THEORIE DER KUGELGEOMETRISCHEN ÜBERTRAGUNG IN DER MANNIGFALTIGKEIT VON HYPERFLÄCHENELEMENTEN

Von

Hitoshi HOMBU

INHALT

SEITE

Einleitung 195

§ 1. Vorbereitende Betrachtung 197

§ 2. Möbius-kugelgeometrische Übertragung, eingeführt in die Element-Mannigfaltigkeit. 203

§ 3. Pseudosphärenelemente der kugelgeometrischen Übertragung 208

§ 4. Einige Kategorien von den Räumen, deren Torsionsgrössen alle verschwinden 213

§ 5. Die unbedingte Integrabilität der Pseudosphären . . . 221

§ 6. Beziehungen der kugelgeometrischen Übertragungen zu den bewegungsgeometrischen Übertragungen . . . 227

§ 7. Isomorphismen der Element-Mannigfaltigkeiten mit kugelgeometrischen Übertragungen 232

§ 8. Das Problem der Bestimmung der normalen Übertragung. 238

EINLEITUNG

In der bald erscheinenden Arbeiten ([8], [9], [10])(1) schickt Prof. A. KAWAGUCHI ein gründliches Fundament der Übertragungslehre in der Mannigfaltigkeit von m-dimensionalen Flächenelementen (und ferner von Gebilden höherer Klassen) voraus, woraus die bekannte WIRTINGERsche Übertragung ([16]), der DOUGLASsche Raum von "k-spreads"

(1) Man vergleiche die Literatur am Schluss dieser Arbeit.

([6]), und die CARTANsche Übertragung "fondés sur la notion d'aire" ([4]) als spezielle Theorien hervortreten. Ich glaube, dass mit ihrer Hilfe oder durch die in ihnen enthaltenen Gedanken projektive, konforme, oder im allgemeinen KÖNIGsche Übertragung in der obenerwähnten Mannigfaltigkeit behandelt werden kann. In dieser Arbeit möchte ich mich mit der M-kugelgeometrischen Übertragung in der Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen beschäftigen. In der genannten Übertragung sind die Räume, welche zu den Elementen adjungiert sind, sowie die Abbildungen benachbarter Räume MÖBIUSsche.

Wir erklären die homogenen $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten in M_n nach W. BLASCHKE ([1]) (§1), und leiten sodann mit deren Hilfe die grundlegenden Formeln her (§2). Wenn jedes Hyperflächenelement in dem adjungierten M-Raum enthalten ist, so können wir einige Strukturgrössen Torsionsgrössen nennen. Voraussetzend eine zulässige Forderung in Nr. 7, werden die Räume mit verschwindenden Torsionsgrössen untersucht (§4). Wie geodätische Linien der metrischen Übertragung so existiert in jedem Elemente eine ein-parametrige Schar von Hyperflächenelementen zweiter Ordnung (unter einfacher Bedingung), von welchen jedes Bild in M_n ein Hyperflächenelement zweiter Ordnung von M-Hyperkugel ist. Wir nennen diese Pseudosphärenelemente (§3). Dafür, dass Hyperflächen, deren Bilder in M_n M-Hyperkugeln sind und die wir dann Pseudosphären nennen, existieren, sollen einige Integrabilitätsbedingungen erfüllt werden, welche wir in ganz geometrischer Weise herleiten (§5). Derartige Flächen sind schon bekannt in konformer Übertragung nach E. CARTAN ([3], S. 30–37). Unsere Übertragungen beziehen sich offenbar eng auf bewegungsgeometrische Übertragungen insbesondere auf die VEBLENsche projektive Übertragung ([15]). Von den Räumen mit bewegungsgeometrischen Übertragungen finden wir auch spezielle Räumen von "(n–1)-spreads" (§6). Wir beschäftigen uns demnächst mit dem meriedrischen Isomorphismus zweier Räume, welchen E. CARTAN in seiner berühmten Arbeit [2] erklärt hat. Nebenbei treten die etwas interessanten Sätze hervor: Bei Isomorphismen von Typenklassen A, B, C, E korrespondieren beide Mannigfaltigkeiten miteinander mittels einer Berührungstransformation, bei Typenklassen A, B, C (unter einer gewissen Bedingung) mittels der Erweiterung einer Punkttransformation (§ 7). Wenn die unbedingt integrablen, partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{c^L}{\sum_{i,j} b^L_{ij} p_{ij} + d^L} = -2R \qquad \left(p_i \equiv \frac{\partial z}{\partial x^i}, \quad p_{ij} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}\right), \quad \left(\begin{matrix} L = 1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}; \\ i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix}\right),$$

wobei die Funktionen b^L_{ij}, c^L, d^L von z, x^i, p_i abhängig sind, vorgegeben sind, untersuchen wir spezielle Klassen von Übertragungen, deren Pseudosphären eben durch diese Differentialgleichungen gegeben werden. Es scheint mir etwas schwierig, eine ausgezeichnete Übertragung zu bestimmen. Die Erörterung bezieht sich notwendigerweise auf die sozusagen konformen Winkelmetriken (vgl. [5]) (§ 8). Ich habe nicht die Schreibweise des Tensorkalküls angenommen, sondern die der PFAFFschen und der schief-symmetrischen Ausdrücke; aber es ist nicht mühsam, diese in jene umzuschreiben ([14]).

In dieser Arbeit behandle ich die Flächentheorie sowie die Theorie der kovarianten Ableitungen nicht. Ich möchte demnächst eine Abhandlung über dieses Problem veröffentlichen.

Ich möchte Herrn Prof. A. KAWAGUCHI für seine Anregungen und das Interesse, das er meiner Arbeit gegönnt hat, herzlich danken.

§ 1. VORBEREITENDE BETRACHTUNG.

1. Wir möchten zunächst einige Bemerkungen über die Geometrie von MÖBIUS machen (vgl. [1]). Der n-dimensionale euklidische Raum wird bekanntlich den topologischen Zusammenhang einer Hyperkugel von n Dimensionen zuschreiben und ein MÖBIUS-Raum M_n genannt, indem man denkt, dass der Raum durch einen in ihn eingefügten, uneigentlichen Punkt über das Unendliche hinüber stetig zusammen-

hängend ist. Dann fassen wir die folgenden Elemente in den Begriff der M-Hyperkugeln in M_n zusammen:

1° die Hyperkugeln in gewöhnlichen Sinne, 2° die Hyperebenen.

Wir erklären die homogenen $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ der M-Hyperkugeln und der Punkte folgendermassen: für erste Art M-Hyperkugel mit dem Mittelpunkte $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ (kartesische Koordinaten) und dem Radius R durch

$$(1.1) \qquad y_0 = \frac{\rho}{2}\left\{1+\left(\sum_{i=1}^{n}\xi^{i2}-R^2\right)\right\}, \quad y_1 = \frac{\rho}{2}\left\{1-\left(\sum_{i=1}^{n}\xi^{i2}-R^2\right)\right\},$$
$$y_{i+1} = \rho\xi^i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

für zweite Art M-Hyperkugel mit der Gleichung

$$\xi^1\eta^1+\xi^2\eta^2+\ldots\ldots+\xi^n\eta^n = \xi^0$$

durch

$$y_0 = \rho\xi^0, \quad y_1 = -\rho\xi^0, \quad y_{i+1} = \rho\xi^i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

für eigentlichen Punkt $\xi^1, \ldots, \xi^n$ (kartesische Koordinaten) durch (1.1) mit $R=0$, und für den uneigentlichen Punkt durch $1, -1, 0, \ldots, 0$. Die Abbildungen von MÖBIUS in M_n werden als die linearen Substitutionen der $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten definiert, die die Gleichung

$$(1.2) \qquad (yy) \equiv -y_0^2+y_1^2+y_2^2+\ldots\ldots+y_{n+1}^2 = 0$$

invariant lassen und eine nicht verschwindende Determinante haben. Man kennt, dass die Gruppe aller MÖBIUS-Abbildungen die grösste ist, deren Transformationen eineindeutige Punkttransformationen von M_n sind und dabei den M-Hyperkugeln als Punktmannigfaltigkeiten eindeutig wieder solche zuordnen.

2. Das Hyperflächenelement des euklidischen Raumes wird analytisch von den kartesischen Koordinaten seines Zentrums $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n$ und den Grössen, welche sich auf seine $(n-1)$-Richtung im Raume beziehen, etwa

$$\rho_k = \frac{\partial \eta^1}{\partial \eta^k} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

bestimmt; man sagt alsdann das Element $(\eta^i; \rho_k)$. Zwei unendliche benachbarte Hyperflächenelemente $(\eta^i; \rho_k)$ und $(\eta^i + d\eta^i; \rho_k + d\rho_k)$ heissen in der vereinigten Lage liegend, wenn die PFAFFsche Gleichung

$$(1.3) \qquad d\eta^1 - \sum_{k=2}^{n} \rho_k d\eta^k = 0$$

besteht.

In M_n, kann man sehen, dass jedes Hyperflächenelement sich von der M-Hyperkugelschar, deren M-Hyperkugeln alle es in dem Zentrum berühren, umhüllen lässt, speziell, das Element $\eta^i = 0$, $\rho_k = 0$ von den Hyperkugeln, deren Mittelpunkte

$$\xi^1 = R, \quad \xi^2 = \xi^3 = \ldots = \xi^n = 0$$

sind, und der Hyperebene $\eta^1 = 0$; diese M-Hyperkugeln haben nach (1.1) die $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten

$$(1.4) \qquad y_0 = \frac{1}{2}\rho, \quad y_1 = \frac{1}{2}\rho, \quad y_2 = \rho R, \quad y_3 = \ldots = y_{n+1} = 0,$$

wobei R die Rolle des Parameters der Kugelschar spielt.

Nun können wir die vereinigte Lage zweier benachbarten Elemente kugelgeometrisch angreifen. Aus dem Differentiale von (1.1) ergibt sich nämlich für die der Kugel (1.4) benachbarte M-Kugel

$$dy_0 = \frac{1}{2}d\rho + \rho R(d\xi^1 - dR), \quad dy_1 = \frac{1}{2}d\rho - \rho R(d\xi^1 - dR),$$

$$dy_2 = R d\rho + \rho d\xi^1, \quad dy_{k+1} = \rho d\xi^k \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Gehört diese Kugel derjenigen Kugelschar, welche ein zu $(\eta^i = 0; \rho_k = 0)$ benachbartes Hyperflächenelement $(d\eta^i; d\rho_k)$ definiert, an, so erhält man leicht

$$d\xi^1 = d\eta^1 + dR, \quad d\xi^k = d\eta^k - R d\rho_k \quad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

somit

$$dy_0 = \frac{1}{2}d\rho + \rho R d\eta^1, \quad dy_1 = \frac{1}{2}d\rho - \rho R d\eta^1,$$

$$(1.5) \qquad dy_2 = Rd\rho + \rho(d\eta^1 + dR), \quad dy_{k+1} = \rho(d\eta^k - Rd\rho_k),$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n).$$

Schliesslich, liegen die zwei Hyperflächenelemente $(0\,;0)$ und $(d\eta^i\,; d\rho_k)$ in der vereinigten Lage, so ist

$$dy_0 = \frac{1}{2}d\rho, \quad dy_1 = \frac{1}{2}d\rho, \quad dy_2 = Rd\rho + \rho dR,$$

$$(1.6) \qquad dy_{k+1} = \rho(d\eta^k - Rd\rho_k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

da nach (1.3) $d\eta^1 = 0$ ist. Umgekehrt folgt aus $dy_0 = dy_1$ ohne weiteres $d\eta^1 = 0$, daher *ist*

$$(1.6') \qquad dy_0 = dy_1$$

notwendig und hinreichend dafür, dass die in Betracht kommenden Kugelscharen die in der vereinigten Lage liegenden Elemente umhüllen sollen; das wird nützlich in späteren Erörterungen.

3. Die Transformationen der $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten werden, ganz analog wie die MÖBIUS-Abbildungen in M_n, durch die homogenen linearen Transformationen

$$(1.7) \qquad \overline{y}_i = \sum_{k=0}^{n+1} a_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

vermittelt, welche die Gleichung (2) invariant lassen, so dass

$$(1.8a) \qquad -\alpha_{0k}\alpha_{0l} + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}\alpha_{il} = 0 \qquad (k \neq l),$$

$$(1.8b) \qquad -\alpha_{0k}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ik}^2 = \begin{cases} -\sigma^2 & (k = 0), \\ +\sigma^2 & (k = 1, 2, \ldots, n+1) \end{cases}$$

bestehen, wobei σ nicht verschwindet. Nun möchten wir insbesondere solche Koordinatentransformationen näher untersuchen, die ein bestimmtes Hyperflächenelement oder eine bestimmte Schar der sich berührenden M-Hyperkugeln in sich überführen; wir nehmen der Bequemlichkeit wegen als diese Kugelschar die durch (1.4) definierte. Weil die Kugeln (1.4) durch (1.7) die neuen Koodinaten

$$\bar{y}_i = \frac{1}{2}\rho(a_{i0}+a_{i1})+\rho R a_{i2}$$

haben und diese dieselbe Gestalt wie (1.4) haben müssen, bestehen Relationen

(1.9a) $$a_{\lambda 0}+a_{\lambda 1} = 0\,, \qquad a_{\lambda 2} = 0\,,$$

(1.9b) $$a_{00}+a_{01} = a_{10}+a_{11}\ (=A \text{ gesetzt}),\quad a_{02} = a_{12}\ (=C \text{ gesetzt}),$$

wobei und im Folgenden die griechischen Buchstaben z.B. λ, μ, ν die Nummern 3, 4, ..., $n+1$ durchlaufen.

Aus (1.8 a) für die Wertepaare $(k, l) = (0,1), (0,2), (1,2)$ folgen die Relationen, berücksichtigt auf (1.9 a),

(1.10a) $$\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0}^2 = -a_{00}a_{01}+a_{10}a_{11}+a_{20}a_{21}\,,$$

(1.10b) $$-a_{00}a_{02}+a_{10}a_{12}+a_{20}a_{22} = 0\,,$$

(1.10c) $$-a_{01}a_{02}+a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} = 0\,.$$

In gleicher Weise ergeben sich die folgenden Relationen (1.11 a, b) aus (1.8 a) für $(k, l) = (0, \mu), (1, \mu), (2, \mu)$; (1.12 a, b) aus (1.8 b) $k = 0, 1, 2$:

(1.11a) $$\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0}a_{\lambda\mu} = a_{00}a_{0\mu}-a_{10}a_{1\mu}-a_{20}a_{2\mu} = -a_{01}a_{0\mu}+a_{11}a_{1\mu}+a_{21}a_{2\mu}\,,$$

(1.11b) $$-a_{02}a_{0\mu}+a_{12}a_{1\mu}+a_{22}a_{2\mu} = 0\,,$$

(1.12a) $$\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0}^2 = a_{00}^2-a_{10}^2-a_{20}^2-\sigma^2 = a_{01}^2-a_{11}^2-a_{21}^2+\sigma^2\,,$$

(1.12b) $$-a_{02}^2+a_{12}^2+a_{22}^2 = \sigma^2\,;$$

die letzte wird wegen (1.9 b)

$$a_{22} = \sigma , \tag{1.13}$$

somit ergibt sich auch aus (1.10 b, c)

$$a_{20} + a_{21} = 0 , \tag{1.14}$$

da σ nicht verschwindet. Aus (1.10 a) und (1.12 a) folgt

$$A(a_{00} - a_{10}) = \sigma^2 ,$$

daraus ersieht man, dass die Konstante A nicht verschwindet und

$$a_{00} - a_{10} = a_{11} - a_{01} = \frac{\sigma^2}{A} \tag{1.15}$$

ist. a_{20} hat die Gestalt wegen (1.9 b), (1.10 b), (1.13), (1.15)

$$a_{20} = \frac{C}{A}\sigma . \tag{1.16}$$

Weiter folgt aus (1.11 a)

$$A(a_{0\mu} - a_{1\mu}) = (a_{20} + a_{21})a_{2\mu} = 0$$

oder

$$a_{0\mu} = a_{1\mu} , \tag{1.17}$$

da $A \neq 0$, und aus (1.11 b), (1.17) haben wir

$$a_{2\mu} = 0 . \tag{1.18}$$

Sodann nehmen die Gleichungen (1.11 a) die Gestalt

$$\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0} a_{\lambda \mu} = \frac{\sigma^2}{A} a_{0\mu} \tag{1.19}$$

an. Und auch werden die Gleichungen (1.8 a, b) für $(k, l) = (\lambda, \mu)$ in der Form

$$\sum_{\nu=3}^{n+1} a_{\nu\lambda} a_{\nu\mu} = \sigma^2 \delta_{\lambda\mu} \tag{1.20}$$

geschrieben. Wir wollen unsere Resultate in einer Formel rekapitulieren:

$$
(1.21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\text{die Matrix } \left(\frac{a_{\lambda\mu}}{\sigma}\right) \text{ ist orthogonal,}\\
&a_{22}=\sigma, \quad (\lambda, \mu = 3, 4, \ldots\ldots, n+1);\\
&a_{00}+a_{01}=a_{10}+a_{11}=A, \quad a_{00}-a_{10}=a_{11}-a_{01}=\frac{\sigma^2}{A};\\
&a_{02}=a_{12}=C, \quad a_{20}=-a_{21}=\frac{C\sigma}{A};\\
&a_{\lambda 0}+a_{\lambda 1}=0, \ a_{\lambda 2}=0; \ a_{0\lambda}=a_{1\lambda}, \ a_{2\lambda}=0;\\
&\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0}^2 = a_{00}^2-a_{10}^2-a_{20}^2-\sigma^2,\\
&\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda 0}a_{\lambda\mu} = \frac{\sigma^2}{A}a_{0\mu}.
\end{aligned}
\right.
$$

Man soll darauf aufmerksam sein, dass für die Festlegung der in Frage kommenden Transformation, die man mit T bezeichnet, die von Null verschiedenen Konstanten A, σ, die Konstante C, und die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$, $a_{\lambda 0}$ (oder $a_{0\lambda}$) beliebig vorgegeben werden dürfen, nur unter der Bedingung, dass die Matrix $\left(\frac{a_{\lambda\mu}}{\sigma}\right)$ orthogonal ist. Alsdann folgt nämlich aus $\sum a_{\lambda 0}^2$ die Summe

$$
a_{00}+a_{10}=\frac{A}{\sigma^2}\sum_{\lambda} a_{\lambda 0}^2+\frac{C^2}{A}+A,
$$

somit werden die Koeffizienten der linearen Transformation nach (1.21) alle bestimmt, und (1.8 a, b), (1.9 a, b) folgen ohne weiteres.

