SUR LES NOTIONS DE LA CATÉGORIE ET DE LA MESURE DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE POINTS

Par

Motokiti KONDÔ

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

On peut trouver dans la théorie des ensembles de points deux notions—la catégorie et la mesure—qui déterminent comment un sous-ensemble d'un espace R de quelques dimensions est étendu sur R. Bien que la notion de la catégorie soit définie topologiquement et celle de la mesure soit définie métriquement, il y a beaucoup de propriétés analogues entre les deux notions. Comme on sait, cette analogie est attribuable à la ressemblance entre des propriétés d'ensembles de la première catégorie et de la mesure nulle. S'il en est ainsi, on peut poser le problème : quelle construction les notions de la catégorie et de la mesure font-elles au point de vue de la ressemblance entre des propriétés d'ensembles de la première catégorie et de la mesure nulle? M. W. SIERPIŃSKI a énoncé dans son ouvrage célèbre „HYPOTHÈSE DU CONTINU[1]" un théorème fondamental[2] sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle en faisant appel à l'hypothèse du continu, et a donné beaucoup d'applications intéressantes. Ici, nous allons exposer les constructions des deux notions ci-dessus d'une manière descriptive. Pour cela, nous introduirons dans la suite la notion d'ensemble mince[3], c'est ce qui correspond à celle d'ensemble de la première catégorie dans la théorie de la catégorie et à celle d'ensemble de la mesure nulle dans la théorie de la mesure. Et considérons des espaces où sont définies les notions d'*ensembles minces* et d'*ensembles mesurables* (B). Mais, nous ne devons faire aucune supposition sur la dérivation de sous-ensembles d'un espace, puisque la dérivation ne joue pas un rôle essentiel dans notre cas. M. E. SZPILRAJN a traité pour la première fois dans sons mémoire „Sur certains invariants de l'opération (A)[4]" des espaces de même espèce que nous considérerons dans la suite.

Or, on peut distinguer dans la théorie de la catégorie les notions *absolues* (par rapport à l'espace) et les notions *relatives* (par rapport au sous-ensemble de l'espace), et en correspondant à cette distinction, il y a dans la théorie de la mesure la théorie de M. H. LEBESGUE[5] et celle de M. C. CARATHEODORY[6]. On doit donc distinguer les notions absolues et les notions relatives sur les constructions des deux notions ci-dessus. Or, comme on peut introduire les notions relatives selon les notions absolues, nous allons étudier en premier lieu les notions absolues sur les constructions des deux notions ci-dessus, et nous avons laissé l'exposition des notions relatives pour un autre mémoire.

Notre présent mémoire se divise en deux parties, l'une contient les conséquences sur l'analogie entre les deux notions ci-dessus, et

(1) Pour la simplicité, nous désignerons dans la suite par H. d. C. cette ouvrage.
(2) W. SIERPIŃSKI, H. d. C., p. 77, Proposition C_{25}.
(3) M. A. DENJOY a employé la terminologie „ensemble mince" a quelque autre sens. Voir p. ex. Journal de Math., ser. 7, t. 1 (1915), p. 105-240.
(4) E. SZPILRAJN, Fund. Math., t. 21 (1933), p. 229-235.
(5) H. LEBESGUE, Ann. d. Matem., Ser. 3, t. 7 (1902), p. 231-359.
(6) C. CARATHEODORY, Gött. Nachr., Jg. 1914, p. 404-426.

l'autre contient les résultats sur les propriétés caractéristiques des deux notions au point de vue du théorème d'EGOROFF[1] sur une suite convergente de fonctions mesurables (au sens de LEBESGUE).

Je tiens à remercier, en terminant, Professeurs, MM. K. KUNUGUI et Y. YOSIDA des précieux conseils et du concours qu'ils m'ont prêté à rédiger ce mémoire.

CHAPITRE I

ESPACES DE LA CLASSE (S*).

§ 1. La propriété de Lebesgue sur les ensembles.

1. Ensembles minces et mesurables (B). Nous entendrons dans la suite par un espace R un ensemble d'éléments quelconques dans lequel sont introduites les notions d'être *mince* et *mesurable* (B), telles que les sous-ensembles minces satisfont aux conditions suivantes:

I. Tous les sous-ensembles d'un ensemble mince contenu dans R sont minces. En particulier, l'ensemble vide est mince.

II. La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles minces contenus dans R est mince.

De plus, pour la simplicité nous désignons la famille de tous les ensembles minces contenus dans R par $\mathfrak{M}(R)$ ou $\mathfrak{M}$, et la famille de tous les ensembles mesurables (B) contenus dans R par $\mathfrak{B}(R)$ ou $\mathfrak{B}$. Enfin, en conservant la terminologie de la théorie de la mesure, nous définirons la notion ,,*presque partout*" comme il suit: lorsqu' une proposition P est vraie sur tous les points d'un ensemble E sauf les points formant un sous-ensemble mince de E, nous dirons que la proposition P est vraie presque partout sur l'ensemble E.

2. Équivalence des ensembles. Nous définirons la notion l'équivalence des ensembles en utilisant celle d'ensembles minces. Considérons une famille $\mathfrak{F}$ des sous-ensembles de R. Lorsque pour deux sous-ensembles E et F de R, on a

---

(1) D. TH. EGOROFF, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 152 (1911), p. 244–246.

$$[M \epsilon \mathfrak{F}] \rightarrow [(ME \epsilon \mathfrak{M}(R)) \backsim (MF \epsilon \mathfrak{M}(R))]^{(1)},$$

on dit que E et F sont équivalents par rapport à $\mathfrak{F}$, et l'on écrit

$$E \sim F \text{ (rel } \mathfrak{F}) \qquad \text{ou} \qquad F \sim E \text{ (rel } \mathfrak{F}).$$

Maintenant, on voit bien que l'équivalence par rapport à $\mathfrak{F}$ jouit des trois propriétés suivantes.

1° $E \sim E$ (rel $\mathfrak{F}$).

2° $[E \sim F \text{ (rel } \mathfrak{F})] \rightarrow [F \sim E \text{ (rel } \mathfrak{F})]$.

3° $\{[E \sim F \text{ (rel } \mathfrak{F})] \;\&\; [F \sim G \text{ (rel } \mathfrak{F})]\} \rightarrow [E \sim G \text{ (rel } \mathfrak{F})]$.

De plus, lorsque pour la famille $\mathfrak{S}$ de tous les ensembles de R, on a $E \sim F$ (rel $\mathfrak{S}$), on dit que E et F sont équivalents et l'on écrit

$$E \sim F \qquad \text{ou} \qquad F \sim E.$$

Quelquefois, lorsque deux ensembles E et F ne sont pas équivalents, nous désignons ce fait par E non $\sim F$ ou F non $\sim E$.

De cette définition, on peut déduire facilement les conséquences suivantes.

1° Pour qu'un ensemble E de R soit mince, il faut et il suffit que l'on ait $E \sim 0$.

2° Pour que deux ensembles E et F de R soient équivalents, il faut et il suffit que l'on ait $(E+F)-EF \sim 0$.

3. Étendues extérieures et intérieures. Propriété de Lebesgue.

En utilisant la notion de l'équivalence que nous avons définie tout-à-l'heure, introduisons une notion qui correspond à la propriété de Baire[2] dans la théorie de la catégorie, et qui cerrespond à la mesurabilité au sens de Lebesgue dans la théorie de la mesure. Pour cela il est utile de définir d'abord les *étendues extérieures et intérieures* qui correspondent „der massgleichen Hülle" et „dem massgleichen Kern"[3] dans la théorie de la mesure. Il paraît que des notions correspondantes

(1) Nous emploierons dans la suite les symbols logiques au sens comme il suit: & : et, $\rightarrow$: implication, $\backsim$: équivalence.

(2) Voir p. ex., C. Kuratowski, Topologie, t. I, 1934, p. 49.

(3) Voir p. ex., C. Caratheodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1921, Chap. V.

à celles des étendues extérieures et intérieures ne soient pas beaucoup employées dans la théorie de la catégorie. Or, nous constatons que les démonstrations des théorèmes dans cette théorie seront simplifiées en utilisant ces notions. Voici leurs définitions. S'il existe pour un sous-ensemble E de R un ensemble mesurable (B) H tel qu'on ait

$$E \sim H \qquad (\text{rel } \mathfrak{B}_C)^{(1)},$$

nous dirons que H est une *étendue extérieure* de E. Lorsqu'il y a une eténdue extérieure de E, et lorsque les deux ensembles mesurables (B) H_i $(i = 1, 2)$ sont les étendues extérieures de E, d'après la définition de l'équivalence, on a $E - H_i \sim 0$ $(i = 1, 2)$. Or, comme on a $E \sim H_j$ (rel $\mathfrak{B}_C$) $(j = 1, 2)$, nous avons $H_j - H_i \sim 0$ $(i, j = 1, 2)$, et par suite $H_1 \sim H_2$, c'est-à-dire, les étendues extérieures de E sont équivalents les unes aux autres. C'est pour cela qu'on peut désigner sans ambiguïté une quelconque des étendues extérieures de E par $\nu^*(E)$. De même, lorsqu'il existe, pour un sous-ensemble E de R, un ensemble mesurable (B) H tel que

$$R - E \sim R - H \qquad (\text{rel } \mathfrak{B}),$$

nous dirons que H est une *étendue intérieure* de E. Pour la même raison que nous avons exposé plus haut, on peut désigner une quelconque des étendues intérieures de E par $\nu_*(E)$ sans ambiguïté.

Ainsi, s'il existe pour un sous-ensemble E de R, son étendue extérieure et intérieure et on a $\nu^*(E) \sim \nu_*(E)$, on dit que E jouit de la *propriété de* LEBESGUE. Lorsqu'un sous-ensemble E de R jouit de la propriété de LEBESGUE, d'après

$$(E + \nu^*(E)) - E\nu^*(E) < \{E - \nu^*(E)\} + \{\nu^*(E) - \nu_*(E)\},$$

nous avons $E \sim \nu^*(E)$, c'est-à-dire, E est équivalent à un sous-ensemble mesurable (B) de R.

Réciproquement, si E est équivalent à l'ensemble mesurable (B) H, d'après $E \sim H$ (rel $\mathfrak{B}$) et $\mathfrak{B}_C < \mathfrak{S}$, on a $\nu^*(E) \sim H$. De même, on

(1) Nous designons par $\mathfrak{B}_C(R)$ ou $\mathfrak{B}_C$ la famille des ensembles complémentaires mesurables (B).

voit que $\nu_*(E) \sim H$. Par conséquent, nous avons $\nu^*(E) \sim \nu_*(E)$, c'est-à-dire E jouit de la propriété de LEBESGUE. Donc,

Théorème 1. *Pour qu'un sous-ensemble E de R jouisse de la propriété de* LEBESGUE, *il faut et il suffit que E soit équivalent à un ensemble mesurable (B) de R.*

Remarque. D'après ce théorème, on voit aisément que l'espace R en soi et tous les sous-ensembles mesurables (B) de R jouissent de la propriété de LEBESGUE.

4. Sommes et produits des ensembles. Sans qu'on suppose l'additivité et la multiplicativité sur les ensembles mesurables (B) de R, grâce à l'existence des étendues extérieures et intérieures des sous-ensembles de R, on peut déduire l'additivité et la multiplicativité des ensembles jouissant de la propriété de LEBESGUE, c'est-à-dire,

Théorème 2. 1° *Etant donné des sous-ensembles E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ de R, s'il existe leurs étendues extérieures $\nu^*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)$, on a*

$$\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) \qquad (\text{rel } \mathfrak{B}_C), \tag{1}$$

et de plus, si $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n)$ jouit de la propriété de LEBESGUE, *nous avons*

$$\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n). \tag{2}$$

Puis, si E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE *et s'il existe une étendue intérieure de $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ jouit aussi de la propriété de* LEBESGUE.

2° *Etant donné des sous-ensembles E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ de R, s'il existe leurs étendues intérieures $\nu_*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\nu_*(\prod_{n=1}^{\infty} E_n)$, nous avons*

$$C\nu_*(\prod_{n=1}^{\infty} E_n) \sim C\prod_{n=1}^{\infty} \nu_*(E_n) \qquad (\text{rel } \mathfrak{B}),$$

et de plus, si $\prod_{n=1}^{\infty} \nu_*(E_n)$ jouit de la propriété de LEBESGUE, *nous avons*

$$\nu_*(\prod_{n=1}^{\infty} E_n) \sim \prod_{n=1}^{\infty} \nu_*(E_n).$$

Puis, si E_n $(n = 1, 2, \dots)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE *et s'il existe une étendue extérieure de $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$, $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ jouit aussi de la propriété de* LEBESGUE.

Démonstration. Puisque la deuxième partie du théorème peut être démontré d'une façon analogue, nous n'en démontrerons que la première partie. Commençons par la démonstration de l'égalité (1).

i). Si l'on a $[(M \epsilon \mathfrak{B}) \;\&\; (\sum_{n=1}^{\infty} E_n - M \sim 0)]$, on a $E_n - M \sim 0$. Donc, nous avons $\nu^*(E_n) - M \sim 0$, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - M \sim 0$, c'est-à-dire,

$$(3) \qquad [(M \epsilon \mathfrak{B}) \;\&\; (\sum_{n=1}^{\infty} E_n - M \sim 0)] \rightarrow [\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - M \sim 0] .$$

ii). Si l'on a $[(M \epsilon \mathfrak{B}) \;\&\; (\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - M \sim 0)]$, on a $\nu^*(E_n) - M \sim 0$. Donc, nous avons $E_n - M \sim 0$, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - M \sim 0$, c'est-à-dire,

$$(4) \qquad [(M \epsilon \mathfrak{B}) \;\&\; (\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) - M \sim 0)] \rightarrow [\sum_{n=1}^{\infty} E_n - M \sim 0] .$$

Il en résulte en vertu des (3) et (4) que $\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)$ est équivalent à $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n)$ par rapport à $\mathfrak{B}_C$.

Puis, nous démontrerons l'égalité (2). Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE, il existe un sous-ensemble mesurable (B) H de R tel qu'on ait $\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(E_n) \sim H$. D'après (1), on a $\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim H$ (rel $\mathfrak{B}_C$), ce qui donne $\nu^*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim H$. Par suite nous avons l'égalite (2).

Enfin, nous déduirons que, si E_n $(n = 1, 2, \dots)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE et s'il existe une étendue intérieure de $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ jouit aussi de la propriété de LEBESGUE. Comme il existe une étendue intérieure de $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, nous avons

$$C \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sim C \nu_*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \qquad (\text{rel } \mathfrak{B}) .$$

Or, on a $E_n \sim \nu^*(E_n)$. Donc, il en suit que $\nu^*(E_n) - \nu_*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim 0$, ce qui donne $E_n - \nu_*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim 0$ et par suite nous avons $\sum_{n=1}^{\infty} E_n - \nu_*(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \sim 0$. L'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ jouit donc de la propriété de LEBESGUE. C. Q. F. D.

5. Opération (A) et la propriété de LEBESGUE. À l'aide du théorème 2, on peut démontrer que la famille de tous les ensembles de

R jouissant de la propriété de LEBESGUE est additive et multiplicative, où R est un espace dont tous les sous-ensembles ont les étendues extérieures et intérieures. Or, dans tel espace, on peut déduire une conséquence plus précise comme il suit.

Théorème 3. *Soient R un espace dont tous les sous-ensembles ont des étendues extérieures et intérieures, et $\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ un schème de SOUSLIN tel que tous les ensembles $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ soient contenus dans R et jouissent de la propriété de LEBESGUE. Alors, l'ensemble $E = \sum_{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ jouit aussi de la propriété de LEBESGUE*(1).

Démonstration. Puisque la famille de tous les sous-ensembles jouissant de la propriété de LEBESGUE est multiplicative dans R, on peut supposer qu'on ait $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supset E_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}}$ quelle que soit la suite $(n_1, n_2, \ldots)$ de nombres naturels. Posons

$$Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \sum_{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1, m_2, \ldots, m_l, n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

On voit aisément qu'on a

$$(5)\qquad \begin{aligned} &Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} \subset E_{m_1, m_2, \ldots, m_l}, \\ &Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l, n}, \\ &\sum_{\nu} \prod_{l=1}^{\infty} Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l} = E. \end{aligned}$$

Or, puisque $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ jouit de la propriété de LEBESGUE et contient $Z_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, on a $\nu^*(Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l}) - E_{m_1, m_2, \ldots, m_l} \sim 0$ d'où, il existe un sous-ensemble mince $T_{m_1, m_2, \ldots, m_l}$ de R tel qu'on ait

$$\nu^*(Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l}) \subset E_{m_1, m_2, \ldots, m_l} + T_{m_1, m_2, \ldots, m_l}.$$

Pour ces ensembles, l'ensemble $T = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_l} T_{m_1, m_2, \ldots, m_l}$(2) est mince, et on a

$$K \equiv \sum_{\nu} \prod_{l=1}^{\infty} \nu^*(Z_{m_1, m_2, \ldots, m_l}) \subset \sum_{\nu} \prod_{l=1}^{\infty} (E_{m_1, m_2, \ldots, m_l} + T) \subset E + T.$$

---

(1) La démonstration n'est qu'une transposition de la démonstration de MM. N. LUSIN et W. SIERPIŃSKI dans Bull. Acad. Cracovie, 1918, p. 35–48.

(2) La sommation $\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_l}$ s'étendant à tous les systèmes finis d'indices.

Donc, nous avons $K-E\sim 0$. En outre, d'après (5), on a

$$(6)\qquad \nu^*(Zm_1, m_2, \ldots, m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Zm_1, m_2, \ldots, m_l, n) \sim 0 ,$$

et de même $\nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z_n) \sim 0$. Or, on a

$$\nu^*(E) - K \subset \{\nu^*(E) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Z_n)\}$$
$$+ \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_l} \{\nu^*(Zm_1, m_2, \ldots, m_l) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Zm_1, m_2, \ldots, m_l, n)\}.$$

Donc, d'après (6), nous avons $\nu^*(E)-K\sim 0$. Ainsi nous avons

$$\nu^*(E) - E \subset (\nu^*(E) - K) + (K-E) ,$$

ce qui donne $\nu^*(E)-E\sim 0$, c'est-à-dire E jouit de la propriété de LEBESGUE. C. Q. F. D.

