SUR LES THÉORÈMES DE COMPARAISON DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Par

Masuo HUKUHARA et Tokui SATÔ

TABLE DES MATIÈRES

Pour les équations différentielles ordinaires on sait de divers théorèmes de comparaison parmi lesqueles nous citerons quelques exemples.

Supposons que les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y, \ldots, y_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

admettent une solution

$$y_j = y_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

continue dans l'intervalle $a \leqq x < b$, et désignons par $y_1^0, \ldots, y_m^0$ les valeurs $y_1(a), \ldots, y_m(a)$.

A. *Si*

$$(2_1) \qquad \max\left\{ |f_j(x, y_1, \ldots, y_m)| \right\} < F\left(x, \max\left\{ |y_j| \right\}\right),$$

$$(3_1) \qquad \max\left\{ |y_j^0| \right\} \leqq Y_0$$

et si l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{dY}{dx} = F(x, Y)$$

admet une solution $Y(x)$ continue dans $a \leqq x < b$ et prenant la valeur Y_0 pour $x = a$, on a

$$(5_1) \qquad \max_{j=1}^{m}\left\{ |y_j(x)| \right\} \leqq Y(x)$$

dans le même intervalle $a \leqq x < b$.

Si l'on remplace les hypothèses (2_1) et (3_1) par les suivantes

$$(2_2) \qquad \sum_{j=1}^{m} |f_j(x, y_1, \ldots, y_m)| < F(x, \sum_{j=1}^{m} |y_j|),$$

$$(3_2) \qquad \sum_{j=1}^{m} |y_j^0| \leqq Y_0,$$

on obtient l'inégalité

$$(5_2) \qquad \sum_{j=1}^{m} |y_j(x)| \leqq Y(x)$$

au lieu de (5_1). D'une manière plus générale les hypothèses

$$(2) \qquad S(f_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, f_m) < F(x, S(y_1, \ldots, y_m)),$$

$$(3) \qquad S(y_1^0, \ldots, y_m^0) \leqq Y_0$$

entraîne l'inégalité

$$S(y_1(x), \ldots, y_m(x)) \leqq Y(x)$$

pour $a \leqq x < b$ pourvu que $S(y_1, \ldots, y_m)$ satisfasse aux conditions indiquées par M. KAMKE[1]. Récemment M. MARCHAUD[2] a obtenu un théorème plus général que celui de M. KAMKE. Mais il y a des théorèmes de comparaison qui ne sont pas des cas particuliers de celui de M. MARCHAUD. Le suivant[3] est un tel exemple.

B. *Si*

$$(6) \qquad |f_j(x, y_1, \ldots, y_m)| < F_j(x, |y_1|, \ldots, |y_m|),$$

$$(7) \qquad |y_j^0| \leqq Y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$F_j(x, Y_1, \ldots, Y_m)$ étant des fonctions croissantes de chacune des variables $Y_1, \ldots, Y_m$ et si les équations différentielles

$$(8) \qquad \frac{dY_j}{dx} = F_j(x, Y_1, \ldots, Y_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

admettent une solution $Y_1(x), \ldots, Y_m(x)$ continue dans $a \leqq x < b$ et satisfaisant aux conditions initiales

$$Y_j(a) = Y_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$|y_j(x)| \leqq Y_j(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

pour $a \leqq x < b$.

A notre connaissance on n'a pas encore un théorème qui contient comme cas particuliers ces deux théorèmes A et B. Il y a donc lieu de se demander si l'on ne peut comparer les équations (1) avec les suivantes

$$(9) \qquad \frac{dY_j}{dx} = F_j(x, Y_1, \ldots, Y_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

n pouvant prendre un entier positif quelconque.

---

(1) E. KAMKE, Über die eindeutige Bestimmtheit der Integrale von Differentialgleichungen, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wissenschaften, Math.-naturw. Kl., 1931.

(2) A. MARCHAUD, Critères d'unicité et de multiplicité par les intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre, C. R., 1933.

(3) M. FUKUHARA, Sur les systèmes des équations différentielles ordinaires II, Jap. Jour. Math., 1930.

CHAPITRE I

Introduction

1. Notations.

Dans la suite nous utiliserons les matrices pour simplifier l'écriture. Une lettre marquée par le signe ($\hat{}$), ($\dot{}$) ou ($\ddot{}$) désigne respectivement un système de l, m ou n nombres : par exemple,

$$\hat{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_l),$$

$$\dot{b} = (b_1, b_2, \ldots\ldots, b_m),$$

$$\ddot{c} = (c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n).$$

Soit un système de fonctions d'une variable x :

$$\varphi_1(x), \ldots\ldots, \varphi_m(x)$$

que l'on peut désigner par $\dot{\varphi}(x)$. Nous désignerons par $D_x^+\dot{\varphi}(x)$ le système des dérivées à droite des fonctions $\varphi_1(x), \ldots\ldots, \varphi_m(x)$:

$$D_x^+\dot{\varphi}(x) = (D_x^+\varphi_1(x), \ldots\ldots, D_x^+\varphi_m(x)).$$

Les notations $D_x^-\dot{\varphi}(x)$, $\dot{\varphi}'(x)$ etc. ont les significations analogues. Le système des équations différentielles

$$\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

peut donc s'écrire

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = \dot{f}(x, \dot{y}).$$

Soient maintenant m fonctions de n variables :

$$\varphi_1(x_1, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots, \varphi_m(x_1, \ldots\ldots, x_n).$$