§ 2. MÖBIUS-KUGELGEOMETRISCHE ÜBERTRAGUNG, EINGEFÜHRT IN DIE ELEMENT-MANNIGFALTIGKEIT.

4. In jedem Punkte einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n $(n \geqq 3)$ (die der ∞^n Wertesysteme, die n unabhängige Veränderlichen $z, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ annehmen können) wird jedes System $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ als die Koordinaten einer $(n-1)$-Richtung im Punkte aufgefasst, und ein

Hyperflächenelement bedeutet ein System von $2n-1$ Werten von z, x_i und p_i, wie in dem gewöhnlichen euklidischen Raume. Der Inbegriff der Hyperflächenlemente in X_n wird kurz nach LIE die Element-Mannigfaltigkeit genannt.

Der Begriff der vereinigten Lage von zwei unendlich benachbarten Hyperflächenelementen, etwa $(z, x; p)$ und $(z+dz, x+dx; p+dp)$, wird wie in § 1

$$(2.1) \qquad dz-p_i dx^i \equiv dz-\sum_{i=1}^{n-1} p_i dx^i = 0$$

erklärt; dieses Zueinanderstehen zweier Elemente ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig. Dabei wird die Koodinatentransformation durch die n Funktionen $\bar{z} = \bar{z}(z, x)$, $\bar{x}^i = \bar{x}^i(z, x)$ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante vermittelt. Es besteht somit

$$d\bar{z}-\bar{p}_i d\bar{x}^i = \rho\,(dz-p_i dx^i)\,.$$

Wenn man die bilineare Kovariante dieser PFAFFschen Gleichung berechnet und darin $dz-p_i dx^i = 0$ setzt, so wird

$$(2.2) \qquad [d\bar{p}_i d\bar{x}^i] = \rho\,[dp_i dx^i]$$

für $dz-p_i dx = 0$; im allgemeinen schreibt man für die Differentiationen d, δ die schiefsymmetrische Bilinearform $\omega_1(d)\,\omega_2(\delta)-\omega_1(\delta)\,\omega_2(d)$ von zwei PFAFFschen Ausdrücken $\omega_1(d)$, $\omega_2(d)$ kurz $[\omega_1(d)\omega_2(d)]$ oder $[\omega_1\omega_2]$. Aus der Formel geht hervor, dass in einem Hyperflächenelemente für eine Schar von benachbarten Elementen die Bedingungen $dz-p_i dx^i = 0$, $[dp_i dx^i] = 0$ geometrisch sind; in der Tat sind sie die Bedingungen dafür, dass die Schar ein Hyperflächenelement zweiter Ordnung bildet.

5. Nun wollen wir von der Voraussetzung ausgehen, dass jedem Hyperflächenelemente $(z, x; p)$ der Element-Mannigfaltigkeit ein MÖBIUS-Raum M_n zugeordnet wird. M_n ist selbstverständlich etwas ganz anderes als die affinen Mannigfaltigkeiten der Linienelemente, der Hyperflächenelemente usw. in dem betreffenden Elemente. Die sogenannte Übertragung kommt zu stande, indem der M_n jedes Elementes in den Räumen M_n aller benachbarten Elemente mittels je einer M-Abbildung abgebildet wird, so dass die Punkte bzw. M-Hyperkugeln

in M-Räumen der benachbarten Elemente einander entsprechen. Wir nennen diese Übertragung MÖBIUS-kugelgeometrisch oder konform.

In jedem zugeordneten M_n werde ein $(n+2)$-hypersphärisches Bezugssystem festgelegt. Die Übertragung wird definiert durch die Gleichungen

$$dy_i = \sum_{k=0}^{n+1} \omega_{ik} y_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1) \,, \tag{2.3}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass ω_{ik} von dem Elemente und der Wahl des Bezugssystems abhängige Differentialformen in den Differentialen dz, dx^i, dp_i der Koordinaten des Elementes sind. Die ω_{ik} sollen nur der Bedingung genügen, dass die Abbildung (2.3) die Gleichung (1.2) invariant lässt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür lauten:

$$\begin{gathered} \omega_{0i} = \omega_{i0} \,, \quad \omega_{ik} = -\omega_{ki} \,, \\ \omega_{00} = \omega_{11} = \ldots = \omega_{n+1,\,n+1} \,. \end{gathered} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{2.4}$$

Für ein beliebiges Feld der Punkte bzw. M-Hyperkugeln, definiert in jedem Elemente der Element-Mannigfaltigkeit, werden die kovarianten Differentiale durch

$$\delta y_i = dy_i - \sum_{k=0}^{n+1} \omega_{ik} y_k \tag{2.5}$$

gegeben, aber man kann nicht sogleich von den kovarianten Ableitungen reden.

Man hat so in der einfachsten Weise einen "gekrümmten" M-kugelgeometrischen Raum. Wenn die benachbarten M-Räume sich längs des geschlossenen Weges der Hyperflächenelemente schrittweise aufeinander abbilden lassen, so beträgt die Differenz zwischen Endwert und Anfangswert, die eine Verschiebung des Punktes bzw. der M-Hyperkugel darstellt:

$$Dy_i = \sum_{k=0}^{n+1} \Omega_{ik} y_k \,, \tag{2.6}$$

wobei man setzt

$$\Omega_{ik} = (\omega_{ik})' - \sum_{l=0}^{n+1} [\omega_{il}\omega_{lk}] . \tag{2.7}$$

(Mit Strich bezeichnet man die äussere Ableitung des Ausdrucks). Das sind die Strukturgleichungen des Raumes mit M-kugelgeometrischer Übertragung. Die Strukturgrössen Ω_{ik} genügen auch wie ω_{ik} den folgenden Gleichungen:

$$\begin{gathered} \Omega_{0i} = \Omega_{i0} , \quad \Omega_{ik} = -\Omega_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n+1) , \\ \Omega_{00} = \Omega_{11} = \ldots = \Omega_{n+1, n+1} . \end{gathered} \tag{2.8}$$

Durch äussere Ableitung von (2.7) wird erhalten

$$(\Omega_{ik})' + \sum_l [\Omega_{il}\omega_{lk}] - \sum_l [\omega_{il}\Omega_{lk}] = 0 . \tag{2.9}$$

Diese Gleichungen sind nach CARTAN "Das Theorem der Erhaltung der Krümmung".

Unter den Transformationen (1.7) der Bezugssysteme, wobei a_{ik} vom betreffenden Hyperflächenelemente $(z, x; p)$ abhängig sind, transformieren sich die Übertragungsparameter folgendermassen:

$$da_{ik} + \sum_{l=0}^{n+1} a_{il}\omega_{lk} = \sum_{l=0}^{n+1} \bar{\omega}_{il} a_{lk} \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n+1) . \tag{2.10}$$

6. Ferner setzen wir voraus, dass jedes Hyperflächenelement der Element-Mannigfaltigkeit in dem ihm zugeordneten M_n enthalten ist. Da dieser Umstand auch in solcher Weise aufgefasst wird, dass jeder M_n ein dem Hyperflächenelemente entsprechendes Element haben soll, so wird das Element in M_n ein *ausgezeichnetes* Bildelement des Hyperflächenelementes genannt.

Es ist stets möglich, die Bezugssysteme in jedem M_n so zu wählen, dass das ausgezeichnete Hyperflächenelement in M_n sich von der Hyperkugelschar (1.4)

$$y_0 = \frac{1}{2}\rho , \; y_1 = \frac{1}{2}\rho , \; y_2 = \rho R , \; y_3 = \ldots = y_{n+1} = 0 \tag{2.11}$$

umhüllen lässt; die so entstehenden Bezugssysteme nennen wir normal.

Jede T-Transformation in § 1 überführt die Normalsysteme in ebensolche, und umgekehrt.

Bei Umkreisung längs infinitesimales geschlossenen Weges der Elemente wandelt sich die ausgezeichnete Kugelschar (1.11) in die benachbarte um, deren einzelne Kugel von der ursprünglichen Kugel $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, ρR, $0, \ldots, 0$ um

$$(2.12) \qquad Dy_i = \frac{\rho}{2}(\Omega_{i0}+\Omega_{i1})+\rho R\Omega_{i2} \quad (i=0, 1, \ldots, n+1)$$

abweicht. Da nach (1.5) die Abweichung einer Kugelschar von der ausgezeichneten im allgemeinen durch die Grössen dy_0-dy_1, dy_3, $\ldots, dy_{n+1}$ gemesst wird, so gewinnt man einige speziellen Strukturgrössen aus den Koeffizienten von R in (2.12)

$$(2.13) \qquad \Omega_{02}-\Omega_{12}, \quad \Omega_{\lambda 0}+\Omega_{\lambda 1}, \quad \Omega_{\lambda 2} \quad (\lambda = 3, 4, \ldots, n+1).$$

Insbesondere heissen sie die Torsionsgrössen der M-kugelgeometrischen Übertragung, während die anderen von diesen unabhängigen Strukturgrössen die Krümmungsgrössen. Wir nennen eine Element-Mannigfaltigkeit von der Übertragung, deren Torsionsgrössen nicht alle verschwinden, eine Element-Mannigfaltigkeit mit der Torsion.

7. Wir stellen jetzt die folgende Forderung auf:

Forderung. Wenn der MÖBIUS-*Raum* $M_n(P)$ *von einem Elemente* P $(z, x; p)$ *sich in den* MÖBIUS-*Raum* $M_n(P+dP)$ *von einem benachbarten Elemente* $P+dP$ $(z+dz, x+dx; p+dp)$ *abbilden lässt, ist das ausgezeichnete Hyperflächenelement in* $M_n(P+dP)$ *dann und nur dann in der vereinigten Lage mit dem abgebildeten ausgezeichneten in* $M_n(P)$, *wenn die betreffenden Hyperflächenelemente* P *und* $P+dP$ *in derselben Beziehung wie oben stehen.*

Bei der Abbildung von $M_n(P)$ verändert sich eine Kugel der ausgezeichneten Kugelschar (2.11) um

$$dy_i = \frac{\rho}{2}(\omega_{i0}+\omega_{i1})+\rho R\omega_{i2} \quad (i=0, 1, \ldots, n+1).$$

Dafür, dass die zwei ausgezeichneten Hyperflächenelemente in der vereinigten Lage liegen, soll nach (1.6′)

$$dy_0 = dy_1 \quad \text{oder} \quad (\omega_{00}+\omega_{01})+2R\omega_{02} = (\omega_{10}+\omega_{11})+2R\omega_{12}$$

für alle R sein, d.h. $\omega_{02}-\omega_{12}$ verschwindet. Mit Rücksicht auf (2.1) erhalten wir also

$$\tilde{\omega} \equiv \omega_{02}-\omega_{12} = \lambda\,(dz-p_i dx^i)\ . \tag{2.14}$$

Dabei darf λ nicht verschwinden. Sonst stehen die zueinander benachbarten, ausgezeichneten Elemente stets in der vereinigten Lage, wenn auch P und $P+dP$ nicht so stehen, was gegen die Voraussetzung ist.

Die hier aufgestellte Forderung für die Übertragung ist offenbar geometrisch. Nach leichter Rechnung sehen wir, dass unter T-Transformation $\omega_{02}-\omega_{12}$ nur einen Faktor bekommt (vgl. (8.3)).

§ 3. PSEUDOSPHÄRENELEMENTE DER KUGELGEOMETRISCHEN ÜBERTRAGUNG.

8. In diesem §, ziehen wir in jedem Elemente P der Element-Mannigfaltigkeit die Umgebung erster Ordnung allein in Betracht.

Durch die Abbildung von der Übertragung hat das ausgezeichnete Element in jedem $M_n(P+dP)$ sein Bildelement in $M_n(P)$. Wenn das Bildelement einer bestimmten M-Hyperkugel $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, ρR, $0, \ldots, 0$ in M_n angehört (oder sie tangiert), soll diese M-Hyperkugel in $M_n(P)$ umgekehrt in eine M-Hyperkugel der ausgezeichneten Hyperkugelschar in $M_n(P+dP)$ übergeführt werden. Hierfür besteht nach Nr. 2

$$dy_0 = dy_1\,, \quad dy_3 = dy_4 = \ldots\ldots = dy_{n+1} = 0\,,$$
$$dy_i = \frac{1}{2}\rho(\omega_{i0}+\omega_{i1})+\rho R\omega_{i2}\,,$$

oder

$$(3.1)\quad \begin{cases} \text{(a)} & \tilde{\omega} \equiv \omega_{02}-\omega_{12} = 0\,, \\ \text{(b)} & (\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1})+2R\omega_{\lambda 2} = 0 \quad (\lambda = 3, 4, \ldots\ldots, n+1)\,. \end{cases}$$

Betrachten wir umgekehrt jedes zu P benachbarte Hyperflächenelement $P+dP$, welches diese Gleichung erfüllt, so tangiert das zugehörige ausgezeichnete Element zusammen mit dem ausgezeichneten Element in M_n dieselbe M-Hyperkugel (mit dem Radius R). Und zwar ist die Schar (oder die Gesamtheit) der benachbarten Elemente für einen beliebigen, aber bestimmten Wert R ein geometrisches Gebilde in der Element-Mannigfaltigkeit, bezüglich mit der kugelgeometrischen Übertragung. Diese Schar entspricht einem Flächenelement zweiter Ordnung von der M-Hyperkugel in M_n.

Es ist nicht im allgemeinen zu erwarten, dass diese Schar ein Flächenelement zweiter Ordnung in der Element-Mannigfaltigkeit umhüllt, sondern es folgt aus (3.1 a) nur, dass jedes ihrer Elemente in der vereinigten Lage mit P steht. Umhüllt sie speziell ein Flächenelement, so wollen wir das Flächenelement ein *Pseudosphärenelement* nennen.

Wir möchten uns im Folgenden mit der Übertragung, für die folgende Forderung erfüllt ist, beschäftigen:

Forderung. In jedem Hyperflächenelemente der Element-Mannigfaltigkeit bildet jede Schar, welche von den Gleichungen (3.1) definiert wird, ein nicht ausgeartetes Pseudosphärenelement.

9. Wir schreiben zuerst $\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}$, $\omega_{\lambda 2}$ in der Form

$$\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1} = A_\lambda+\tilde{a}_\lambda \tilde{\omega}\,, \quad \omega_{\lambda 2} = B_\lambda+\tilde{b}_\lambda \tilde{\omega}\,, \tag{3.2}$$

wobei A_λ, B_λ die $2(n-1)$ PFAFFschen Ausdrücke der $2(n-1)$ Differentiale dp_i, dx^i sind. Die Gleichungen (3.1) verwandeln wir in die Form

$$A_\lambda+2RB_\lambda = 0\,, \qquad dz = p_i dx^i\,. \tag{3.1'}$$

Wenn man ein bestimmtes, nicht ausgeartetes Flächenelement zweiter Ordnung, das in einem Hyperflächenelemente sich von einer Schar benachbarter Elemente umhüllen lässt, betrachtet, so werden die Drehungen der $(n-1)$-Richtung des Hyperflächenelementes eindeutig durch die Verschiebungen auf dem Element bestimmt, welche sein Zentrum macht. Daher *müssen die Gleichungen* $A_\lambda + 2RB_\lambda = 0$ *für allgemeinen Wert von* R *bezüglich mit* dp_i *lösbar sein.*

Wir setzen ferner das Folgende voraus, welches von der Wahl der Normalsysteme unabhängig (vgl. (8.2–4)) und übrigens, wie wir in der integrablen Übertragung in Nr. 11 sehen werden, zulässig ist:

Voraussetzung. Die $2(n-1)$ PFAFF*schen Ausdrücke A_λ, B_λ von $2(n-1)$ Differentialen dp_i, dx^i sind voneinander linear unabhängig.* Oder unabhängig sind die $2n-1$ PFAFFschen Ausdrücke $\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}$, $\omega_{\lambda 2}$, $\omega_{02}-\omega_{12}$.

10. Dafür, dass die zu $(z, x; p)$ benachbarten Elemente, welche von (3.1′) definiert werden, ein Flächenelement zweiter Ordnung bildend seien, ist es notwendig und hinreichend nach Nr. 4, dass dp_i aus (3.1′) die Gleichung

$$[dp_i dx^i] = 0$$

identisch bezüglich dx^i, δx^i erfüllen sollen. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich in der Gestalt

$$[dp_i dx^i] = \sum_{\lambda,\mu}^{3,n+1} a_{\lambda\mu}[A_\lambda B_\mu] + \sum_{\lambda,\mu}^{3,n+1} c_{\lambda\mu}[A_\lambda A_\mu] + \sum_{\lambda,\mu}^{3,n+1} d_{\lambda\mu}[B_\lambda B_\mu] \tag{3.3}$$

$$(c_{(\lambda\mu)} = 0\,, \quad d_{(\lambda\mu)} = 0)$$

schreiben, da nach der Voraussetzung voriger Nr. die PFAFFschen Ausdrücke A_λ, B_λ genau so viel wie dp_i, dx^i und linear unabhängig sind. Setzt man dann $A_\lambda = -2RB_\lambda$ in der obigen Gleichung, so erhält man

$$\sum_{\lambda,\mu}^{3,n+1}(4R^2c_{\lambda\mu} - 2Ra_{[\lambda\mu]} + d_{\lambda\mu})[B_\lambda B_\mu] = 0\,. \tag{3.4}$$

Die Gleichung (3.4) soll identisch bezüglich dx^i, δx^i erfüllt sein, indem statt jedes B_λ derjenige Ausdruck $\bar{B}_\lambda$ in die Gleichung eingesetzt wird, welcher durch die Ersetzung der von dx^i ausgedrückten dp_i (infolge (3.1′)) in B_λ erhalten wird. Es gelten die Relationen

$$\bar{B}_\lambda = B_\lambda + \sum_{\mu=3}^{n+1} l_{\lambda\mu}(A_\mu + 2RB_\mu)$$

mit passend gewählten Koeffizienten $l_{\lambda\mu}$. Die $n-1$ PFAFFschen Ausdrücke $\bar{B}_\lambda$ der Differentiale dx^i sind voneinander linear unabhängig, denn, wenn

$$\sum_{\lambda=3}^{n+1} k_\lambda \bar{B}_\lambda = 0$$

besteht, so haben wir

$$\sum_\mu A_\mu \sum_\lambda k_\lambda l_{\lambda\mu} + \sum_\mu B_\mu (2R \sum_\lambda k_\lambda l_{\lambda\mu} + k_\mu) = 0 ;$$

wegen der linearen Unabhängigkeit von A_λ, B_λ ferner

$$\sum_\lambda k_\lambda l_{\lambda\mu} = 0 , \quad k_\mu + 2R \sum_\lambda k_\lambda l_{\lambda\mu} = 0 ,$$

somit $k_\mu = 0$. Da nun die Gleichung (3.4) identisch für die $n-1$ linear unabhängigen $\bar{B}_\lambda$ an Stelle von B_λ erfüllt ist, so ergeben sich sofort

$$4R^2 c_{\lambda\mu} - 2R a_{[\lambda\mu]} + d_{\lambda\mu} = 0 . \tag{3.5}$$

Weil wir verlangen, dass nach der Forderung der Nr. 8 im allgemeinen für jeden Wert von R die Gleichung (3.5) erfüllt sei, erhalten wir

$$a_{[\lambda\mu]} = 0 , \quad c_{\lambda\mu} = 0 , \quad d_{\lambda\mu} = 0 , \tag{3.6}$$

folglich aus (3.3)

$$[dp_i dx^i] = \sum_{\lambda,\mu}^{3,n+1} a_{(\lambda\mu)} [A_\lambda B_\mu] . \tag{3.3'}$$

Diese sind die gesuchten Bedingungen unter der Voraussetzung im Nr. 9. Man kann leicht die geometrische Bedeutung dieser Voraussetzung klar machen.