6. Espaces de la classe (S^*). Nous appellerons un espace de la classe (S^*) un espace R qui satisfait aux conditions suivantes.

III. Tous les sous-ensembles contenus dans R ont les étendues extérieures et intéreures.

IV. L'ensemble complémentaire de tout ensemble mesurable (B) de R jouit de la propriété de LEBESGUE.

Ici, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace R soit de la classe (S^*).

Théorème 4. *Pour qu'un espace R soit de la classe (S^*), il faut et il suffit que R satisfasse aux conditions suivantes.*

(A). *Pour tout sous-ensemble E de R, il existe un ensemble mesurable (B) H tel qu'on ait $E\sim H$ (rel $\mathfrak{B}$).*

(B). *R jouit de la propriété de LEBESGUE.*

Démonstration. Nous établissons d'abord quelques remarques. S'il existe, pour un sous-ensemble E de R, les deux ensembles mesurables (B) H_i ($i=1, 2$) tel qu'on ait $E\sim H_i$ (rel $\mathfrak{B}$) ($i=1, 2$), nous avons $H_1\sim H_2$. En effet, considérons des ensembles mesurables (B) K_i ($i=1, 2$) tel qu'on ait $R-H_i\sim K_i$ (rel $\mathfrak{B}$) ($i=1, 2$). Selon la définition de K_i, on a $H_iK_i\sim 0$. Donc, d'après $H_i\sim H_j$ (rel $\mathfrak{B}$) ($i, j=1, 2$), H_iK_j sont minces. D'où, on a $H_i-H_j\sim 0$, c'est-à-dire, H_1 et H_2 sont équivalents. C'est pour cela qu'on peut désigner par $\mu(E)$ un ensemble mesurable (B) H tel qu'on ait $E \sim H$ (rel $\mathfrak{B}$) sans l'ambiguïté. Maintenant, nous verrons qu'on a

$$(7) \qquad \mu(E)+\mu(R-E)\sim R\,,$$

quel que soit l'ensemble E de R. En effet, posons $N=R-\{\mu(E)+\mu(R-E)\}$. Alors, d'après $N\mu(E)\sim 0$, on a $\mu(N)E\sim 0$; de même, on a $\mu(N)\,(R-E)\sim 0$. Par suite, nous avons $\mu(N)R\sim 0$, ce qui donne $N\mu(R)\sim 0$. Or, comme R jouit de la propriété de LEBESGUE, nous avons $N\sim 0$, et par suite l'équivalence (7). En particulier, si E jouit de la propriété de LEBESGUE, $E+\mu(R-E)\sim R$.

Démontrons, maintenant, que la condition donnée est suffisante. Pour cela, supposons qu'un espace R satisfasse aux conditions (A) et (B). La démonstration se divise en trois parties.

1° Tous les sous-ensembles de R ont les étendues extérieures. Pour cela, il suffit de démontrer l'équivalence $E\sim\mu(E)$ (rel $\mathfrak{B}_C$), quel que soit le sous-ensemble E de R. Supposons d'abord qu'on ait $[(M\in\mathfrak{B})\ \&\ (\mu(E)-M\sim 0)]$. D'après $\mu(E)-M\sim 0$, on a $E\mu(R-M)\sim 0$. Or, puisque M est un ensemble mesurable (B) de R, on a $M+\mu(R-M)\sim R$, d'où, nous avons $E\sim EM+E\mu(R-M)\sim EM$, c'est-à-dire,

$$(8) \qquad [(M\in\mathfrak{B})\ \&\ (\mu(E)-M\sim 0)]\to[E-M\sim 0]\,.$$

De même, nous avons

$$(9) \qquad [(M\in\mathfrak{B})\ \&\ (E-M\sim 0)]\to[\mu(E)-M\sim 0]\,.$$

Donc, d'apres (8) et (9), E est équivalent à $\mu(E)$ par rapport à $\mathfrak{B}$.

2° L'ensemble complémentaire $R-E$ d'un ensemble mesurable (B) E contenu dans R jouit de la propriété de LEBESGUE. Commençons par établir que nous avons $E\sim R-\mu(R-E)$ (rel $\mathfrak{B}$). Pour cela, supposons d'abord qu'on a $[(M\in\mathfrak{B})\ \&\ (ME\sim 0)]$. Selon l'équivalence $E+\mu(R-E)\sim R$, nous avons $M\mu(R-E)\sim M$, d'où

$$(10) \qquad [(M\in\mathfrak{B})\ \&\ (ME\sim 0)]\to[M-\mu(R-E)\sim 0]\,.$$

De même, nous avons

(11) $$[(M \in \mathfrak{B}) \ \& \ (M-\mu(R-E) \sim 0)] \rightarrow [ME \sim 0].$$

Donc, d'après (10) et (11), E est équivalent à $M-\mu(R-E)$ par rapport à $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire, $\mu(R-E)$ est une étendue intérieure de $R-E$. Or, comme $\mu(R-E)$ est l'étendue extérieure de $R-E$, $R-E$ jouit de la propriété de LEBESGUE.

3° Tout sous-ensemble E de R a les étendues intérieures. Comme $R-\mu(R-E)$ jouit de la propriété de LEBESGUE, il existe un ensemble mesurable (B) H de R tel qu'on ait $R-\mu(R-E) \sim H$. Or, puisque nous avons $\mu(R-H) \sim R-E$ (rel $\mathfrak{B}$), nous avons $R-H \sim R-E$ (rel $\mathfrak{B}$), c'est-à-dire, H est une étendue intérieure de E. Il en résulte en vertu de 1°-3° que l'espace R est de la classe (S^*). Il est clair que la condition donnée est nécessaire. C. Q. F. D.

§ 2. La propriété de LEBESGUE sur les fonctionnelles.

Dans les espaces de la classe (S^*), on peut établir des conséquences intéressantes sur les fonctionnelles définies sur un sous-ensemble de tel espace. Nous consacrons donc ce paragraphe à l'étude des fonctionnelles.

7. Propriété de LEBESGUE. Nous donnerons la définition de la propriété de LEBESGUE sur des fonctionnelles. Soient E un sous-ensemble d'un espace R, et $\varphi(x)$ une fonctionnelle définie sur E. Nous dirons que $\varphi(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE sur E, si les ensembles

$$\underset{x}{\mathrm{Ens}}\{\varphi(x) \geqq r\} \qquad \text{et} \qquad \underset{x}{\mathrm{Ens}}\{\varphi(x) \leqq r\}$$

jouissent de la propriété de LEBESGUE, quel que soit le nombre réel r. D'après la définition, on voit facilement que

1°. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les fonctionnelles définies sur E et jouissent de la propriété de LEBESGUE sur E. Les fonctionnelles

$$\varphi(x) \pm \psi(x), \quad \varphi(x) \times \psi(x), \quad \varphi(x)/\psi(x) \quad (\text{où } \psi(x) \neq 0 \text{ sur } E)$$

jouissent aussi de la propriété de LEBESGUE,

2°. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ une suite convergente des fonctionnelles définies sur E et jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E.

La limite de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ jouit aussi de la propriété de LEBESGUE sur E.

8. Une condition pour qu'une fonctionnelle jouisse de la propriété de LEBESGUE. Commençons par la définition. Soit $\varphi(x)$ une fonctionnelle définie sur un sous-ensemble E d'un espace R. Nous entendrons par l'osillation $\omega(\varphi(x), E)$ de $\varphi(x)$ sur E la borné supérieure de $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|$ pour toutes les paires (x_1, x_2) de points tels qu'on ait $x_i \epsilon E$ $(i=1, 2)$. Alors, on peut déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle jouisse de la propriété de LEBESGUE.

Théorème 5. *Soit $\varphi(x)$ une fonctionnelle définie sur un sous-ensemble E d'un espace R. Pour que $\varphi(x)$ jouisse de la propriété de LEBESGUE sur E, il faut et il suffit qu'on puisse choisir les ensembles E_n $(n=1, 2, \ldots)$ jouissant de la propriété de LEBESGUE et tels qu'on ait $\omega(\varphi(x), E_n) < \varepsilon$ $(n=1, 2, \ldots)$ et $E \sim \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, quelque soit le nombre positif ε.*

9. Théorème de M M. SAKS et SIERPIŃSKI. M M. S. SAKS et W. SIERPIŃSKI ont démontré un théorème(1) qui peut être regardée comme une extension du théorème de G. VITALI sur les fonctions mesurables (au sens de LEBESGUE). Or, ce théorème est fait aussi une extension dans notre cas.

Théorème 6. *E étant un ensemble jouissant de la propriété LEBESGUE dans un espace R de la classe (S^*) et $\varphi(x)$ étant une fonctionnelle définie dans E, il existe toujours une fonctionnelle $F(x)$ jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E, telle que, quel que soit le nombre positif ε, l'inégalité $|\varphi(x)-F(x)| < \varepsilon$ a lieu pour tous les points x de E sauf les points formant un ensemble d'étendue intérieure mince.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons déduire un lemme.

Lemme. *$\varphi(x)$ étant une fonctionnelle définie dans un ensemble E, et ε étant un nombre positif, il existe toujours une fonctionnelle $F(x)$ jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E et un sous-ensemble H de E, tels qu'on ait $|\varphi(x)-F(x)| < \varepsilon$ sur H, et $\nu^*(E) \sim \nu^*(H)$.*

(1) Fund. Math., t. 11 (1928), p. 105–112.

Démonstration. Sans perdre la généralité, on peut supposer qu'on ait $E = R$. Posons $\Phi(x) = \varepsilon E[\varepsilon^{-1}\varphi(x)]$ où $E[t]$ désigne le plus petit nombre entier $\geqq t$. Nous aurons évidemment

$$(12) \qquad 0 \leqq \varphi(x) - \Phi(x) < \varepsilon \qquad \text{sur } R .$$

Maintenant, puisque l'ensemble des valeurs de $\Phi(x)$ est au plus dénombrable, désignons ces valeurs de $\Phi(x)$ par y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et posons $E_n = \underset{x}{\mathrm{Ens}}\,(\Phi(x) = y_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nous définirons par l'induction les ensembles M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ jouissant de la propriété de LEBESGUE, comme il suit.

Tout d'abord, posons $M_1 = \nu^*(E_1)$. Maintenant soit n un nombre naturel > 1 et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles M_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Nous définissons M_n par

$$M_n \sim \nu^* \{E_n - \sum_{k=1}^{n-1} M_k\} ,$$
$$M_n M_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) .$$

Alors, d'après la définition de M_n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n-1} M_k + M_n \sim \sum_{k=1}^{n-1} M_k + \nu^*\{E_n - \sum_{k=1}^{n-1} M_k\} \sim \nu^*(E_n) .$$

Donc, l'ensemble $\nu^*(E_n) - \sum_{k=1}^{n} M_k$ est mince. Or, comme $\sum_{k=1}^{n} M_k$ jouit de la propriété de LEBESGUE, $E_n - \sum_{k=1}^{n} M_k$ est mince; donc, en posant $H = \sum_{k=1}^{\infty} M_k E_k$, nous avons $H > M_n E_n \sim E_n - \sum_{k=1}^{n-1} M_k$. Il en suit que l'ensemble $\nu^*(E_n - \sum_{k=1}^{n-1} M_k) - \nu^*(H)$, et par suite, $M_n - \nu^*(H)$ est mince, d'où, nous avons $\sum_{n=1}^{\infty} M_n - \nu^*(H) \sim 0$. En outre, d'après $E_n - \sum_{k=1}^{n-1} M_k \sim 0$, nous avons

$$R - \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} E_n - \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sim 0 .$$

Donc, nous avons

$$R - \nu^*(H) < \{R - \sum_{n=1}^{\infty} M_n\} + \{\sum_{n=1}^{\infty} M_n - \nu^*(H)\} \sim 0 ,$$

c'est-à-dire, $R \sim \nu^*(H)$.

Maintenant, nous définirons la fonctionelle $F(x)$ comme il suit,

$$F(x) = \begin{cases} y_n & \text{sur} \quad M_n\,, \\ 0 & \text{sur} \quad R - \sum_{n=1}^{\infty} M_n\,. \end{cases}$$

Nous avons alors $F(x) = y_n = \Phi(x)$ sur $M_n H_n$, et par suite $F(x) = \Phi(x)$ sur H. Donc, d'après (12), nous avons

$$|F(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \qquad \text{sur} \quad H\,,$$

et comme on voit, $F(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE sur R.

Notre lemme est ainsi démontré.

La démonstration du théorème 6. Sans réstreindre la généralité, on peut supposer qu'on ait $E = R$. Tout d'abord, nous définirons par l'induction les fonctionnelles $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ayant de la propriété de LEBESGUE sur R et les ensemble H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait

(13) $\quad |\varphi(x) - F_n(x)| < 2^{-n} \qquad \text{sur} \quad H_n \ (n = 1, 2, \ldots)\,,$

(14) $\quad H_n > H_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad \nu^*(H_n) \sim R \ (n = 1, 2, \ldots)\,.$

Pour cela, dans le lemme, en posant $\varepsilon = 2^{-1}$ et $E = R$, on peut choisir $F_1(x)$ et H_1 de sorte qu'ils satisfassent à (13) et (14). Maintenant, soit n un nombre entier > 1 et supposons que nous ayons déja défini $F_k(x)$ et H_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. En posant $\varepsilon = 2^{-n}$ et $E = H_{n-1}$ dans le lemme, on peut définir $F_n(x)$ et H_n tels qu'ils satisfassent (13) et (14). Alors, d'après (13), on a

$$|F_n(x) - F_{n+1}(x)| < 2^{1-n} \qquad \text{sur} \quad H_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

et $F_n(x) - F_{n+1}(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE sur R, donc, l'ensemble

$$J_n = \operatorname*{Ens}_x \{ |F_n(x) - F_{n+1}(x)| < 2^{1-n} \}$$

jouit de la propriété de LEBESGUE et contient l'ensemble H_{n+1}. Par conséquent, d'après (14), nous avons $\prod_{k=1}^{n} J_k > H_{n+1}$. Or, comme $\prod_{k=1}^{n} J_k$ jouit de la propriété de LEBESGUE et $\nu^*(H_{n+1}) \sim R$, $\prod_{k=1}^{\infty} J_k$ est aussi équivalent à R.

Maintenant, selon la définition des ensembles J_n, on a

$$|F_n(x) - F_{n+1}(x)| < 2^{1-n} \qquad \text{sur} \quad \prod_{k=1}^{\infty} J_k\,.$$

La suite $\{F_n(x)\}$ est donc convergente sur $\prod_{k=1}^{\infty} J_k$. Désignons par $F(x)$ la limite de $\{F_n(x)\}$ sur $\prod_{k=1}^{\infty} J_k$. Nous étendrons en R la domaine où $F(x)$ est définie, en posant sur $R - \prod_{k=1}^{\infty} J_k$, $F(x) \equiv 0$. Comme $F(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE sur $\prod_{k=1}^{\infty} J_k$, $F(x)$ jouit aussi de la propriété de LEBESGUE sur R. Or, d'après la définition de $F(x)$, nous avons aisément

$$|F(x)-F_n(x)| < 2^{2-n} \qquad \text{sur} \quad \prod_{k=1}^{\infty} J_k .$$

Par suite, d'après (16), nous avons aussi

$$|F(x)-\varphi(x)| < 2^{3-n} \qquad \text{sur} \quad H_n \prod_{k=1}^{\infty} J_k .$$

Or, selon les définitions de H_n et $\prod_{k=1}^{\infty} J_k$, $H_n \prod_{k=1}^{\infty} J_k$ est equivalent à R. Il en résulte que $|F(x)-\varphi(x)| < 2^{3-n}$ a lieu pour tous les points x de R, sauf ceux qui formant un ensemble d'étendue intérieure mince, quel que soit le nombre naturel n. C. Q. F. D.

10. La propriété d'EGOROFF. Dans la théorie de la catégorie, on ne peut trouver aucune proposition correspondant au théorème d'EGOROFF[1] sur la convergence uniforme d'une suite des fonctions mesurables (au sens de LEBESGUE), mais comme c'est un des théorèmes caractéristiques dans la théorie de la mesure, il est très intéressant de trouver une condition pour que nous ayons un théorème correspondant dans notre cas. Nous verrons plus loin beaucoup d'application intéressantes de cette condition.

Maintenent, nous donnerons la propriété d'EGOROFF. Soit E un ensemble non mince d'un espace R jouissant de la propriété de LEBESGUE. Nous dirons que E jouit de la *propriété d'EGOROFF*, lorsque toute suite convergente des fonctionnelles jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E converge uniformément sur un sous-ensemble non mince de E.

Or, lorsqu'une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctionnelles, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE sur un ensemble non mince E d'un espace R converge uniformément sur un sous-ensemble non mince N de E, cette suite converge aussi uniformément sur un sous-ensemble

(1) Voir la note (1) de la page 125.

non mince de E ayant de la propriété de LEBESGUE. En effet, comme la suite $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur N, il existe un nombre naturel $n(\varepsilon)$, tel qu'on ait sur N

$$|F_m(x)-F_n(x)|<\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad m, n \geqq n(\varepsilon)\,.$$

Posons

$$H_k = \prod_{m\geq n\geq n\left(\frac{1}{k}\right)} \underset{x}{\text{Ens}} \left\{ |F_m(x)-F_n(x)| < \frac{1}{k} \right\} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

et

$$H = \prod_{k=1}^{\infty} H_k\,.$$

Alors, H est un ensemble, qui contient N et qui jouit de la propriété de LEBESGUE. Or, comme on voit, la suite $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur H. Donc, la suite $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur un sous-ensemble non mince de E, qui jouit de la propriété de LEBESGUE.