Nous désignerons par $\dfrac{\partial\dot{\varphi}(\ddot{x})}{\partial\ddot{x}}$ la matrice formée par les dérivées partielles $\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial \dot{\varphi}(\ddot{x})}{\partial \ddot{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \cdots\cdots \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \cdots\cdots \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'inégalité $\dot{\varphi} < \dot{\psi}$ est équivalente aux m inégalités

$$\varphi_1 < \psi_1, \ \varphi_2 < \psi_2, \ \ldots\ldots, \ \varphi_m < \psi_m .$$

De même, si

$$\varphi_1 \leq \psi_1, \ \varphi_2 \leq \psi_2, \ \ldots\ldots, \ \varphi_m \leq \psi_m ,$$

nous écrirons $\dot{\varphi} \leq \dot{\psi}$, en réservant le signe $\dot{\varphi} \leqq \dot{\psi}$ exclusivement pour le cas où l'on a

$$\dot{\varphi} \leq \dot{\psi}, \qquad \dot{\varphi} \not< \dot{\psi} .$$

2. Hypothèses que nous supposons pour comparer les deux équations.

Supposons que l'équation différentielle

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\dot{y}}{dx} = \dot{f}(x, \dot{y})$$

admet une solution

$$\dot{y} = \dot{y}(x)$$

continue dans un certain intervalle. Nous voulons la comparer avec une solution

$$\ddot{Y} = \ddot{Y}(x)$$

d'une équation différentielle auxiliaire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\ddot{Y}}{dx} = \ddot{F}(x, \ddot{Y}) ,$$

$\ddot{Y}(x)$ étant supposé continue dans le même intervalle. Pour contenir comme cas particuliers les résultats de M. MARCHAUD, nous chercherons dans quelles hypothèses nous pouvons obtenir l'inégalité

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

ou

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) < \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x)) ,$$

les fonctions $\hat{\varphi}(x, \dot{y})$, $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$ étant des fonctions déterminées. Les hypothèses dont nous ferons fréquent usage sont les suivantes.

(α_f) La fonction $\dot{f}(x, \dot{y})$ est définie et continue dans l'ensemble D_f.

(α_F) La fonction $\ddot{F}(x, \ddot{Y})$ est définie et continue dans l'ensemble D_F.

(β_φ) La fonction $\hat{\varphi}(x, \dot{y})$ est continue dans un domaine D_φ et admet les dérivées partielles

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x}, \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y_1}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial y_m} .$$

(β_Φ) La fonction $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$ est continue dans un domaine D_Φ et admet les dérivées partielles

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x}, \quad \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial Y_1}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial Y_n} .$$

(γ_a) Le domaine D_φ contient l'ensemble D_f.

(γ_A) Le domaine D_Φ contient l'ensemble D_F.

(δ) On a

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\partial\varphi_j(x, \dot{y})}{\partial x} + \dot{f}(x, \dot{y})\frac{\partial\varphi_j(x, \dot{y})}{\partial \dot{y}} < \frac{\partial\Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + \ddot{F}(x, \ddot{Y})\frac{\partial\Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial \ddot{Y}}$$

pour $\hat{\varphi}(x, \dot{y}) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$, $(x, \dot{y}) \in D_f D_\varphi$, $(x, \ddot{Y}) \in D_F D_\Phi$, j désignant l'indice pour lequel on a

$$\varphi_j(x, \dot{y}) = \Phi_j(x, \ddot{Y}) .$$

CHAPITRE II

Théorèmes fondamentaux

3. Enoncés des théorèmes fondamentaux.

Mais avant de comparer les équations (a) et (A) nous chercherons dans quelles hypothèses nous pouvons obtenir l'inégalité (I_1) ou (I_2) en ne prenant pas en considération l'équation auxiliaire (A). L'hypothèse (γ_A) sera remplacée par la suivante.

(γ') Le domaine D_Φ contient l'ensemble des points $(x, \ddot{Y}(x))$, x désignant la valeur dans l'intervalle considéré.

Supposons d'abord que l'intervalle considéré est fermé à gauche: $a \leqq x < b$.

I. Alors, pour que l'inégalité

$$\hat{\varphi}(a, \dot{y}(a)) \leqq \hat{\Phi}(a, \ddot{Y}(a))$$

entraîne (I_1) *pour* $a < x < b$, *il suffit de faire outre les hypothèses* (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ'), *la suivante.*

(δ_a^+) La fonction $\ddot{Y}(x)$ est continue et admet la dérivée à droite dans l'intervalle considéré et on a

$$(\mathrm{II}_a^+) \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{y})}{\partial x} + \dot{f}(x, \dot{y}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{y})}{\partial \dot{y}}$$
$$< \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + D_x^+ \ddot{Y}(x) \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial \ddot{Y}}$$

pour $\ddot{Y} = \ddot{Y}(x)$, $\hat{\varphi}(x, \dot{y}) \leqq \Phi(x, \ddot{Y}(x))$, j désignant l'indice pour lequel on a

$$\varphi_j(x, \dot{y}) = \Phi_j(x, \ddot{Y}(x)) .$$

II. De même, pour que l'inégalité

$$\hat{\varphi}(a, \dot{y}(a)) < \hat{\Phi}(a, \ddot{Y}(a))$$

entraîne (I_2) *pour* $a < x < b$, *il suffit de faire outre les hypothèses* (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a) *et* (γ') *la suivante.*

(δ_a^-) La fonction $\ddot{Y}(x)$ est continue et admet la dérivée à gauche dans l'intervalle considéré et on a

$$(\mathrm{II}_a^-) \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{y})}{\partial x} + \dot{f}(x, \dot{y}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{y})}{\partial \dot{y}} < \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + D_x^- \ddot{Y}(x) \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial \ddot{Y}}$$

pour $\ddot{Y} = \ddot{Y}(x)$, $\hat{\varphi}(x, \dot{y}) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(x, \dot{y}) = \Phi_j(x, \ddot{Y}(x))$.