11. Als eine Beispiel von den Räumen mit kugelgeometrischen Übertragungen möchten wir den 3-dimensionalen MÖBIUS-Raum M_3 betrachten, insbesondere unter der Zugrundlegung vom Normalsysteme in jedem Elemente die Parameter dieser integrablen Übertragung berechnen.

Der Raum M_3 (mit Ausnahme vom einzigen uneigentlichen Punkt) sei auf die festgelegten kartesischen Koordinaten (Z, X^1, X^2) bezogen. In jedem Flächenelemente $(z, x^i; p_i)$ wird ein kartesisches Bezugssystem (ξ^1, ξ^2, ξ^3) eingeführt, dessen ξ^1- bzw. ξ^2-Achse die in dem Zentrum gerichtete Normale des Elementes bzw. die Parallele zu der ZX^1-Ebene ist, so dass

$$(3.7) \qquad Z-z = b^1_1\xi^1 + b^1_2\xi^1 + b^1_3\xi^3\,, \quad \text{usw.},$$

wobei

(3.8)
$$b^i_k: \begin{pmatrix} (1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}, & p_1(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}, & p_2(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -p_1(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}, & (1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}, & -p_1p_2(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -p_2(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0\,, & (1+p_1^2)^{\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Bei einer infinitesimalen Verschiebung d des Hyperflächenelementes $(z,\ x^i;\ p_i)$ bestehen

$$(3.9) \qquad \begin{aligned} d\xi^i &= a^i_1\xi^1 + a^i_2\xi^2 + a^i_3\xi^3 + l^i\,, \qquad (i=1,\,2,\,3) \\ a^1_1 &= a^2_2 = a^3_3 = 0\,, \quad a^i_k + a^k_i = 0\,. \end{aligned}$$

Differenzierend (3.7), erhalten wir nach (3.9)

$$-dz = \sum_i b^1_i l^i\,, \quad -dx^1 = \sum_i b^2_i l^i\,, \quad -dx^2 = \sum_i b^3_i l^i\,;$$

$$db^i_k + \sum_j b^i_j a^j_k = 0 \qquad (i,\,k=1,\,2,\,3)\,,$$

woraus folgt

$$(3.10) \qquad \begin{cases} l^1 = -(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}(dz - p_i dx^i)\,, \\ l^3 = p_2(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}} l^1 - (1+p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}} dx^2, \\ l^2 = p_1(1+p_1^2)^{\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} l^1 - (1+p_1^2)^{\frac{1}{2}} dx^1 \\ \qquad + p_1p_2(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} l^3\,; \end{cases}$$

$$(3.11) \qquad \begin{cases} a^1_3 = p_1p_2(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}} dp_1 \\ \qquad - (1+p_1^2)^{\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-1} dp_2\,, \\ a^2_3 = p_2(1+p_1^2)^{-1}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} dp_1\,, \\ a^2_1 = (1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}} dp_1\,. \end{cases}$$

Nach der Verschiebung d wird das normale, pentasphärische Bezugssystem von der folgenden Transformation unterworfen (vgl. (1.1)) :

$$(3.12)\quad \begin{cases} dy_0 = d\log\rho\cdot y_0 + l^1 y_2 + l^2 y_3 + l^3 y_4\,, \\ dy_1 = d\log\rho\cdot y_1 - l^1 y_2 - l^2 y_3 - l_3 y_4\,, \\ dy_2 = l_1(y_0+y_1) + d\log\rho\cdot y_2 + a_2^1 y_3 + a_3^1 y_4\,, \ \text{usw.} \end{cases}$$

Dabei geben die Koeffizienten von $y_0, \ldots, y_4$ die Parameter ω_{ij}, speziell

$$\omega_{02} - \omega_{12} = l^1 - (-l^1) = 2l^1 = -2(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}(dz - p_i dx^i)\,.$$

Wenn $\omega_{02} - \omega_{12} = 0$ ist, so ist

$$\omega_{30} + \omega_{31} = 2l^2 = -2(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}dx^1 - 2p_1p_2(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}dx^2, \quad \omega_{32} = a_1^2\,,$$

$$\omega_{40} + \omega_{41} = 2l^3 = -2(1+p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}(1+p_1^2)^{-\frac{1}{2}}dx^2\,, \quad \omega_{42} = a_1^3\,.$$

A_3, A_4, B_3, B_4 sind allerdings linear unabhängig, und es ist

$$(3.13)\qquad [\,dp_i dx^i\,] = \frac{1}{2}(1+p_1^2+p_2^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=3}^{4}[\,A_\lambda B_\lambda\,]\,.$$

Die Gleichung (3.1′) lautet

$$(3.14)\qquad R = \frac{(1+p_1^2)dx^1 + p_1p_2dx^2}{(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}dp_1} \doteq \frac{(1+p_1^2+p_2^2)dx_2}{(1+p_1^2+p_2^2)^{-\frac{1}{2}}dp_1}\,.$$

Selbstverständlich gehört in diesem Fall jedes Pseudosphärenelement einer M-Kugel an. Aus (3.14) kann man leicht die Differentialgleichungen der Kugeln herleiten:

$$(3.15)\qquad \frac{1+p_1^2}{p_{11}} = \frac{p_1p_2}{p_{12}} = \frac{1+p_2^2}{p_{22}}\,.$$

§ 4 EINIGE KATEGORIEN VON DEN RÄUMEN, DEREN TORSIONSGRÖSSEN ALLE VERSCHWINDEN.

12. Im allgemeinen stützt die Klasseneinteilung der Übertragungen sich auf ihr Verhalten im Kleinen und im Grossen. Die Betrachtung im Grossen führt nach E. CARTAN naturgemäss in den Begriff der holonomischen Gruppe. Wir beschränken uns auf die Betrachtung im Kleinen, welche aber in unserer kugelgeometrischen Übertragung verschiedenerweise möglich ist, z.B. wir können die Umkreisung längs *jedes* oder *jedes um dasselbe Zentrum sich drehenden*(1) geschlossenen infinitesimalen Weges der Elemente betrachten. Man kann leicht einsehen, dass die in die Punktmannigfaltigkeit eingeführte konforme Übertragung nach E. CARTAN speziell hervortritt, wenn alle Strukturgrössen längs dieses Weges der Elemente ($dz=dx^1=\ldots=dx^{n-1}=0$) identisch verschwinden, mit Ausnahme von $\Omega_{00}=\Omega_{11}=\ldots=\Omega_{n+1,n+1}$.

Wir möchten im Folgenden einige einfachen Kategorien vorstellen, uns stützend auf die Betrachtung "jedes geschlossenen Weges".

(I) Die erste Kategorie ist von solchen Räumen, dass nach der Umkreisung längs jedes geschlossenen infinitesimalen Weges *nicht nur das ausgezeichnete Element in sich übergeführt wird, sondern auch jede auf diesem Elemente liegende Richtung, welche aus dem Zentrum des Elementes strahlt,* demgemäss bleiben alle Richtungen im Zentrum unverändert.

(II) Die zweite ist von solchen, dass nach der Umkreisung *nicht nur die ausgezeichnete Kugelschar, sondern auch eine der Schar gehörige Kugel unverändert bleibt.*

(III) Die dritte ist weniger beschränkt als (I) sowie (II), d.h. von den *Räumen, deren Torsionsgrössen alle verschwinden*:

$$\Omega_{02}=\Omega_{12}\,,\quad \Omega_{\lambda 0}+\Omega_{\lambda 1}=0\,,\quad \Omega_{\lambda 2}=0\,. \tag{4.1}$$

Wir machen zunächst eine unwesentliche Beschränkung auf die Übertragungsparameter. Der Parameter $\omega_{00}=\omega_{11}=\ldots=\omega_{n+1,n+1}$ bezieht sich sozusagen auf das Gewicht der Punkte oder der M-Hyperkugeln. Da wir uns nur mit der Lage der Punkte und der Kugeln beschäftigen, so darf in der Gleichung von der Abbildung benachbarter M-Räume

$$\omega_{00}=\omega_{11}=\ldots\ldots=\omega_{n+1,n+1}=0$$

gesetzt werden. Sodann ist auch

$$\Omega_{00}=\Omega_{11}=\ldots\ldots=\Omega_{n+1,n+1}=0\,,$$

da $\Omega_{00}=(\omega_{00})'-\sum_j[\omega_{0j}\,\omega_{j0}]$.

(1) Diese wird weit komplizierter als jene. Wir gehen auch nicht auf diesen Eall ein.

Ein zum Zentrum benachbarter Punkt auf dem ausgezeichneten Elemente, $d\xi^1 = 0$, $d\xi^2, \ldots, d\xi^n$, hat die $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten

$$\frac{1}{2}\rho, \quad \frac{1}{2}\rho, \quad 0, \quad d\xi^2, \quad \ldots\ldots, \quad d\xi^n,$$

und erfährt nach der Umkreisung eine Verschiebung dy_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$

$$dy_0 = dy_1 = \rho\left\{\frac{1}{2}\Omega_{01} + \sum_{\lambda=3}^{n+1}\Omega_{0\lambda}d\xi^{\lambda-1}\right\}, \quad dy_2 = 0, \quad dy_\lambda = \rho\sum_{\mu=3}^{n+1}\Omega_{\lambda\mu}d\xi^{\mu-1}.$$

Dafür, dass die beiden Punkte auf derselben Richtung aus dem Zentrum liegen, ist es notwendig und hinreichend, dass dy_{k+1} $(k = 2, 3, \ldots, n)$ zu $d\xi^k$ proportional ist. Also für (I) gelten

$$(4.2) \qquad \Omega_{02} = \Omega_{12}, \quad \Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1} = 0, \quad \Omega_{\lambda 2} = 0, \quad \Omega_{\lambda\mu} = 0.$$

Bei dieser Gelegenheit erkennen wir, dass im Fall (I) die Strukturgrössen $\Omega_{\lambda\mu}$ die Rotationskoeffizienten vom Richtungskörper aus dem Zentrum sind.

Für (II) haben wir ohne weiteres

$$(4.3) \qquad \Omega_{02} = \Omega_{12}, \quad \Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1} = 0, \quad \Omega_{\lambda 2} = 0, \quad \Omega_{01} + 2R\Omega_{02} = 0,$$

wobei R nur vom Hyperflächenelemente abhängig ist.

In der nächsten Nr. beschäftigen wir uns mit (III).

13. Es werde die Forderung in Nr. 7 und die Voraussetzung in Nr. 9 vorausgesetzt. Aus dieser Voraussetzung haben wir die lineare Unabhängigkeit der $2n-1$ Pfaffschen Ausdrücke

$$\tilde{\omega}, \quad \mathfrak{A}_\lambda \equiv \omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1}, \quad \mathfrak{B}_\lambda \equiv \omega_{\lambda 2} \qquad (\lambda = 3, 4, \ldots\ldots, n+1)$$

gesehen. Da nach (2.7)

$$(4.4) \qquad \begin{aligned} \Omega_{20} + \Omega_{21} &= (\omega_{20} + \omega_{21})' - \sum_{j=0}^{n+1}[\omega_{2j}, \ \omega_{j0} + \omega_{j1}] \\ &= (\tilde{\omega})' - [\tilde{\omega}\omega_{01}] - \sum_{\mu=3}^{n+1}[\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu] \end{aligned}$$

ist, folgt insbesondere

$$[dp_i dx^i] = -\frac{1}{\lambda}\sum_{\mu=3}^{n+1}[A_\mu B_\mu],$$

setzend $\tilde{\omega}=0$. Also wegen der ersten Bedingung von (3.1) wird die Forderung in Nr. 8 erfüllt (vgl. (3.3′)), d.h. in jedem Elemente des Raumes existiert eine Schar von Pseudosphärenelementen.

Von den Torsionsgrössen bedeutet $\Omega_{20}+\Omega_{21}=0$, dass das nach der Umkreisung transformierte, ausgezeichnete Elemente mit dem ursprünglichen in der vereinigten Lage liegt; $\Omega_{20}+\Omega_{21}=\Omega_{\lambda 0}+\Omega_{\lambda 1}=0$, dass das Zentrum in sich zurückgeführt wird; und schliesslich (4.1) die Invarianz des ausgezeichneten Elementes selbst.

(i) Aus $\Omega_{20}+\Omega_{21}=0$ folgt wegen des Theorems der Erhaltung der Krümmung (2.9)

$$\sum_{j=0}^{n+1}[\Omega_{2j},\ \omega_{j0}+\omega_{j1}]-\sum_{j=0}^{n+1}[\omega_{2j},\ \Omega_{j0}+\Omega_{j1}]=0, \tag{2.9}$$

oder, mit Rücksicht auf (4.1),

$$[\tilde{\omega}\Omega_{01}]=0;$$

daraus ergibt sich

$$\Omega_{01}=\sum_{\nu=3}^{n+1}a_\nu[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}]+\sum_{\nu=3}^{n+1}b_\nu[\mathfrak{B}_\nu\tilde{\omega}]. \tag{4.5}$$

(ii) Aus $\Omega_{\lambda 0}+\Omega_{\lambda 1}=0$ folgt ebenfalls

$$\sum_{\mu=3}^{n+1}[\Omega_{\lambda\mu}\mathfrak{A}_\mu]=[\mathfrak{A}_\lambda\Omega_{01}].$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\Omega_{\lambda\mu}&=\sum_{\nu,\omega}l_{\lambda\mu\nu\omega}[\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{A}_\omega]+\sum_{\nu,\omega}k_{\lambda\mu\nu\omega}[\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\omega]+\sum_{\nu,\omega}m_{\lambda\mu\nu\omega}[\mathfrak{B}_\nu\mathfrak{B}_\omega]\\&\quad+\sum_{\nu}l_{\lambda\mu\nu}[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}]+\sum_{\nu}k_{\lambda\mu\nu}[\mathfrak{B}_\nu\tilde{\omega}],\end{aligned} \tag{4.6}$$

so zerfällt die obige Relation in die folgenden fünf Gleichungen (a—e):

$$\sum_{\mu,\nu,\omega}l_{\lambda\mu\nu\omega}[\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{A}_\omega]=0, \tag{a}$$

welche im Fall $n = 3$, da μ, ν, ω nur die Nummern 3, 4 durchlaufen, identisch erfüllt wird und im Fall $n > 3$ die Relation $l_{\lambda[\mu\nu\omega]} = 0$ gibt, die aber unnötig wird (vgl. (4.6″));

(b) $$\sum_{\mu,\nu,\omega} k_{\lambda\mu\nu\omega} [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\omega] = 0\,,$$

woraus folgt $k_{\lambda\mu\nu\omega} - k_{\lambda\nu\mu\omega} = 0$ oder $k_{\lambda\mu\nu\omega} + k_{\nu\lambda\mu\omega} = 0$, aus der und deren zyklischen Vertauschung von λ, μ, ν sich $k_{\lambda\mu\nu\omega} = 0$ ergeben;

(c) $$\sum_{\mu,\nu,\omega} m_{\lambda\mu\nu\omega} [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{B}_\omega] = 0\,,$$

woraus folgt $m_{\lambda\mu\nu\omega} = 0$;

(d) $$\sum_{\mu,\nu} l_{\lambda\mu\nu} [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}] = \sum_\nu a_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}]\,,$$

woraus folgt, dass im Fall von ungleichen Indizes λ, μ, ν, welcher für $n = 3$ nicht eintritt, $l_{\lambda\mu\nu} = 0$, und andernfalls $l_{\lambda\mu\lambda} = -a_\mu$, $l_{\lambda\mu\mu} = a_\lambda$;

(e) $$\sum_{\mu,\nu} k_{\lambda\mu\nu} [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\nu \tilde{\omega}] = \sum_\nu b_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\nu \tilde{\omega}]\,,$$

woraus sich ohne weiteres ergibt $k_{\lambda\mu\nu} = 0$, $b_\nu = 0$. Zusammenfassend lassen sich (4.5) bzw. (4.6) folgendermassen umschreiben:

(4.5′) $$\Omega_{01} = \sum_\nu a_\nu [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}]\,,$$

(4.6′) $$\Omega_{\lambda\mu} = \sum_{\nu,\omega} l_{\lambda\mu\nu\omega} [\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{A}_\omega] + a_\lambda [\mathfrak{A}_\mu \tilde{\omega}] - a_\mu [\mathfrak{A}_\lambda \tilde{\omega}]\,.$$