Par suite, lorsqu'un ensemble non mince E d'un espace jouit d'EGOROFF, toute suite convergente des fonctionnelles ayant de la propriété de LEBESGUE sur E converge uniformément sur un sous-ensemble non mince de E, qui jouit de la propriété de LEBESGUE.

Ici, nous établirons une condition pour qu'un sous-ensemble d'un espace R de la classe (S^*) ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF.

Théorème 7. *Pour qu'un sous-ensemble E d'un espace R de la classe (S^*) ne jouisse pas de la propriété d'EGOROFF, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n=1, 2, \ldots)$ des ensembles ayant de la propriété de LEBESGUE, telle que:*

(A) $\quad M_{k,n} \supset M_{k,n+1} \qquad (k, n=1, 2, \ldots)\,.$

(B) $\quad \prod_{n=1}^{\infty} M_{k,n} \sim 0 \qquad (k=1, 2, \ldots)\,.$

(C) *Quelle que soit la suite $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ des nombres naturels, on ait $\sum_{k=1}^{\infty} M_{k,n_k} \sim E$.*

Démonstration. La condition est suffisante. Supposons que la famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n=1, 2, \ldots)$ des ensembles ayant de la propriété de LEBESGUE satisfassent aux conditions du théorème. Posons $N_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} M_{i,n}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Alors, la famille $\{N_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ remplit aussi les conditions (A)—(C) et de plus $N_{k,n} < N_{k+1,n}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Ici, sans réstreindre la généralité, on peut supposer que

$$(\mathrm{B}^*) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} N_{k,n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

Maintenant, d'après les conditions (A) (B*) et (C) sur la famille $\{N_{k,n}\}$, nous pouvons définir la suite des fonctionnelles $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ comme il suit.

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{pour} \quad x \in N_{k,n} - N_{k-1,n}\,, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in E - \{N_{k,n} - N_{k-1,n}\}\,. \end{cases}$$

Alors, $F_n(x)$ sont les fonctionnelles non négatives et jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E. D'ailleurs, on peut déduire aisément que la suite $\{F_n(x)\}$ converge vers nulle identiquement sur E. Mais, il ne converge uniformément sur aucun sous-ensemble non mince de E. En effet, si la suite $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur un ensemble non mince N, il existe un nombre entier n_k tel qu'on ait sur N

$$F_{n_k}(x) < \frac{1}{k}\,,$$

pour tout nombre entier k. Alors, on voit aisément qu'on a $N N_{k,n_k} = 0$ ou $N < E - N_{k,n_k}$, d'où nous avons $N < E - \sum_{k=1}^{\infty} N_{k,n_k}$. Par conséquent, d'après (C), N est mince. C'est incompatible avec l'hypothèse sur N. Donc, la suite $\{F_n(x)\}$ ne converge uniformément sur aucun sous-ensemble non mince de E, c'est-à-dire, E ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF.

La condition est nécessaire. Lorsqu' un ensemble non mince E ayant de la propriété de LEBESGUE ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF, il existe une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctionnelles définies dans E et jouissent de la propriété de LEBESGUE, telle que la suite $\{F_n(x)\}$ ne converge uniformément sur aucun sous-ensemble non mince de E.

Sans réstreindre la généralité, on peut supposer que la suite $\{F_n(x)\}$ converge vers nulle identiquement sur E et que les fonctionnelles $F_n(x)$ soient positives dans E. Posons

$$N_{k,n} = \operatorname*{Ens}_{x}\left\{F_n(x) \geqq \frac{1}{k}\right\} \qquad (k, n = 1, 2, \ldots).$$

Alors, quelle que soit la suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ des nombres entiers, nous avons

$$E \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k \leq i} N_{k,i}. \tag{15}$$

En effet, soit N un sous-ensemble non mince de E. Comme la suite $\{F_n(x)\}$ ne converge pas uniformément sur N, il existe les nombres entiers k_0 et n_0 tels que $F_{n_0}(x) < \frac{1}{k_0}$ n'ait pas lieu sur N et qu'on ait $n_0 \geqq n_{k_0}$. Pour ces nombres entiers, nous avons $N\,N_{k_0, n_0} \neq 0$, et par suite, $E - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k \leq i} N_{k,i}$ ne contient pas N. Donc $E - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k \leq i} N_{k,i}$ est mince, c'est-à-dire, nous avons l'équivalence (15). Posons $M_{k,n} = \sum_{n \leq i} N_{k,i}$. On voit aisément que la famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles ayant de la propriété de LEBESGUE satisfont aux conditions (A)—(C) du théorème. C. Q. F. D.

11. Le théorème d'ASCOLI et ARZELÁ.[1] Le théorème sur la compacité[2] d'une famille de fonctions mesurables (au sens de LEBESGUE), donnée par G. ASCOLI et C. ARGELÁ, peut être étendu aussi dans notre cas.

Théorème 8. *Soient E un ensemble non mince d'un espace de la classe (S^*), qui jouit de la propriété de LEBESGUE et $\mathfrak{F}$ une famille des fonctionnelles ayant de la propriété de LEBESGUE sur E et uniformément borné sur E. Pour qu'on puisse choisir parmi la famille $\mathfrak{F}$ une suite des fonctionnelles qui converge uniformément presque partout sur E, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre fini des ensembles mesurables (B): E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tels*

(1) G. ASCOLI, Mem. Accad. Linc., (3) t. 18 (1884), p. 545–580. C. ARZELÀ, Rend. Accad. Linc., (4) t. 5 (1889), p. 342–328.

(2) Voir p. ex., M. M. FRÉCHET, Les espaces abstraits, Paris, 1928.

qu'on ait

1° $E \sim E_1 + E_2 + \ldots + E_n$,

2° *pour toute fonctionnelle* $F(x)$ *de* $\mathfrak{F}$, *on puisse déterminer un ensemble mince* N *tel qu'on ait* $\omega(F(x), E_k - N) < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

On peut démontrer ce théorème de la façon que M. P. VERESS a démontré son théorème 1 dans FUNDAMENTA MATHEMATICAE, tom 7. (1925), p. 244–249.

CHAPITRE II

ESPACES DES CLASSES (U) ET (U^*).

Pour établir des conséquences sur les ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE, nous allons considérer dans ce chapitre des espaces des classes (U) et (U^*). Dans ces espaces, on peut déduire des propositions qui peuvent être démontrés en faisant appel à l'hypothèse des alephs inaccessibles(1).

De plus, on peut établir dans ces espaces de conséquences sur les fonctionnelles.

§ 3. L'hypothèse des alephs inaccessibles.

12. Espaces de la classe (U). Maintenant définirons des espaces de la classe (U). Nous appellerons un espace de la classe (U) un espace qui satisfait aux conditions suivantes,

III que nous avons donné plus haut.

V. Toute suite monotone bien ordonnée de sous-ensembles dont chacun jouit de la propriété de LEBESGUE et n'est pas équivalent aux suivantes, ne consiste qu'au plus dénombrable d'ensembles.

Dans ce numéro, nous établissons un lemme sur un espace de la classe (U) et quelque application de ce lemme. Pour cela nous donnerons une notion sur la décomposition des ensembles mesurables (B). Nous dirons qu'un ensemble non mince mesurable (B) E est décomposable, lorsqu'il existe deux ensembles non minces mesurables (B) E_i $(i = 1, 2)$ tels qu'on ait $E \sim E_1 + E_2$ et $E_1 E_2 \sim 0$.

(1) Voir p. ex., M. W. SIERPIŃSKI, H. d. C., Chap. V.

Lemme A. *Soit R un espace de la classe (U) dont tout sous-ensemble non mince mesurables (B) est décomposable. R peut être alors représenté comme une somme de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles minces.*

Démonstration. Nous définirons d'abord par l'induction transfinie la famille $\mathfrak{F} \equiv \{E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta)\}$ $(\eta < \Omega,\ n_\alpha = 0$ ou $1)$ des ensembles jouissant de la propriété de LEBESGUE.

Puisque R jouit de la propriété de LEBESGUE, on peut définir deux ensembles non minces $E n_0$ $(n_0 = 0, 1)$ ayant de la propriété de LEBESGUE, comme il suit, $R = E_0 + E_1$ et $E_0 E_1 = 0$. Pour un nombre ordinal quelconque η compris entre 1 et Ω, nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. η est de première espèce. Lorsque l'ensemble $E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta - 1)$ est mince, posons

$$E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta,\ n_{\eta-1} = 0) = E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta - 1),$$

$$E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta,\ n_{\eta-1} = 1) = 0 .$$

Lorsque $E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta - 1)$ est non mince, comme cet ensemble est décomposable, il existe deux ensembles non minces $E^{(0)}$ et $E^{(1)}$ jouissant de la propriété de LEBESGUE, tels qu'on ait $E^{(0)} E^{(1)} = 0$ et $E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta - 1) = E^{(0)} + E^{(1)}$. Posons

$$E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta) = E^{(n_{\eta-1})} .$$

DEUXIÈME CAS. η est de deuxième espèce. Posons

$$E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta) = \prod_{\xi < \eta} E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \xi) .$$

Alors, pour un nombre ordinal quelconque $\eta < \Omega$, la famille des tous les ensembles $E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta)$ est de la puissance $2^{\aleph_0}$, ce qui entraine que la puissance de $\mathfrak{F}$ est aussi $2^{\aleph_0}$.

Pour une suite du type Ω $\nu = (n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots)$ $(\alpha < \Omega)$, où n_α est 0 ou 1, la suite transfinie $\{E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta)\}$ $(\eta < \Omega)$ est la suite monotone décroissante bien ordonnée de sous-ensembles de R, dont chacun jouit de la propriété de LEBESGUE et n'est pas équivalent aux suivantes. Donc, d'après la condition V, la suite transfinie $\{E n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots (\alpha < \eta)\}$ consiste en des ensembles minces sauf tout au plus dénombrable d'ensembles. Pour toute suite du type Ω $\nu = (n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots)$ $(\alpha < \Omega)$ des nombres 0 ou 1, considérons le premier ensemble mince dans la suite transfinie $\{E_{n_0, n_1, \ldots, n_\alpha, \ldots (\alpha < \eta)}\}$ $(\eta < \Omega)$ et désignons par $\mathfrak{G}$ la famille de ces ensembles. Alors, selon $\mathfrak{G} < \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ consiste au plus en $2^{\aleph_0}$ ensembles, et tous les ensembles de $\mathfrak{G}$ sont minces. Or, tout point de R est contenu dans au moins un ensemble de $\mathfrak{G}$. Il en suit que R est représenté comme la somme de tous au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles minces de R. C. Q. F. D.

On peut déduire à l'aide du lemme A quelque proposition comme il suit.

Proposition 1. *Soit R un espace de la classe (U) dont tout sous-ensemble non mince mesurable (B) est décomposable. Il existe alors dans l'espace produit $R \times R$*[1] *un ensemble E tel que toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre l'ensemble E dans un ensemble mince de l'espace R et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre le cònplémentaire de E dans un ensemble mince de R*[2].

En effet, en vertu du lemme A, on peut représenter l'espace R comme la somme de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles minces disjoints. Donc, on peut démontrer, en admettant l'hypothèse du continu, cette proposition de la façon que M. W. SIERPIŃSKI a démontré la proposition C_{49} dans H. d. C..

13. Les constituantes des ensembles analytiques. Avant d'établir des conséquences sur les ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE, nous déduirons quelque conséquence sur les ensembles obtenu par l'opération (A). La conséquence[3] obtenu par M. W. SIERPIŃSKI sur les constituantes des ensembles analytiques peut être aussi étendue dans des espaces de la classe (U), comme M. E. SZPILRAJN a proposé une extension sur cette conséquence[4].

---

(1) Etant donné deux espaces quelconques R_1 et R_2, nous entendrons par l'espace produit $R_1 \times R_2$ l'ensemble de toutes les paires (x_1, x_2) de points telles qu'on ait $x_i \in R_i$ $(i = 1, 2)$ par une droite parallèle à l'axe d'ordonnées un ensemble de toutes les paires (ξ_1, x_2) de points telles qu'on ait $x_2 \in R_2$, quel que soit le point ξ_1 de R_1, et enfin par une droite parallèle à l'axe d'abscisses un ensemble de toutes les paires (x_1, ξ_2) de points telles qu'on ait $x_1 \in R_1$, quel que soit le point ξ_2 de R_2.

(2) W. SIERPIŃSKI, H. d. C., p. 103, Proposition C_{49}.

(3) W. SIERPIŃSKI, Fund. Math., t. 21 (1933), p. 29-34.

(4) Voir la note (4) de la page 121.

Considérons un système déterminant $S \equiv \{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \dots)$ des ensembles jouissant de la propriété de LEBESGUE. Comme M. W. SIERPIŃSKI a fait, nous définirons les constituantes du noyau $E = \sum_{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ du système S. Pour cela nous définirons d'abord les ensembles $E^{(\alpha)}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ par l'induction transfinie:

1° $E^{(\alpha)}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

2° Pour un nombre ordinal quelconque α compris entre 1 et Ω, posons

$$E^{(\alpha)}_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E^{(\alpha-1)}_{n_1, \dots, n_k} \sum_{k=1}^{\infty} E^{(\alpha-1)}_{n_1, n_2, \dots n_k, n}$$

ou

$$= \prod_{\xi<\alpha} E^{(\xi)}_{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

suivant que α est de première ou deuxième espèce, et posons pour $0 \leqq \alpha < \Omega$,

$$S^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{(\alpha)}_n,$$

$$T^{(\alpha)} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \left\{E^{(\alpha)}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - E^{(\alpha+1)}_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right\}^{(1)},$$

$$Q^{(\alpha)} = (S^{(\alpha)} - T^{(\alpha)}) - \sum_{\xi<\alpha} (S^{(\xi)} - T^{(\xi)}).$$

Alors, comme on sait, nous avons

$$E = \sum_{\alpha<\Omega} (S^{(\circ)} - T^{(\alpha)}) = \sum_{\alpha<\Omega} Q_\alpha.$$

Ici, les ensembles Q_α sont appelés les constituantes du noyau E. On peut alors établir le théorème de la façon que M. E. SZPILRAJN a démontré son théorème 2 dans FUNDAMENTA MATHEMTICAE, t. 21 (1933), p. 229–235.

Théorème 9. *Soient R un espace de la classe (U) et $S \equiv \{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \dots)$ un système déterminant constituant des ensembles de R jouissant de la propriété de LEBESGUE. Alors, les constituantes du noyau $\sum_{\nu} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ du système S sont minces sauf au plus une infinité dénombrable d'ensembles.*

(1) Voir la note (2) de la page 130.

14. Ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE. Nous établissons en faisant appel à l'hypothèse des alephs inaccessibles une proposition sur l'existence des ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE.

Proposition 2. *Etant donné un espace non mince R de la classe (U) dont tout sous-ensemble non mince mesurable (B) est décomposable, designons par $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(R)$ la borné inférieure des puissance $\mathfrak{m}$ telles que R peut être représenté comme une somme des $\mathfrak{m}$ ensembles minces. R contient alors $\mathfrak{n}$ ensembles disjoints dont chacun ne jouit pas de la propriété de LEBESGUE.*

Puisque R est représenté comme une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles minces, il existe $\mathfrak{n}$ ensembles minces disjoints $\{e\}$ tels qu'on ait $R = \Sigma e$. Considérons un espace R^* dont tout point est un élément de la famille $\{e\}$. Dans l'espace R^*, nous définirons les notions d'être mince et mesurable (B), comme il suit. Désignons par $[E]$ l'ensemble $\sum_{e \varepsilon E} e$ pour tout ensemble E de R^*. Nous dirons qu'un ensemble E de R^* est mince ou non mince, suivant que $[E]$ soit mince ou non. De même, nous dirons qu'un ensemble E de R^* est mesurable (B) ou non suivant que $[E]$ soit mesurable (B) ou non. Alors, comme on voit, R^* est aussi un espace de la classe (U).

Comme $\eta \geqq 1$ dans $\mathfrak{n} = \aleph_\eta$, nous considérons d'abord le cas $\eta = 1$. Puisque R^* est un espace non mince de la classe (U), d'après le lemme de M. S. ULAM(1), il existe une famille $\mathfrak{H}$ non dénombrable d'ensembles non minces disjoints dans R^*. Donc, d'après la condition V, il existe dans la famille $\mathfrak{H}$ non dénombrable d'ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE, d'où R contient $\aleph_1$ ensembles disjoints qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE. Maintenant, pour un nombre ordinal quelconque ξ compris entre 1 et Ω, supposons que la proposition 2 a lieu pour tous les nombres ordinaux η tels qu'on ait $\eta < \xi$. Nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. ξ est de première espèce. De même que nous avons fait dans le cas où $\eta = 1$, on peut établir qu'il existe dans R^*,

(1) W. SIERPIŃSKI, H. d. C., p. 153, Lemme 1.

et par suite dans R $\aleph_\xi$ ensembles disjoints qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE. Nous avons donc notre proposition dans le premier cas.