III. L'inégalité

$$\hat{\varphi}(a, \dot{y}(a)) \leqq \hat{\Phi}(a, \ddot{Y}(a))$$

entraîne aussi (I_2) *pour* $a < x < b$ *si les conditions* (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ') *et* (δ_a^-) *sont satisfaites et si de plus on a* (II_a^+) *pour*

$$x = a\,, \quad \dot{y} = \dot{y}(a)\,, \quad \ddot{Y} = \ddot{Y}(a)\,,$$

j désignant l'indice pour lequel on a

$$\varphi_j(a, \dot{y}(a)) = \Phi_j(a, \ddot{Y}(a))\,.$$

4. Démonstrations des théorèmes fondamentaux.

Les théorèmes fondamentaux énoncés au numéro précédent découlent des propositions presque évidentes.

Lemme 1. *Si les fonctions* $\varphi(x)$ *est* $\psi(x)$ *sont définies dans l'intervalle* $a \leqq x < b$ *et si*

$$\varphi(x) \leqq \psi(x)\,, \quad D_x^+ \varphi(x) < D_x^+ \psi(x)$$

pour $x = a$, *on a*

$$\varphi(x) < \psi(x)$$

pour $a < x < a + \delta$, δ *désignant un nombre positif assez petit.*

Lemme 2. *Si les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont définies dans l'intervalle* $a < x \leqq b$ *et si l'on a*

$$\varphi(x) \leqq \psi(x)$$

pour $a < x < b$ *et*

$$\varphi(b) = \psi(b) \, ,$$

on a

$$D_x^- \varphi(x) \geqq D_x^- \psi(x)$$

pour $x = b$.

Ces deux lemmes sont les conséquences immédiates de la définition des dérivées à droite et à gauche.

Lemme 3. *Si les fonctions* $\hat{\varphi}(x)$ *et* $\hat{\psi}(x)$ *sont continues et admettent les dérivées à droite dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *et si*

$$\hat{\varphi}(a) \leqq \hat{\psi}(a) \, , \quad \hat{\varphi}(b) \not\leqq \hat{\psi}(b) \, ,$$

il existe une valeur ξ $(a \leqq \xi < b)$ *et un indice* j *tels que l'on ait*

$$\hat{\varphi}(x) \leqq \hat{\psi}(x) \, , \quad \varphi_j(x) = \psi_j(x) \, , \quad D_x^+ \varphi_j(x) \geqq D_x^+ \psi_j(x)$$

pour $x = \xi$.

Lemme 4. *Si les fonctions* $\hat{\varphi}(x)$ *et* $\hat{\psi}(x)$ *sont continues et admettent les dérivées à gauche dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *et si*

$$\hat{\varphi}(a) < \hat{\psi}(a) \, , \quad \hat{\varphi}(b) \not< \hat{\psi}(b) \, ,$$

il existe une valeur ξ $(a < \xi \leqq b)$ *telle que l'on ait*

$$\hat{\varphi}(x) \leqq \hat{\psi}(x) \, , \quad D_x^- \varphi_j(x) \geqq D_x^- \psi_j(x)$$

pour $x = \xi$, j *désignant l'indice pour lequel on a*

$$\varphi_j(\xi) = \psi_j(\xi) \, .$$

En effet, pour démontrer le lemme 3, il suffit de prendre pour ξ la borne inférieure de l'ensemble des nombres x' tels que l'on ait

$\hat{\varphi}(x) \not\leqq \hat{\psi}(x)$ pour $x' < x \leqq b$ et d'appliquer le lemme 1. Pour démontrer le lemme 4, il suffit de prendre pour ξ la borne supérieure de l'ensemble des nombre x' tels que l'on ait $\hat{\varphi}(x) < \hat{\psi}(x)$ pour $a < x < x'$ et d'appliquer le lemme 2.

Cela posé, revenons aux théorèmes fondamentaux. Soient $\dot{y}(x)$ une solution de (a) continue dans l'intervalle $a \leqq x < b$ et $\ddot{Y}(x)$ une fonction continue dans le même intervalle. Supposons les conditions (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ') satisfaites. Si l'on a

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour $x = a$ et

$$\hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \not\leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour une certaine valeur a' de x dans l'intervalle $a \leqq x < b$, on aura d'après le lemme 3

$$\hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x)), \quad D_x^+ \varphi_j(x, \dot{y}(x)) \geqq D_x^+ \Phi_j(x, \ddot{Y}(x))$$

pour une certaine valeur ξ de x dans l'intervalle $a \leqq x < a'$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(\xi, \dot{y}(\xi)) = \Phi_j(\xi, \ddot{Y}(\xi))$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse (δ_a^+).