(iii) Aus $\Omega_{\lambda 2} = 0$ folgt

$$[\Omega_{\lambda 0} \tilde{\omega}] + \sum_\mu [\Omega_{\lambda\mu} \mathfrak{B}_\mu] - [\mathfrak{A}_\lambda \Omega_{02}] = 0\,,$$

oder, einsetzend (4.6′),

(4.7) $$[\bar{\Omega}_{\lambda 0} \tilde{\omega}] + \sum_{\mu,\nu,\omega} l_{\lambda\mu\nu\omega} [\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{A}_\omega \mathfrak{B}_\mu] - [\mathfrak{A}_\lambda \Omega_{02}] = 0\,,$$

wobei gesetzt ist:

(4.8) $$\bar{\Omega}_{\lambda 0} = \Omega_{\lambda 0} + \sum_\mu a_\mu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\mu] - \sum_\mu a_\lambda [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\mu]\,.$$

Setzt man insbesondere $\tilde{\omega} = 0$, $\mathfrak{A}_\lambda = 0$ in (4.7), so ergibt sich

$$\sum_{\mu;\,\nu,\omega \neq \lambda} l_{\lambda\mu\nu\omega} [\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{A}_\omega \mathfrak{B}_\mu] = 0\,,$$

woraus folgt, dass $l_{\lambda\mu\nu\omega}$ für ungleiche Indizes λ, ν, ω $(n>3)$ verschwindet. Da ferner $l_{\lambda\mu\lambda\omega}=-l_{\mu\lambda\lambda\omega}$, sind alle Koeffizienten $l_{\lambda\mu\nu\omega}$ ausser $l_{\lambda\mu\lambda\mu}$, $l_{\lambda\mu\mu\lambda}$ verschwindend; somit schreiben wir (4.6′) in der Gestalt

$$(4.6'') \qquad \Omega_{\lambda\mu}=l_{(\lambda\mu)}[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\mu]-a_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\tilde{\omega}]+a_\lambda[\mathfrak{A}_\mu\tilde{\omega}].$$

Die Relation (4.7) wandelt sich zuletzt in

$$[\bar{\Omega}_{\lambda 0}\tilde{\omega}]-\Big[\mathfrak{A}_\lambda,\ \Omega_{02}-\sum_\mu l_{\lambda\mu}[\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu]\Big]=0$$

um. Setzt man

$$(4.9) \qquad \begin{aligned}\Omega_{02}-\sum_\mu l_{\lambda\mu}[\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu]&=\sum_{\nu,\omega}s_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{A}_\omega]+\sum_{\nu,\omega}\overset{\lambda}{t}_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\omega]+\\&+\sum_{\nu,\omega}u_{\nu\omega}[\mathfrak{B}_\nu\mathfrak{B}_\omega]+\sum_\nu c_\nu[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}]+\sum_\nu d_\nu[\mathfrak{B}_\nu\tilde{\omega}]\end{aligned}$$

(nur $\overset{\lambda}{t}_{\nu\omega}$ mag von λ abhängig werden), so erhält man

$$(4.10) \qquad \bar{\Omega}_{\lambda 0}=\sum_\mu c_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\mu]+\sum_\mu d_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu]+[\tilde{\omega}\,*],$$

und die Relation

$$\sum_{\nu,\omega}u_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\nu\mathfrak{B}_\omega]=\sum_{\nu,\omega}s_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{A}_\omega]=\sum_{\nu,\omega}\overset{\lambda}{t}_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\omega]=0,$$

woraus folgen $u_{\nu\omega}=0$ $(n\geqq 3)$, $s_{\nu\omega}=0$ $(n>3)$, für $\nu\neq\lambda$ $\overset{\lambda}{t}_{\nu\omega}=0$; also kann man schreiben $\sum_{\nu,\omega}\overset{\lambda}{t}_{\nu\omega}[\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B}_\omega]=\sum_\mu\overset{\lambda}{t}_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu]$. Da nach (4.9) $\sum_\mu l_{\lambda\mu}[\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu]+\sum_\mu\overset{\lambda}{t}_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu]$ von λ unabängig sein soll, haben wir

$$(4.11a) \qquad \text{für}\quad \lambda\neq\mu,\qquad \overset{\lambda}{t}_\mu=0,$$
$$\text{für}\quad \lambda=\mu,\qquad \overset{\lambda}{t}_\lambda=l_{\mu\lambda},$$

also wird

$$(4.11b) \qquad \overset{\lambda}{t}_\lambda=\overset{\mu}{t}_\mu=l_{\lambda\mu}=t$$

gesetzt, da $l_{\lambda\mu}=l_{\mu\lambda}$. Wir haben endlich die zusammenfassenden Resultate aus (4.5′), (4.6″), (4.9–11) erreicht:

$$
\text{(III)}\quad \boxed{\begin{aligned}
&\Omega_{\lambda\mu} = t[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\mu] - a_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\tilde{\omega}] + a_\lambda[\mathfrak{A}_\mu\tilde{\omega}], \quad \Omega_{\lambda 2} = 0, \\
&\Omega_{\lambda 0} = -\Omega_{\lambda 1} = \sum_\mu c_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\mu] + \sum_\mu (d_\mu - a_\mu)[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu] + a_\lambda \sum_\mu [\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu] \\
&\qquad + [\tilde{\omega} *], \qquad \Omega_{01} = \sum_\nu a_\nu[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}], \\
&\Omega_{02} = \Omega_{12} = t\sum_\mu [\mathfrak{A}_\mu\mathfrak{B}_\mu] + \sum_\nu c_\nu[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}] + \sum_\nu d_\nu[\mathfrak{B}_\nu\tilde{\omega}] \quad (n>3) \\
&\qquad = \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad + a[\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4] \qquad (n=3).
\end{aligned}}
$$

Aus dieser Formel speziell erkennt man, dass *in dem Raume* ($n>3$), *dessen Torsionsgrössen alle verschwinden, nach der infinitesimalen Umkreisung längs jedes Pseudosphärenelementes alle Kugeln der ausgezeichneten Kugelschar einzeln in sich übergeführt werden.* Denn die Grössen Ω_{01}, Ω_{02} verschwinden, wenn man setzt $\tilde{\omega} = 0$, $\mathfrak{A}_\mu + 2R\,\mathfrak{B}_\mu = 0$ (vgl. (3.1)), aber nicht im allgemeinen im Fall $n = 3$.

Bemerkung. Im Fall $n = 2$ wird unsere Übertragung eine M-kreisgeometrische. Für die Räume mit verschwindenden Torsionsgrössen haben wir ebenso wie oben

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{01} = a[\mathfrak{A}\tilde{\omega}], \qquad \Omega_{02} = \Omega_{12} = b[\mathfrak{B}\tilde{\omega}] + [\mathfrak{A} *], \\
&\Omega_{32} = 0, \qquad\quad \Omega_{30} = -\Omega_{31} = b[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\tilde{\omega} *].
\end{aligned}
$$

14. Nun möchten wir für (I) die Krümmungsgrössen diskutieren mit Hilfe von (III). Da nach (4.2) $\Omega_{\lambda\mu} = 0$, folgt $t = 0$, $a_\lambda = 0$, so dass folgendermassen gesetzt werden darf:

$$
\text{(4.12)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\Omega_{02} = \Omega_{12} = \sum_\nu c_\nu[\mathfrak{A}_\nu\tilde{\omega}] + \sum_\nu d_\nu[\mathfrak{B}_\nu\tilde{\omega}] \quad (n>3) \\
&\qquad = \quad ,, \quad ,, \quad + a[\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4] \quad (n=3), \\
&\Omega_{\lambda 0} = -\Omega_{\lambda 1} = \sum_\mu c_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{A}_\mu] + \sum_\mu d_\mu[\mathfrak{A}_\lambda\mathfrak{B}_\mu] + \sum_\mu c_{\lambda\mu}[\mathfrak{A}_\mu\tilde{\omega}] \\
&\qquad + \sum_\mu d_{\lambda\mu}[\mathfrak{B}_\mu\tilde{\omega}], \\
&\Omega_{\lambda\mu} = 0, \qquad \Omega_{\lambda 2} = 0, \qquad \Omega_{01} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

(i) Wegen $\Omega_{\lambda\mu} = 0$, haben wir nach dem Theorem der Erhaltung

$$
\sum_{j=0}^{n+1} [\Omega_{\lambda j}\omega_{j\mu}] = \sum_{j=0}^{n+1} [\omega_{\lambda j}\Omega_{j\mu}]
$$

oder

$$[\Omega_{\lambda 0}\mathfrak{A}_\mu] = [\mathfrak{A}_\lambda \Omega_{\mu 0}],$$

welche, einsetzend (4.12), in die folgenden zerfallen:

$$\sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{A}_\mu] = \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{A}_\lambda], \quad \sum_\nu d_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{A}_\mu] = \sum_\nu d_\nu [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\nu \mathfrak{A}_\lambda],$$

$$\sum_\nu c_{\lambda\nu} [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega} \mathfrak{A}_\mu] = \sum_\nu c_{\mu\nu} [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega} \mathfrak{A}_\lambda], \quad \sum_\nu d_{\lambda\nu} [\mathfrak{B}_\nu \tilde{\omega} \mathfrak{A}_\mu] = \sum_\nu d_{\mu\nu} [\mathfrak{B}_\nu \tilde{\omega} \mathfrak{A}_\lambda].$$

Daraus folgen: $c_\nu = 0$ $(n > 3)$, $d_\nu = 0$ $(n \geqq 3)$, $d_{\lambda\nu} = 0$ $(n \geqq 3)$, $c_{\lambda\nu} \neq 0$ für $\lambda \neq \nu$ $(n > 3)$, $c_{\lambda\lambda} + c_{\mu\mu} = 0$ für $\lambda \neq \mu$ $(n \geqq 3)$; im Fall $n > 3$, ferner aus $c_{\lambda\lambda} + c_{\mu\mu} = 0$ ergibt sich $c_{\lambda\lambda} = 0$. Daher verschwinden im Fall $n > 3$ alle Strukturgrössen, aber im Fall $n = 3$ ist dies nicht der Fall:

$$(4.12') \quad \begin{aligned} \Omega_{\lambda 0} &= \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu] + \sum_\nu c_{\lambda\nu} [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}], \\ \Omega_{02} &= \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}] + a [\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4], \quad c_{33} + c_{44} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Für $n = 3$ haben wir ferner wegen $\Omega_{01} = 0$

$$[\Omega_{02}\tilde{\omega}] + \sum_\lambda [\Omega_{\lambda 0}\mathfrak{A}_\lambda] = 0,$$

oder nach (4.12′)

$$(4.13) \quad a [\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4 \tilde{\omega}] + \sum_{\lambda,\nu} c_{\lambda\nu} [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}] = 0, \quad \text{folglich } c_{43} - c_{43} + a = 0.$$

Zusammenfassend aus (4.12′), (4.13), haben wir für die Räume von der Kategorie (I)

$$(\mathrm{I}) \quad \boxed{\begin{array}{ll} n > 3: & \text{Die Übertragung ist integrabel;} \\ n = 3: & \Omega_{\lambda 0} = -\Omega_{\lambda 1} = \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu] + \sum_\nu c_{\lambda\nu} [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}], \quad \Omega_{\lambda 2} = 0, \\ & \Omega_{02} = \Omega_{12} = a [\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4] + \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}], \quad \Omega_{01} = 0, \\ & \Omega_{\lambda\mu} = 0, \quad c_{33} + c_{44} = 0, \quad c_{34} - c_{43} + a = 0. \end{array}}$$

15. Nun wenden wir uns zu dem Fall (II). Im Vergleich von (4.3) mit der Formel (III) haben wir

$$t = 0, \qquad d_\nu = 0, \qquad a_\nu = -2Rc_\nu,$$

wo aber $R \neq 0$ vorausgesetzt ist; somit auch

$$(4.14)\quad \begin{cases} \Omega_{01} = -2R\sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}], \quad \Omega_{02} = \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\nu \tilde{\omega}], \\ \Omega_{\lambda\mu} = 2R\big(c_\mu [\mathfrak{A}_\lambda \tilde{\omega}] - c_\lambda [\mathfrak{A}_\mu \tilde{\omega}]\big), \\ \Omega_{\lambda 0} = \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\nu] + 2R\sum_\mu c_\mu [\mathfrak{A}_\lambda \mathfrak{A}_\mu] - 2Rc_\lambda \sum_\mu [\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\mu] + [\tilde{\omega}\, *]. \end{cases}$$

Die äussere Ableitung der Gleichung $\Omega_{01}+2R\,\Omega_{02}=0$ lautet nach dem Theorem der Erhaltung der Krümmung

$$2[dR\,\Omega_{02}] = \sum_j [\Omega_{0j},\, \omega_{j1}+2R\omega_{j2}] - \sum_j [\omega_{0j},\, \Omega_{j1}+2R\Omega_{j2}],$$

oder, wegen (4.3),

$$= \sum_{\lambda=3}^{n+1} [\Omega_{\lambda 0},\, \mathfrak{A}_\lambda + 2R\mathfrak{B}_\lambda] - 2R[\Omega_{02},\, \omega_{01}+2R\omega_{02}] + (1+4R^2)\;[\Omega_{02}\tilde{\omega}].$$

Da Ω_{02} für $\tilde{\omega}=0$ verschwindet, ergibt sich insbesondere

$$\sum_{\lambda=3}^{n+1} [\Omega_{\lambda 0},\, \mathfrak{A}_\lambda + 2R\mathfrak{B}_\lambda] = 0 \quad \text{für} \quad \tilde{\omega} = 0;$$

daraus folgt

$$c_\lambda = 0.$$

Nach (14) verschwinden Ω_{01}, Ω_{02}, $\Omega_{\lambda\mu}$ identisch; daher bleiben nur die Koeffizienten $c_{\lambda\nu}$ $(n=3)$ nach der Formel (I) nicht verschwindend, aber aus der äusseren Ableitung von $\Omega_{02}=0$ folgt ohne weiteres $c_{\lambda\nu}=0$.

Somit *charakterisiert die Eigenschaft (II) die integrable, kugelgeometrische Übertragung* $(n \geqq 3)$.

Im nächsten § wird man eine neue interessante Kategorie von den Übertragungen finden, welche für $n>3$ weniger beschränkt sind als die Räume, deren Torsionsgrössen alle verschwinden.

§ 5. DIE UNBEDINGTE INTEGRABILITÄT DER PSEUDOSPHÄREN.

16. Im § 3 haben wir gelernt, dass, wenn die Übertragungsparameter die Gleichung (3.6) erfüllen, jedem Hyperflächenelemente der

Element-Mannigfaltigkeit ein-parametrige Pseudosphärenelemente zugeordnet werden, deren jedes ein Art von Hyperflächenelementen zweiter Ordnung ist. Diese Hyperflächenelemente sind im allgemeinen nicht integrabel, genauer, man erwartet nicht, dass die simultanen Differentialgleichungen (3.1′) oder

$$\text{(5.1)} \qquad \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} = \ldots\ldots = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} (= -2R)\,, \quad \tilde{\omega} = 0$$

eine Lösung

$$\text{(5.2)} \qquad z = z\,(x^1\,,\, x^2\,,\,\ldots\ldots\,,\, x^{n-1})$$

gestatten, folglich noch weniger eine Lösung (5.2) mit den beliebigen Anfangsbedingungen:

$$\text{(5.3)} \qquad z = z^0\,,\ p_i = p_i^0\,,\quad R = R^0 \qquad \text{für}\ x^i = x^{i0} \quad (i = 1,\,2,\,\ldots\ldots\,,\,n-1)\,;$$

die letzte Integrabilität nennen wir unbedingt. Wenn aber die Differentialgleichungen (5.1) unbedingt integrabel sind, so gehört jedes Pseudosphärenelement in dem passenden Bereiche der Element-Mannigfaltigkeit einer einzigen Hyperfläche (5.2) an.

Andererseits wollen wir die Integrabilität der *Pseudosphärenelemente von der Übertragung* folgendermassen auffassen: *Es sei eine Hyperfläche in der Element-Mannigfaltigkeit vorgelegt, welche als eine Umhüllung ihrer Hyperflächenelemente erster Ordnung angesehen wird. Jedes von ihren Hyperflächenelementen zweiter Ordnung ist ein Pseudosphärenelement, und, wenn man jeden geschlossenen infinitesimalen Weg auf der Hyperfläche umkreist, wird diejenige Kugel von der ausgezeichneten Schar, welche dem Pseudosphärenelement in dem Anfangselemente des Weges entspricht, in sich übergeführt.* Dafür ist die Integrabilität von (5.1) notwendig. Die Hyperfläche lässt sich eine Pseudosphäre heissen.

Für die Übertragung stellen wir die folgende Forderung, welche uns in eine bereits berichtete, wichtige Kategorie führt:

Forderung. Die Pseudosphären der Übertragung seien unbedingt integrabel, d.h. unter den beliebigen Anfangsbedingungen (5.3) integrabel.

Für die unbedingte Integrabilität von den Pseudosphären ist die der Differentialgleichungen (5.1) notwendig. Da diese aber nicht hinreichend ist, wie man im Folgenden sehen kann, hat man die beiden Integrabilitäten scharf zu unterscheiden. Die infinitesimalen Verschiebungen der Kugel $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, ρR, 0, ..., 0 nach der Umkreisung sind

$$Dy_i = \frac{1}{2}\rho\left[(\Omega_{i0}+\Omega_{i1})+2R\Omega_{i2}\right],$$

welche, infolge der obigen Forderung, wegen $A_\lambda + 2RB_\lambda = 0$, $\tilde{\omega}=0$ zu den Koordinaten der Kugel proportional sind, oder

$$Dy_0 : Dy_1 : \ldots : Dy_{n+1} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : R : 0 : \ldots : R. \tag{5.4}$$

Und zwar muss dies für jeden Wert R geschehen.