DEUXIÈME CAS. ξ est de deuxième espèce. Comme nous avons $\mathfrak{n} \leqq 2^{\aleph_0}$ en vertu du lemme A, on peut définir en admettant l'hypothèse des alephs inaccessibles les nombres cardinaux $\mathfrak{n}_\lambda$ $(\lambda < \varphi,\ \bar{\varphi} = \mathfrak{n})$ tels qu'on ait

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda<\varphi} \mathfrak{n}_\lambda \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{n}_\lambda < \mathfrak{n} \quad (\lambda < \varphi)\,.$$

En correspondant à ces nombres $\mathfrak{n}_\lambda$, on peut définir $\bar{\varphi}$ ensembles disjoints N_λ $(\lambda < \varphi)$ comme il suit:

$$R^* = \sum_{\lambda<\varphi} N_\lambda \qquad \text{et} \qquad \overline{\overline{N}}_\lambda = \mathfrak{n}_\lambda \quad (\lambda < \varphi)\,.$$

Comme R^* n'est pas représenté comme la somme de $\bar{\varphi}$ ensembles minces, il existe dans la suite transfinie $\{N_\lambda\}$ $(\lambda < \varphi)$ au moins un ensemble non mince. Nous désignons par M_λ $(1 \leqq \lambda < \psi,\ \psi \leqq \varphi)$ ces ensembles non minces, et par M_0 la somme de tous les ensembles minces dans cette suite. Soient $\mathfrak{m}_\lambda$ la borné inférieure des puissances $\mathfrak{m}$ telles que l'ensemble M_λ peut être représenté comme la somme des $\mathfrak{m}$ ensembles minces, pour tout nombre ordinal λ telle qu'on ait $0 \leqq \lambda < \psi$. Alors, d'après la définition des ensembles M_λ, on a

$$(16) \qquad \mathfrak{m}_\lambda < \mathfrak{n} \quad (0 \leqq \lambda < \psi) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{n} \leqq \sum_{\lambda<\psi} \mathfrak{m}_\lambda\,.$$

Or, comme la proposition a lieu pour $\eta < \xi$, il existe dans M_λ $\mathfrak{m}_\lambda$ ensembles disjoints qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE, tant que nous avons $\mathfrak{m}_\lambda > 1$. Il en résulte en vertu de (16) que R^*, et par suite R contient $\sum_{\lambda<\psi} \mathfrak{m}_\lambda$ ensembles disjoints qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE. Ainsi nous avons notre proposition dans le deuxième cas.

Donc, notre théorème est démontré dans tous les cas.

Remarque. À l'aide de la proposition 2, on peut établir une proposition suivante qui répond à un problème de la mesure dans les ensembles d'éléments quelconques.

Proposition. *Quel que soit l'ensemble R d'éléments quelconques, il n'existe aucune fonction $\varphi(E)$ d'ensembles pour tous les sous-ensembles E de R, qui satisfassent aux conditions suivantes.*

1° *Quel que soit le sous-ensemble E de R, $\varphi(E)$ est une nombre (fini) réel non negatif et $\varphi(R) > 0$.*

2° *Quelle que soit la suite (fini ou infini) $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de sous-ensembles disjoints de R, $\varphi(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n)$.*

3° *Si l'on a $\varphi(E) > 0$ pour un sous-ensemble E de R, il existe deux sous-ensembles disjoints E_1 et E_2 de R, tels qu'on ait $\varphi(E_i) > 0$ $(i = 1, 2)$ et $\varphi(E) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$.*

On peut maintenant établir des propositions suivantes en admettant la proposition 2.

Proposition 3. *Soit R un espace de la classe (U) dont tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) sont décomposables. Il existe alors dans chacun sous-ensemble non mince E de R un ensemble qui ne peut être représenté comme un produit E et d'un ensemble ayant de la propriété de* LEBESGUE.

Proposition 4. *Soit R un espace de la classe (U) dont tous les sous-ensembles non minces mesurable (B) sont décomposables. Il existe alors sur chacun sous-ensemble non mince E de R une fonctionnelle qui n'admet aucun prolongement à une fonctionnelle définie sur R et jouissant de la propriété de* LEBESGUE *sur R.*

15. Espaces de la classe (U^*). Nous appellerons un espace de la classe (U^*) celui qui appartient à les classes (U) et (S^*) à la fois. Dans les espaces de la classe (U^*), la condition V peut être remplacée par la condition suivante.

V*. Toute famille des ensembles disjoints non minces, qui sont contenus dans un espace de la classe (U^*) et qui jouissent de la propriété de LEBESGUE, ne consiste qu'au plus dénombrable d'ensemble.

Dans ce numéro, nous établissons quelque lemme qui sera utilisé plus loin.

Lemme B. *Soient R un espace de la classe (U^*) dont tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) sont décomposable, E un* *sous-ensemble non mince de R et $\mathfrak{F}$ une famille des sous-ensembles non minces de R qui jouissent de la propriété de* LEBESGUE *et qui satisfont à la condition: pour tout sous-ensemble non mince H de R jouissant de la propriété de* LEBESGUE, *tel que HE soit non mince, il existe un ensemble H^* de $\mathfrak{F}$ tel que $H^* - H\nu^*(E)$ soit mince. On peut alors choisir au plus une infinité dénombrable d'ensembles $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ parmi $\mathfrak{F}$, tels qu'on ait*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sim \nu^*(E) \qquad \text{et} \qquad F_n F_{n'} \sim 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq n' .$$

Démonstration. Nous définirons d'abord la suite transfinie $\{H_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ des sous-ensembles de R par l'induction transfinie. Etant donné l'ensemble $\nu^*(E)$, il existe parmi $\mathfrak{F}$ au moins un ensemble H^* tel que $H^* - \nu^*(E)$ soit mince. Désignons par H_1 un de ces ensembles H^*.

Puis, considérons l'ensemble $\sum_{\xi<\alpha} H_\xi$ pour un nombre ordinal quelconque α compris entre 1 et Ω. Lorsque $\nu^*(E) - \sum_{\xi<\alpha} H_\xi$ est mince, posons $H_\alpha = 0$. Lorsque $\nu^*(E) - \sum_{\xi<\alpha} H_\xi$ est non mince, comme $\nu^*(E) - \sum_{\xi<\alpha} H_\xi$ jouit de la propriété de LEBESGUE, il existe au moins un ensemble H^* tel qu'on ait $H^* - \{\nu^*(E) - \sum_{\xi<\alpha} H_\xi\} \sim 0$. Désignons par H_α un de ces ensembles H^*. La suite transfinie $\{H_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ se trouve ainsi définie. Comme les ensembles de $\{H_\alpha\}$ jouissent de la propriété de LEBESGUE et les deux ensembles différents de $\{H_\alpha\}$ admettent un ensemble mince formant des points communs d'après la condition V^*, il existe parmi $\{H_\alpha\}$ au plus infinité dénombrable d'ensembles non minces. On peut alors voir aisément que ces ensembles non minces sont ceux qui sont demandés dans le lemme B.

16. Ensembles disjoints de même étendues extérieures. On peut étendre dans notre cas les propositions(1) de M. W. SIERPIŃSKI sur les ensembles disjoints de même mesure extérieure et sur les ensembles disjoints partout deuxième catégorie, comme il suit.

Proposition 5. *Soient R un espace de la classe (U^*) dont tous les sous-ensembles non minces mesurab'es (B) sont décomposable, et E*

(1) Fund. Math., t. 22 (1934), p. 1-3. et t. 23 (1934), p. 125-134.

un sous-ensemble non mince de R. Il existe alors dans E une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints tels que leurs étendues extérieures sont équivalents à l'étendue extérieure de E.

Nous démontrerons cette proposition en faisant appel à l'hypothèse des alephs inaccessibles.

Soit H un sous-ensemble non mince de $\nu^*(E)$ jouissant de la propriété de LEBESGUE. Alors, d'après la proposition 2, H contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de tous les ensembles non minces F jouissant de la propriété de LEBESGUE et contenu dans H, tels que la suite $\{FE_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ ne consiste qu'en des ensembles minces sauf au plus une infinité dénombrable de termes. Or, comme la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathfrak{F}$ est aussi contenu dans $\mathfrak{F}$, d'après la condition V, il existe un ensemble F^* de $\mathfrak{F}$ tel que l'ensemble $F-F^*$ soit mince, quel que soit l'ensemble F de $\mathfrak{F}$. Or, puisque tous les ensembles de $\{E_\alpha\}$ sont non minces, $H-F^*$ est non mince et jouit de la propriété de LEBESGUE.

À présent, posons $F_H = H-F^*$, et désignons par $\mathfrak{G}$ la famille des ensembles non minces contenu dans la suite transfinie $\{F_H E_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$. La famille $\mathfrak{G}$ consiste alors en une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints contenu dans F_H et satisfait à la condition Z: il existe, dans toute famille $\mathfrak{G}^*$ obtenu en enlevant au plus une infinité dénombrable des ensembles de $\mathfrak{G}$, au plus une infinité dénombrable des ensembles $\{Q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Q_n) \sim F_H \,. \tag{17}$$

En effet, d'après la condition V, il existe au plus une infinité dénombrable des ensembles $\{Q_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait $F - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Q_n) \sim 0$, quel que soit l'ensemble F de $\mathfrak{G}$. Alors, ces ensembles Q_n sont précisément ceux qui satisfont à la condition Z. Soit N un sous-ensemble non mince de F_H, qui jouit de la propriété de LEBESGUE. Comme il existe dans $\mathfrak{G}$, et par suite aussi dans $\mathfrak{G}^*$, une infinité non dénombrable d'ensembles dont chacun admet un ensemble non mince des points communs avec l'ensemble N, $F_H - \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Q_n)$ est mince, or, chaque ensemble de $\mathfrak{G}^*$ est contenu dans F_H, nous avons donc l'équivalence (17).

Maintenant, nous définirons par l'induction transfinie la suite transfinie $\{F_H^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'ensembles non minces disjoints de même étendues extérieures équivalentes à F_H. Posons d'abord $F_H^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(1)}$. Alors, on voir sans peine que $\nu^*(F_H^{(1)}) \sim F_H$. Puis, supposons que nous ayons défini les ensembles $\{F_H^{(\xi)}\}$ $(\xi < \eta)$ et que l'ensemble $F_H^{(\xi)}$ est défini comme la somme des ensembles $Q_n^{(\xi)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de $\mathfrak{G}$, pour un nombre ordinal quelconque η compris eutre 1 et Ω. Désignons par $\mathfrak{G}^{(\eta)}$ la famille obtenue en enlevant les ensembles $Q_n^{(\xi)}$ $(\xi < \eta)$ de $\mathfrak{G}$. Alors, d'après la condition V, il existe dans $\mathfrak{G}^{(\eta)}$ les ensembles $Q_n^{(\eta)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait $F_H \sim \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(Q_n^{(\eta)})$. Posons $F_H^{(\eta)} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^{(\eta)}$, on voit sans peine que

$$\nu^*(F_H^{(\eta)}) \sim F_H \qquad \text{et} \qquad F_H^{(\eta)} F_H^{(\xi)} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \xi < \eta .$$

La suite transfinie $\{F_H^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ est ainsi définie par l'induction. Il en résulte qu'il correspond à tout sous-ensemble non mince H de $\nu^*(E)$, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, les ensembles F_H et $\{F_H^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ tels que nous avons défini plus haut.

Maintenant, considérons la famille $\mathfrak{H}$ d'ensemble F_H, où H parcourt tous les sous-ensembles non mince de $\nu^*(E)$, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE. D'après le lemme B, on peut choisir parmi $\mathfrak{H}$ au plus une infinité dénombrable d'ensembles $\{H_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait $\nu^*(E) \sim \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ et $H_n H_{n'} \sim 0$ pour $n \neq n'$. Pour ces ensembles, posons $F^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{H_n}^{(\alpha)}$ $(\alpha < \Omega)$. On voit alors sans peine que $\nu^*(F^{(\alpha)}) \sim \nu^*(E)$ $(\alpha < \Omega)$ et $F^{(\alpha)} F^{(\alpha')} \sim 0$ pour $\alpha \neq \alpha'$. Donc, les ensembles

$$E^{(1)} = F^{(1)}, \qquad E^{(\alpha)} = F^{(\alpha)} - \sum_{\xi < \alpha} F^{(\xi)} \qquad (\alpha < \Omega)$$

sont des sous-ensembles disjoints de E, ayant même étendue extérieure équivalente à $\nu^*(E)$. C. Q. F. D.

17. Ensemble disjoints d'étendues extérieures données. Etant donné un ensemble non mince E d'un espace R et une suite transfinie du type quelconque $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \varphi)$ des sous-ensembles de E, peut-on trouver une suite transfinie du type φ $\{F_\alpha\}$ des sous-ensembles disjoints de E, tels qu'on ait $\nu^*(E_\alpha) \sim \nu^*(F_\alpha)$ $(\alpha < \varphi)$? En traitant cette question, on peut arriver à la conséquence suivante qui peut être démontrée en faisant appel à l'hypothèse des alephs inaccessibles.

Proposition 6. *Soient R un espace de la classe (U^*) dont tous les sous-ensembles mesurables (B) sont décomposables, et $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles non mince de R. Alors, il existe les ensembles disjoints $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait $\nu^*(F_n) \sim \nu^*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. De plus, on peut déterminer F_n comme nous avons $F_n < E_n$.*

Pour établir cette proposition, nous donnerons d'abord des lemmes.

Lemme 1. *Il existe dans $S = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ un ensemble non mince N tel qu'on ait $\nu^*(E_n - N) \sim \nu^*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

En effet, désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des termes non vides obtenus en développant $\prod_{n=1}^{\infty} \{E_n + (S - E_n)\}$ en la somme des produits de la forme $\prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k} \prod_{k=1}^{\infty} (S - E_{m_k})$, où on a $n_k \neq m_k$, $n_k \neq n_{k'}$ et $m_k \neq m_{k'}$ pour $k \neq k'$ et où tout nombre entier est contenu dans une des suites $\{n_k\}$ et $\{m_k\}$. Alors, les ensembles de $\mathfrak{F}$ sont disjoints et la somme de ces ensembles est S. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : Il existe au moins un ensemble non mince dans $\mathfrak{F}$. Désignons par E un ensemble non mince dans F. Alors, d'après la proposition 2, il existe dans E un ensemble non mince N tel qu'on ait $\nu^*(E) \sim \nu^*(E - N)$, en admettant l'hypothèse des alephs inaccessibles. Il est évident que N satisfait à la demande du lemme 1.

Deuxième cas : Il n'existe aucun ensemble mince dans $\mathfrak{F}$. Maintenant, on voit sans peine qu'il existe une famille $\mathfrak{G}$ des sous-ensembles de S, qui satisfait aux conditions suivantes :

1° Tous les points de S sont contenus au moins dans un ensemble de $\mathfrak{G}$.

2° Tous les ensembles de $\mathfrak{G}$ sont minces et disjoints les uns les autres.

3° Chaque ensembles de $\mathfrak{F}$ est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{G}$.

4° $\mathfrak{G}$ est la famille telle que la puissance $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{G}$ ne soit pas supérieure à celle de toute famille qui satisfait aux conditions 1°, 2°, et 3°.

Ici, considerons l'espace R^* dont tout point est un élément de $\mathfrak{G}$. Dans R^*, nous définirons les notions d'être mince et mesurable (B), comme nous avons fait dans la démonstration de la proposition 2, c'est-à-dire, nous dirons qu'un ensemble E de R^* est mince ou non (mesurable (B) ou non), suivant que l'ensemble $[E]$(1) soit mince ou non (mesurable (B) ou non).

Maintenant, nous démontrerons le deuxième cas du lemme 1 par l'induction transfinie pour η tel qu'on ait $\mathfrak{n} = \aleph_\eta$. Pour cela supposons qu'il n'existe aucun sous-ensemble N non mince de S tel qu'on ait $\nu^*(E_n - N) \sim \nu^*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Considérons d'abord le cas où $\eta = 1$. D'après le lemme de M. ULAM, on peut définir des sous-ensembles $\{N_{\alpha,\beta}\}$ $(\alpha < \omega_0,\ \beta < \omega_1)$ de l'espace R^*, comme il suit:

1° $\quad N_{\alpha,\beta} N_{\alpha,\beta'} = 0 \quad$ pour $\quad \beta \neq \beta'$.

2° $\quad N_{\alpha,\beta} N_{\alpha',\beta} = 0 \quad$ pour $\quad \alpha \neq \alpha'$.

3° $\quad R^* - \sum_\alpha N_{\alpha,\beta}$ est de au plus $\aleph_0$, pour tout $\beta < \Omega$.

Comme R^* ne peut être décomposé en $\aleph_0$ ensembles minces, il existe au moins un ensemble non mince $N_{\alpha,\beta}$ pour tout nombre ordinal β; nous désignons un de ces ensembles par $N_{\nu_\beta,\beta}$. Or, puisque l'ensemble $[N_{\nu_\beta,\beta}]$(1) est non mince, d'après l'hypothèse, il existe au moins un ensemble E_n tel qu'on ait $\nu^*(E_n)$ non $\sim \nu^*(E_n - [N_{\nu_\beta,\beta}])$. Nous désignons un des ces ensembles par E_{n_β}.

Considérons la suite transfinie $\mathfrak{H} = \{(\nu_\beta, n_\beta)\}$ $(\beta < \Omega)$ des paires de nombres naturels. Comme on a ν_β, $n_\beta < \omega_0$ pour $\beta < \Omega$, il existe au plus une infinité dénombrable de paires différentiées dans $\mathfrak{H}$. Il existe donc au moins une paire (ν, n) tel que

(18) $$\nu = \nu_\beta \quad \text{et} \quad n = n_\beta$$

a lieu pour une infinité non dénombrable d'indices différents β. Nous

(1) Nous désignerons par $[E]$ l'ensemble $\sum_{e \in E} e$.

désignons par $\{\beta_\lambda\}$ $(\lambda < \Omega)$ les indices qui ont lieu (18) pour une paire (ν, n). Alors,

$$M_\lambda \equiv \nu^*(E_n) - \nu^*(E_n - [N_{\nu, \beta_\lambda}]) \qquad (\lambda < \Omega)$$

sont les ensembles non minces de $\nu^*(E_n)$, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE. Puisqu'on a $[N_{\nu, \beta_\lambda}]\,[N_{\nu, \beta_{\lambda'}}] = 0$ pour $\lambda \neq \lambda'$, nous avons $M_\lambda M_{\lambda'} = 0$. Par conséquent,

$$N_1 = M_1 \qquad \text{et} \qquad N_\lambda = M_\lambda - \sum_{\xi<\lambda} M_\xi \qquad (\lambda < \Omega)$$

sont les ensembles non minces disjoints, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE, ce qui est incompatible avec la condition V. Donc, dans le cas où $\eta = 1$, il existe un sous-ensemble N de S demandé dans le lemme 1.

