SUR L'UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE

Par

Masuo HUKUHARA

1. Introduction.

Si le second membre de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

est une fonction continue dans le voisinage de (x_0, y_0), elle admet au moins une solution prenant la valeur y_0 pour $x = x_0$. Pour affirmer qu'une telle solution est unique on doit supposer outre la continuité ce qu'on appelle conditions d'unicité, par exemple:

(i) Condition de PEANO. $(x-x_0)f(x, y)$ est une fonction décroissante de y.

(ii) Condition de LIPSCHITZ.

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| < K|y_1-y_2|,$$

K étant une constante.

(iii) Condition de M. NAGUMO[1].

$$\frac{x-x_0}{y_1-y_2}\left\{f(x, y_1)-f(x, y_2)\right\} \leqq 1 .$$

---

(1) NAGUMO, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, Jap. Jour. Math., 3 (1926). La condition plus restrictive

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| < k\frac{|y_1-y_2|}{|x-x_0|},$$

où k est une constante positive inférieure à 1, a été obtenue par M. ROSENBLATT, Arkiv för Math., Astr. och Fysik, 5 (1909).

(iv) Condition de M. MONTEL[(2)].

$$f(x, y_1)-f(x, y_2) < K(x)F(y_1-y_2) \qquad (y_1 > y_2),$$

$K(x)$ et $F(y)$ étant des fonctions telles que

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x} K(x)dx < +\infty\,, \quad \int_0^y \frac{dy}{F(y)} = +\infty \qquad (y > 0)\,.$$

Il est à remarquer que ces conditions sont indépendantes de la valeur $f(x_0, y_0)$. De ma connaissance, on n'a pas encore de conditions d'unicité dépendant de la valeur $f(x_0, y_0)$, tandis que pour l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|} + a\,,$$

où a est une constante, l'unicité de la solution telle que $y(0) = 0$ se détruit dans le cas de $a = 0$ et dans ce cas seulement. Nous allons donc donner une condition d'unicité dépendant essentiellement de la valeur $f(x_0, y_0)$.

2. Equations particulières.

Partons de l'équation différentielle de forme particulière

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = F(y) + h(x)\,,$$

La condition moins restrictive

$$\frac{x-x_0}{y_1-y_2}\{f(x,y_1)-f(x,y_2)\} < 1+\varepsilon(x)\,,$$

où $\varepsilon(x)$ désigne une fonction positive telle que $\int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(x)}{|x-x_0|}dx < +\infty$, a été obtenue par moi: Jap. Jour. Math., 5 (1928).

(2) P. MONTEL, Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle, Bull. sc. math., 50 (1926). Le cas particulier où $K(x) = 1$ a été trouvé par M. OSGOOD, Monatshefte für Math. u. Phys., 9 (1898). On obtient une condition plus générale en supposant

$$\lim_{x\to x_0+0}\left\{\int_\alpha^x K(x)dx - \int_\beta^{x-x_0} F(y)dy\right\} = +\infty \qquad (\alpha > x_0\,,\ \beta > 0)$$

au lieu de (2) (福原, 常微分方程式論 (岩波講座) 111 頁). On peut modifier cette condition de manière qu'elle contienne comme cas particulier celle de M. NAGUMO, comme l'a remarqué M. YASUI (Ibid. 補遺).

la fonction $F(y)$ étant continue dans le voisinage de y_0. Il est facile de voir que si $h(x)$ est une constante différente de $-F(y_0)$, l'équation (3) n'admet qu'une solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. La question se pose donc naturellement: Si $F(y)$ et $h(x)$ sont des fonctions continues telles que $F(y_0)+h(x_0) \neq 0$, la solution de (3) satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est-elle unique? Nous pouvons répondre affirmativement à cette question si la fonction $F(y)$ est à variation bornée, c'est ce que nous allons montrer.

Nous pouvons supposer sans perdre la généralité que $x_0 = y_0 = 0$. Posons ensuite $\alpha Y = y$. On aura

$$\frac{dY}{dx} = F_1(Y)+h_1(x) ,$$

où

$$F_1(Y) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha Y)+\beta , \quad h_1(x) = \frac{1}{\alpha}h(x)-\beta .$$

Nons pouvons déterminer les valeurs de α et β de manière que $F_1(0) > 1$, $h_1(0) > 0$. Nous supposerons donc que $F(y) > 1$, $h(x) > 0$, et ne considérerons que les valeurs positives de x. $F(y)$ étant continue et à variation bornée, elle est la différence de deux fonctions continues et croissantes: $F(y) = F_1(y)-F_2(y)$. Nous supposerons $F_2(0) = 0$, ce qui est évidemment possible. Si l'on pose

$$\eta = \int_0^y e^{-F_1(y)}dy ,$$

on a

$$\frac{d\eta}{dx} = \Phi(x, \eta) , \tag{4}$$

où

$$\Phi(x, \eta) = e^{-F_1(y)}\left[F(y) + h(x)\right] .$$

L'expression $\Phi(x, \eta)$ est une fonction décroissante de η. En effet, puisque $h(x) > 0$ et que $F_1(y)$ est croissante, $e^{-F_1(y)}h(x)$ est une fonction décroissante de y. La fonction $F(y)$ étant positive et $F_1(y)$ croissante, les inégalités $y_1 < y_2$, $F(y_1) \geqq F(y_2)$ entraînent

