra $(\bar{a}, \bar{Z}, S)$ vom Grade $n$ über $\bar{k}$, wobei $\bar{a}$ Element aus $\bar{k}$ und $S$ einen erzeugenden Automorphismus von $\bar{Z}$ über $\bar{k}$ bezeichnet. Nach dem Hilfssatz existieren in $k$ und $\bar{k}$ resp. Elemente $\alpha$, $\bar{\beta}$, so dass

$$\bar{a} = \alpha\bar{\beta}^n$$

wird. Ferner kann man nach Satz 10 einen zyklischen Körper $Z$ vom Grade $n$ über $k$ finden, derart dass

$$\bar{Z} = Z \cdot \bar{k}$$

wird. Dabei bleibt der oben angegebene Automorphismus $S$ auch ein erzeugender Automorphismus von $Z$ über $k$. Da bekanntlich

$$(\bar{a}, \bar{Z}, S) = (\alpha\bar{\beta}^n, \bar{Z}, S) \sim (\alpha, \bar{Z}, S) = (\alpha, Z, S)_{\bar{k}}$$

ist, so kann man einer beliebigen zyklischen Algebra $(\bar{a}, \bar{Z}, S)$ wie oben eine zyklische Algebra $(\alpha, Z, S)$ vom Grade $n$ über $k$ zuordnen:

$$(\bar{a}, \bar{Z}, S) \rightarrow (\alpha, Z, S) .$$

Sind nun

$$(\bar{a}_1, \bar{Z}, S) \rightarrow (\alpha_1, Z, S) \quad \text{und} \quad (\bar{a}_2, \bar{Z}, S) \rightarrow (\alpha_2, Z, S) ,$$

so schliesst man leicht, dass dann und nur dann

$$(\alpha_1, Z, S) \sim (\alpha_2, Z, S)$$

ist, wenn

$$(\bar{a}_1, \bar{Z}, S) \sim (\bar{a}_2, \bar{Z}, S)$$

ist. Ist nämlich $(\alpha_1, Z, S) \sim (\alpha_2, Z, S)$, d.h. $(\alpha_1\alpha_2^{-1}, Z, S) \sim k$, so folgt ohne weiteres

(1) M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, Berlin (1935).

$$(\alpha_1, Z, S)_{\bar{k}} \times (\alpha_2^{-1}, Z, S)_{\bar{k}} \sim (\alpha_1\alpha_2^{-1}, Z, S)_{\bar{k}} \sim \bar{k},$$

ist also

$$(\bar{\alpha}_1 \bar{Z}, S) \sim (\bar{\alpha}_2, \bar{Z}, S).$$

Es sei aber

$$(\alpha_1, Z, S) \nsim (\alpha_2, Z, S).$$

Dann ist

$$(\alpha_1\alpha_2^{-1}, Z, S) \nsim k.$$

Ist $D$ die zu $(\alpha_1\alpha_2^{-1}, Z, S)$ ähnliche Divisionsalgebra über $k$, so ist $D \nsim k$. Es ist also

$$(\alpha_1, Z_1, S)_{\bar{k}} \times (\alpha_2^{-1}, Z, S)_{\bar{k}} \sim (\alpha_1\alpha_2^{-1}, Z, S)_{\bar{k}} \sim D_{\bar{k}}.$$

Nach Satz 11 ist aber

$$D_{\bar{k}} \nsim \bar{k},$$

weil $D \nsim k$ ist. Daher ist

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{Z}, S) \nsim (\bar{\alpha}_2, \bar{Z}, S).$$

Hiernach beweist man auch leicht, dass die $(\bar{\alpha}, \bar{Z}, S)$ zugeordnete zyklische Algebra $(\alpha, Z, S)$ hinsichtlich der Ähnlichkeit nur von $\bar{\alpha}$, aber nicht von den durch $\bar{\alpha}$ bestimmten Elementen $\alpha$ abhängig ist.

Ferner folgt noch

$$(\bar{\alpha}_1, \bar{Z}, S) \times (\bar{\alpha}_2, \bar{Z}, S) \sim (\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2, \bar{Z}, S) \rightarrow$$
$$(\alpha_1\alpha_2, Z, S) \sim (\alpha_1, Z, S) \times (\alpha_2, Z, S).$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 12. *Es sei $\bar{Z}$ ein zyklischer Körper vom Grade $n$ über $\bar{k}$. Dann ist die von $\bar{Z}$ zerfällte Algebrenklassengruppe über $\bar{k}$ isomorph zu der von $Z$ zerfällten Algebrenklassengruppe über $k$, wobei $Z$ der nach Satz 10 bestimmte zyklische Körper vom Grade $n$ über $k$ ist.*

Nach dem Hauptsatz beweist man mit Hilfe von Satz 12 folgenden

Satz 13. *Die Normenklassengruppe eines zyklischen Körpers $\bar{Z}$ vom Grade $n$ über $\bar{k}$ ist dann und nur dann zyklisch von der Ordnung $n$, wenn $n$ zu $N^*$ prim ist.*

Hiermit sind der Isomorphie-und Umkehrsatz für die zyklischen Klassenkörper[1] über dem derivierten perfekten Körper $\bar{k}$ bewiesen.