On peut démontrer dans le cas où η est de première espèce, qu'il existe un sous-ensemble non mince N de S demandé dans le lemme 1, tout à fait de la même façon que nous l'avons fait dans le cas où $\eta = 1$.

Puis considérons le cas où η est de deuxième espèce. D'après la définition de $\mathfrak{S}$, la puissance de $\mathfrak{S}$ n'est pas supérieure à $2^{\aleph_0}$. Donc, en admettant l'hypothèse des alephs inaccessibles, on peut définir les nombres cardinaux $\mathfrak{n}_\alpha$ $(\alpha < \varphi,\ \bar{\varphi} < \mathfrak{n})$ tels qu'on ait $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha<\varphi} \mathfrak{n}_\alpha$. Correspondant à ces nombres cardinaux, il existe des sous-ensembles disjoints S_α $(\alpha < \varphi)$ de R^*, tels qu'on ait $R^* = \sum_{\alpha<\varphi} S_\alpha$ et $\overline{\overline{S_\alpha}} = \mathfrak{n}_\alpha$ $(\alpha < \varphi)$. D'après la définition de $\mathfrak{n}$, il existe au moins un ensemble non mince parmi $\{S_\alpha\}$. Désignons par S^* un de ces ensembles. Comme $[S^*]$(1) est le sous-ensemble non mince de S, il existe des ensembles non minces dans la suite $\{[S^*]\,E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; désignons par $[S^*]\,E_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ces ensembles non minces. Comme le puissance de $\sum_{k=1}^{\infty}[S^*]\,E_{n_k}$ est inférieure à $\mathfrak{n}$, d'après l'hypothèse, il existe un ensemble non mince N de $\sum_{k=1}^{\infty}[S^*]\,E_{n_k}$ tel qu'on ait pour $n = n_k$

$$\nu^*([S^*]\,E_{n_k} - N) \sim \nu^*([S^*]\,E_{n_k})\,. \tag{19}$$

Mais, on voit sans peine que l'équivalence (19) a lieu pour tout nombre

(1) Pour la notation, voir la note (1) de la page 152.

naturel n. Il en résulte que N satisfait à la demande du lemme 1 dans notre cas.

Par suite, nous avons qu'il existe dans tous les cas un sous-ensemble N de S, qui satisfait à la demande du lemme 1. C. Q. F. D.

Lemme 2. *Il existe un sous-ensemble non mince N de S, tel qu'on ait*

$$(20) \quad \nu^*(S) \sim \nu^*(N) \quad et \quad \nu^*(E_n) \sim \nu^*(E_n - N) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pour le voir, considérons un sous-ensemble non mince H de $\nu^*(S)$, qui jouit de la propriété de LEBESGUE ; et posons $F_n = E_n H$ $(n = 1, 2, \ldots)$. D'après le lemme 1, en admettant l'hypothèse des alephs inaccessibles, il existe un ensemble non mince N_H tel qu'on ait

$$H > \sum_{n=1}^{\infty} F_n > N_H \quad \text{et} \quad \nu^*(F_n) \sim \nu^*(F_n - N_H) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors, comme on voit, $\nu^*(E_n) \sim \nu^*(E_n - N_H)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire, quel que soit le sous-ensemble non mince H de $\nu^*(S)$, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, il existe un sous-ensemble non mince N_H de SH, tel qu'on ait $\nu^*(E_n) \sim \nu^*(E_n - N_H)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Désignons par $\mathfrak{H}$ la famille de tous les ensembles $\nu^*(N_H)$, où H parcourt tous les sous-ensembles H non minces de $\nu^*(S)$, qui jouit de la propriété de LEBESGUE. D'après le lemme B, on peut choisir au plus une infinité dénombrable des ensembles $\{\nu^*(N_{H_k})\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ parmi $\mathfrak{H}$, tels qu'on ait

$$(21) \quad \nu^*(S) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(N_{H_k}) \quad \text{et} \quad \nu^*(N_{H_k}) \nu^*(N_{H_{k'}}) \sim 0 \quad \text{pour} \quad k \neq k'.$$

Posons $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_{H_k}$. Alors, d'après (21), on a

$$E_n - N \sim \sum_{k=1}^{\infty} (E_n - N_{H_k}) \nu^*(N_{H_k}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ce qui donne $\nu^*(E_n - N) \sim \nu^*(E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire, N satisfait à la condition (20).

Maintenant, nous démontrerons la proposition 6 en faisant appel à l'hypothèse des alephs inaccessibles. Pour cela, d'abord nous définirons les ensembles $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ par l'induction. Comme il existe au moins un ensemble non mince dans la suite $\{E_1 E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, on peut définir, à l'aide du lemme 2, un sous-ensemble F_1 de $\sum_{n=1}^{\infty} E_1 E_n$ tel qu'on ait $\nu^*(F_1) \sim \nu^*(E_1)$ et $\nu^*(E_1 E_n - F_1) \sim \nu^*(E_1 E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Supposons que F_j $(j \leqq n)$ ont été définis et qu'ils satisfont aux onditions suivantes pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$$(22) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} E_k E_j - \sum_{i=1}^{k-1} F_i > F_k ,$$

$$(23) \qquad \nu^*(E_k E_j - \sum_{i=1}^{k} F_i) \sim \nu^*(E_k E_j - \sum_{i=1}^{k-1} F_i) \qquad (j = 1, 2, \ldots) ,$$

$$(24) \qquad \nu^*(F_k) \sim \nu^*(\sum_{j=1}^{\infty} E_k E_j - \sum_{i=1}^{k-1} F_i) .$$

Comme il existe au moins un ensemble non mince dans la suite $\{E_{n+1} E_k - \sum_{i=1}^{n} F_i\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, on peut trouver un ensemble F_{n+1}, qui satisfait aux conditions (22), (23) et (24) pour $k = n+1$. Nous avons donc $\nu^*(E_n - \sum_{i=1}^{k+1} F_i) \sim \nu^*(E_n - \sum_{i=1}^{k} F_i)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$, ce qui donne par l'induction $\nu^*(E_n - \sum_{i=1}^{k} F_i) \sim \nu^*(E_n)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Il en résulte en vertu de (24) que $\nu^*(F_k) \sim \nu^*(E_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Or, les ensembles F_k sont disjoints et $E_k > F_k$, d'où la suite $\{F_k\}$ satisfait aux demande de la proposition 6. C. Q. F. D.

§ 4. La propriété de FRÉCHET sur les fonctionnelles.

M. M. FRÉCHET a demontré dans son thèse(1) un théorème sur une famille des fonctions mesurables (au sens de LEBESGUE). On ne peut trouver dans la théorie de la catégorie aucun théorème qui correspond à ce théorème, mais, il y a des relations intéressantes entre ce théorème et la propriété d'EGOROFF. Nous allons donc étudier ce théorème dans ce paragraph. Pour cela, nous introduirons d'abord une notions sur les fonctionnelles.

18. Propriété de FRECHÉT. Etant donné un ensemble non mince E jouissant de la propriété de LEBESGUE d'un espace R, considérons toutes les suites quelconques $\{F^{(n)}(x)\}$ et $\{F_m^{(n)}(x)\}$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ des fonctionnelles définies dans E, qui satisfont aux conditions suivantes:

(1) M. FRÉCHET, Rendiconti d. Palermo, t. 22 (1906), p. 1–72.

(A) Les fonctionnelles $F^{(n)}(x)$ et $F^{(n)}_m(x)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE sur E.

(B) La suite $\{F^{(n)}_m(x)\}$ $(m = 1, 2, \dots)$ converge vers $F^{(n)}(x)$ presque partout sur E, quel que soit le nombre naturel n.

(C) La suite $\{F^{(n)}(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ converge presque partout sur E.

Nous dirons que E jouit de la *propriété de FRÉCHET*, lorsqu'il existe une suite croissante de nombres naturels $\{n_k\}$ $(n_k < n_{k+1}, k = 1, 2, \dots)$ et une suite d'indices $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$, telles que la suite $\{F^{(n_k)}_{m_k}(x)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ converge vers $\lim_{n \to \infty} F^{(n)}(x)$ presque partout sur E.

Théorème 10. *Etant donné un espace R de la classe (U^*), pour qu'un sous-ensemble non mince E de R, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, jouisse de la propriété de FRÉCHET, il faut et il suffit que tous les sous-ensembles de E, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE, jouissent de la propriété d'EGOROFF.*

Démonstration. On peut supposer, sans restreindre la généralité, qu'on ait $E = R$.

La condition est nécessaire. Il nous suffit de démontrer que R ne jouit pas de la propriété de FRÉCHET, lorsqu'un sous-ensemble non mince H de R, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF. Maintenant, supposons par impossible que R jouisse de la propriété de FRÉCHET. Comme H ne jouit pas de la propriété d'EDOROFF, il existe des ensembles $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \dots)$ tels qu'on ait:

1° Tous les ensembles $M_{k,n}$ jouissent de la propriété de LEBESGUE.

2° $M_{k,n} \supset M_{k,n+1}$ $(k, n = 1, 2, \dots)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} M_{k,n} = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$.

3° Quelle que soit la suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ des nombres naturels, $H \sim \sum_{k=1}^{\infty} M_{k,n_k}$.

Pour ces ensembles, nous définirons les fonctionnelles $\{F^{(n)}_m(x)\}$ $(m, n = 1, 2, \dots)$, comme il suit,

$$F^{(n)}_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in \sum_{i=1}^{n} M_{i,m}, \\ 0 & \text{pour} \quad x \,\bar{\in}\, \sum_{i=1}^{n} M_{i,m}. \end{cases}$$

Alors, les fonctionnelles $F_m^{(n)}(x)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE sur R et on a sur R $\lim_{m\to\infty} F_m^{(n)}(x) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Comme R jouit de la propriété de FRÉCHET, il existe une suite infinie croissante de nombres naturels $\{n_k\}$ $(n_k < n_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots)$ et une suite infinie d'indices $\{m_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, telles qu'on ait presque partout sur R $\lim_{k\to\infty} F_{m_k}^{(n_k)}(x) = 0$. Alors, d'après la définition de $F_m^n(x)$, on a $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{i=1}^{n_k} M_{i,\, m_k} \sim 0$. Donc, d'après $n_k \geqq k$, on a aussi

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, m_k} \sim 0 \,. \tag{25}$$

Or, en outre, on a $\sum_{k=j}^{\infty} M_{k,\, m_k} \sim H$ $(j = 1, 2, \ldots)$, ce qui donne $H \sim \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, m_k}$. C'est incompatible avec (25). Il en résulte que R ne jouit pas de la propriété de FRÉCHET.

La condition est suffisante. Etablisons d'abord un lemme.

Lemme C. *Soient R un espace de la classe (U^*) dont tous les sous-ensemble non mince mesurable (B) jouissent de la propriété d'EGOROFF, et $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ une famille d'ensembles de R, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE et qui satisfont aux conditions (A) et (B) du théorème 7. Il existe alors une suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels, telle qu'on ait $\overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, n_k} \sim 0$.*

Démonstration. Supposons par impossible que les ensembles $\overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, n_k}$ soient non mince, quelle que soit la suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels.

Nous définirons par l'induction transfinie la suite transfinie du type Ω $\{M^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ comme il suit. Pour une suite quelconque $\{n_k^{(1)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels, posons $M^{(1)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, n_k^{(1)}}$. Maintenant, supposons que les ensembles $M^{(\xi)}$ $(\xi < \eta)$ et les suites $\{n_k^{(\xi)}\}$ de nombres naturels $(\xi < \eta)$ soient definie et qu'on ait $M^{(\xi)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,\, n_k^{(\xi)}}$ $(\xi < \eta)$ pour un nombre ordinal quelconque η compris entre 1 et Ω. Comme l'ensemble N de tous les nombres ordinaux $\xi < \eta$ est au plus dénombrable, il existe une suite infinie $\{\xi_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ formée de tous les nombres de N. Posons $n_k = \max\{n_k^{(\xi_1)}, n_k^{(\xi_2)}, \ldots, n_k^{(\xi_k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et considérons les ensembles

$$(26) \qquad MM_{k,n_k},\ MM_{k,n_k+1},\ MM_{k,n_k+2},\ \ldots \quad (k=1,2,\ldots)$$

où $M = \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,n_k}$. Comme les ensembles de (26) satisfont aux conditions (A) et (B) du théorème 7 et jouit de la propriété d'EGOROFF, il existe une suite $\{n_k^{(\eta)}\}$ $(k=1,2,\ldots)$ de nombres naturels telle qu'on ait

$$n_k^{(\eta)} \geqq n_k \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,n_k} - \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,n_k^{(\eta)}} \text{ non } \sim 0 .$$

Maintenant, posons $M^{(\eta)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,n_k^{(\eta)}}$. La suite transfinie $\{M^{(\eta)}\}$ $(\eta < \Omega)$ se trouve ainsi définie. La suite transfinie $\{M^{(\eta)}\}$ est monotone, et chaque ensemble de la suite $\{M^{(\eta)}\}$ n'est pas équivalent aux suivantes. C'est incompatible avec la condition (V). C. Q. F. D.

À l'aide du lemme, établissons que la condition donnée dans le théorème 10 est suffisante. Soient $\{F_m^{(n)}(x)\}$, $\{F^{(n)}(x)\}$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ et $F(x)$ les fonctionnelles jouissant de la propriété de LEBESGUE dans R et satisfont à la condition: on a presque partout sur R

$$\lim_{m\to\infty} F_m^{(n)}(x) = F^{(n)}(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} F^{(n)}(x) = F(x) .$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer qu'on a sur R identiquement $F^{(n)}(x) \equiv F(x) \equiv 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pour un nombre rationnel positif r, posons

$$M_{k,n}(r) = \operatorname*{Ens}_x \{ |F_n^{(k)}(x)| \geqq r \} ,$$
$$M_{k,n}^*(r) = \sum_{j \geqq n} M_{k,j}(r) .$$

Alors, les ensembles $\{M_{k,n}^*(r)\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ satisfont aux conditions (A) et (B) du théorème 7. Donc, d'après le lemme C, il existe une suite $\{n_k(r)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels telle qu'on ait $\overline{\lim_{k\to\infty}} M_{k,n_k}(r) \sim 0$. Considérons une suite infinie $\{r_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ formée de tous les nombres rationnels positifs et posons

$$n_k = \max \{ n_k(r_1), n_k(r_2), \ldots, n_k(r_k) \} \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Alors, on voit aisément qu'on a pour tout nombre rationnel positif r

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname*{Ens}_x \{ |F_{n_k}^{(k)}(x)| \geqq r \} \sim 0 .$$

Par suite, nous avons $\lim_{k\to\infty} F_{n_k}^{(k)}(x) \equiv 0$ presque partout sur R, c'est-à-dire R jouit de la propriété de FRÉCHET. C. Q. F. D.

19. Equivalence des propositions. Dans ce qui suit, nous établissons des propriétés équivalentes à la propriété de FRÉCHET. Pour cela, commençons par la définition.

Soient E un sous-ensemble non mince d'un espace R, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, et $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite convergente des fonctionnelles, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE sur E. Alors, nous dirons que la suite $\{F_n(x)\}$ *converge uniformément sur E au sens de WEYL*(1), lorsqu'il existe une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles non minces de E tels que

1° les ensembles E_n jouissent de la propriété de LEBESGUE et on ait $E \sim \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

2° quel que soit le nombre naturel k, $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur E_k.

Par cette définition, nous avons le

Théorème 11. *Dans un espace R de la classe (U^*), les propositions suivantes sont équivalentes les unes aux autres :*

(A) *Tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) de R jouissent de la propriété de d'EGOROFF.*

(B) *Pour tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) de R, il n'existe aucune famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles jouissant de la propriété de LEBESGUE, tels qu'on ait*

1° $M_{k,n} \supset M_{k,n+1}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} M_{k,n} \sim 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

2° *quelle que soit la suite $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels, on ait $\sum_{k=1}^{\infty} M_{k,n_k} \sim E$.*

(C) *Toutes les suites convergentes $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctionnelles jouissant de la propriété de LEBESGUE dans R converge uniformément sur R au sens de WEYL.*

---

(1) La convergence uniformément au sens de WEYL est la traduction en le français de „Die Wesentliche gleichmässige Konvergenz" qui a été donne par M. H. WEYL dans Math. Ann., t. 67 (1909), p. 225–245.

(D) *R jouit de la propriété de FRÉCHET.*

Démonstration. Puisque nous avons déjà vu que (A) est équivalent à (B) et que (A) l'est à (D) aussi, il ne reste qu'à montrer que $(A) \rightleftarrows (C)$.

$(A) \rightarrow (C)$: Soit $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite convergente des fonctionnelles jouissant de la propriété de LEBESGUE sur R. Il existe alors un sous-ensemble non mince F_H de H qui jouit de la propriété de LEBESGUE et sur lequel $\{F_n(x)\}$ converge uniformément, quel que soit l'ensemble non mince mesurable (B) H. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles F_H où H parcourt tous les ensembles non minces mesurables (B) H de R. D'après le lemme B, il existe dans $\mathfrak{F}$ les ensembles $\{F_{H_n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait

$$R \sim \sum_{n=1}^{\infty} F_{H_n} \qquad \text{et} \qquad F_{H_n} F_{H_{n'}} \sim 0 \qquad \text{pour} \qquad n \neq n'.$$

Posons $E_k = \sum_{j=1}^{k} F_{H_j}$. Alors, $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur E_k et on a $R \sim \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Par conséquent, $\{F_n(x)\}$ converge uniformément sur R au sens de WEYL. Donc, nous avons $(A) \rightarrow (C)$. Il est évident que $(C) \rightarrow (A)$. C. Q. F. D.