17. Erstens erhalten wir aus $Dy_0 = Dy_1$

$$\Omega_{20}+\Omega_{21} = 0 \qquad \text{für} \quad (3.1').$$

Da nach (4.4)

$$\Omega_{20}+\Omega_{21} = (\tilde{\omega})' - [\tilde{\omega}, \omega_{00}+\omega_{01}] - \sum_{\mu=3}^{n+1}[\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{B}_\mu]^{(1)}$$

ist, wandelt sich die Relation in

$$[dp_i dx^i] = 0 \qquad \text{für} \quad (3.1') \tag{5.5}$$

um; was nichts anderes ist als die Forderung in § 3. Somit folgt nebenbei die andere Auseinandersetzung von derselben Forderung: *Das ausgezeichnete Hyperflächenelement in M_n werde in die vereinigte Lage gebracht, nach der Umkreisung längs jedes geschlossenen infinitesimalen Weges, dessen unendlich benachbarte Elemente sich von den Gleichungen (5.1) für beliebigen Wert R definieren lassen.* Setzen wir

(1) Im jetzigen § setzen wir nicht voraus, dass die Parameter $\omega_{00} = \omega_{11} = \ldots = \omega_{n+1,\,n+1}$ verschwindend sei, was überhaupt keine Unbequemlichkeit in die Erörterung führt.

$$dp_i = \sum_{\mu} (P_{i\mu} A_\mu + Q_{i\mu} B_\mu), \quad dx^i = \sum_{\mu} (X^i_\mu A_\mu + Y^i_\mu B_\mu); \tag{5.6}$$
$$A_\lambda = a^j_\lambda dp_j + c_{\lambda j} dx^j, \quad B_\lambda = b^j_\lambda dp_j + d_{\lambda j} dx^j,$$

so lassen sich die Integrabilitätsbedingungen (3.6) in der Gestalt

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} P_{i[\mu} X^i_{\nu]} = \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i[\mu} Y^i_{\nu]} = \sum_{i=1}^{n-1} (P_{i[\mu} Y^i_{\nu]} + Q_{i[\mu} X^i_{\nu]}) = 0$$

schreiben. Die Relation (5.5) ist offenbar notwendig für die Integrabilität von (5.1); in der Tat, infolge dieser Relation können wir die Differentialgleichungen (5.1) in die gewöhnlichen Gestalten, wie (3.15) im integrablen Fall, umschreiben:

$$\frac{\sum_j a^j_\lambda p_{jk} + c_{\lambda k}}{\sum_j b^j_\lambda p_{jk} + d_{\lambda k}} = -2R \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 3, 4, \ldots\ldots, n+1, \\ k = 1, 2, \ldots\ldots, n-1 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

von welchen nur $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ voneinander unabhängig sind.

18. Zweitens betrachten wir $Dy_\lambda = 0$ oder

$$(\Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1}) + 2R\Omega_{\lambda 2} = 0 \qquad \text{für} \quad (3.1'). \tag{5.8}$$

Da, wie leicht bestätigt wird,

$$\Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1} = (\omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1})' - \sum_{\mu} [\omega_{\lambda\mu}, \omega_{\mu 0} + \omega_{\mu 1}] \tag{5.9}$$
$$-[\omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1}, \omega_{00} + \omega_{01}] - [\omega_{\lambda 2}, \omega_{20} + \omega_{21}],$$

$$\Omega_{\lambda 2} = (\omega_{\lambda 2})' - \sum_{\mu} [\omega_{\lambda\mu} \omega_{\mu 2}] - [\omega_{\lambda 0} \omega_{02}] - [\omega_{\lambda 1} \omega_{12}] - [\omega_{\lambda 2} \omega_{22}] \tag{5,10}$$

sind, wird (5.5) in

$$A'_\lambda + 2RB'_\lambda = [A_\lambda, \omega_{01} + 2R\omega_{02}] \qquad \text{für} \quad (3.1') \tag{5.11}$$

verwandelt, denn unter der Relation (3.1') sind

$$\mathfrak{A}'_\lambda = (A_\lambda + \tilde{a}_\lambda \tilde{\omega})' = A' + [d(\lambda \tilde{a}_\lambda), \tilde{\omega}] - \lambda \tilde{a}_\lambda [dp_i dx^i] = A'_\lambda$$

wegen (5.5), und auch $\mathfrak{B}'_\lambda = B'_\lambda$. Wir setzen für $\tilde{\omega} = 0$

$$\omega_{02} = \sum_{\lambda} a_\lambda A_\lambda + \sum_{\lambda} b_\lambda B_\lambda, \quad \omega_{01} = \sum_{\lambda} c_\lambda A_\lambda + \sum_{\lambda} d_\lambda B_\lambda, \tag{5.12}$$

mithin nehmen die beiden für (3.1′) die Ausdrücke $\sum_\lambda (b_\lambda - 2Ra_\lambda)\,\overline{B}_\lambda$ bzw. $\sum_\lambda (d_\lambda - 2Rc_\lambda)\,\overline{B}_\lambda$ an. Durch die Einsetzung von diesen Ausdrücke und (5.6) ergeben sich die Relationen

$$
\text{(ii)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\Big[(a_\lambda^{[j:k]}+2Rb_\lambda^{[j:k]})(Q_{j\rho}-2RP_{j\rho})(Q_{k\sigma}-2RP_{k\sigma})+\Big\{(a^j_{\lambda,k}-c^{\,j}_{\lambda k})\\
&\quad +2R(b^j_{\lambda,k}-d^{\,j}_{\lambda k})\Big\}(Q_{j[\rho}-2RP_{j[\rho})(Y^k_{\sigma]}-2RX^k_{\sigma]})+(c_{\lambda[j,k]}+2Rd_{\lambda[j,k]})\times\\
&\quad (Y^j_\rho-2RX^j_\rho)(Y^k_\sigma-2RX^k_\sigma)\Big]=\delta_{\lambda[\rho}\Big\{-8R^3a_{\sigma]}+4R^2(b_{\sigma]}-c_{\sigma]})+2Rd_{\sigma]}\Big\}\\
&\qquad\qquad (\lambda,\ \rho,\ \sigma = 3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ n+1)\\
&\Big(a_\lambda^{j:k}=\frac{\partial}{\partial p_k}a^j_\lambda,\quad a^j_{\lambda,}\ =\frac{\partial}{\partial x^k}a^j_\lambda+p_k\frac{\partial}{\partial z}a^j_\lambda,\ \text{usw.}\Big)
\end{aligned}
\right.
$$

sogleich aus den Koeffizienten von $[\overline{B}_\rho \overline{B}_\sigma]$; dabei erinnere man sich an die lineare Unabhängigkeit von $\overline{B}_\lambda$. Vergleichen wir die Koeffizienten von den Polynomen bezüglich R in beiden Seiten von (ii) so erhalten wir neue Integrabilitätsbedingungen. Aus (ii) folgen insbesondere die von A_λ, B_λ ausgedrückten a_λ, $b_\lambda - c_\lambda$, d_λ.

Nebenbei machen wir eine Bemerkung über die Integrabilität der Differentialgleichungen (5.1). Aus der äusseren Ableitung von $A_\lambda + 2RB_\lambda = 0$ folgt

$$
(5.13)\qquad A'_\lambda + 2RB'_\lambda = 2\,[B_\lambda,\, dR] \qquad \text{für}\quad (3.1')\,.
$$

Wenn man an Stelle von dR den Ausdruck $dR = -R\,(\omega_{01}+2R\omega_{02})$ einsetzt, so erhält man die Integrabilitätsbedingung (5.11) der Pseudosphären; für die Übertragung gilt in der Tat

$$
(5.14)\qquad
\begin{aligned}
dR &= \frac{y_2+dy_2}{2(y_0+dy_0)} - R = -R(\omega_{01}+2R\omega_{02})\\
&= -\sum_\lambda R(-4a_\lambda R^2 + 2(b_\lambda - c_\lambda)R + d_\lambda)B_\lambda
\end{aligned}
$$

längs jedes Pseudosphärenelementes. Aus (5.11) und (5.13) sehen wir, dass wegen der Bedingungen (ii) die Gleichungen (5.13) notwendigerweise erfüllt werden. Die Koeffizienten von $[\overline{B}_\rho \overline{B}_\sigma]$ in $A'_\lambda + 2RB'_\lambda$ sind gleich der linken Seite von (ii), und aus den Gleichungen (5.13) lässt sich der Ausdruck $\sum_\rho f_3{}^\rho(R)\,\overline{B}_\rho$ für dR (das Differential von R in den Differentialgleichungen (5.1)) finden, wo $f_3{}^\rho(R)$ je ein Polynom dritter

Ordnung von R ist. Dagegen fehlt dem Ausdruck dR (die Variation von R bei der Übertragung) das Glied nullter Ordnung in R, daher sind hier die Bedingungen für die Pseudosphären überhaupt beschränkter als die für die Differentialgleichungen (5.1). Da aber im Fall, dass $A_\lambda(\lambda = 3, 4, \ldots, n+1)$ PFAFFsche Ausdrücke *nur in* dx^i sind, d.h. $a_\lambda^j \equiv 0$, $Y_\lambda^j \equiv 0$, das Glied nullter Ordnung in der linken Seite von (ii) verschwindend ist, so nimmt das Polynom $f_3{}^p(R)$ je die Gestalt $Rf_2{}^p(R)$ an, so dass zwischen beiden Bedingungen (5.11), (5.13) kein Unterschied existiert, nur ausser dass (5.1′) die Funktionen a_λ, $b_\lambda - c_\lambda$, d_λ in ω_{02}, ω_{01} bestimmen, während die Koeffizienten von $f_2{}^p(R)$ für die Differentialgleichungen keine Bedeutung haben.

Bemerkung. Wenn A_λ nur von dx^i abhängig sind, so bleibt das Zentrum des ausgezeichneten Elementes in M_n bei jeder infinitesimalen Verschiebung des Hyperflächenelementes (in Element-Mannigfaltigkeit), welche sein Zentrum unverändert lässt, unbeweglich. Vgl. auch (8.2).

19. Drittens folgt aus $Dy_0 : Dy_3 = \frac{1}{2} : R$

$$\Omega_{01} + 2R\Omega_{02} = 0 \qquad \text{für} \quad (3.1'),$$

oder

$$\omega'_{01} + 2R\omega'_{02} = 2R[\omega_{01}\omega_{02}] \qquad \text{für} \quad (3.1');$$

daraus folgt

$$\bar{\omega}'_{01} + 2R\bar{\omega}'_{02} = 2R[\bar{\omega}_{01}\bar{\omega}_{02}] \quad \text{oder} \quad (\bar{\omega}_{01} + 2R\bar{\omega}_{02})' = 0 \quad \text{für} \quad (3.1'),$$

da

$$\omega'_{01} = \bar{\omega}'_{01}, \quad \omega'_{02} = \bar{\omega}'_{02} \qquad \text{für} \quad (3.1')$$

bestehen, wenn man mit $\bar{\omega}_{01}$, $\bar{\omega}_{02}$ die PFAFFschen Ausdrücke in dx^i, welche sich durch Einsetzung von (3.1′) in ω_{01}, ω_{02} erhalten lassen, bezeichnet. Mithin kennen wir nach (5.14), dass die dritte Bedingung die folgende Beziehung bedeutet:

(5.15) $$(d \log R)' = 0 \qquad \text{für} \quad (3.1').$$

Ihre Gestalt nicht ausführend, begnügen wir uns mit der folgenden

(iii) $$\sum_\lambda \left\{(-4a_\lambda R^2 + 2(b_\lambda - c_\lambda)R + d_\lambda)\bar{B}_\lambda\right\}' = 0 \quad \text{für} \ (3.1').$$

Nun sind infolge (i), (ii), (iii) die Differentialgleichungen (5.1) unbedingt integrabel. Sie lassen sich nämlich wegen (i) in der gewöhnlichen Form (5.7) schreiben, es existiert wegen (ii) der Ausdruck $\sum_{\rho} f_3{}^{\rho}(R)\overline{B}_{\rho}$ für dR, so dass jede äussere Ableitung von (3.1′) identisch verschwindet, und schliesslich verschwindet die äussere Ableitung von dR unter (5.1) wegen (iii) (od. (5.15)). Somit sind die drei Systeme von den Bedingungen nicht nur notwendig für die unbedingte Integrabilität der Pseudosphären, sondern auch hinreichend.

Im Fall $a_{\lambda}^{j}\equiv 0$ ist für die Integrabilität von (5.1) die Bedingung (iii) *notwendig*, darin aber an Stelle von a_{λ}, $b_{\lambda}-c_{\lambda}$, d_{λ} die entsprechenden Koeffizienten von $f_2{}^{\lambda}$ eingesetzt werden sollen. Wir wissen jetzt, dass *im Fall* $a_{\lambda}^{j}\equiv 0$ *die oben-genannten zwei Integrabilitäten äquivalent sind, ausser dass die Funktionen* a_{λ}, $b_{\lambda}-c_{\lambda}$, d_{λ} *für die Übertragung daraus eindeutig bestimmt werden.*

§ 6. BEZIEHUNGEN DER KUGELGEOMETRISCHEN ÜBERTRAGUNGEN ZU DEN BEWEGUNGSGEOMETRISCHEN ÜBERTRAGUNGEN.

20. Die Beziehungen der MÖBIUS-Geometrie zu der euklidischen bzw. nichteuklidischen Geometrie sind wohl bekannt. Die Gesamtheit der M-Abbildungen, welche einen fest bestimmten Punkt (bzw. eine reelle oder nullteilige Kugel) in sich führen lassen, bildet nämlich eine Untergruppe der Gruppe von MÖBIUS, welche der euklidischen (bzw. hyperbolisch- oder elliptisch-nichteuklidischen) Bewegungsgruppe ähnlich ist (vgl. [1]). Wir können in unserer kugelgeometrischen Übertragungslehre analoge Beziehungen erwarten, wie wir im Folgenden kurz skizzieren.

Jedem geschlossenen Weg der Element-Mannigfaltigkeit, die ein Hyperflächenelement als das Anfangs- und das Endelement hat, entspricht eine M-Abbildung in dem MÖBIUS-Raum M_n, der zum Hyperflächenelement adjungiert ist. Die Gesamtheit solcher M-Abbildungen für alle möglichen Wege bildet die sogenannte holonomische Gruppe in dem betreffenden Elemente. Die holonomischen Gruppen in den verschiedenen Elementen sind einander isomorph, daher kann man in jedem Elemente der Element-Mannigfaltigkeit ein passendes Bezugssystem wählen, so dass die holonomischen Gruppen in analytischer Schreibweise identisch sind. Überdies lassen sich die Bezugssysteme in allen Elementen ferner so auswählen, dass die holonomische Gruppe analytisch die Rolle der Fundamentalgruppe von der Übertragung spielt oder dass die Abbildung jeder zwei benachbarten M-Räume analytisch zu der holonomischen Gruppe gehört (siehe [3]).

21. Erstens setzen wir voraus, dass alle Abbildungen der holonomischen Gruppe einen bestimmten Punkt, der vom Zentrum des ausgezeichneten Elementes verschieden ist, in sich überführen lassen. Nach passender Wahl vom Normalsysteme wird dieser Punkt die Koordinaten $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$ haben, denn umgekehrt kann man nach der T-Transformation den Punkt $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$ in einen anderen beliebigen Punkt transformieren; dafür ist es genug, die Koeffizienten der Transformation a_{ij} so zu wählen, dass die $n+1$ Ausdrücke $a_{00}-a_{01}$, $a_{i0}-a_{i1}=2a_{i0}$ $(i = 2, 3, \ldots, n+1)$ die vorgegebenen Werte annehmen (vgl. (1.21)). Somit lässt sich ferner das Normalsystem in jedem Elemente der Element-Mannigfaltigkeit nach dem Satz voriger Nr. so auswählen, dass die Abbildungen der Fundamentalgruppe von der Übertragung den Punkt $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$ invariant lassen. Sodann findet man

$$\omega_{20} = \omega_{21}, \quad \omega_{\lambda 0} = \omega_{\lambda 1} \qquad (\lambda = 3, 4, \ldots, n+1), \tag{6.1}$$

da $\omega_{i0}-\omega_{i1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ zu $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$ proportional sein soll.

Wir können den invarianten Punkt als uneigentlich in dem euklidischen Raume interpretieren. Da für den reellen eigentlichen Punkt $y_0 + y_1 \neq 0$ gilt, werden die n geordneten Werte

$$\xi^{i-1} = \frac{y_i}{y_0+y_1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n+1) \tag{6.2}$$

als die kartesischen Koordinaten dieses Punktes angesehen (vgl. (1.1)). Aus der Gleichung der Übertragung ergibt sich wegen (6.1)

$$d(y_0+y_1) = (\omega_{00}+\omega_{10})(y_0+y_1)\,, \quad dy_i = \omega_{i0}(y_0+y_1)+\sum_{k=2}^{n+1}\omega_{ik}\,y_k$$
$$(i = 2, 3, \ldots\ldots, n+1)\,,$$

daraus folgen für die eigentlichen Punkte

$$(6.3) \qquad d\xi^i = \omega_{i+1}+\sum_{k=1(k\neq i)}^{n}\omega_{i+1,\,k+1}\xi^k-\omega_{10}\xi^i \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)\,,$$

welche in der Element-Mannigfaltigkeit eine *euklidisch-bewegungsgeometrische* Übertragung definieren. In der Tat bleibt die Gleichung

$$(\xi^1-\eta^1)^2+(\xi^2-\eta^2)^2+\ldots\ldots+(\xi^n-\eta^n)^2 = 0$$

unter der Abbildung (6.3) unverändert, da für $i, j = 2, \ldots, n+1$ $\omega_{ij} = -\omega_{ij}$ $(i \neq j)$ ist.

Wird die Forderung in Nr. 7 erfüllt, so ist nach (6.1)

$$\omega_{20} = \frac{\lambda}{2}(dz-p_i dx^i)\,.$$

Auch in diesem Fall werden die Integrabilitätsbedingungen der Pseudosphären formelhaft abgeleitet. Aber insbesondere kommt die Integrabilität der Pseudosphären mit $R = \infty$ in Frage, deren jede einer M-Hyperkugel in M_n durch den uneigentlichen Punkt entspricht, oder in dem euklidischen Raum eine das ausgezeichnete Element tangierende Hyperebene. Ihre Gleichungen sind

$$(6.4) \qquad B_\lambda = 0\,, \quad \omega_{20} = 0 \qquad (\lambda = 3, 4, \ldots\ldots, n+1)\,,$$

deren unbedingte Integrabilität sich in folgender Weise erklären lässt: Nach der Umkreisung längs (6.4) soll die zu (6.4) entsprechende Hyperebene in dem euklidischen Raume in sich übergeführt werden. Dadurch erreicht man an den Bedingungen

$$\Omega_{20} = \Omega_{21} = \Omega_{\lambda 2} = 0 \qquad \text{für} \quad (6.4)\,,$$

welche aber in $B'_\lambda = 0$, $\omega'_{20} = 0$ zurückkehren. Wenn also die Differentialgleichungen (6.4) unbedingt integrabel sind, so wird die Element-Mannigfaltigkeit, welche mit der in Betracht gezogenen Übertragung ausgestattet ist, ein spezieller Raum von "$(n-1)$-spreads" (vgl. [6]).