Si l'on a

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) < \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour $x = a$ et si

$$\hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \not< \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour une certaine valeur a' de x dans l'intervalle $a \leqq x < b$, on aura d'après le lemme 4

$$\hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x)), \quad D_x^- \varphi_j(x, \dot{y}(x)) \geqq D_x^- \Phi_j(x, \ddot{Y}(x))$$

pour une certaine valeur ξ de x dans l'intervalle $a < x \leqq a'$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(\xi, \dot{y}(\xi)) = \Phi_j(\xi, \ddot{Y}(\xi))$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse (δ_a^-).

Si l'on a (I_1) pour $x=a$ et (II_a^+) pour $x=a$, $\dot{y}=\dot{y}(a)$, $\ddot{Y}=\ddot{Y}(a)$, j désignant l'indice pour lequel $\varphi_j(a, \dot{y}(a)) = \Phi_j(a, \ddot{Y}(a))$, on a ($\mathrm{I}_2$) pour $a<x\leqq a+\delta$ pourvu que le nombre positif δ soit assez petit. Le théorème démontré tout à l'heure montre ensuite que si la condition (δ_a^-) sont satisfaites, on a (I_2) pour $a+\delta<x<b$. Tous les théorèmes annoncés sont donc complètement démontrés.

5. Extensions des théorèmes fondamentaux au cas où l'intervalle considéré est ouvert à gauche.

Il est facile d'étendre les théorèmes fondamentaux au cas où l'intervalle considérè est ouvert: $a<x<b$. En effet, *supposons les conditions* (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ') *et* (δ_a^+) *satisfaites. Alors, s'il existe une suite de valeurs dècroissantes* $x_1, x_2, \ldots.$ *telles que l'on ait*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a$$

et

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour $x=x_1, x_2, \ldots.,$ *cette inègalitè subsiste dans l'intervalle* $a<x<b$. Car, si l'on a l'inégalité (I_1) pour $x=x_k$, elle reste vraie pour $x_k<x<b$. On obtient de même la proposition suivante. *Si les conditions* (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ') *et* (δ_a^-) *sont satisfaites et s'il existe une suite de valeurs croissantes* $x_1, x_2, \ldots.$ *telles que l'on ait*

$$\lim_{j\to\infty} x_j = b$$

et

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \hat{\varphi}(x, \dot{y}(x)) < \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

pour $x=x_1, x_2, \ldots.,$ *cette inègalitè reste vraie dans l'intervalle* $a<x<b$.

CHAPITRE III

Applications

6. Théorèmes d'existence.

On peut déduire aisément des théorèmes fondamentaux quelques théorèmes d'existence des solutions de l'équation différentielle (a); c'es ce que nous allons montrer.

Faisons outre les hypothèses (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ'), et (δ_a^+) les suivantes.

(ε) L'ensemble D_f contient l'ensemble E des points $(x, \dot{y})$ tels que

$$\hat{\varphi}(x, \dot{y}) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$$

x désignant la valeur dans l'intervalle considéré.

(ζ_1) La section[4] $\dot{S}_\xi E$ de E par l'hyperplan $x = \xi$ est un ensemble borné et non vide quelle que soit la valeur ξ dans l'intervalle considéré.

Désignons par B l'ensemble de tous les points $(x, \dot{y})$ dont l'abscisse x appartient à l'intervalle considéré, qui sera supposé ouvert $a < x < b$, pour fixer les idées. L'ensemble E étant fermé dans B, il existe une fonction continue dans B et coïncidant avec $\dot{f}(x, \dot{y})$ dans E. Nous la désignerons par $\dot{g}(x, \dot{y})$. Si $(\xi, \dot{\eta})$ est un point dans E l'équation différentielle

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = \dot{g}(x, \dot{y})$$

admet une solution $\dot{y} = \dot{\varphi}(x\,;\, \xi, \dot{\eta})$ satisfaisant à la condition initiale $\dot{y}(\xi) = \dot{\eta}$. Cette solution est nécéssairement continue dans l'intervalle $\xi \leqq x < b$. En effet, si elle devient discontinue pour une valeur ξ' de x entre ξ et b, elle ne peut être bornée dans le voisinage de ξ'. Cela est imposible, car le théorème fondamental I montre que l'on a

$$\hat{\varphi}\big(x, \dot{\varphi}(x\,;\, \xi, \dot{\eta})\big) \leqq \hat{\Phi}\big(x, \ddot{Y}(x)\big)$$

(4) Nous désignerons par $\dot{S}_\xi$ l'ensemble de tous les points $(x, \dot{y})$ dont l'abscisse x est égale à ξ.

pour $\xi \leqq x < \xi'$. On obtient donc cette inégalité pour $\xi \leqq x < b$. $\dot{g}(x, \dot{y})$ coïncident avec $\dot{f}(x, \dot{y})$ dans E, $y = \dot{\varphi}(x ; \xi, \dot{\eta})$ est une solution de (a) au moins dans l'intervalle $\xi \leqq x < b$. Prenons une suite de valeurs décroissantes convergeant vers a : $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ $\dot{S}_{\xi_n} E$ n'étant pas vide, on peut trouver un point $(\xi_n, \dot{\eta}_n)$ dans E. La suite des fonctions $\{\dot{\varphi}(x ; \xi_n, \dot{\eta}_n)\}$ étant bornée et également continue dans tout intervalle fermé dans $a < x < b$, on peut en extraire une suite partielle convergente dans $a < x < b$. La limite $\dot{y}(x)$ de cette suite est une solution de (a) continue dans l'intervalle $a < x < b$. Nous arrivons donc au théorème d'existence.