20. Convergence en étendue de fonctionnelles. Nous introduirons ici une notion analogie à celle de la convergence en mesure donnée par M. F. RIESZ(1). Voici la définition. Soient E un sous-ensemble non mince de R jouissant de la propriété de LEBESGUE, et $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctionnelles qui jouissent de la propriété de LEBESGUE sur E. Nous dirons que la suite $\{F_n(x)\}$ *converge en étendue* vers une fonctionnelle $F(x)$ sur E, lorsqu'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{Ens}_{x} \{ |F_n(x) - F(x)| \geqq r \} \sim 0,$$

quel que soit le nombre positif r. Maintenant on voit bien que

1° les limites au sens de la convergence en étendue d'une suite de fonctionnelles ayant la propriété de LEBESGUE sont équivalentes les unes aux autres, et jouissent de la propriété de LEBESGUE,

---

(1) C. R. Acad. Sci. Paris, t. 148 (1909), p. 1303–1305.

2° toute suite convergante au sens ordinaire de fonctionnelles ayant la propriété de LEBESGUE aussi converge en étendue.

On peut énoncer dans notre théorie un théorème analogique à celui de M. F. RIESZ sur la convergence en mesure, comme il suit.

Théorème 12. *Soient R un espace de la classe (U^*) jouissant de la propriété d'EGOROFF et $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite convergente en étendue de fonctionnelles ayant la propriété de LEBESGUE sur R. On peut alors extraire de la suite $\{F_n(x)\}$ une sous-suite qui converge uniformément au sens de WEYL sur R.*

Démonstration. Soient $F(x)$ une limite de la convergence étendue de $\{F_n(x)\}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ une série convergente de nombres positives. Posons

$$N_{k,n} = \sum_{i,j \geqq n} \operatorname*{Ens}_x \{ |F_i(x) - F_j(x)| \geqq \varepsilon_k \} \quad (k, n = 1, 2, \ldots).$$

Alors, d'après la relation

$$\operatorname*{Ens}_x \left\{ |F_i(x) - F_j(x)| \geqq \varepsilon_k \right\} < \operatorname*{Ens}_x \left\{ |F_i(x) - F(x)| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_k \right\} + \operatorname*{Ens}_x \left\{ |F_j(x) - F(x)| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_k \right\}.$$

on a

$$N_{k,n} > \sum_{i \geqq n} \operatorname*{Ens}_x \left\{ |F_i(x) - F(x)| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon_k \right\},$$

ce qui donne $\overline{\lim}\, N_{k,n} \sim 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. En outre, nous avons $N_{k,n} > N_{k,n+1}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$. Or, comme R jouit de la propriété d'EGOROFF, d'après le lemme C, il existe une suite croissante $\{n_k\}$ $(n_k < n_{k+1}, k = 1, 2, \ldots)$ de nombres naturels telle qu'on ait $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, N_{k,n_k} \sim 0$. Posons $N^{(k)} = \sum_{j \geqq k} N_{j,n_j}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Alors, comme on voit, nous avons $\overline{\lim_{k\to\infty}}\, N^{(k)} \sim 0$. Etant donné un nombre naturel k, considérons l'ensemble $R - N^{(k)}$. Comme on a $(R - N^{(k)})\, N_{j,n_j} = 0$ pour $j \geqq k$, d'après la définition de $\{N_{j,n_j}\}$, nous avons sur $R - N^{(k)}$

$$|F_n(x) - F_{n'}(x)| < \varepsilon_j \qquad \text{pour} \qquad n, n' \geqq n_j,$$

quel que soit le nombre naturel $j \geqq k$. Donc, comme on voit, nous avons sur $R - N^{(k)}$

$$|F_{n_j}(x)-F_{n_{j+i}}(x)|<\sum_{n\geqq j} e_n \qquad (j\geqq k,\ i=1,2,\ldots).$$

Il en résulte que la suite $\{F_{n_j}(x)\}$ $(j=1,2,\ldots)$ converge uniformément sur $R-N^{(k)}$, quel que soit le nombre naturel k; c'est-à-dire, la sous-suite $\{F_{n_j}(x)\}$ de la suite donnée converge uniformément au sens de WEYL sur R. C. Q. F. D.

Nous établissons à l'aide du théorème 12 une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite des fonctionnelles jouissant de la propriété de LEBESGUE sur R converge en étendue sur R.

Théorème 13. *Soient R un espace de la classe (U^*), qui jouit de la propriété d'EGOROFF et $\{F_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite des fonctionnelles, qui jouit de la propriété de LEBESGUE sur R. Pour que la suite $\{F_n(x)\}$ converge en étendue sur R, il faut et il suffit qu'on ait, quel que soit le nombre positif ε,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} N_{\varepsilon,n}\sim 0, \tag{27}$$

où
$$N_{\varepsilon,n}=\sum_{i,j\geqq n}\operatorname*{Ens}_x\{|F_i(x)-F_j(x)|\geqq\varepsilon\}.$$

Démonstration. La condition est suffisante. Comme nous avons les équivalences (27) pour tout nombre positif ε, on peut extraire de la suite $\{F_n(x)\}$ une sous-suite $\{F_{n_k}(x)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ convergente uniformément au sens de WEYL sur R, de même que nous avons fait dans le cas du théorème 12. Désignons par $F(x)$ la limite au sens ordinaire de $\{F_{n_k}(x)\}$. Soit ε un nombre positif quelconque, d'après la définition de $N_{\varepsilon,n}$, on a

$$\operatorname*{Ens}_x\left\{|F_m(x)-F_{n_k}(x)|\geqq\frac{1}{2}\varepsilon\right\}<N_{\frac{1}{2}\varepsilon,m} \qquad \text{pour} \qquad n_k\geqq m.$$

Donc, nous avons $\overline{\lim_{m\to\infty}}\{|F_m(x)-F(x)|\geqq\varepsilon\}\sim 0$.

Il en suit que $\{F_n(x)\}$ converge en étendue sur R.

Il est évident que la condition donnée est nècessaire. C. Q. F. D.

CHAPITRE III

ESPACES DES CLASSES (*B*) ET (*B**).

M. F. BERNSTEIN[1] a introduit dans la théorie des ensembles de points un principe qui donne ensembles totalement imparfaits de la puissance $2^{\aleph_0}$ dans l'ensemble linéaire en faisant appel à l'axiome du choix de M. ZERMELO. Comme on sait, ce principe joue un rôle important dans les diverse directions de la théorie d'ensembles singulières de points. Maintenant, nous allons considérer des espaces auxquels le principe de M. F. BERNSTEIN est applicable. Mais, malheureusement, nous devons de faire appel à l'hypothèse du continu pour appliquer ce principe dans notre espace.

§ 5. Ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de LEBESGUE.

21. Espace de la classe (*B*). Nous appellerons un espace de la classe (*B*) un espace *R* qui satisfait aux conditions suivantes.

III*. Pour tout ensemble *E* de *R*, il y a au moins une étendue extérieure qui contient *E*. Nous désignons, en particulier, par $\bar{\nu}^*(E)$ une quelconque de ces étendues.

VI. La puissance de la famille $\mathfrak{B}(R)$ de tous les sous-ensembles mesurables (*B*) de *R* est au plus $2^{\aleph_0}$.

22. Ensemble disjoints d'étendues extérieures données. Dans un espace *R* de la classe (*B*), on peut déduire une extension de la proposition 6 comme il suit.

Proposition 7. *Soient R un espace de la classe (B) dont tous les points sont minces, et $\mathfrak{F}$ une famille de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles non minces dans R. On peut alors correspondre à chacun ensemble E de $\mathfrak{F}$ des sous-ensembles $N_E^{(\alpha)}$ $(\alpha < \Omega)$ de E de la façon que les conditions suivantes soient remplies :*

---

(1) Leipz. Ber., t. 60 (1908), p. 325–338.

1° *Pour tout ensemble E de $\mathfrak{F}$, on ait* $\nu^*(E) \sim \nu^*(N_E^{(\alpha)})$ $(\alpha < \Omega)$.

2° *Pour deux ensembles distincts E et F de $\mathfrak{F}$, on ait* $N_E^{(\alpha)} N_F^{(\beta)} = 0$.

Nous démontrerons cette proposition en faisant appel à l'hypothèse du continu.

Comme la puissance de la famille $\mathfrak{F}$ est au plus $2^{\aleph_0}$, en admettant l'hypothèse du continu, les ensembles de $\mathfrak{F}$ peuvent être rangés en une suite transfinie du type Ω $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ de manière que chaque ensemble de $\mathfrak{F}$ est contenu dans cette suite une infinité non dénombrable de fois.

Etant donné un ensemble E_α, considérons des ensembles HE_α et $E_\alpha - H$, pour tous les ensembles mesurables (B) H. Parmi ces ensembles, il existe au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles non minces. On peut donc ranger ces ensemble en une suite transfinie $\{H_{\alpha,\beta}\}$ $(\beta < \Omega)$ en admettant toujours l'hypothèse du continu. Il existe donc une suite transfinie $\{H_{\alpha_\nu, \beta_\nu}\}$ $(\nu < \Omega)$ formée de tous les ensembles $H_{\alpha,\beta}$. Enfin, soit une suite transfinie du type quelconque $\{x_\nu\}$ $(\nu < \varphi)$ formée de tous les poinis de R.

Nous définirons la famille $\{p_{\alpha_\nu, \beta_\nu}\}$ $(\nu < \Omega)$ de points contenus dans R par l'induction transfinie comme il suit. Désignons par p_{α_1, β_1} le premier terme de la suite transfinie $\{x_\nu\}$ qui appartient à l'ensemble H_{α_1, β_1}. Etant donné un nombre ordinal quelconque η compris entre 1 et Ω, l'ensemble Q_η de tous les points $p_{\alpha_\nu, \beta_\nu}$ $(\nu < \eta)$ est évidemment au plus dénombrable. Il existe donc au moins un point qui appartient à $H_{\alpha_\eta, \beta_\eta} - Q_\eta$. Désignons par $p_{\alpha_\eta, \beta_\eta}$ le premier terme de la suite transfinie $\{x_\nu\}$ qui appartient au dermier. La famille $\{p_{\alpha_\nu, \beta_\nu}\}$ $(\nu < \Omega)$ se trouve ainsi définie par l'induction. Posons $F_\alpha = \sum_{\alpha_\nu = \alpha} (p_{\alpha_\nu, \beta_\nu})$ $(\alpha < \Omega)$. Alors, les ensembles F_α jouissent des propriétés suivantes :

1° Nous avons $E_\alpha \supset \sum_{\alpha_\nu = \alpha} H_{\alpha_\nu, \beta_\nu} \supset \sum_{\alpha_\nu = \alpha} (p_{\alpha_\nu, \beta_\nu}) \supset F_\alpha$ et $F_\alpha F_{\alpha'} = 0$ pour $\alpha \neq \alpha'$.

2° Nous avons $\nu^*(F_\alpha) \sim \nu^*(E_\alpha)$ $(\alpha < \Omega)$.

En effet, lorsqu'on a $\nu^*(F_\alpha)$ non $\sim \nu^*(E_\alpha)$ pour un nombre ordinal quelconque α. Nous avons $E_\alpha - \bar{\nu}^*(F_\alpha)$ non ~ 0. Par suite, il existe un nombre ordinal β tel qu'on ait $H_{\alpha\,\beta} = E_\alpha - \bar{\nu}^*(F_\alpha)$, d'ou nous avons

$F_\alpha H_{\alpha,\beta} = 0$. Or, selon la définition de $p_{\alpha,\beta}$, on a $p_{\alpha,\beta} \in F_\alpha H_{\alpha,\beta}$, ce qui donne une contradiction.

3° Pour un nombre ordinal quelconque α, il existe une infinité non dénombrable de nombres ordinaux α', tels qu'on ait $E_{\alpha'} = E_\alpha$. Pour ces nombres ordinaux α', nous avons $\nu^*(F_{\alpha'}) \sim \nu^*(E_\alpha)$, d'où F_α ne jouit pas de la propriété de LEBESGUE.

Par suite, en désignant par $\{N_E^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ tous les ensembles distincts $F_{\alpha'}$ tels qu'on ait $E_{\alpha'} = E$, où $E \in \mathfrak{F}$, on voit aisément que $N_E^{(\alpha)}$ satisfont à la demande de la proposition 7. C. Q. F. D.

Remarque 1. Dans la proposition 7, on peut imposer sur les ensembles $N_E^{(\alpha)}$ une autre condition que ses étendues intérieures soient minces.

Remarque 2. On voit aisément qu'on peut enlever dans la proposition 7 la condition: tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ sont non minces.

Proposition 8. *Soient R un espace de la classe (B) dont tous les points sont minces et $\mathfrak{F}$ une famille de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles non minces de R. On peut correspondre à chaque ensemble E de $\mathfrak{F}$ des sous-ensembles $N_E^{(\alpha)}$ $(\alpha < \Omega)$ de E de la façon que les conditions suivantes soient remplies:*

1° *Quels que soient les deux ensembles E et F de $\mathfrak{F}$, on a $N_E^{(\alpha)} N_F^{(\beta)} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$.*

2° *Quelle que soit la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ des ensembles de $\mathfrak{F}$, on a $\nu^*(\prod_{n=1}^{\infty} N_{E_n}^{(\alpha)}) \sim \nu^*(\prod_{n=1}^{\infty} E_n)$ $(\alpha < \Omega)$.*

Nous démontrerons cette proposition en admettant l'hypothèse du continu. Soit une suite transfinie de type Ω $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ formée de tous les ensembles de $\mathfrak{F}$. Considérons la famille $\mathfrak{H}$ de toutes les suites infinies $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ formée de nombres ordinaux de première et deuxième classe. Comme la puissance de cette famille $\mathfrak{H}$ est $2^{\aleph_0}$, en admettant l'hypothèse du continu, on peut ranger toutes les suites distincts de $\mathfrak{H}$ en une suite transfinie du type Ω $\{\pi_\nu\}$ $(\nu < \Omega)$ où $\pi_\nu = (\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \dots, \alpha_n^{(\nu)}, \dots)$. Posons $E_{\pi_\nu} = \prod_{n=1}^{\infty} E_{\alpha_n^{(\nu)}}$. Alors, d'après la remarque 2 de la proposition 7, on peut définir des ensembles $F_{\pi_\nu}^{(\alpha)}$ $(\alpha, \nu < \Omega)$ comme il suit,

$$1^\circ \quad E_{\pi_\nu} > F_{\pi_\nu}^{(\alpha)} \quad \text{et} \quad \nu^*(E_{\pi_\nu}) \sim \nu^*(F_{\pi_\nu}^{(\alpha)}) \quad (\alpha, \nu < \Omega).$$

$$2^\circ \quad F_{\pi_\nu}^{(\alpha)} F_{\pi_{\nu'}}^{(\alpha')} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \alpha' \quad \text{ou} \quad \nu \neq \nu'.$$

Désignons par $N_E^{(\alpha)}$ la somme de tous les ensemble $F_{\pi_\nu}^{(\alpha)}$ tels qu'on ait $\beta \epsilon \pi_\nu$ et $E_\beta = E$. Alors, les ensembles $N_E^{(\alpha)}$ $(\alpha < \Omega,\ E \epsilon \mathfrak{F})$ satisfont à la demande de la proposition 7. En effet, soit σ une suite $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$ formée de nombres ordinaux de première ou deuxième classe. Nous avons alors

$$\prod_{n=1}^{\infty} N_{E_{\beta_n}}^{(\alpha)} = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\beta_n \in \pi_\nu} F_{\pi_\nu}^{(\alpha)} \Big) = \sum_{\sigma \subset \pi_\nu} F_{\pi_\nu}^{(\alpha)},$$

où $\sigma < \pi_\nu$ désigne que σ est une suite partielle de π_ν. Par suite nous avons

$$E_\sigma > \prod_{n=1}^{\infty} N_{E_{\beta_n}}^{(\alpha)} = \sum_{\sigma \subset \pi_\nu} F_{\pi_\nu}^{(\alpha)} > F_\sigma^{(\alpha)},$$

ce qui donne $\nu^*(E_\sigma) \sim \nu^*\big(\prod_{n=1}^{\infty} N_{E_{\beta_n}}^{(\alpha)}\big)$, quel que soit le nombre ordinal $\alpha < \Omega$; c'est-à-dire, les ensembles $N_E^{(\alpha)}$ $(\alpha < \Omega,\ E \epsilon \mathfrak{F})$ satisfont à la condition 2° de la proposition 7. Il est évident que ces ensembles satisfont à la condition 1° de la proposition 7. C. Q. F. D.

23. Transformations biunivoques des ensembles. Les théorèmes de M. M. S. Banach et W. Sierpiński(1) sur les translations des ensembles peuvent être étendus dans notre cas, comme il suit.

Proposition 9. *Soient R un espace non mince de la classes (B) dont tous les points sont minces et Γ une famille de tout au plus $2^{\aleph_0}$ transformations biunivoques qui transforment R en lui-même. Il existe alors une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints $\{M^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \Omega)$ qui satisfont aux conditions suivantes:*

$$1^\circ \qquad \nu^*(M^{(\alpha)}) \sim R \qquad (\alpha < \Omega).$$

2° *Quelle que soit la transformation λ de Γ, les ensembles*

(1) S. Banach, Fund. Math., t. 19 (1932), p. 10–16, et W. Sierpiński, Fund. Math., t. 19 (1932), p. 24–28.

$$\{\lambda(M^{(\alpha)})-M^{(\alpha)}\}+\{M^{(\alpha)}-\lambda(M^{(\alpha)})\} \qquad (\alpha<\Omega)$$

sont tout au plus de'une infinité dénombrable de points.

Nous donnerons la démonstration en faisant appel à l'hypothèse du continu. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'itération d'un nombre fini de transformations de Γ et l'inverse de transformation de Γ appartiennent aussi à Γ. Soient $\{\lambda_\alpha\}$ $(\alpha<\Omega)$ une suite transfinie formée de toutes les transformations de Γ et $\{H_\alpha\}$ $(\alpha<\Omega)$ une suite transfinie formée de tous les ensembles non minces mesurables (B) ou complémentaires mesurables (B). Et enfin soit $\{x_\nu\}$ $(\nu<\varphi)$ une suite transfinie du type quelconque formée tous les points de R.