22. Zweitens tritt der Fall ein, dass jede Abbildung der holonomischen Gruppe eine bestimmte, reelle bzw. nullteilige Kugel, die nicht das Zentrum des ausgezeichneten Elementes enthält, in sich überführt. Die $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten (y_i^0) dieser Kugel genügen sodann der Bedingung

$$(6.5) \qquad (y^0 y^0) > 0 \quad \text{bzw.} \quad < 0, \quad y_0^0 \neq y_1^0.$$

Vermöge passender Transformation des Normalsystemes

$$y_i = \sum_{j=0}^{n+1} a_{ij} \bar{y}_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1)$$

werden die Koordinaten der Kugel

$$(6.6) \qquad (0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{bzw.} \quad (1, 0, 0, \ldots, 0);$$

dafür müssen die Koeffizienten a_{ij} so gewählt werden:

$$y_i^0 = a_{i1} \qquad \text{bzw.} \quad y_i^0 = a_{i0}.$$

Aus (1.8 b) erhält man nämlich

$$\sigma^2 = -a_{01}^2 + \sum_{i=0}^{n+1} a_{i1}^2 = (y^0 y^0)$$

$$\text{bzw.} \qquad \sigma^2 = -\left(-a_{00}^2 + \sum_{i=0}^{n+1} a_{i0}^2\right) = -(y^0 y^0),$$

woraus sich reelles σ nach (6.5) ergibt; somit aus (1.14–16)

$$\left\{\begin{aligned} \sigma^2/A &= a_{11} - a_{01} = y_1^0 - y_0^0, \\ -C\sigma/A &= y_2^0 \end{aligned}\right. \qquad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} \sigma^2/A &= a_{00} - a_{10} = y_0^0 - y_1^0, \\ C\sigma/A &= y_2^0; \end{aligned}\right.$$

daraus folgen

$$\left\{\begin{aligned} \sigma &= (y^0 y^0)^{\frac{1}{2}}, \\ A &= (y^0 y^0)(y_1^0 - y_0^0)^{-1}, \\ C &= -y_2^0 (y^0 y^0)^{\frac{1}{2}} (y_1^0 - y_0^0)^{-1} \end{aligned}\right. \qquad \text{bzw.} \quad \left\{\begin{aligned} \sigma &= \left(-(y^0 y^0)\right)^{\frac{1}{2}}, \\ A &= (y^0 y^0)(y_1^0 - y_0^0)^{-1}, \\ C &= -y_2^0 \left(-(y^0 y^0)\right)^{\frac{1}{2}} (y_1^0 - y_0^0)^{-1}, \end{aligned}\right.$$

und man kann setzen: $a_{\lambda\mu} = \sigma \delta_{\lambda\mu}$ (vgl. Nr. 3).

Nach dem Satz am Schluss der Nr. 20 kann eins von solchen Normalsystemen in jedem Elemente der Element-Mannigfaltigkeit so gewählt werden, dass die Abbildung benachbarter M-Räume gerade die M-Hyperkugel mit den Koordinaten (6.6) invariant bleiben lässt. Wir erhalten also

$$(6.7) \qquad \omega_{i1} = 0 \quad \text{für } i \neq 1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_{i0} = 0 \quad \text{für } i \neq 0;$$

dann wird auch $\Omega_{i1} = 0$ für $i \neq 1$ bzw. $\Omega_{i0} = 0$ für $i \neq 0$.

Nach der in Nr. 1 gemachten Erklärung von $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten wird die Hyperkugel (6.6) in den kartesischen Punktkoordinaten folgendermassen geschrieben:

$$(6.8) \quad \text{a)} \quad \eta^{1^2} + \eta^{2^2} + \dots + \eta^{n^2} = 1 \quad \text{bzw. b)} \quad \eta^{1^2} + \eta^{2^2} + \dots + \eta^{n^2} = 1,$$

da $\xi^i = 0$ und $R^2 = 1$ bzw. -1. Nun fassen wir nur dasjenige Punktgebiet des M-Raumes ins Auge, dessen Punkte reel und auf einer Seite von der Hyperkugel (6.8 a) (etwa $\sum_{i=1}^{n} \eta^{i^2} < 1$) liegend bzw. reel und $\sum \eta^{i^2} < 1$ sind. Wird ein Punktkoordinatensystem mittels der LIEBMANNschen Transformation

$$(6.9) \qquad \frac{X^i}{X^0} = \frac{2\eta^i}{1 + \sum_k \eta^{k^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{X^i}{X^0} = \frac{2\eta^i}{1 - \sum_k \eta^{k^2}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

eingeführt, so sind die homogenen Koordinaten X^0, X^i für die Punkte der Punktgebiete eindeutig bestimmt. Die Gleichung der Hyperkugel (6.8) wird

$$(6.8') \qquad X^{1^2} + X^{2^2} + \dots + X^{n^2} = X^{0^2} \quad \text{bzw.} \quad -X^{0^2}.$$

Berücksichtigen wir aber die Definitionsgleichung der $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten, so finden wir aus (6.9)

$$\frac{X^i}{X^0} = \frac{y_{i+1}}{y_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{X^i}{X^0} = \frac{y_{i+1}}{y_1},$$

oder

$$X^0 = y_0 \quad \text{bzw.} \quad y_1, \quad X^i = y_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Daher lässt die Übertragungsgleichung (2.3) für die Punkte des betrachteten Gebietes sich ohne weiteres mit Hilfe von den homogenen Koordinaten X^0, X^i umschreiben:

$$dX^0 = \omega_{00} X^0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_{0,\,k+1} X^k\,, \quad dX^i = \omega_{i+1,\,0} X^0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_{i+1,\,k+1} X^k\,,$$

bzw. $$dX^0 = \omega_{11} X^0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_{1,\,k+1} X^k\,, \quad dX^i = \omega_{i+1,\,1} X^0 + \sum_{k=1}^{n} \omega_{i+1,\,k+1} X^k\,,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

wodurch die Gleichung (6.8′) oder die Hyperfläche zweiter Ordnung offenbar unverändert bleibt. Dies ist nichts anderes als nichteuklidisch-bewegungsgeometrische Übertragung (hyperbolisch bzw. elliptisch). Es sei ferner die Übertragung integrabel nach der Umkreisung der geschlossenen Wege, deren Elemente einem und demselben Zentrum angehören. Dann erreicht man die VEBLENsche projektive Übertragung, die einen projektiven Tensor zweiter Stufe $G_{\alpha\beta}$ zugrunde legt. In der Tat wird die Hyperfläche zweiter Ordnung $G_{\alpha\beta}$ mittels geeignetes Bezugssystemes in die Normalform, ähnlich wie (6.8′), transformiert (vgl. [15]).

§ 7. ISOMORPHISMEN DER ELEMENT-MANNIGFALTIGKEITEN MIT KUGELGEOMETRISCHEN ÜBERTRAGUNGEN.

23. Seien zwei mit kugelgeometrischen Übertragungen ausgestattete Element-Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ vorgelegt, zwischen deren Elementen eine eineindeutige, umkehrbar stetige Korrespondenz vorhanden ist. Man setzt voraus, dass die M-Räume in jeden einander entsprechenden Elementen einander punktweis zugeordnet sind, und in beiden M-Räumen die normalen Bezugssysteme so gewählt werden, dass die einander zugeordneten Punkte und M-Hyperkugeln dieselben $(n+2)$-hypersphärischen Koordinaten besitzen. Unter so gewählten Normalsystemen lassen sich die Abbildungen zweier benachbarten M-Räume M_n, M_n' in $\mathfrak{M}$ bzw. zweier den M_n, M_n' entsprechenden benachbarten M-Räume M_n^*, $M_n'^*$ in $\mathfrak{M}^*$ durch die infinitesimalen

konformen Transformationen S (ω_{ij}) bzw. S^* (ω^*_{ij}) der Übertragungen vermitteln. Vorläufig haben wir keine Kenntnis von den Beziehungen dieser Transformationen S und S^*. Nach E. CARTAN heissen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ *isomorph*, wenn beide Transformationen identisch sind, d.h. $\omega_{ij} = \omega^*_{ij}$, und *meriedrisch isomorph*, wenn eine lineare Schar von den infinitesimalen M-Abbildungen existiert und eine von den Transformationen (etwa S^*) als Produkt der anderen Transformation (S) und einer Transformation, die der Schar angehört, angegeben wird. Im letzten Fall ist die Abbildung S^*S^{-1} linear abhängig von den Abbildungen der Schar, also besteht für die Differenzen der Übertragungspameter in jeden entsprechenden Elementen

$$\kappa_{ij} = \omega^*_{ij} - \omega_{ij} \tag{7.1}$$

eine Reihe von linearen homogenen Relationen mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i,j} c_{ij}\kappa_{ij} = 0\ . \tag{7.2}$$

Dafür, dass obige Definition mit einer effektiven geometrischen Eigenschaft von den Übertragungen korrespondiert, muss die lineare Schar, wie E. CARTAN bemerkt hat, durch jede T-Transformationen sich invariant verhalten. Wenn man also durch die T-Transformationen der Normalsysteme eine neue Relation aus einer der Reihen gewinnt, so besteht diese Relation wegen der Relationen der Reihe identisch, anders gesagt, gehört sie der Reihe an. Da umgekehrt einer Reihe der Relationen (7.2), die alle aus ihren Relationen durch T-Transformationen gewonnenen Relationen enthält, ein meriedrischer Isomorphismus entspricht, so verwandelt sich das Problem, alle möglichen Typen der Isomorphismen zu bestimmen, in das andere, alle möglichen obengenannten Reihen zu suchen, was wir in nächster Nr. behandeln möchten. (Vgl. [2], insbesondere S. 186–191).

24. Bezeichnen wir mit $\delta\alpha_{ij} = e_{ij}$ die Parameter einer infinitesimalen T-Transformation, so erhalten wir an Stelle von (1.21)

$$e_{i0} = e_{0i}\,,\ e_{ij}+e_{ji} = 0\,,\ e_{20}+e_{21} = 0\,,\ e_{\lambda 0}+e_{\lambda 1} = 0\,,\ e_{\lambda 2} = 0\,, \tag{7.3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, n+1\ ;\ \lambda = 3, 4, \ldots\ldots, n+1)$$

und ferner

$$(7.4)\qquad e_{00}=e_{11}=\ldots\ldots=e_{n+1,\,n+1}=0\,,$$

ohne Schaden der Allgemeinheit. Da wir in den einander entsprechenden Elementen der beiden Räume dieselbe T-Transformation auf die Bezugssysteme der M-Räume ausüben, lassen sich die Transformationsformeln der Übertragungsparameter folgendermassen aus (2.10) schreiben:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{il}&=\sum_{k=0}^{n+1}e_{ik}\omega_{kl}-\sum_k\omega_{ik}e_{kl}+de_{il}\,,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i,\,l=0,\,1,\,\ldots\ldots,\,n+1)\\ \delta\omega^*_{il}&=\sum_{k=0}^{n+1}e_{ik}\omega^*_{kl}-\sum_k\omega^*_{ik}e_{kl}+de_{il}\,,\end{aligned}$$

woraus auch folgen

$$\delta\kappa_{il}=\sum_k e_{ik}\kappa_{kl}-\sum_k\kappa_{ik}e_{kl}\,.$$

Wir können die letzten Gleichungen wegen (7.3), (7.4) ausführlich so schreiben:

$$(7.5)\quad\left\{\begin{aligned}&\delta\kappa_{\lambda\mu}=\sum_\nu[e_{\lambda\nu}\kappa_{\nu\mu}-\kappa_{\lambda\nu}e_{\nu\mu}]+e_{\lambda0}(\kappa_{\mu0}+\kappa_{\mu1})-e_{\mu0}(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})\,,\\ &\delta(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})=-e_{20}(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})+\sum_\mu e_{\lambda\mu}(\kappa_{\mu0}+\kappa_{\mu1})\,,\\ &\delta\kappa_{\lambda2}=-e_{20}(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})+e_{\lambda0}(\kappa_{20}+\kappa_{21})+\sum_\mu e_{\lambda\mu}\kappa_{\mu2}\,,\\ &\delta(\kappa_{20}+\kappa_{21})=-e_{10}(\kappa_{20}+\kappa_{21}),\ \ \delta\kappa_{10}=e_{20}(\kappa_{20}+\kappa_{21})+\sum_\mu e_{\mu0}(\kappa_{\mu0}+\kappa_{\mu1})\,,\\ &\delta\kappa_{20}=-e_{10}(\kappa_{20}+\kappa_{21})+e_{10}\kappa_{20}-e_{20}\kappa_{10}+\sum_\mu e_{\mu0}\kappa_{\mu2}\,,\\ &\delta\kappa_{\lambda0}=-e_{10}(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})+e_{10}\kappa_{\lambda0}-e_{20}\kappa_{\lambda2}-e_{\lambda0}\kappa_{10}-\sum_\mu e_{\mu0}\kappa_{\lambda\mu}+\sum_\mu e_{\lambda\mu}\kappa_{\mu0}\,.\end{aligned}\right.$$

Wir nennen diese kurz δ-Operation für die Ausdrücke κ_{ij}.

Zunächst möchten wir von einer einzigen Relation ausgehen, die wir in folgender Gestalt schreiben:

$$(7.2')\quad\begin{aligned}&\sum_{\lambda,\mu}c_{\lambda\mu}\kappa_{\lambda\mu}+\sum_\lambda a_\lambda(\kappa_{\lambda0}+\kappa_{\lambda1})+\sum_\lambda b_\lambda\kappa_{\lambda2}+a(\kappa_{20}+\kappa_{21})\\ &\quad+c_1\kappa_{10}+c_2\kappa_{20}+\sum_\lambda c_\lambda\kappa_{\lambda0}=0\,,\quad(c_{\lambda\mu}+c_{\mu\lambda}=0)\,.\end{aligned}$$

Da die Relation, die wir nach der Ausübung der δ-Operationen erhalten, für alle Werte von e_{10}, e_{20}, $e_{\lambda 0}$, $e_{\lambda\mu}$ bestehen muss, ergibt sich insbesondere aus dem Koeffizienten von e_{20}

$$\sum_\lambda b_\lambda(\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1})-c_1(\kappa_{20}+\kappa_{21})+\sum_\lambda c_\lambda\kappa_{\lambda 2}+c_2\kappa_{10}=0\,. \tag{7.6}$$

Nach der δ-Operation auf (7.6) folgt aus dem Koeffizienten von e_{10}

$$\sum_\lambda b_\lambda(\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1})-c_1(\kappa_{20}+\kappa_{21})=0\,,$$

mithin aus (7.6)

$$\sum_\lambda c_\lambda\kappa_{\lambda 2}+c_2\kappa_{10}=0\,. \tag{7.7}$$

Aus (7.7) ergeben sich nach der δ-Operation

$$\sum_\lambda c_\lambda(\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1})-c_2(\kappa_{20}+\kappa_{21})=0\,, \tag{7.8}$$

$$c_\lambda\kappa_{\mu 2}=c_\mu\kappa_{\lambda 2}\,, \tag{7.9}$$

$$c_\lambda(\kappa_{20}+\kappa_{21})+c_2(\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1})=0\,, \tag{7.10}$$

ferner folgt aus (7.8)

$$c_\lambda(\kappa_{\mu 0}+\kappa_{\mu 1})=c_\mu(\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1})\,. \tag{7.11}$$

Wenn c_λ, c_2 nicht sämtlich verschwinden, so folgt aus (7.10), (7.11)

$$\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=c_\lambda\kappa\,,\quad \kappa_{20}+\kappa_{21}=-c_2\kappa\,,$$

somit folgt aus (7.8)

$$\kappa=0 \qquad \text{folglich} \quad \kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=\kappa_{20}+\kappa_{21}=0\,, \tag{7.12}$$

da $\sum_\lambda c_\lambda^2+c_2^2$ nicht verschwindet. Nach der δ-Operation auf (7.2′) ergibt sich sodann aus dem Koeffizienten von e_{10}

$$\sum_\lambda c_{\lambda 0}\kappa_{\lambda 0}+c_2\kappa_{20}=0\,, \tag{7.13}$$

woraus sich ergibt

$$c_\lambda\kappa_{\mu 0}=c_\mu\kappa_{\lambda 0}\,, \tag{7.14}$$

$$c_2\kappa_{\mu 2}=c_\mu\kappa_{10}+\sum_\lambda c_\lambda\kappa_{\lambda\mu}\,. \tag{7.15}$$

Aus (7.15), (7.7) ergibt sich

(7.16) $$\kappa_{10} = 0\,,$$

da $\sum_{\lambda} c_\lambda^2 + c_2^2$ nicht verschwindet. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(i) $\sum_{\lambda} c_\lambda^2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Dann sieht man leicht aus (7.7), (7.9), (7.12–16), dass alle κ_{ij} verschwinden, anders gesagt, dass die zwei Räume isomorph sind;

(ii) $\sum_{\lambda} c_\lambda^2 \neq 0$, $c_2 = 0$. Aus (7.7), (7.9), (7.12–13), (7.15–16) folgt

$$\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1} = 0\,,\quad \kappa_{20}+\kappa_{21} = 0\,,\quad \kappa_{\lambda 2} = 0\,,\quad \kappa_{\lambda\mu} = 0\,,\quad \kappa_{\lambda 0} = 0\,,\quad \kappa_{10} = 0\,;$$

(iii) $c_\lambda = 0$, $c \neq 0$. Aus (7.13), (7.2′) erhält man

$$\kappa_{20} = 0\,,\quad \kappa_{\mu 2} = 0\,,\quad \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu}\kappa_{\lambda\mu} = 0\,.$$

Die Diskutierung von der letzten Gleichung zeigt[1], dass entweder alle $c_{\lambda\mu}$ verschwinden, oder alle $\kappa_{\lambda\mu}$ verschwinden, oder im Fall $n = 5$ die folgenden Relationen dreier Arten bestehen:

(a) $$\kappa_{34} = \kappa_{56}\,,\quad \kappa_{35} = \kappa_{64}\,,\quad \kappa_{36} = \kappa_{45}\,;$$

(b) $$\kappa_{34} = \kappa_{56}\,,\quad \kappa_{35} = \kappa_{64}\,,\quad \kappa_{36} = \kappa_{45} = 0\,;$$

(c) $$\kappa_{34} = \kappa_{56}\,,\quad \kappa_{35} = \kappa_{64} = \kappa_{36} = \kappa_{45} = 0\,.$$

Hiermit bleibt noch der Fall $c_\lambda = 0$, $c_2 = 0$ zu studieren, worauf wir aber nicht eingehen, und nun wollen wir die Ergebnisse unserer Typenbestimmung der meriedrischen Isomorphismen vorstellen:

Typen von Klasse A.

$$\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1} = 0\,,\quad \kappa_{20}+\kappa_{21} = 0\,,\quad \kappa_{\lambda 2} = 0\,,\quad \kappa_{\lambda\mu} = 0$$

---

(1) Nach den δ-Operationen ergibt sich sofort

(7.17) $$\sum_{\mu} c_{\rho\mu}\kappa_{\sigma\mu} = \sum_{\mu} c_{\sigma\mu}\kappa_{\rho\mu} = c_{\rho\lambda}\kappa_{\sigma\lambda}+c_{\sigma\lambda}\kappa_{\rho\lambda}\,,$$

wo λ, ρ, σ voneinander verschieden sind. Summierend die Gleichungen (7.17) bezüglich λ, erhält man für $n \neq 5$

$$\sum_{\mu} c_{\rho\mu}\kappa_{\sigma\mu} = 0 \quad \text{oder} \quad c_{\rho\lambda}\kappa_{\sigma\lambda}+c_{\sigma\lambda}\kappa_{\rho\lambda} = 0\,,$$

woraus man ohne Mühe $c_{\lambda\mu} = 0$ oder $\kappa_{\lambda\mu} = 0$ erhält. Wenn $c_{\nu\sigma}$ nicht verschwindet, so erhält man aus (7.17) für $n = 5$

$$c_{\nu\sigma}^2 = c_{\rho\omega}^2 \quad (\nu,\ \sigma,\ \rho,\ \omega \text{ verschieden}) \quad \text{oder} \quad \kappa_{\nu\sigma} = \kappa_{\rho\omega} = 0\,,$$

folglich den Reihen (a), (b), (c) der Relationen.

und überdies

1. $\kappa_{\lambda 0}=0$, $\kappa_{10}=0$, $\kappa_{20}=0$ (isomorph); 2. $\kappa_{10}=0$, $\kappa_{20}=0$;
3. $\kappa_{\lambda 0}=0$, $\kappa_{10}=0$; 4. $\kappa_{10}=0$; 5. keine Relation.