IV. Si les conditions (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ'), (δ_a^+), (ε) *et* (ζ_1) *sont satisfaites, l'équation* (a) *admet au moins une solution continue dans l'intervalle considéré et satisfaisant à* (I_1).

On peut remplacer l'hypothèse (δ_a^+) par (δ_a^-), si l'on fait l'hypothèse suivante au lieu de (ζ_1).

(ζ_2) L'ensemble $S_\xi E$ contient au moins un point intérieur quel que soit la valeur ξ dans l'intervalle considéré.

La démonstration s'achève comme ci-dessus. Le théorème d'existence s'énonce donc comme il suit :

V. Si les conditions, (α_f), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ'), (δ_x^-), (ε) *et* (ζ_2) *sont satisfaites, l'équation* (a) *admet au moins une solution continue dans l'intervalle considéré et satisfaisant à* (I_2).

Dans l'énoncé (ζ_2), l'hypothèse que $\dot{S}_a E$ contient un point intérieur n'est pas nécéssaire même dans le cas où l'intervalle considéré est fermé à gauche : $a \leqq x < b$. Car la solution continue dans l'intervalle ouvert $a < x < b$ et satisfaisant à l'inégalité (I_2) est nécessairement continue à l'extrémité gauche de l'intervalle. Seulement l'inégalité (I_2) doit être remplacée par (I_1) pour $x = a$.

7. Théorèmes de comparaison.

Supposons maintenant que $\ddot{Y}(x)$ est une solution de l'équation auxiliaire

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\ddot{Y}}{dx} = \ddot{F}(x, \ddot{Y}) \,.$$

Les inégalités (II_a^+) et (II_a^-) deviennent ici

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial\hat{\varphi}(x, \dot{y})}{\partial x} + \dot{f}(x, \dot{y})\frac{\partial\hat{\varphi}(x, \dot{y})}{\partial\dot{y}} < \frac{\partial\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})}{\partial x} + \ddot{F}(x, \ddot{Y})\frac{\partial\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})}{\partial\ddot{Y}} \,.$$

Les hypothèses (δ_a^+) et (δ_a^-) seront donc remplacées par (δ). Par suite nous obtenons la proposition suivante.

VI. Supposons les conditions (α_f), (α_F), (β_φ), (β_Φ), (γ_a), (γ_A) *et* (δ) *satisfaites, et soient* $\dot{y}(x)$ *une solution de* (a) *continue dans l'intervalle* $a<x<b$ *et* $\ddot{Y}(x)$ *celle de* (A). *S'il existe une suite de valeurs décroissantes* $x_1, x_2, \ldots.$ *telles que l'on ait*

$$\hat{\varphi}(x_j, \dot{y}(x_j)) \leqq \hat{\Phi}(x_j, \ddot{Y}(x_j)) \,, \quad \lim_{j=\infty} x_j = a \,,$$

on a l'inégalité (I_2) *dans l'intervalle* $a<x<b$. *On obtient la même conclusion si* $\dot{y}(x)$ *et* $\ddot{Y}(x)$ *sont continues dans l'intervalle* $a \leqq x < b$ *et si l'on a*

$$\hat{\varphi}(a, \dot{y}(a)) \leqq \hat{\Phi}(a, \ddot{Y}(a)) \,.$$

On pourra de même énoncer des théorèmes d'existence des solutions en faisant en outre les hypothèses (ε) et (ζ_1).

8. Examen des hypothèses.

Nous avons supposé, pour simplifier les considérations, la dérivabilité des fonctions $\ddot{Y}(x)$, $\hat{\varphi}(x, \dot{y})$, $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$ etc. Mais cela importe peu. Revenons au numéro 4. Les lemmes exposés là peuvent être généralisés comme il suit.

Lemme 1′. *Si les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont définies dans l'intervalle* $a \leqq x < b$ *et si l'on a* $\varphi(a) \leqq \psi(a)$ *et* $\bar{D}_x^+\varphi(x) < \bar{D}_x^+\psi(x)$ *ou* $\underline{D}_x^+\varphi(x)$

$< \underline{D}_x^+ \psi(x)$ *pour* $x = a$, *il existe une suite de valeurs décroissantes* x_1, $x_2, \ldots.$ *telles que*

$$\varphi(x_j) < \psi(x_j)\,, \quad \lim x_j = a\,.$$

Lemme 2′. *Si les fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *sont définies dans l'intervalle* $a < x \leqq b$ *et si l'on a* $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ *pour* $a < x < b$ *et* $\varphi(b) = \psi(b)$, *on a*

$$\overline{D}_x^- \varphi(x) \geqq \overline{D}_x^- \psi(x)\,, \quad \underline{D}_x^- \varphi(x) \geqq \underline{D}_x^- \psi(x)$$

pour $x = b$.

Lemme 3′. *Si les fonctions* $\hat{\varphi}(x)$ *et* $\hat{\psi}(x)$ *sont continues dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *et si*

$$\hat{\varphi}(a) \leqq \hat{\psi}(a)\,, \quad \hat{\varphi}(b) \not\leqq \hat{\psi}(b)\,,$$

il existe une valeur ξ $(a \leqq \xi < b)$ *et un indice* j *tels que l'on ait*

$$\hat{\varphi}(x) \leqq \hat{\psi}(x)\,, \quad \varphi_j(x) = \psi_j(x)\,,$$

$$\overline{D}_x^+ \varphi_j(x) \geqq \overline{D}_x^+ \psi_j(x) \quad \text{et} \quad \underline{D}_x^+ \varphi_j(x) \geqq \underline{D}_x^+ \psi_j(x)$$

pour $x = \xi$.