Nous définirons la famille $\{p_\beta^{(\alpha)}\}$ $(\alpha\leqq\beta<\Omega)$ de points de R par l'induction transfinie pour α et β comme il suit. Désignons par $p_1^{(1)}$, le premier point de $\{x_\nu\}$ contenu dans H_1. Maintenant, supposons que les points $\{p_\beta^{(\alpha)}\}$ $(\alpha\leqq\beta<\xi)$ ont été définis pour un nombre ordinal quelconque ξ compris entre 1 et Ω. Désignons $S_\xi^{(1)}$ par l'ensemble de tous les points

$$\lambda_{\xi_1}^{\pm1}\lambda_{\xi_2}^{\pm1}\ \cdots\cdots\ \lambda_{\xi_n}^{\pm1}(p_\beta^{(\alpha)}) \qquad (\xi_k<\xi,\ \beta<\xi)\ .$$

Alors, puisque la puissance de $S_\xi^{(1)}$ est au plus dénombrable, $H_\xi-S_\xi^{(1)}$ est non vide. Nous désignons par $p_\xi^{(1)}$ le premier point de $\{x_\nu\}$ contenu dans $H_\xi-S_\xi^{(1)}$. Supposons encore une fois que les points $p_\xi^{(\alpha)}$ $(\alpha<\eta)$ ont été définis pour un nombre ordinal η tel qu'on ait $1<\eta\leqq\xi$. Désignons par $S_\xi^{(\eta)}$ l'ensemble de tous les points

$$\lambda_{\xi_1}^{\pm1}\lambda_{\xi_2}^{\pm1}\ \cdots\cdots\ \lambda_{\xi_n}^{\pm1}(p_\xi^{(\alpha)}) \qquad (\xi_k<\xi,\ \alpha<\eta)$$

et le points de $S_\xi^{(1)}$. Alors, on voit que $H_\xi-S_\xi^{(\eta)}$ est non vide. Désignons par $p_\xi^{(\eta)}$ le premier terme de $\{x_\nu\}$ qui soit contenu dans $H_\xi-S_\xi^{(\eta)}$. Ainsi, par l'induction transfinie les points $p_\xi^{(1)}, p_\xi^{(2)}, \ldots, p_\xi^{(1)}$ sont définis, par suite les points $\{p_\beta^{(\alpha)}\}$ sont aussi définis. Désignons par $M^{(\alpha)}$ l'ensemble de tous les points

$$\lambda_{\xi_1}^{\pm1}\lambda_{\xi_2}^{\pm1}\ \cdots\cdots\ \lambda_{\xi_n}^{\pm1}(p_\beta^{(\alpha)}) \qquad (\xi_k<\beta)$$

pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$. Alors, les ensembles $M^{(\alpha)}$ satisfont à la demande de la proposition 9. Pour le voir, nous démontrerons d'abord qu'on a $M^{(\xi)}M^{(\eta)} = 0$, quels que soient les deux nombres ordinaux distincts ξ et η $(< \Omega)$. Pour cela supposons par impossible que $M^{(\xi)}M^{(\eta)}$ continenne un point p. Il existe alors deux points $p_\alpha^{(\xi)}$ et $p_\beta^{(\eta)}$ tels qu'on ait

$$(28) \qquad p = \lambda_{\xi_1}^{\pm 1} \lambda_{\xi_2}^{\pm 1} \ldots\ldots \lambda_{\xi_n}^{\pm 1}(p_\alpha^{(\xi)}) = \lambda_{\eta_1}^{\pm 1} \lambda_{\eta_2}^{\pm 1} \ldots\ldots \lambda_{\eta_m}^{\pm 1}(p_\beta^{(\eta)})$$
$$(\xi_k < \alpha \quad \text{et} \quad \eta_k < \beta) .$$

Ici, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\xi < \eta$. Nous distinguons trois cas.

PREMIER CAS. $\alpha = \beta$. D'après (28), nous avons

$$(29) \qquad p_\beta^{(\eta)} = \lambda_{\eta_m}^{\mp 1} \lambda_{\eta_{m-1}}^{\mp 1} \ldots\ldots \lambda_{\eta_1}^{\mp 1} \lambda_{\xi_1}^{\pm 1} \lambda_{\xi_2}^{\pm 1} \ldots\ldots \lambda_{\xi_n}^{\pm 1}(p_\alpha^{(\xi)}) ,$$

ce qui donne $p_\beta^{(\eta)} \epsilon S_\alpha^{(\xi)}$. Or, selon $\xi + 1 \leqq \eta$, on a $S_\alpha^{(\xi+1)} < S_\alpha^{(\eta)}$. Nous avons donc $p_\beta^{(\eta)} \epsilon S_\alpha^{(\eta)} = S_\beta^{(\eta)}$. C'est incompatible avec la définition de $p_\beta^{(\eta)}$.

DEUXIÈME CAS. $\alpha < \beta$. Selon la relation (29), on a $p_\beta^{(\eta)} \epsilon S_\beta^{(1)}$, c'est incompatible avec la définition de $p_\beta^{(\eta)}$.

TROISIEME CAS. $\alpha > \beta$. De même que nous avons fait dans le deuxième cas, nous avons une contradiction. Par suite, nous avons $M^{(\xi)}M^{(\eta)} = 0$.

Puis, nous démontrerons que les ensembles

$$(30) \qquad \{ (\lambda_\xi(M^{(\alpha)}) - M^{(\alpha)}) + (M^{(\alpha)} - \lambda_\xi(M^{(\alpha)}) \} \qquad (\alpha < \Omega)$$

sont au plus dénombrable, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$. Pour cela soit p un point de $\lambda_\xi(M^{(\alpha)}) - M^{(\alpha)}$. Alors, d'après $p \epsilon \lambda_\xi(M^{(\alpha)})$, le point p peut être écrit comme il suit,

$$(31) \qquad p = \lambda_\xi \lambda_{\xi_1}^{\pm 1} \lambda_{\xi_2}^{\pm 1} \ldots\ldots \lambda_{\xi_n}^{\pm 1}(p_\beta^{(\alpha)}) \qquad (\xi_k < \beta) .$$

Or, comme nous avons $p \epsilon M^{(\alpha)}$, nous avons $\beta < \xi$ dans (31). Il en résulte que $\lambda_\xi(M^{(\alpha)}) - M^{(\alpha)}$ est au plus dénombrable. De même, l'ensemble $M^{(\alpha)}-\lambda_\xi(M^{(\alpha)}) = \lambda_\xi\{\lambda_\xi^{-1}(M^{(\alpha)})-M^{(\alpha)}\}$ est au plus dénombrable, par suite (30) est au plus dénombrable.

Or, comme nous l'avons exposé dans la démonstration de la proposition 7, on voit que $\nu^*(M^{(\alpha)})\sim R$. Donc, les ensembles $M^{(\alpha)}$ satisfont aux conditions 1° et 2° de la proposition 9. C. Q. F. D.

24. Espaces de la classe (B^*). Nous appellerons un espace R de la classe (B^*) celui de la classe (B) qui satisfait à la condition suivante:

IV*. L'ensemble complémentaire d'un ensemble mesurable (B) quelconque de R est aussi mesurable (B).

Ici, nous allons donner un lemme sur des espaces de la classe (B^*).

Lemme D. *Soit R un espace de la classe (B^*). Alors, toute famille des sous-ensembles non minces, disjoints, contenus dans R, et jouissant de la propriété de* LEBESGUE *est de la puissance au plus dénombrable.*

En effet, supposons par impossible qu'il existe une famille $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'ensembles non minces, disjoints, contenu dans R, et jouissant de la propriété de LEBESGUE. Pour un ensemble Γ de nombres ordinaux de première ou deuxmième classe, posons

$$N_\Gamma = \sum_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha .$$

Alors, d'après la condition IV*, on voit aisément que l'ensemble N_Γ contient ou non E_α un ensemble mince près, suivant qu'un nombre ordinal α est contenu ou non dans Γ. Il en suit que les deux ensembles $\nu^*(N_\Gamma)$ et $\nu^*(N_{\Gamma'})$ ne sont pas équivalents, tant que deux ensembles Γ et Γ' de nombres ordinaux de première ou deuxième classe ne se coïncident pas. Or, la famille de tous les ensembles de nombres ordinaux de première ou deuxième classe est de la puissance $> 2^{\aleph_0}$. Par suite, la famille de tous les ensembles mesurables (B) de R est aussi de la puissance $> 2^{\aleph_0}$, contrairement à l'hypothèse. C. Q. F. D.

Remarque. D'après le lemme D, on voit qu'un espace de la classe (B^*) est de la classe (U^*).

25. Images des ensembles par transformation jouissant de la propriété de LEBESGUE. Soit $\varphi(x)$ une transformation univoque ponctuelle d'un sous-ensemble E d'un espace R en un sous-ensemble d'un espace R^*. Nous dirons que $\varphi(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE, lorsque l'ensemble $E \cdot \underset{x}{\text{Ens}} \{\varphi(x) \in M\}$ jouit de la propriété de LEBESGUE, quel que soit l'ensemble mesurable (B) M de R^*. On peut alors établir une proposition sur les transformations jouissant de la propriété de LEBESGUE, comme il suit.

Proposition 10. *Soient R et R^* des espaces non minces de la classe (B^*) dont tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) sont décomposables, Φ une famille de tout au plus $2^{\aleph_0}$ transformations univoques ponctuelles de R en un sous-ensemble de R^* et jouissant de la propriété de LEBESGUE sur R, et $\mathfrak{F}$ une famille de tout au plus $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles non minces de R^*. Il existe alors un sous-ensemble N de la puissance $2^{\aleph_0}$ et contenu dans R^*, tel qu'on a $E-\varphi(N)$ non ~ 0, quel que soient l'ensemble E de $\mathfrak{F}$ et la transformation $\varphi(x)$ de Φ.*[1]

Pour démontrer cette proposition, nous admettrons l'hypothèse du continu. Soit $\{E_\nu\}$ $(\nu < \Omega)$ une suite transfinie du type Ω formée tous les ensembles de $\mathfrak{F}$. Etant donné un ensemble E_α de $\{E_\nu\}$ considérons des ensembles $E_\alpha H$ pour tous les ensembles mesurable (B) H de R. Parmi ces ensembles, il existe au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles non minces. On peut donc ranger ces ensembles non minces en une suite du type Ω $\{H_{\alpha,\beta}\}$ $(\beta < \Omega)$. Comme la famille $\mathfrak{G}$ de tous les ensembles $H_{\alpha,\beta}$ et la famille Φ sont respectivement de la puissance au plus $2^{\aleph_0}$, on peut ranger les éléments de $\mathfrak{G}$ et Φ respectivement en une suite du type Ω $\{H_{\alpha_\nu,\beta_\nu}\}$ $(\nu < \Omega)$ et $\{\varphi_\nu(x)\}$ $(\nu < \Omega)$ tels qu'il existe une infinité non dénombrable de nombres ordinaux ν qui satisfont à la condition $H_{\alpha,\beta} = H_{\alpha_\nu,\beta_\nu}$ et $\varphi(x) = \varphi_\nu(x)$, quels que soient l'ensemble $H_{\alpha,\beta}$ de $\mathfrak{G}$ et la transformation $\varphi(x)$ de Φ. Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie $\{M_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'ensembles minces de R et une suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ de points de R. Pour définir l'ensemble M_1, distinguons deux cas.

(1) W. SIERPIŃSKI, H. d. C., p. 135, Proposition C_{71}.

PREMIER CAS. $H_{\alpha_1, \beta_1} - \varphi_1(R)$ non ~ 0. Nous poserons dans ce cas $M_1 = 0$.

DEUXIÈME CAS. $H_{\alpha_1, \beta_1} - \varphi_1(R) \sim 0$. D'après la remarque du lemme D, $\bar{\nu}^*(H_{\alpha_1, \beta_1})$ peut être représenté comme la somme de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles minces mesurables (B). En désignant ces ensembles par $\{e_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$, considérons les ensembles

$$N_\alpha = \operatorname*{Ens}_x \{ \varphi_1(x) \in e_{\alpha+1} - \sum_{\beta \leq \alpha} e_\beta \} \qquad (\text{pour} \quad \alpha < \Omega) .$$

Les ensembles N_α jouissent de la propriété de LEBESGUE et sont disjoints les uns aux autres. Donc, il existe une infinité non dénombrable d'ensembles N_α tels qu'on ait $N_\alpha \sim 0$ et $\varphi_1(N_\alpha) H_{\alpha_1, \beta_1} \neq 0$. Désignons par M_1 un de ces ensembles N_α, et par p_1 un point de $R - M_1$. Etant donné un nombre ordinal quelconque ν tel qu'on ait $\nu < \Omega$, distinguons deux cas.

PREMIER CAS. $H_{\alpha_\nu, \beta_\nu} - \varphi_\nu(R)$ non ~ 0. Nous poserons dans ce cas $M_\nu = 0$.

DEUXIÈME CAS. $H_{\alpha_\nu, \beta_\nu} - \varphi_\nu(R) \sim 0$. Comme les points p_ξ $(\xi < \eta)$ sont au plus dénombrable, de même que nous avons fait dans le cas $\nu = 1$, on peut conclure qu'il existe une infinité non dénombrable d'ensembles minces N tels qu'on ait $\varphi_\nu(N) \{ H_{\alpha_\nu, \beta_\nu} - \sum_{\xi < \nu} (p_\xi) \} \neq 0$. Désignons par M_ν un de ces ensembles N, et par p_ν un point de $R - \{ \sum_{\xi \leq \nu} M_\xi + \sum_{\xi < \nu} (p_\xi) \}$. Les suites transfinies $\{M_\alpha\}$ et $\{p_\alpha\}$ se trouvent ainsi définies.

Désignons par M l'ensemble de tous les points p_ξ $(\xi < \Omega)$. Alors, M est de la puissance $2^{\aleph_0}$, l'hypothèse du continu etant admise. Maintenant, nous verrons que M est l'ensemble demandé dans la proposition 10. Pour cela, supposons par impossible qu'on ait $E_\alpha - \varphi(M) \sim 0$ pour un ensemble E_α de $\mathfrak{F}$ et une transformation $\varphi(x)$ de Φ. Alors, on a $H_{\alpha, \beta} - \varphi(M) \sim 0$, et par suite $H_{\alpha, \beta} - \varphi(R) \sim 0$, quel que soit le nombre ordinal $\beta < \Omega$. Comme $E_\alpha - \varphi(M)$ est mince, d'après la condition IV*, $R - \bar{\nu}^*(E_\alpha - \varphi(M))$ est l'ensemble mesurable (B) équivalent à R. Par suite il existe un nombre ordinal β' tel qu'on ait $H_{\alpha, \beta'} = H_\alpha - \bar{\nu}^*(E_\alpha - \varphi(M))$. Comme on a vu plus haut; on a

$H_{\alpha,\beta'}-\varphi(R)\sim 0$. Or, d'après la définition de $\{M_\alpha\}$ et $\{p_\alpha\}$, il existe un nombre ordinal ν tel qu'on ait $H_{\alpha_\nu,\beta_\nu}=H_{\alpha,\beta'}$ et $\varphi_\nu(x)=\varphi(x)$. Il en résulte en vertu de la définition de M_ν qu'on a $H_{\alpha_\nu,\beta_\nu}\varphi_\nu(M_\nu)\neq 0$ ou $H_{\alpha,\beta'}\varphi(M_\nu)\neq 0$. Or, comme nous avons $\varphi(M_\nu)\varphi(R-M_\nu)=0$ et $M_\nu M=0$, nous avons $H_{\alpha,\beta'}-\varphi(H)\neq 0$.

En outre, d'après la définition de $H_{\alpha,\beta'}$, nous avons $H_{\alpha,\beta'}-\varphi(M)=0$, ce qui donne une contradiction. C. Q. F. D.

§ 6. Ensembles de LUSIN.

M. N. LUSIN[1] a introduit à l'aide de l'hypothèse du continu une classe d'ensembles de points pour déduire l'existence des fonctions jouissant de la propriété de BAIRE, sans être représentables analytiquement. Les ensembles de cette classe ont été appelés par M. W. SIERPIŃSKI les ensembles de LUSIN. En outre M. W. SIERPIŃSKI[2] a introduit dans la théorie de la mesure une classe d'ensembles de points (ensembles jouissant de la propriété (S)) qui correspondent aux ensembles de LUSIN. Comme on sait, les ensembles des deux classes jouent un rôle très important dans la théorie des ensembles de points. Nous considérons ici une classe d'ensembles de points qui correspondent aux ensembles des deux classes ci-dessus. Nous donnerons d'abord la définition.

26. L'ensemble de LUSIN. Nous appellerons dans un espace quelconque R un *ensemble de LUSIN* un ensemble non mince qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble mince de R. Dans un espace non mince R de la classe (B) tout sous-ensemble mince est une partie d'un ensemble mince mesurable (B), et la famille de tous les ensembles minces mesurables (B) de R est au plus de la puissance $2^{\aleph_0}$, par suite, on peut démontrer l'existence des ensembles de LUSIN dans chaque sous-ensemble non mince de R, de même que M. N. LUSIN a fait dans Comptes Rendus t. 158

(1) C. R. Acad. Sci. Paris, t. 158 (1914), p. 1258–1261.
(2) Fund. Math., t. 5 (1924), p. 177–187.

(1914), p. 1258–1261, en faisant appel à l'hypothèse du continu. Donc,

Proposition 11. *Dans chaque sous-ensemble non mince d'un espace non mince de la classe (B), il existe des ensembles de* LUSIN.

27. La puissance des ensembles de LUSIN. On peut déterminer la puissance d'un ensemble de LUSIN dans quelques espaces, en admettant l'hypothèse du continu.