Typen von Klasse B.

$$\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=0\,,\quad \kappa_{20}+\kappa_{21}=0\,,\quad \kappa_{\lambda 2}=0$$

und überdies

6. $\kappa_{10}=0$, $\kappa_{20}=0$; 7. $\kappa_{10}=0$; 8. keine Relation;
9. $(n=3)$ $\kappa_{34}+k\kappa_{10}=0$ $(k\neq 0)$;
10. $(n=5)$ $\kappa_{10}=0$, $\kappa_{20}=0$, und entweder (a), (b) oder (c);
11. $(n=5)$ $\kappa_{10}=0$, und entweder (a), (b) oder (c);
12. $(n=5)$ entweder (a) (b) oder (c).

Typen von Klasse C.

$$\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=0\,,\qquad \kappa_{20}+\kappa_{21}=0$$

und überdies

13. $\kappa_{\lambda\mu}=0$, $\kappa_{10}=0$; 14. $\kappa_{10}=0$; 15. $\kappa_{\lambda\mu}=0$;
16. keine Relation; 17. $(n=3)$ $\kappa_{34}+k\kappa_{10}=0$ $(k\neq 0)$;
18. $(n=4)$ $\kappa_{32}=k\kappa_{45}$, $\kappa_{42}=k\kappa_{53}$, $\kappa_{52}=k\kappa_{34}$,
und (i) $\kappa_{10}=0$; (ii) keine Relation;
19. $(n=5)$ $\kappa_{10}=0$, uud entweder (a), (b) oder (c);
20. $(n=5)$ entweder (a), (b) oder (c).

Typen von Klasse D.

21. $\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=0$, $\kappa_{\lambda\mu}=0$; 22. $\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=0$;
23. $(n=5)$ $\kappa_{\lambda 0}+\kappa_{\lambda 1}=0$, und entweder (a), (b) oder (c).

Typus von Klasse E.

24. $\kappa_{20}+\kappa_{21}=0$.

Bemerkung. Im Fall $n=2$ (kreisgeometrische Übertragung) finden wir ausser Typen 7, 8, 14, 17, 22, 24 noch folgende zwei:

25. $\kappa_{30}+\kappa_{31}=\kappa_{20}+\kappa_{21}=0$, $\kappa_{32}=k\kappa_{10}$; 26. $\kappa_{32}=k\kappa_{10}$; $(k\neq 0)$.

Aus dieser Tafel können wir viele geometrischen Tatsachen von verschiedenen Isomorphismen herauslesen. Erfüllen beide betreffenden Übertragungen die Forderung in Nr. 7, so können die meriedrischen Isomorphismen von Typenklassen A, B, C, E nur dann auftreten, wenn *die Korrespondenz der Element-Mannigfaltigkeiten*, von der wir bisher nicht geredet haben, ***sich durch eine Berührungstransformation bewerkstelligen lässt***, denn aus $\kappa_{20}+\kappa_{21}=0$ folgt

$$dz^*-p_i^*dx^{i*}=\frac{\lambda}{\lambda^*}(dz-p_i dx^i)\ .$$

Wenn ferner die PFAFFschen Ausdrücke $\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}$ bzw. $\omega^*_{\lambda 0}+\omega^*_{\lambda 1}$ die Differentiale dz, dx^i bzw. dz^*, dx^{i*} allein enthalten, so können die Isomorphismen von Klassen A, B, C nur in dem Fall auftreten, dass die genannte Korrespondenz durch solche *Element-Transformation, die aus einer Punkttransformation erweitert ist*, vermittelt wird. Auch wenn eine der Element-Mannigfaltigkeiten, die einander meriedrisch isomorph von Typus 1 oder 2, 6, 10 sind, unbedingt integrable Pseudosphären besitzt, so gilt Gleiches für die andere.

§ 8. DAS PROBLEM DER BESTIMMUNG DER NORMALEN ÜBERTRAGUNG.

25. E. CARTAN hat seine konforme Übertragung mit dem sogenannten konformen Problem der Riemannschen Räume eng verknüpft, indem er für die voneinander konformen RIEMANNschen Metriken eine ausgezeichnete Übertragung, die normal genannt wird, bestimmt hat. Unsere kugelgeometrischen Übertragungen beziehen sich, wie wir bereits gesehen haben, auf ein $(n+1)$-parametriges System der Hyperflächen, deren Differentialgleichungen in der Form

$$\frac{c^L}{\sum_{i,j} b^L_{ij}p_{ij}+d^L}=-2R\quad\left(L=1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}\right)\tag{8.1}$$

geschrieben werden. Wir nehme an, dass ein unbedingt integrables System der partiellen Differentialgleichungen (8.1) vorgegeben sei. Wie weit wird eine ausgezeichnete (sozusagen normale) Übertragung sodann bestimmt? Im Folgenden möchten wir dieses Problem etwas behandeln.

Wir beachten zunächst, dass die Parameter $\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}$, $\omega_{20}+\omega_{21}$, $\omega_{\lambda 2}$ sich unter der T-Transformation transformieren, wie folgt (vgl. (2.10) und (1.21)):

(8.2) $$\bar{\omega}_{\lambda 0}+\bar{\omega}_{\lambda 1} = \sum_{\mu} \frac{a_{\lambda\mu}}{A}(\omega_{\mu 0}+\omega_{\mu 1}),$$

(8.3) $$\bar{\omega}_{20}+\bar{\omega}_{21} = \frac{\sigma}{A}(\omega_{20}+\omega_{21}),$$

(8.4) $$\bar{\omega}_{\lambda 2} = \sum_{\mu} a_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\omega_{\mu 2}-\frac{c}{A\sigma}(\omega_{\mu 0}+\omega_{\mu 1})\right)+\frac{a_{\lambda 0}}{\sigma}(\omega_{20}+\omega_{21}),$$

woraus insbesondere folgen

(8.5) $$\sum_{\lambda}(\bar{\omega}_{\lambda 0}+\bar{\omega}_{\lambda 1})^2 = \frac{\sigma^2}{A^2}\sum_{\lambda}(\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1})^2,$$

(8.6) $$\sum_{\lambda}\bar{\omega}_{\lambda 2}^2 = \sum_{\lambda}\omega_{\lambda 2}^2$$

für $\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1} = \omega_{20}+\omega_{21} = 0$.

26. Setzen wir

$$|\, b_{11}^L b_{12}^L \ldots\ldots b_{1,n-1}^L b_{2,2}^L \ldots\ldots b_{n-1,n-1}^L \,| \neq 0$$

voraus, so werden die Gleichungen in der Gestalt umschrieben:

$$\frac{c_{ij}}{p_{ij}+d_{ij}} = -2R \qquad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$$

oder

(8.7) $$\frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} = \ldots\ldots = \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}},$$

wo

$$A_\lambda = \sum_{j=1}^{n-1} c_{\lambda-2,j}dx^j, \quad B_\lambda = dp_{\lambda-2}+\sum_{j=1}^{n-1} d_{\lambda-2,j}dx^j$$

gesetzt sind. Da (8.7) unbedingt integrabel sind, haben wir aus (3.3′)

$$[dp_i dx^i] = \sum_{\lambda,\mu} a_{(\lambda\mu)}[A_\lambda B_\mu].$$

Wir bestimmen n^2 Unbekannte $a_{\lambda\mu}$ aus sovielen Gleichungen

$$\sum_{\lambda=3}^{n+1} a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} = \rho a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 3, 4, \ldots, n+1),$$

was im allgemeinen möglich ist, und schreiben die Gleichungen (8.7) mit deren Hilfe in der Form

$$\text{(8.7′)} \qquad \begin{gathered} \frac{A_3^*}{B_3^*} = \frac{A_4^*}{B_4^*} = \ldots = \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*}, \\ A_\lambda^* = \sum_\mu a_{\lambda\mu} A_\mu, \quad B_\lambda^* = \sum_\mu a_{\lambda\mu} B_\mu. \end{gathered}$$

Dann besteht offenbar

$$\text{(8.8)} \qquad \sum_\lambda [A_\lambda^* B_\lambda^*] = \rho [dp_i dx^i],$$

deren Gestalt unter den Punkttransformationen der zugrundgelegten Mannigfaltigkeit X_n erhalten bleibt, wie man in Nr. 4 sah. Wir lassen den Stern in A_λ^*, B_λ^* weg.

Wenn wir die Differentialgleichungen (8.7) wieder in ebensolcher Gestalt mit $\bar{A}_\lambda$, $\bar{B}_\lambda$ umschreiben und dabei fordern, dass die PFAFFschen Ausdrücke $\bar{A}_\lambda$ von dp_i unabhängig seien, so haben wir

$$\text{(8.9)} \qquad \bar{A}_\lambda = \sum_\mu \alpha\beta_{\lambda\mu} A_\mu, \quad \bar{B}_\lambda = \sum_\mu \beta_{\lambda\mu}(\beta B_\mu + \gamma A_\mu),$$

für welche die Relation von der Gestalt (8.8) mit einer Funktion $\bar{\rho}$ dann und nur dann besteht, wenn die Matrix $(\beta_{\lambda\mu})$ orthogonal angesehen wird. Da aus (8.9) folgt

$$\sum_\lambda \bar{B}_\lambda^2 = \beta^2 \sum_\lambda B_\lambda^2 \qquad \text{für} \quad A_\lambda = 0, \quad \tilde{\omega} = 0,$$

so ist eine quadratische Differentialform $\sum_\lambda B_\lambda^2$ in dp_i bis auf einen Faktor bestimmt, welcher im allgemeinen von dem Hyperflächenelemente $(z, x; p)$ abhängig ist. Wenn also dieser Faktor der quadratischen Differentialform vorher oder nachher in irgend einer Weise festgelegt wird, so wissen wir wegen (8.2–4) und

$$\bar{A}_\lambda = \sum_\mu \alpha\beta_{\lambda\mu} A_\mu\,, \quad \bar{B}_\lambda = \sum_\mu \beta_{\lambda\mu}(B_\mu + \gamma A_\mu)\,, \tag{8.10}$$

dass die PFAFFschen Ausdrücke A_λ bzw. B_λ mit

$$\omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\lambda 2} \qquad \text{für} \quad \omega_{20} + \omega_{21} = 0$$

identifiziert werden können. Das durch (8.10) erhaltene System von $\bar{A}_\lambda$, $\bar{B}_\lambda$, wobei $(\beta_{\lambda\mu})$ orthogonal ist, entspricht nämlich denjenigen Parametern $\bar{\omega}_{\lambda 0} + \bar{\omega}_{\lambda 1}$ bzw. $\bar{\omega}_{\lambda 2}$, welche durch eine passende T-Transformation des Bezugssystems aus $\omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1}$ bzw. $\omega_{\lambda 2}$ hervortreten, d.h.

$$\bar{A}_\lambda = \bar{\omega}_{\lambda 0} + \bar{\omega}_{\lambda 1}\,, \quad \bar{B}_\lambda = \bar{\omega}_{\lambda 2} \qquad \text{für} \quad \bar{\omega}_{20} + \bar{\omega}_{21} = 0\,,$$

und umgekehrt[1].

Wir wollen in Nr. 29 zum Probleme der Bestimmung des in Frage stehenden Faktors zurückkehren.

Bemerkung. Für die T-Transformation durch welche A_λ, B_λ invariant bleiben, gilt nach (8.2), (8.4)

$$A = \sigma\,, \quad C = 0\,, \quad a_{\lambda\mu} = \sigma\delta_{\lambda\mu}\,. \tag{8.11}$$

27. In voriger Nr. haben wir die Ausdrücke $\omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1}$, $\omega_{\lambda 2}$ für $\omega_{20} + \omega_{21} = 0$ mit A_λ, B_λ identifiziert. Aus (4.4) folgt wegen (8.8)

$$\Omega_{20} + \Omega_{21} = -(\lambda + \rho)\,[dp_i dx^i]$$

für $\omega_{20} + \omega_{21} = 0$. Daraus sehen wir, dass nach der Umkreisung jedes infinitesimalen geschlossenen Weges längs eines Hyperflächenelementes zweiter Ordnung das ausgezeichnete Element in dem adjungierten M-Raume in die vereinigte Lage gebracht wird, und ferner, dass längs jedes Elementvereins Gleiches dann und nur dann gilt, wenn

(1) Durch $\sigma/A = \alpha$, $-C/A = \gamma$, $\alpha_{\lambda\mu}/\sigma = \beta_{\lambda\mu}$ stimmen (8.2-4) und (8.10) überein.

$$\lambda = -\rho \tag{8.12}$$

besteht. Wir stellen den Wert von λ nach (8.12) fest.

Da (8.7′) nach Voraussetzung unbedingt integrabel sind, lassen sich die Funktionen a_λ, $b_\lambda - c_\lambda$, d_λ bestimmen, wie in § 5. Wenn wir aber berücksichtigen, dass unter der speziellen T-Transformation, die (8.11) genügen, die Transformationsformeln

$$\bar{\omega}_{20} = \omega_{20} + \sum_\lambda \frac{\alpha_{\lambda 0}}{\sigma}\omega_{\lambda 2} - \frac{\alpha_{01}}{\sigma}(\omega_{20}+\omega_{21}), \quad \bar{\omega}_{10} = \omega_{10} + \sum_\lambda \frac{\alpha_{\lambda 0}}{\sigma}(\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}),$$

mithin

$$\bar{b}_\lambda = b_\lambda + \frac{\alpha_{\lambda 0}}{A}, \quad \bar{c}_\lambda = c_\lambda + \frac{\alpha_{\lambda 0}}{A}$$

bestehen, so erkennen wir, dass die verschiedenen Paare b_λ, c_λ mit gleichen Differenzen $b_\lambda - c_\lambda$ sich mittels geeigneter Werte von $\alpha_{\lambda 0}$ ineinander überführen lassen. Daher werden a_λ, b_λ, c_λ, d_λ als wesentlich bestimmt angesehen.

Nach der Umkreisung auf einer Pseudosphäre wird das ausgezeichnete Element in die tangierende Lage mit derjenigen M-Hyperkugel, welche der Pseudosphäre entspricht, überführt. Fordern wir dabei, dass es in sich übergeführt wird, so erhalten wir, da die Zurückführung des Zentrums $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$ in sich dafür hinreichend ist,

$$\Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1} = 0 \quad \text{oder} \quad \Omega_{\lambda 2} = 0 \qquad \text{für (3.1′)},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} 4R^2 \sum_\sigma a_\sigma[\bar{B}_\lambda \bar{B}_\sigma] - 2R\Big\{\sum_\sigma b_\sigma[\bar{B}_\lambda \bar{B}_\sigma] - \sum_{\rho,\sigma} k_{\lambda[\rho\sigma]}[\bar{B}_\rho B_\sigma]\Big\} - \sum_{\rho,\sigma} l_{\lambda[\rho\sigma]}[\bar{B}_\rho B_\sigma] \\ = -\sum_{j,k;\rho,\sigma}\Big\{b_\lambda^{[j;k]}(Q_{j\rho} - 2RP_{j\rho})(Q_{k\sigma} - 2RP_{k\sigma}) + (b^j_{\lambda,k} - d^{;j}_{\lambda k}) \\ \times (Q_{j[\rho} - 2RP_{j[\rho})(-2RX^k_{\sigma]}) + d_{\lambda[j,k]}(-2RX^j_\rho)(-2RX^k_\sigma)\Big\}[\bar{B}_\rho \bar{B}_\sigma] \end{aligned}$$

(identisch für R, $\bar{B}_\rho$). Setzt man

$$\omega_{\lambda\mu} = \sum_\nu k_{\lambda\mu\nu} A_\nu + \sum_\nu l_{\lambda\mu\nu} B_\nu + t_{\lambda\mu}\tilde{\omega}\,, \tag{8.13}$$

so wird

$$B'_\lambda = \sum_\mu [\omega_{\lambda\mu} B_\mu] + [A_\lambda \omega_{02}] \qquad \text{für} \quad (3.1')\,.$$

Da die Koeffizienten von R^2 in beiden Seiten nach § 5 (ii) gleich sind, werden die Glieder von R^2 aus der Relation weggelassen; man gewinnt die Funktionen

$$b_\sigma - k_{\lambda\sigma\lambda}\,,\ l_{\lambda\sigma\lambda}\,;\ (n \geqq 4)\ k_{\lambda[\rho\sigma]}\,,\ l_{\lambda[\rho\sigma]}\ (\lambda\,,\ \rho\,,\ \sigma \text{ verschieden})\,,$$

mithin $k_{\lambda\mu\nu}$, $l_{\lambda\mu\nu}$, da $k_{\lambda[\rho\sigma]} = k_{\lambda\rho\sigma} + k_{\sigma\lambda\rho}$ ist.