Lemme 4′. *Si les fonctions* $\hat{\varphi}(x)$ *et* $\hat{\psi}(x)$ *sont continues dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *et si*

$$\hat{\varphi}(a) < \hat{\psi}(a)\,, \quad \hat{\varphi}(b) \not< \hat{\psi}(b)\,,$$

il existe une valeur ξ $(a < \xi \leqq b)$ *telle que l'on ait*

$$\hat{\varphi}(x) \leqq \hat{\psi}(x)\,,$$

$$\overline{D}_x^- \varphi_j(x) \geqq \overline{D}_x^- \psi_j(x) \quad \text{et} \quad \underline{D}_x^- \varphi_j(x) \geqq \underline{D}_x^- \psi_j(x)$$

pour $x = \xi$, j *désignant l'indice pour lequel on a* $\varphi_j(\xi) = \psi_j(\xi)$.

On peut donc prendre au lieu de (II_a^+) l'une des inégalités

$$(\overline{\mathrm{II}}_a^+) \qquad \Big[\overline{D}_t^+ \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t;\; x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \overline{D}_x^+ \Phi_j\big(x, \ddot{Y}(x)\big)\,,$$

$$(\underline{\mathrm{II}}_a^+) \qquad \Big[\underline{D}_t^+ \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t;\; x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \underline{D}_x^+ \Phi_j\big(x, \ddot{Y}(x)\big)\,,$$

au lieu de (II_a^-) l'une des inégalités

$$(\bar{\mathrm{II}}_t^+) \qquad \Big[\bar{D}_t^- \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t\,;\, x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \bar{D}_x^- \Phi_j\big(x, \ddot{Y}(x)\big)\,,$$

$$(\underline{\mathrm{II}}_a^-) \qquad \Big[\underline{D}_t^- \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t\,;\, x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \underline{D}_x^- \Phi_j\big(x, \ddot{Y}(x)\big)$$

et au lieu de (II) l'une des inégalités

$$(\bar{\mathrm{II}}) \qquad \Big[\bar{D}_t \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t;\, x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \Big[\bar{D}_t \Phi_j\big(x+t, \ddot{\mathfrak{Y}}(t;\, x, \ddot{Y})\big)\Big]_{t=0}\,,$$

$$(\underline{\mathrm{II}}) \qquad \Big[\bar{D}_t \varphi_j\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t;\, x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} < \Big[\underline{D}_t \Phi_j\big(x+t, \ddot{\mathfrak{Y}}(t\,;\, x, \ddot{Y})\big)\Big]_{t=0},$$

$\dot{\mathfrak{y}}(t; x, \dot{y})$ désignant une fonction quelconque telle que

$$\dot{\mathfrak{y}}(0\,;\, x, \dot{y}) = \dot{y}\,, \quad \big[D_t^\pm \dot{\mathfrak{y}}(t\,;\, x, \dot{y})\big]_{t=0} = \dot{f}(x, \dot{y}) \qquad .$$

et $\ddot{\mathfrak{Y}}(t\,; x, \ddot{Y})$ une fonction continue telle que

$$\ddot{\mathfrak{Y}}(0\,;\, x, \ddot{Y}) = \ddot{Y}\,, \quad \big[D_t^\pm \ddot{\mathfrak{Y}}(t\,;\, x, \ddot{Y})\big]_{t=0} = \ddot{F}(x, \ddot{Y})\,.$$

Supposons ensuite que les fonctions $\hat{\varphi}(x, \dot{y})$ et $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$ satisfont aux conditions suivantes.

(η_φ) Si $(x, \dot{y})$ appartient à D_f, on a[5]

$$(\mathrm{III}_1) \qquad \Big[\bar{D}_t^\pm \hat{\varphi}\big(x+t, \dot{\mathfrak{y}}(t\,;\, x, \dot{y})\big)\Big]_{t=0} \leqq \hat{\varphi}\big(x, \dot{f}(x, \dot{y})\big)\,.$$

---

(5) Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues dans un même intervalle, chacune des inégalités

$$\underline{D}_x^+ f(x) \leqq g(x) \qquad \text{ou} \qquad \underline{D}_x^- f(x) \leqq g(x)$$

entraîne les inégalités

$$\bar{D}_x^\pm f(x) \leqq g(x)\,.$$

Donc l'inégalité

$$\big[\underline{D}_t^+ \hat{\varphi}(x+t\,,\ \dot{\mathfrak{y}}(t;\ x,\ \dot{y}))\big]_{t=0} \leqq \hat{\varphi}(x, \dot{f}(x, \dot{y}))$$

ou

$$\big[\underline{D}_t^- \hat{\varphi}(x+t\,,\ \dot{\mathfrak{y}}(t;\ x,\ \dot{y}))\big]_{t=0} \leqq \hat{\varphi}(x, \dot{f}(x, \dot{y}))$$

est moins restrictive que (III_1) seulement en apparence. On peut faire une remarque analogue pour les inégalités (III_2).