Proposition 12. *Dans un espace non mince R de la classe (B) qui ne contient aucun point non mince, un ensemble de* LUSIN *est de la puissance* $2^{\aleph_0}$.

Démonstration. Nous établissons d'abord que R peut être représenté comme la somme de tout au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles minces. Supposons par impossible que ce n'en est pas ainsi. Nous définirons la suite transfinie $\{N_\alpha\}$ $(\alpha < \omega_2)$ des ensembles minces mesurables (B). Pour cela, rangeons tous les points de R en une suite transfinie du type quelconque $\{x_\alpha\}$ $(\alpha < \varphi)$ et posons $N_1 = \bar{\nu}^*(x_1)$. Etant donné un nombre ordinal quelconque ξ compris entre 1 et ω_2, l'ensemble $R - \sum_{\xi > \alpha} N_\alpha$ est non vide. Soit x'_ξ le premier point de $\{x_\alpha\}$ contenu dans $R - \sum_{\xi > \alpha} N_\alpha$. Posons alors $N_\xi = \bar{\nu}^*(x'_\xi)$. La suite transfinie $\{N_\alpha\}$ $(\alpha < \omega_2)$ se trouve ainsi définie.

Les ensembles N_α sont mesurables (B) et differents l'un de l'autre, et la suite transfinie $\{N_\alpha\}$ est de la puissance supèrieure à $2^{\aleph_0}$, en admettant l'hypothèse du continu. C'est incompatible avec la condition VI.

Soient $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \varphi)$ des ensembles minces tels qu'on ait $R = \sum_{\alpha < \varphi} E_\alpha$ et E un ensemble de LUSIN. On a alors $E = \sum E E_\alpha$, et les ensembles $E E_\alpha$ est au plus dénombrable. Il en résulte à l'aide de l'hypothèse du continu que E est de la puissance $2^{\aleph_0}$. C. Q. F. D.

28. La propriété de LEBESGUE. Soit R un espace de la classe (B) dont tous les points sont minces. Il existe alors dans tout sous-ensemble non mince de R un ensemble de LUSIN, en admettant l'hypothèse du continu. Or, comme tous les points de R sont minces, tout sous-ensemble non mince de R contient un ensemble qui ne jouit pas de la propriété de LEBESGUE, en admettant l'hypothèse du continu. Donc,

Proposition 13. *Soient R un espace de la classe (B) dont tous les points sont minces et E un sous-ensemble non mince de R. Il existe alors dans E un ensemble de LUSIN, qui ne jouit pas de la propriété de LEBESGUE.*

Or, tout sous-ensemble non mince de R contient un sous-ensemble non mince dont les étendues intérieures sont minces. Il existe donc dans un sous-ensemble non mince E de R un ensemble de LUSIN N dont les étendues intérieures sont minces, en admettant l'hypothèse du continu. Alors aucun des sous-ensembles non dénombrables de N ne jouit pas de la propriété de LEBESGUE, c'est-à-dire,

Proposition 14. *Soient R un espace de la classe (B) dont tous les points sont minces et E un sous-ensemble non mince de R. Il existe alors dans R un ensemble dont aucun sous-ensemble non dénombrable ne jouit de la propriété de LEBESGUE.*

29. Une application de la proposition 14. Soit R un espace non mince de la classe (B^*) dont tous les points sont minces. Alors, d'aprés la proposition 14, il existe dans R un ensemble non mince N dont aucun sous-ensemble non dénombrable n'est mince. Or, lorsque R ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF, il existe une suite convergente $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ des fonctionnelles définies dans N, telle que la suite $\{\varphi_n(x)\}$ ne converge pas uniformément sur aucun sous-ensemble non mince, et par suite non dénombrable de N. Donc,

Proposition 15. *Soit R un espace non mince de la classe (B^*) qui ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF et qui tous les points de R sont minces. Il existe un sous-ensemble non mince N de R et une suite convergent $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ des fonctionnelles définies dans N, telle que $\{\varphi_n(x)\}$ ne converge uniformément aucun sous-ensemble non-dénombrable de N*[1].

(1) W. SIERPIŃSKI, C. R. Soc. Sc. et Lettres. Varsovie, 1928, p. 84–87.

30. Condition pour qu'un ensemble soit de LUSIN. On peut déduire à l'aide de la propriété de FRÉCHET des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble soit de LUSIN. Nous donnerons dans ce numéro une des conditions.

Proposition 16. *Soit R un espace de la classe (B^*) qui jouit de la propriété de FRÉCHET. Pour qu'un sous-ensemble N de R soit de LUSIN, il faut et il suffit que N remplit la condition suivante: Pour tout espace R^* de la classe (B^*), dont tous les points sont minces et qui ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF, et pour toute transformation univoque $\Phi(x)$ de R en sous-ensemble de R^*, ayant la propriété de LEBESGUE sur R, l'ensemble $\Phi(N)$ est mince.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Comme R^* ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF, il existe une famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles de R, qui jouissent de la propriété de LEBESGUE et qui satisfont aux conditions (A)—(C) du théorème 7. Alors,

$$N_{k,n} = \operatorname*{Ens}_{x} \{\Phi(x) \in \nu^* (M_{k,n})\} \quad (k, n = 1, 2, \ldots)$$

jouissent de la propriété de LEBESGUE. Posons

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (N_{k,n} - N_{k,n+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} N_{k,n} + \sum^{\infty} (R - \sum_{k=1}^{\infty} N_{k,n}) ,$$
$$N^*_{k,n} = (R - H) N_{k,n} .$$

On voit aisément que

1° $N^*_{k,n} \supset N^*_{k,n+1}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ et $\prod_{n=1}^{\infty} N^*_{k,n} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

2° $\sum_{k=1}^{\infty} N^*_{k,n} = R - H \quad (k = 1, 2, \ldots)$,

3° $\Phi(H) \sim 0$.

Soit N un sous-ensemble de LUSIN de R. Distinguons deux cas.

PREMIER CAS. $R-H \sim 0$. Comme nous avons $\Phi(N) = \Phi(N-H) + \Phi(NH) \sim \Phi(N-H)$ et comme $N-H$ est au plus dénombrable, $\Phi(N)$ est mince.

DEUXIÈME CAS. $R-H$ non ~ 0. Il est évident que $R-H$ jouit de la propriété de LEBESGUE. Soit M un ensemble non mince de $R-H$, qui jouit de la propriété de LEBESGUE, nous definirons sur M la suite $\{F_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) des fonctionnelles qui satisfont à la condition

$$MN^*_{k,n} = \underset{x}{\mathrm{Ens}}\left\{F_n(x) \geqq \frac{1}{k}\right\}.$$

Alors, les fonctionnelles $F_n(x)$ jouissent de la propriété de LEBESGUE sur M et convergent vers zéro partout sur M. Or, comme R jouit de la propriété de FRÉCHET, il existe dans M un ensemble non mince H_M qui jouit de la propriété de LEBESGUE et sur lequelle $\{F_n(x)\}$ converge uniformément. Il existe donc une suite $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) de nombres naturels telle qu'on ait $F_n(x) < \frac{1}{k}$ pour $n \geqq n_k$ sur H_M, ce qui donne $N^*_{k,n_k} H_M = 0$. Donc, nous avons $H_M < R - \sum_{k=1}^{\infty} N^*_{k,n_k}$. Par suite, nous avons $\Phi(H_M) < R - \sum_{k=1}^{\infty} \nu^*(M_{k,n_k}) \sim 0$, c'est-à-dire, $\Phi(H_M)$ est mince. Il en résulte que, quel que soit l'ensemble non mince M contenu dans $R-H$ et jouissant de la propriété de LEBESGUE, il existe dans un ensemble non mince H_M ayant la propriété de LEBESGUE, tel qu'on ait $\Phi(H_M) \sim 0$. Maintenant désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de tous les ensembles H_M où M parcourt tous les ensembles non minces contenu dans $R-H$ et jouissant de la propriété de LEBESGUE. Alors d'après les lemmes B et C, on peut choisir parmi $\mathfrak{F}$ au plus une infinité dénombrable des ensembles H_{M_k} ($k = 1, 2, \ldots$), tels qu'on ait

$$R-H \sim \sum_{k=1}^{\infty} H_{M_k} \quad \text{et} \quad H_{M_k} H_{M_{k'}} \sim 0 \quad (\text{pour} \quad k \neq k').$$

Alors, comme $N\{(R-H) - \sum_{k=1}^{\infty} H_{M_k}\}$ est au plus dénombrable, nous avons

$$\Phi(N) = \Phi(NH) + \Phi\left\{N\{(R-H) - \sum_{k=1}^{\infty} H_{M_k}\}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(NH_{M_k}) \sim 0,$$

c'est-à-dire, $\Phi(N)$ est mince.

La condition est suffisante. Nous donnerons la démonstration en faisant appel à l'hypothèse du continu. Soit N un ensemble de R qui admet un ensemble non dénombrable de points communs avec un ensemble non mince E de R. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la puissance de E est $2^{\aleph_0}$, en admettant l'hypothèse du continu. Or, d'après la proposition 7, il existe dans R^* un ensemble non mince M de la puissance $2^{\aleph_0}$. Soient $\varphi(x)$ une correspondence biunivoque ponctuelle entre NE et M, et x_0 un point de R^*.

Maintenant, nous définirons à l'aide de $\varphi(x)$ une transformation ponctuelle $\Phi(x)$ de R en un sous-ensemble de R^*, comme il suit,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pour} \quad x \in NE \\ x_0 & \text{pour} \quad x \bar{\in} NE \,. \end{cases}$$

Comme on voit, $\Phi(x)$ jouit de la propriété de LEBESGUE sur R et $\Phi(N)$ est non mince. Donc, la condition donnée est suffisante. C. Q. F. D.

31. Condition pour qu'un ensemble soit de LUSIN (*suite*). Nous avons donné dans un espace R ayant la propriété de FRÉCHET une condition pour qu'un sous-ensemble de R soit de LUSIN. Ici nous nous proposons de chercher une pareille condition dans le cas où l'espace ne jouit pas de la propriété de FRÉCHET. Pour cela, nous donnerons une définition sur des fonctionnelles. Soit $\Phi(x)$ une transformation univoque ponctuelle d'un sous-ensemble E d'un espace R en un sous-ensemble d'un espace R^* et jouissant de la propriété de LEBESGUE sur E. Nous dirons que $\Phi(x)$ est continue sur E, lorsque nous avons $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \nu^*(\Phi(E_n)) \sim 0$, quelle que soit la suite décroissante $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles mesurables (B) de R qui satisfont à $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$.

Proposition 17. *Soit R un espace de la classe (B^*) qui ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF. Pour qu'un sous-ensemble E de R soit de LUSIN, il faut et il suffit que E rempli la condition suivante : quel que soient R^* un espace de la classe (B^*) jouissant de la propriété de FRÉCHET où tous les points sont minces et $\Phi(x)$ une transformation continue sur R telle que l'image $\Phi(R)$ est contenu dans R^*, l'ensemble $\Phi(E)$ est mince.*

Nous donnerons ici une démonstration à l'aide de l'hypothèse du continu.

La condition est nécessaire. Comme R ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF. Il existe une famille $\{M_{k,n}\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ des ensembles ayant de la propriété de LEBESGUE, qui satisfait aux conditions

(A)—(C) du théorème 7, et en particulier $R=\sum_{n=1}^{\infty} M_{k,n}$ et $\prod_{n=1}^{\infty} M_{k,n}=0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les ensembles $M_{k,n}$ sont mesurables (B). En effet, nous définirons d'abord les ensembles (B) $C_{k,n}$ $(k, n=1, 2, \ldots)$ comme il suit,

$$C_{k,1}=\bar{\nu}^*(CM_{k,1}) ,$$

$$C_{k,n}=\bar{\nu}^*(\sum_{j=1}^{n-1} C_{k,j}+CM_{k,n}) \qquad (n \geqq 2) ,$$

et posons $N_{k,n}=R-C_{k,n}$. Alors, $N_{k,n}$ est l'ensemble mesurable (B) équivalent à $M_{k,n}$ et satisfait aux conditions demandées.

Maintenant, nous définirons les ensembles $\{N^*_{k,n}\}$ $(k, n=1, 2, \ldots)$, comme il suit

$$N^*_{k,n} \sim \nu^*(\Phi(N_{k,n})) ,$$

$$N^*_{k,n} \supset \Phi(N_{k,n})+N^*_{k,n+1} ,$$

d'après la continuité de $\Phi(x)$, les ensembles $\prod_{n=1}^{\infty} N^*_{k,n}$ $(k=1, 2, \ldots)$ sont minces. Il en résulte en vertu du lemme C qu'il existe une suite $\{n_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ de nombres naturels, telle qu'on ait $\overline{\lim}_{k\to\infty} N^*_{k,n_k} \sim 0$. Pour un nombre naturel N, considérons $Z_N=R^*-\sum_{k=N}^{\infty} N^*_{k,n_k}$. Comme on a $Z_N\,\Phi(N_{k,n_k})=0$ $(k \geqq N)$, on a $\Phi^{-1}(Z_N)N_{k,n_k}=0$, ce qui donne $\Phi^{-1}(Z_N) \subset R-\sum_{k=N}^{\infty} N_{k,n_k}$. Par conséquent, $\Phi^{-1}(Z_N)$ et par suite $\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N)$ est mince. De plus, il est evident que $R^*-\sum_{N=1}^{\infty} Z_N$ est mince. Maintenant, soit E un ensemble de Lusin dans R et considérons

$$\Phi(E)=\Phi\{E\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N)\} + \Phi(E-\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N)) .$$

Comme $E\,\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N)$ est au plus dénombrable, $\Phi\{E\,\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N)\}$ est aussi au plus dénombrable, et puisque $\Phi(E-\Phi^{-1}(\sum_{N=1}^{\infty} Z_N))$ est un sous-ensemble de $R-\sum_{N=1}^{\infty} Z_N$, cet ensemble est aussi mince. Il en résulte que $\Phi(E)$ est mince. On peut déduire que la condition donnée est necéssaire de même que nous avons fait dans le cas de la proposition 16.

Remarque. Soit R un espace de la classe (B^*) dont tous les point sont minces. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de tous les sous-ensembles non minces mesurables (B) ayant de la propriété de FRÉCHET. Comme un espace de la classe (B^*) est de la classe (U^*), comme on voit, il existe une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ d'ensembles de $\mathfrak{F}$, telle qu'on ait tout ensemble de $\mathfrak{F}$ est contenu dans $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$ sauf un ensemble mince. Or, si $R - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est non mince, cet ensemble ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF. Donc, il ne peut y avoir lieu que les trois cas suivants,

1° R ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF.

2° R jouit de la propriété de FRÉCHET.

3° R est la somme des deux parties telles que l'une jouit de la propriété de FRÉCHET et l'autre ne jouit pas de la propriété d'EGOROFF.

Par suite, d'après les propositions 16, et 17, on peut donner dans tous les cas une condition nécessaire et suffisante, pour que un sous-ensemble de R soit de LUSIN.

32. Famille d'ensembles presque disjoints. On peut établir une proposition sur ensembles presque disjoints(1) analogue à celle proposé par M. W. SIERPIŃSKI dans FUNDAMENTA MATHEMATICAE t. 13, p. 195.

Proposition 18. *Soient R un espace de la classe (B^*) dont tous les points sont minces et E un sous-ensemble non mince de R. Il existe dans E $2^{\mathfrak{c}}$ (où $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$) ensembles qui ont les étendues extérieures equivalentes à $\nu^*(E)$ et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

Nous démontrerons cette proposition en faisant appel à l'hypothèse du continu. Comme on voit, il existe dans E un ensemble N de LUSIN tel qu'on ait $\nu^*(E) \sim \nu^*(N)$. Soit H un ensemble non mince contenu dans $\nu^*(E)$ et jouissant de la propriété de LEBESGUE. Comme HN est de la puissance $2^{\aleph_0}$, en admettant l'hypothèse de continu, il existe une famille $\mathfrak{F}_H$ de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ de sous-ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ de HN, telle que deux ensembles differents de la famille $\mathfrak{F}_H$ ont toujours un

(1) W. SIERPIŃSKI, Monatshefte für Math. u. Phys., t 35 (1928), p. 239-242.

ensemble au plus dénombrable de points communs. Comme les ensembles de $\mathfrak{F}_H$ sont de LUSIN, ils sont non minces.

On peut donc démontrer qu'il existe une famille $\mathfrak{G}_H$ de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ de sous-ensembles de HN, tels qu'on ait

1° deux ensembles différents de $\mathfrak{G}_H$ ont toujours un ensemble au plus dénombrable de points communs,

2° tout ensemble de $\mathfrak{G}_H$ a même étendues extérieures.

Nous désignons par F_H une étendue extérieure d'ensembles de $\mathfrak{G}_H$, comme nous l'avons exposé dans la démonstration de la proposition 5. Soit $\{E_H^{(\alpha)}\}$ $(\alpha < \varphi,\ \overline{\overline{\varphi}} = 2^{\mathfrak{c}})$ une suite transfinie formée tous les ensembles différents de $\mathfrak{G}_H$. Or, un espace de la classe (B^*) est de la classe (U^*), il existe donc en vertu de lemme B au plus dénombrable d'ensembles non minces $\{H_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ayant la propriété de LEBESGUE, tels qu'on ait $\nu^*(E) \sim \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ et $H_n H_{n'} \sim 0$ pour $n \neq n'$. Posons $F^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{H_n}^{(\alpha)}$ $(\alpha < \varphi)$. Les étendues extérieures de F_α sont équivalentes à $\nu^*(E)$ et deux ensembles $F^{(\alpha)}$ et $F^{(\beta)}$, où $\alpha \neq \beta$, ont un sous-ensemble mince de N et par suite au plus dénombrable de points communs, c'est-à-dire, les ensembles $F^{(\alpha)}$ sont des demandes dans la proposition 18.

C. Q. F. D.

Sapporo, le 26 Octobre 1935.