Jetzt stellen wir unsere Resultate zusammen:

$$(8.14)\quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{\lambda 0} + \omega_{\lambda 1} = A_\lambda + \tilde{a}_\lambda \tilde{\omega}\,, \quad \omega_{\lambda 2} = B_\lambda + \tilde{b}_\lambda \tilde{\omega}\,, \\ \tilde{\omega} = \omega_{20} + \omega_{21} = \lambda(dz - p_i dx^i)\,,\ \omega_{\lambda\mu} = \sum_\nu k_{\lambda\mu\nu} A_\nu + \sum_\nu l_{\lambda\mu\nu} B_\nu + t_{\lambda\mu}\tilde{\omega}\,, \\ \omega_{02} = \sum_\lambda a_\lambda A_\lambda + \sum_\lambda b_\lambda B_\lambda + \tilde{\rho}\tilde{\omega}\,, \quad \omega_{01} = \sum_\lambda c_\lambda A_\lambda + \sum_\lambda d_\lambda B_\lambda + \tilde{\sigma}\tilde{\omega}\,, \\ (\tilde{a}_\lambda\,,\ \tilde{b}_\lambda\,,\ \tilde{\rho}\,,\ \tilde{\sigma}\,,\ t_{\lambda\mu} \text{ unbekannt}). \end{array} \right.$$

28. Bestimmung von $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$, $t_{\lambda\mu}$. Da $\Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1}$, $\Omega_{\lambda 2}$ für $A_\lambda + 2RB_\lambda = 0$, und $\Omega_{20} + \Omega_{21}$ für $\tilde{\omega} = 0$ verschwindend sind, werden sie mit Hilfe von $2n-1$ unabhängigen PFAFFschen Ausdrücken A_λ, B_λ, $\tilde{\omega}$ in der Form

$$(8.15)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\lambda 0} + \Omega_{\lambda 1} = \sum_{\mu,\nu} u_{\lambda\mu\nu} [A_\mu B_\nu] + \sum_\mu \rho_{\lambda\mu} [A_\mu \tilde{\omega}] + \sum_\mu \sigma_{\lambda\mu} [B_\mu \tilde{\omega}] \\ \hfill (u_{\lambda[\mu\nu]} = 0)\,, \\ \Omega_{\lambda 2} = \sum_{\mu,\nu} v_{\lambda\mu\nu} [A_\mu B_\nu] + \sum_\mu \pi_{\lambda\mu} [A_\mu \tilde{\omega}] + \sum_\mu \kappa_{\lambda\mu} [B_\mu \tilde{\omega}]\,, \\ \hfill (v_{\lambda[\mu\nu]} = 0)\,, \\ \Omega_{20} + \Omega_{21} = \sum_\mu s_\mu [A_\mu \tilde{\omega}] + \sum_\mu t_\mu [B_\mu \tilde{\omega}] \end{array} \right.$$

geschrieben. Wenden wir das Theorem der Erhaltung der Krümmung auf $\Omega_{20} + \Omega_{21}$ an, so werden die Relationen

$$u_{[\lambda|\mu|\nu]} = t_{[\lambda}\delta_{|\mu|\nu]}\,, \qquad v_{[\lambda\mu]\nu} = -s_{[\lambda}\delta_{\mu]\nu}$$

stattfinden; daraus ersehen wir, dass $u_{\lambda\mu\nu}$ und $v_{\lambda\mu\nu}$ für ungleiche λ, μ, ν bezüglich deren Indizes symmetrisch sind, und dass $u_{\lambda\lambda\mu}-u_{\mu\lambda\lambda}=-t_\mu$, $v_{\lambda\mu\lambda}-v_{\mu\lambda\lambda}=s_\mu$. Wenn wir also

$$\sum_\lambda u_{\mu\lambda\lambda}=U^1_\mu, \quad \sum_\lambda v_{\mu\lambda\lambda}=V^1_\mu, \quad \sum_\lambda u_{\lambda\mu\lambda}=U^2_\mu, \quad \text{usw.}$$

setzen, so können wir folgern:

$$U^1_\mu=U^2_\mu+(n-2)t_\mu, \quad V^1_\mu=V^2_\mu-(n-2)s_\mu, \quad U^2_\mu=U^3_\mu, \quad V^2_\mu=V^3_\mu.$$

Nun können wir durch eine der folgenden Forderungen die Funktionen $\tilde{a}$, $\tilde{b}_\lambda$ feststellen:

(i) $\Omega_{20}+\Omega_{21}=0$ oder $s_\mu=t_\mu=0\,(U^1_\mu=U^2_\mu=U^3_\mu,\ V^1_\mu=V^2_\mu=V^3_\mu)$;

in der Tat werden aus der folgenden Gleichung $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$ völlig bestimmt:

$$d\log\rho+\sum_\lambda(\tilde{a}_\lambda B_\lambda-\tilde{b}_\lambda A_\lambda+c_\lambda A_\lambda+d_\lambda B_\lambda)=0 \quad \text{für} \quad \tilde{\omega}=0; \tag{8.16}$$

(ii) $U^2_\mu=U^3_\mu=0$, $V^2_\mu=V^3_\mu=0$
$(U^1_\mu=(n-2)t_\mu,\quad V^1_\mu=-(n-2)s_\mu)$;

(iii) $U^1_\mu=0$, $V^1_\mu=0\,(U^2_\mu=U^3_\mu=-(n-2)t_\mu,\ V^2_\mu=V^3_\mu=(n-2)s_\mu)$;
da wir nämlich nach leichter Rechnung

$$u_{\lambda\mu\nu}=\tilde{a}_\lambda\delta_{\mu\nu}+*, \quad v_{\lambda\mu\nu}=\tilde{b}_\lambda\delta_{\mu\nu}+*$$

(wobei $*$ bekannte Glieder bedeutet) gewinnen, so wird für die jetzige Bestimmung irgendeine der Forderungen (ii), (iii) oder allgemeiner die Forderung $U^1_\mu=kU^2_\mu$, $V^1_\mu=kV^2_\mu$ $(k\neq n-1)$ recht geeignet. Es bleibt aber der Beweis übrig, dass die Relationen (ii), (iii) unter den T-Transformationen der Bezugssysteme sowie den Koordinatentransformationen von X_n sich invariant verhalten. Da unter (1.7) die Transformationsformeln $\sum_k \bar{\Omega}_{ik}a_{kl}=\sum_k a_{ik}\Omega_{kl}$ bestehen, so erhalten wir

$$\sigma^2\sigma_{\rho\sigma}=\sum_\lambda\bar{\sigma}_{\lambda\mu}a_{\lambda\rho}a_{\mu\sigma},$$

$$\sigma^2\rho_{\rho\sigma}=\frac{1}{A}\sum_{\lambda,\mu}(\sigma\bar{\rho}_{\lambda\mu}-C\bar{\sigma}_{\lambda\mu})a_{\lambda\rho}a_{\mu\sigma}+\frac{1}{\sigma}\sum_{\lambda,\mu,\nu}\bar{u}_{\lambda\mu\nu}a_{\lambda\rho}a_{\mu\sigma}a_{\nu 0},$$

$$\sigma^3 u_{\rho\sigma\omega} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \bar{u}_{\lambda\mu\nu} a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} a_{\nu\omega},$$

$$A\sigma^2\left(v_{\rho\sigma\omega} - \frac{C}{A} u_{\rho\sigma\omega}\right) = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \bar{v}_{\lambda\mu\nu} a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} a_{\nu\omega}, \quad \text{usw.},$$

somit

(8.17) $$\sigma U^i_\mu = \sum_\lambda \bar{U}^i_\lambda a_{\lambda\mu}, \quad A V^i_\mu - C U^i_\mu = \sum_\lambda \bar{V}^i_\lambda a_{\lambda\mu}.$$

Unter der Koordinatentransformation transformieren sich A_λ, B_λ wie folgt: $A_\lambda = A^*_\lambda + \varphi_\lambda \tilde{\omega}^*$, $B_\lambda = B^*_\lambda + \psi_\lambda \tilde{\omega}^*$, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^*$ (man erinnere sich, dass A_λ bzw. B_λ von dz unabhängig sind); also bestehen

(8.18) $$u^*_{\lambda\mu\nu} = u_{\lambda\mu\nu}, \quad v^*_{\lambda\mu\nu} = v_{\lambda\mu\nu}, \quad \sigma^*_{\lambda\mu} = \sigma_{\lambda\mu} - \sum_\nu u_{\lambda\mu\nu}\varphi_\nu, \quad \text{usw.}$$

Die Relationen (ii), (iii) sind zwar geometrisch infolge (8.17–18).

Bemerkung 1. Da $\Omega_{01} + 2R\Omega_{02}$ für $A_\lambda + 2RB_\lambda = 0$, $\tilde{\omega} = 0$ verschwindet, so ergeben sich

$$\Omega_{01} = \sum_{\mu,\nu} q_{1[\mu\nu]}[A_\mu A_\nu] + \sum_{\mu,\nu} q_{2\mu\nu}[A_\mu B_\nu] + *,$$

$$\Omega_{02} = \sum_{\mu,\nu} q_{1\mu\nu}[A_\mu B_\nu] + \sum_{\mu,\nu} q_{2[\mu\nu]}[B_\mu B_\nu] + *,$$

wobei $*$ die Glieder, welche mit $\tilde{\omega}$ verschwinden, bedeutet. Wenn jede M-Hyperkugel der ausgezeichneten Schar nach der infinitesimalen Umkreisung längs jeder Pseudosphäre in sich übergeführt wird, so lauten $q_{1[\mu\nu]} = q_{2[\mu\nu]} = 0$; danach werden $\mathfrak{a}_{[\mu\nu]}$, $\mathfrak{b}_{[\mu\nu]}$ von

$$\omega_{\lambda 0} = \sum_\mu \mathfrak{a}_{\lambda\mu} A_\mu + \sum_\mu \mathfrak{b}_{\lambda\mu} B_\mu + \mathfrak{e}_\lambda \tilde{\omega}$$

bestimmt, da

(8.19) $$\begin{cases} q_{1\mu\nu} = \tilde{\rho}\delta_{\mu\nu} - \mathfrak{a}_{\nu\mu} + \text{bekannte Glieder}, \\ q_{2\mu\nu} = \tilde{\sigma}\delta_{\mu\nu} + \mathfrak{b}_{\mu\nu} + \text{bekannte Glieder}. \end{cases}$$

2. Genau so wie in der Herleitung von (ii), (iii) können wir andere geometrischen Relationen in jedem der drei Fälle (i)-(iii) finden:

(i) $\rho_{[\lambda\mu]} = \sigma_{[\lambda\mu]} = \kappa_{[\lambda\mu]} = \pi_{[\lambda\mu]} = 0$; (ii) $\sum_\lambda \rho_{\lambda\lambda} = \sum_\lambda \sigma_{\lambda\lambda} = 0$;

(iii) $Q_1 \equiv \sum_\lambda q_{1\lambda\lambda} = 0$, $\qquad Q_2 \equiv \sum_\lambda q_{2\lambda\lambda} = 0$.

Aber von diesen Forderungen können wir im allgemeinen nur folgende stellen: (i) $\sigma_{[\lambda\mu]} = 0$, dadurch wird $t_{\lambda\mu}$ bestimmt; (iii) $Q_1 = Q_2 = 0$, dadurch finden die Relationen

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{n-1} \sum_\mu \mathfrak{a}_{\mu\mu} + \text{bek. Gl.}, \qquad \tilde{\sigma} = \frac{-1}{n-1} \sum_\mu \mathfrak{b}_{\mu\mu} + \text{bek. Gl.}$$

wegen (8.19) statt.

29. Faktor von $\sum B_\lambda^2$ für $A_\lambda = 0$, $\tilde{\omega} = 0$. Von geometrischem Standpunkte aus können wir denken, dass durch eine in dp_i quadratische Differentialform eine Winkelmassbestimmung von $(n-1)$-Richtungen sich in der Element-Mannigfaltigkeit angegeben lässt, so ist das Problem in Nr. 27 die Bestimmung einer ausgezeichneten von den bis auf einen Faktor vorgegebenen Winkelmetriken. Wenn wir aber analytisch eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die die Gesamtheit der Hyperflächenelemente von festem Zentrum ist, betrachten, so werden diese Metriken voneinander konform RIEMANNsch. Wie die Erforscher des konformen Problems der RIEMANNschen Räumen gezeigt haben (vgl. [6], [10], [11]), haben wir von einer RIEMANNschen Massbestimmung, insofern sie nicht konform-euklidisch ist, einen nicht verschwindenden Konformkrümmungsaffinor, andere Konformgrössen und aus diesen ferner die nicht verschwindenden konformen Kovarianten mit von Null verschiedenem Gewichte. Mit Hilfe von einer dieser Kovarianten wird eine ausgezeichnete quadratische Differentialform bestimmt.

Wenn aber die RIEMANNsche Massbestimmung konform-euklidisch ist, so wird sie euklidisch durch einen passenden Faktor, welcher in diesem Fall bis auf einen Faktor, der etwa vom Zentrum abhängig ist, bestimmt ist. Die Bestimmung des letzten Faktors ist nicht ganz unmöglich, aber ich kann nicht eine bequeme Methode finden. Wir möchten darüber eine kleine Bemerkung hinzufügen. Sei $\sum_\lambda B_\lambda^2$ (für $A_\lambda = 0$, $\tilde{\omega} = 0$) euklidisch. Wenn wir

$$\hat{A}_\lambda = A_\lambda, \qquad \hat{B}_\lambda = kB_\lambda$$

mit $\omega_{\lambda 0}+\hat{\omega}_{\lambda 1}$, $\omega_{\lambda 2}$ für $\hat{\tilde{\omega}}=0$ identifizieren und wie in Nr. 27, 28 die Übertragung spezialisieren, wobei k eine Punktfunktion ist, so folgt aus (8.8), (8.10)

$$\hat{\rho}=k\rho\,,\qquad \hat{\lambda}=k\lambda\,,\qquad \hat{\tilde{\omega}}=k\tilde{\omega}\,,$$

und aus (5.11)

$$\hat{d}_\lambda=\frac{1}{k}d_\lambda\,.$$

Bestimmen wir $\tilde{a}_\lambda$, $\tilde{b}_\lambda$ nach Nr. 28 (i), so gilt ferner wegen (8.16)

$$\hat{d}_\lambda+\hat{\tilde{a}}_\lambda=\frac{1}{k}(d_\lambda+\tilde{a}_\lambda)\,,$$

mithin

$$\hat{\tilde{a}}=\frac{1}{k}\tilde{a}\,,\qquad \hat{\omega}_{\lambda 0}+\hat{\omega}_{\lambda 1}=\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1}\,.$$

Da im Fall, dass eine Übertragung vorgegeben sei, die konforme Massbestimmung (vgl. (8. 2–3))

$$\sum_\lambda(\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1})^2+(\omega_{20}+\omega_{21})^2$$

bestimmt wird, so werden in unserem Fall die Massbestimmungen mit beliebiger Punktfunktion ρ

$$\sum_\lambda(\omega_{\lambda 0}+\omega_{\lambda 1})^2+\rho^2(\omega_{20}+\omega_{21})^2 \tag{8.20}$$

bis auf konforme Transformation angegeben. Da das Problem sich nun zur Bestimmung vom Faktor ρ in verallgemeinerter Massbestimmung (8.20) umwandelt, so muss das weitergehende Studium sich auf die Theorie des metrischen Raumes von Prof. A. KAWAGUCHI ([8], [10]) stützen.

Dezember 1935.

Literatur.

[1] W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie, III, 1929, Berlin.

[2] E. CARTAN, Les espaces à connexion conforme, Ann. Soc. Polon. math., 2 (1923), S. 171–221.

[3] E. CARTAN, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, Acta Mathematica, 48 (1926), S. 1–42.

[4] E. CARTAN, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, 1933, Paris.

[5] P. DELENS, La métrique angulaire des espaces de Finsler, 1934, Paris.

[6] J. DOUGLAS, Systems of k-dimensional manifolds in an n-dimensional space, Math. Ann., 105 (1931), S. 707–731.

[7] V. HLAVATÝ, Zur Konformgeometrie, I. Eichinvariante Konnexion, Proc. Kon. Akad. Wet., 38 (1935), S. 281–286.

[8] A. KAWAGUCHI, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, Monatshefte für Mathematik und Physik, 43 (1936).

[9] A. KAWAGUCHI, Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist, Monatshefte für Mathematik und Physik, 44 (1936).

[10] A. KAWAGUCHI, Ein n-dimensionaler metrischer Raum mit dem Zusammenhang, der von m-dimensionalen Flächenelementen abhängig ist, Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis, Liefeung V (1936).

[11] R. KÖNIG, Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 28 (1920), S. 213–228.

[12] J. LEVINE, Conformal-affine connections, Proc. Nat. Acad. Sc., 21 (1935), S. 165–167.

[13] M. LÜTJEN, Der normale konforme R_3 und seine Flächentheorie, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ., 10 (1934), S. 49–69.

[14] J. A. SCHOUTEN, Erlanger Programm und Übertragungslehre, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 50 (1926), S. 142–169.

[15] O. VEBLEN, Projektive Relativitätstheorie, 1935, Berlin.

[16] W. WIRTINGER, On a general infinitesimal geometry in the reference to the theory of relativity, Transactions Philosoph. Soc. Cambridge, 22 (1922), S. 439–448.