(1) Ein endlicher Erweiterungskörper $\bar{K}$ von $\bar{k}$ heisse ein Klassenkörper, wenn die Ordnung der $\bar{K}$ zugeordneten Normenklassengruppe in $\bar{k}$ gleich $[\bar{K} : \bar{k}]$ ist.

Es sei $\bar{Z}$ ein zyklischer Klassenkörper über $\bar{k}$. Ist dann $\bar{a}$ ein Element aus $\bar{k}$, so entspricht einer zyklischen Algebra $(\bar{a}, Z, S)$ wie früher eine zyklische Algebra $(a, Z, S)$. Dann definieren wir das Normenrestsymbol $\left(\frac{a, Z}{\mathfrak{p}}\right)$ auch als das Normenrestsymbol $\left(\frac{\bar{a}, \bar{Z}}{\mathfrak{p}}\right)$ von $\bar{a}$ bezüglich $\bar{Z}$. Wie man sich leicht überzeugt, gilt nun:

*Dann und nur dann ist*

$$\left(\frac{\bar{a}, \bar{Z}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 ,$$

*wenn $\bar{a}$ Norm aus $Z$ ist.*

Unter Benutzung der Normenrestsymbole kann man ohne Mühe den Isomorphie- und Umkehrsatz für die abelschen Klassenkörper über $\bar{k}$ beweisen.

Da nach dem Hilfssatz für ein geeignetes Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ jede Einheit $\equiv 1$ mod $\bar{\mathfrak{a}}$ $n$-te Potenz einer Einheit aus $\bar{k}$ wird, so existiert zu einem zyklischen Klassenkörper $\bar{Z}$ vom Grade $n$ über $\bar{k}$ ein Ideal $\bar{\mathfrak{b}}$, derart dass jede Einheit $\equiv 1$ mod $\bar{\mathfrak{b}}$ aus $\bar{k}$ als Norm eines Elementes aus $\bar{Z}$ darstellbar ist. Wir beweisen nun die Existenz des Führers von $\bar{Z}$ über $\bar{k}$.

Satz 14. *Der Führer von $\bar{Z}$ über $\bar{k}$ ist Erweiterungsideal des Führers $\mathfrak{f}$, der zu dem zyklischen Körper $Z$ über $k$ gehört, wenn $\bar{Z} = Z\bar{k}$ ist.*

Beweis. Wir bezeichen mit $\bar{\mathfrak{f}}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{f}$ in $\bar{k}$. Ist dann für eine Einheit $\bar{\varepsilon}$ aus $\bar{k}$

$$\bar{\varepsilon} \equiv 1 \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{f}} ,$$

so existiert in $k$ eine Einheit $\varepsilon$, derart dass

$$\varepsilon \equiv 1 \quad \text{mod } \mathfrak{f}$$

und $\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}$ $n$-te Potenz eines Elementes aus $\bar{k}$ wird (nach dem Hilfssatz). Aus $\varepsilon \equiv 1$ mod $\mathfrak{f}$ folgt aber, dass $\varepsilon$ Norm einer Einheit aus $Z$ nach $k$ ist. Also ist $\bar{\varepsilon}$ Norm eines Elementes aus $\bar{Z}$ nach $\bar{k}$.

Es sei $\bar{\mathfrak{f}}_0$ ein echter Teiler von $\bar{\mathfrak{f}}$. Dann existiert in $\bar{\mathfrak{f}}_0$ ein Element $\bar{\pi}$, welches in $\bar{\mathfrak{f}}$ nicht enthalten ist. Zu $\bar{\pi}$ existiert in $k$ ein Element $\pi$, derart dass $\varphi(\pi) = \varphi(\bar{\pi})$ ist. Dann ist $\pi$ Element aus $\bar{\mathfrak{f}}_0$, aber gehört nicht zu $\bar{\mathfrak{f}}$. Also ist $\mathfrak{f}_0 = \bar{\mathfrak{f}}_0 \frown k$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$.

Ist jede Einheit $\varepsilon$ aus $k$, welche $\equiv 1$ mod $\mathfrak{f}_0$ ist, Norm eines Elementes $\bar{E}$ aus $\bar{Z}$ nach $\bar{k}$, so existiert in $Z$ ein Element $E$, derart dass

$$\bar{E} \equiv E \quad \mod \bar{\mathfrak{f}}$$

ist. Es ist also

$$N(\bar{E}) \equiv N(E) \quad \mod \mathfrak{f}.$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$\frac{\varepsilon}{N(E)} \equiv 1 \quad \mod \mathfrak{f}.$$

Also ist $\frac{\varepsilon}{N(E)}$ Norm eines Elementes aus $Z$, d. h. $\varepsilon$ ist Norm eines Elementes aus $Z$. Jede Einheit aus $k$, welche $\equiv 1 \mod \mathfrak{f}_0$ ist, wird Norm eines Elementes aus $Z$. Da aber $\mathfrak{f}_0$ ein echter Teiler von $\mathfrak{f}$ ist, so führt dies zu Widerspruch. Damit ist gezeigt, dass es in $\bar{k}$ mindestens eine Einheit $\equiv 1 \mod \bar{\mathfrak{f}}_0$ gibt, welche keine Norm aus $\bar{Z}$ ist, d.h. $\bar{\mathfrak{f}}$ ist der Führer von $\bar{Z}$ über $\bar{k}$.