(η_Φ) Si $(x, \ddot{Y})$ appartient à D_F, on a

$$\text{(III}_2\text{)} \qquad \left[\underline{D}_t^{\pm}\Phi\left(x+t, \ddot{\mathfrak{y}}(t\,;\, x, \ddot{Y})\right)\right]_{t=0} \geqq \hat{\Phi}\left(x, \ddot{F}(x, \ddot{Y})\right).$$

On peut alors prendre les inégalités

$$\text{(IV}_a^+\text{)} \qquad \varphi_j\left(x, \dot{f}(x, \dot{y})\right) < \bar{D}_x^+ \Phi_j\left(x, \ddot{Y}(x)\right),$$

$$\text{(IV}_a^-\text{)} \qquad \varphi_j\left(x, \dot{f}(x, \dot{y})\right) < \underline{D}_x^- \Phi_j\left(x, \ddot{Y}(x)\right),$$

$$\text{(IV}_a\text{)} \qquad \varphi_j\left(x, \dot{f}(x, \dot{y})\right) < \Phi_j\left(x, \ddot{F}(x, \ddot{Y})\right)$$

au lieu de $(\overline{\text{II}}_a^+)$, $(\overline{\text{II}}_a^-)$, $(\overline{\text{II}}_a)$ respectivement. En faisant

$$l = n = 1, \quad \Phi(x, Y) = Y,$$

nous retrouverons les résultats de M. KAMKE[6].

9. Théorèmes d'unicité.

On peut appliquer les résultats obtenus jusqu'ici pour chercher si l'équation n'admet qu'une solution satisfaisant à la condition initiale $\dot{y}(x_0) = \dot{y}_0$. En effet, soit $\dot{y} = \dot{\varphi}(x)$ une solution satisfaisant à cette condition initiale, et faisons le changement de variables

$$\dot{z} = \dot{y} - \dot{\varphi}(x).$$

Nous obtenons

$$\text{(}b\text{)} \qquad \frac{d\dot{z}}{dx} = \dot{g}(x, \dot{z}),$$

où

$$\dot{g}(x, \dot{z}) = \dot{f}(x, \dot{z} + \dot{\varphi}(x)) - \dot{f}(x, \dot{\varphi}(x)).$$

Si l'équation (b) n'admet pas de solution non identiquement nulle et satisfaisant à la condition initiale $\dot{z}(x_0) = \dot{0}$, l'équation (a) n'admet qu'une solution satisfaisant à la condition initiale donnée $\dot{y}(x_0) = \dot{y}_0$,

(6) Loc. cit.

et réciproquement. Il suffit donc de considérer l'équation (b) où $\dot{g}(x, \dot{0}) = \dot{0}$. Introduisons les hypothèses analogues à (α_f), (γ_a), (δ_a^+), (δ_a):

(α_g) La fonction $\dot{g}(x, \dot{z})$ est définie et continue dans l'ensemble D_g.

(γ_b) Le domaine D_φ contient l'ensemble D_g.

(δ_b^+) La fonction $\ddot{Y}(x)$ est continue et admet la dérivée à droite dans l'intervalle considéré et on a

$$(\mathrm{II}_b^+) \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial x} + \dot{g}(x, \dot{z}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial \dot{z}} < \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + D_x^+ Y(x) \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial \ddot{Y}}$$

pour $\ddot{Y} = \ddot{Y}(x)$, $\dot{\varphi}(x, \dot{z}) \leqq \ddot{\Phi}(x, \ddot{Y}(x))$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(x, \dot{z}) = \Phi_j(x, \ddot{Y}(x))$.

(δ_b) On a

$$(\mathrm{II}_b) \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial x} + \dot{g}(x, \dot{z}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial \dot{z}} < \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + \ddot{F}(x, \ddot{Y}) \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial Y}$$

pour $\hat{\varphi}(x, \dot{z}) \leqq \hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$, $(x, \dot{z}) \in D_g D_\varphi$, $(x, \ddot{Y}) \in D_F D_\Phi$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(x, \dot{z}) = \Phi_j(x, \ddot{Y})$.

Introduisons en outre les hypothèses suivantes:

$$(\theta_\varphi) \qquad \dot{y} = \dot{0} \quad \text{si} \quad \dot{\varphi}(x, \dot{y}) \leqq \dot{0}^{(7)}.$$

$$(\theta_\Phi) \qquad \ddot{\Phi}(x, \ddot{0}) = \ddot{0}.$$

Nous supposerons d'abord les conditions (α_g), (β_φ), (β_Φ), (γ_b), (θ_φ) et (θ_Φ) satisfaites.

Alors, l'unicité de la solution de (b) *satisfaisant à la condition initiale* $\dot{z}(a) = \dot{0}$ *sera assurée si à un système de* n *nombres positifs* $\ddot{\varepsilon}$ *on*

(7) Par suite la relation $\dot{\varphi}(x, \dot{y}) < \dot{0}$ est impossible.

peut faire correspondre une fonction $\ddot{Y}(x)$ *satisfaisant aux conditions* (γ'), (δ_b^+) *et telle que l'on ait* $\ddot{0} \leqq \ddot{Y}(a)$ *et* $\ddot{Y}(x) \leqq \ddot{\varepsilon}$ *dans l'intervalle considéré* $a \leqq x < b$. Si $\ddot{Y}(x)$ est une solution de (A), on peut remplacer les hypothèses (γ') et (δ_b^+) par (γ_A) et (δ_b) respectivement. On peut donc énoncer le théorème suivant :

VII. *Si les conditions* (α_g), (β_φ), (β_Φ), (γ_b), (γ_A), (δ_b), (θ_φ) *et* (θ_Φ) *sont satisfaites et si l'équation* (A) *n'admet pas de solution continue dans* $a \leqq x < b$ *et satisfaisant à la condition* $\ddot{Y}(a) = \ddot{0}$ *à l'exception de la solution identiquement nulle, l'équation* (*b*) *n'admet qu'une solution continue dans* $a \leqq x < b$ *et satisfaisant à la condition* $\dot{z}(a) = \dot{0}$.