$$(5) \qquad e^{-F_1(y_1)}F(y_1) > e^{-F_1(y_2)}F(y_2) .$$

Il reste à démontrer que les inégalités $y_1 < y_2$, $F(y_1) < F(y_2)$ entraînent aussi (5). Si $y_1 < y_2$, $F(y_1) < F(y_2)$, on a

$$\log \frac{F(y_2)}{F(y_1)} < \frac{F(y_2)}{F(y_1)} - 1 < F(y_2) - F(y_1) < F_1(y_2) - F_1(y_1) .$$

On en déduit immédiatement l'inégalité (5). $\Phi(x, \eta)$ est donc une fonction décroissante de y. Puisque $\frac{d\eta}{dy} > 0$, $\Phi(x, \eta)$ est une fonction décroissante de η. Par suite, la solution de (4) s'annulant pour $x = 0$ est unique. L'unicité de la solution de (4) entraîne celle de (3). C. Q. F. D.

La démonstration exposée ci-dessus s'applique sans modification à l'équation

$$(6) \qquad \frac{dy}{dx} = k(x)F(y) + h(x) ,$$

$h(x)$ et $k(x)$ étant des fonctions positives(3) pour $x_0 < x < x_0 + a$ et $F(y)$ une fonction continue, positive et à variation bornée dans le voisinage de y_0.

Supposons ensuite que la fonction $k(x)$ est positive et sommable dans le voisinage de x_0. Par la transformation $\xi = \int_{x_0}^{x} k(x)dx$, l'équation (6) se change en

$$(7) \qquad \frac{dy}{d\xi} = F(y) + h_1(\xi) ,$$

où

$$h_1(\xi) = \frac{h(x)}{k(x)} .$$

Si donc

$$\underline{l} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{h(x)}{k(x)} > -F(0) ,$$

(3) La continuité de $h(x)$ et $k(x)$ est inutile.

la proposition obtenue tout à l'heure est applicable à (7), car l'équation peut s'écrire

$$\frac{dy}{d\xi} = \left(F(y) + \underline{l} - \varepsilon\right) + \left(h_1(\xi) - \underline{l} + \varepsilon\right),$$

ε désignant une constante positive assez petite. Le cas où

$$\bar{l} = \overline{\lim_{x \to x_0 + 0}} \frac{h(x)}{k(x)} < -F(0)$$

peut être ramené au cas précédent, en remplaçant y par $-y$.

3. Condition d'unicité.

Considérons maintenant l'équation de forme générale (1), $f(x, y)$ étant une fonction continue dans le voisinage de (x_0, y_0). S'il existe une fonction $F(y)$ continue, à variation bornée[4] et telle que

$$(8) \qquad f(x, y_1) - f(x, y_2) < F(y_1) - F(y_2) \text{ pour } x > x_0,\ y_1 > y_2,$$

et si $f(x_0, y_0) \neq 0$, l'équation (1) n'admet qu'une solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$[5].

En effet, soit $y = \varphi(x)$ la solution minimée de (1) prenant la valeur y_0 pour $x = x_0$, et posons

$$z = y - \varphi(x).$$

On a alors

$$(9) \qquad \frac{dz}{dx} = f(x, z + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x))$$

et il suffit de montrer que cette équation n'admet pas de solution non identiquement nulle, s'annulant pour $x = x_0$ et telle que $z \geqq 0$. D'après (8) on a

$$f(x, z + \varphi(x)) - f(x, \varphi(x)) < F(z + \varphi(x)) - F(\varphi(x)) \quad (z > 0).$$

(4) On peut supposer $F(y)$ croissante sans perdre la généralité. Car sinon, il suffit de la remplacer par la fonction $F_1(y)$ définie au numéro précédent.

(5) Nous considérerons seulement les valeurs de x plus grandes que x_0.

Par suite, il suffit de montrer l'unicité de la solution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = F(z+\varphi(x)) - F(z) \tag{10}$$

satisfaisant à la condition initiale $z(0)=0$. Par la transformation $y = z+\varphi(x)$, on a

$$\frac{dy}{dx} = F(y)+h(x) , \tag{11}$$

où

$$h(x) = f(x, \varphi(x)) - F(\varphi(x)) .$$

La valeur $F(y_0)+h(x_0) = f(x_0, y_0)$ étant différente de zéro par hypothèse, l'équation (11) n'admet qu'une solution satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$, ce qui entraîne l'unicité de la solution de (10) s'annulant pour $x = x_0$[6].

---

(6) Pendant la préparation de ce mémoire, M. OKAMURA m'a envoyé une lettre, où il a remarqué que la condition d'unicité trouvée ici se découle aussi du corollaire au p. 322 de son mémoire: Sur l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, Mem. Col. Sc., Kyoto Imp. Univ., Ser. A, 1934.