Dans les applications on prend le plus souvent $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y}) = \ddot{Y}$ (par suite $l = n$). Examinons donc ce cas plus précisément. Les hypothèses (β_Φ), (γ_A) et (θ_Φ) sont satisfaites. L'hypothèse (δ_b) deviendra :

(δ_b') On a

$$(\mathrm{II}_b') \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial x} + \dot{g}(x, \dot{z}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial \dot{z}} < F_j(x, \ddot{Y})$$

pour $\ddot{\varphi}(x, \dot{z}) \leqq \ddot{Y}$, $(x, \dot{z}) \in D_g D_\varphi$, $(x, \ddot{Y}) \in D_F$, j désignant l'indice pour lequel on a $\varphi_j(x, \dot{z}) = Y_j$.

Mais dans notre présent cas on peut prendre la condition moins restrictive (δ_b'') que l'on obtient en remplacant l'inégalité (II_b') par la suivante

$$(\mathrm{II}_b'') \qquad \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial x} + \dot{g}(x, \dot{z}) \frac{\partial \varphi_j(x, \dot{z})}{\partial \dot{z}} \leqq F_j(x, \ddot{Y}) .$$

Car on peut comparer l'équation (*b*) avec l'équation auxiliaire

$$\frac{d\ddot{Y}}{\partial x} = \ddot{F}(x, \ddot{Y}) + \ddot{\varepsilon} ,$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ désignant des constantes positives.

VIII. Si les conditions (α_g), (β_φ), (γ_b), (δ_b'') *et* (θ_φ) *sont satisfaites, et si l'équation* (A) *n'admet pas de solution continue dans* $a \leqq x < b$ *et satisfaisant à la condition* $\ddot{Y}(a) = \ddot{0}$ *à l'exception de la solution identiquement nulle, l'équation* (*b*) *n'admet qu'une solution continue dans* $a \leqq x < b$ *et satisfaisant à la condition* $\dot{z}(a) = \dot{0}$.

On peut de même considérer le cas où l'intervalle considéré est ouvert à gauche. Si $\hat{\varphi}(x, \dot{y})$, $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y})$ satisfait aux condition (η_φ), (η_Φ), on peut remplacer les inégalités (II_b^+), (II_b) par les suivantes

$$(\mathrm{IV}_b^+) \qquad \varphi_j(x, \dot{g}(x, \dot{z})) < \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial x} + D_x^+ \ddot{Y}(x) \frac{\partial \Phi_j(x, \ddot{Y})}{\partial Y},$$

$$(\mathrm{IV}_b) \qquad \varphi_j\big(x, \dot{g}(x, \dot{z})\big) < \Phi_j\big(x, \ddot{F}(x, \ddot{Y})\big).$$

Si $\hat{\Phi}(x, \ddot{Y}) = \ddot{Y}$, on peut prendre au lieu de (II_b'), (II_b'') les inégalités

$$\varphi_j(x, \dot{g}(x, \dot{z})) < F_j(x, \ddot{Y}),$$

$$\varphi_j(x, \dot{g}(x, \dot{z})) \leqq F_j(x, \ddot{Y}).$$

10. Calcul des erreurs.

Dans la pratique on prend au lieu de la solution $\dot{\psi}(x)$ de l'équation donnée

$$(a') \qquad \frac{d\dot{y}}{dx} = \dot{f}(x, \dot{y}) + \dot{\Delta}(x, \dot{y})$$

une solution $\dot{\varphi}(x)$ de l'équation (*a*) si les modules $|\Delta_j(x, \dot{y})|$ sont très petits. Il est donc important de chercher les limites supérieurs des nombres $\varphi_j(x, \dot{\psi}(x) - \dot{\varphi}(x))$. Pour les calculer, il suffit d'appliquer nos théorèmes. En effet, $\dot{z} = \dot{\psi}(x) - \dot{\varphi}(x)$ est une solution de l'équation (*b*) où

$$\dot{g}(x, \dot{z}) = \dot{f}(x, \dot{z} + \dot{\varphi}(x)) - \dot{f}(x, \dot{g}(x)) + \dot{\Delta}(x, \dot{z} + \dot{\varphi}(x)).$$

Les raisonnements sont analogues au numéro précédent. Remarquons seulement que notre procédé permet souvent d'obtenir des développements asymptotiques des solutions de l'équation différentielle[8].

11. Généralisations.

On peut généraliser encore les résultats obtenus ci-dessus. Nous avons déjà exposé cette théorie[9]. Mais nos présents résultats sont plus avantageux pour les applications.

---

(8) Voir, par exemple, M. HUKUHARA, Sur les points singuliers des équations différentielles de Riccati, Jour. Fac. Sc., Hokkaido Imp. Univ., 2 (1935).

(9) 福原, 常微分方程式の基本定理, 日本數學物理學會誌, 第五卷, 第四號; 第六卷, 第二, 三號.