SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE RICCATI

Par

Masuo HUKUHARA

TABLE DES MATIÈRES

Les points singuliers des équations de RICCATI ont été étudiés par P. BOUTROUX dans son célèbre mémoire[1]: Recherches sur les transcendantes de M. PAINLEVÉ. Mais il me semble qu'il y a lieu de préciser et compléter ses résultats en traitant systématiquement ces équations.

Supposons que $x=\infty$ est le point singulier considéré et écrivons l'équation de RICCATI sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=x^{\alpha-1}\left\{a(x)+b(x)y+c(x)y^2\right\}, \tag{1}$$

où α est un entier et $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini ou plus généralement des fonctions développables asymptotiquement pour

$$\Omega<\arg x<\Omega', \quad x\to\infty$$

---

(1) Ann. Ec. norm., 1913.

comme il suit[1]:

$$\begin{cases} a(x) \sim a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots\dots & (2_a) \\ b(x) \sim b_0 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + \dots\dots & (2_b) \\ c(x) \sim c_0 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \dots\dots & (2_c) \end{cases}$$

Nous démontrerons d'abord qu'il suffit de considérer seulement quatre cas suivants:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad \alpha < 0\,; \\ &2^\circ \quad \alpha = 0\,, \quad a_0 = c_0 = 0\,, \quad b_0 \neq 0\,; \\ &3^\circ \quad \alpha = 0\,, \quad a_0 = b_0 = 0\,, \quad c_0 \neq 0\,; \\ &4^\circ \quad \alpha > 0\,, \quad a_0 = c_0 = 0\,, \quad b_0 \neq 0\,; \end{aligned}$$

ou plus précisément que l'on peut choisir une transformation linéaire de coefficients algébriques

$$z = \frac{A(x)y + B(x)}{C(x)y + D(x)}$$

de manière que l'équation transformée prenne une de ces quatre formes. Nous appellerons le point $x = \infty$ point ordinaire dans le premier cas, point singulier régulier dans les deux cas suivants et point singulier irrégulier dans le dernier cas.

---

(1) Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est développable asymptotiquement en une série

$$\varphi(x)\{a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \dots\}$$

pour $\Omega < \arg x < \Omega'$, $x \to \infty$ lorsque la condition suivante est remplie: A un nombre positif ε et un entier positif n on peut faire correspondre deux nombres positifs M et R de manière que la fonction $f(x)$ soit régulière et satisfasse à l'inégalité

$$|f(x) - \varphi(x)\{a_0 + a_1 x^{-1} + \dots + a_n x^{-n}\}| < M|\varphi(x) x^{-n-1}|$$

pour

$$|x| > R, \qquad \Omega + \varepsilon < \arg x < \Omega' - \varepsilon.$$

Dans le premier cas il existe une série

$$y \sim a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \ldots\ldots \tag{3}$$

qui satisfait formellement à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{-j} + y \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j + y^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right\}. \tag{4}$$

Le premier coefficient est arbitraire et les suivants se déterminent d'une manière unique(1). A chaque série (3) correspond une solution et une seule qui l'admet comme série asymptotique pour $\Omega < \arg x < \Omega'$. Nous obtenons ainsi toutes les solutions de l'équation (1). Si les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini, la série (3) est convergente et représente la solution qui prend la valeur a_0 pour $x = \infty$. Ainsi nous retrouvons un résultat classique.

Dans le second cas, nous pouvons supposer que b_0 n'est pas un entier positif, en faisant, s'il est nécessaire, le changement de variables $\frac{1}{y} = z$. Alors la solution générale peut s'écrire

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\psi(x) + C\chi(x)} \tag{5}$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions développables asymptotiquement pour $\Omega < \arg x < \Omega'$, $x \to \infty$ comme il suit:

$$\varphi(x) \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \ldots.$$

$$\psi(x) \sim c\chi(x) \log x + \beta_\nu x^{-\nu} + \beta_{\nu+1} x^{-\nu-1} + \ldots.$$

$$\chi(x) \sim x^{b_0} \{ \gamma_0 + \gamma_1 x^{-1} + \ldots. \}.$$

Nous supposons ici que a_μ et c_ν sont les premiers coefficients non nuls dans les séries (2_a) et (2_c). La constante c qui se trouve dans le développement asymptotique de $\psi(x)$ est nulle dans le cas général où b_0 n'est pas un entier négatif.

(1) Si $\alpha_0 = \infty$, on doit prendre la série: $y \sim \beta_{-1} x + \beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \ldots. (\beta_{-1} \neq 0)$. Les β se déterminent d'une manière unique.

Dans le troisième cas, la solution générale prend la forme

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\psi(x) + c_0 \log x + C\chi(x)}$$

où $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions développables asymptotiquement pour $\Omega < \arg x < \Omega'$ comme il suit

$$\varphi(x) \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \dots.$$

$$\psi(x) \sim \beta_1 x^{-1} + \beta_2 x^{-2} + \dots.$$

$$\chi(x) \sim \gamma_0 + \gamma_1 x^{-1} + \dots.$$

Dans les deux cas 2°, 3°, nous voyons que si $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini, les séries asymptotiques des fonction $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont convergentes et les représentent précisément.

Dans le dernier cas, on peut écrire la solution générale sous la forme (5) où les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ sont des fonctions développables asymptotiquement pour

$$\max\left\{\Omega, \frac{1}{\alpha}\left(\omega + \frac{2k-1}{2}\right)\pi\right\} < \arg x < \min\left\{\Omega', \frac{1}{\alpha}\left(\omega + \frac{2k+3}{2}\right)\pi\right\}$$

$$(\omega = -\arg b, \ k = \text{un entier quelconque})$$

comme il suit:

$$\varphi(x) \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \dots.$$

$$\psi(x) \sim \beta_\nu x^{-\nu} + \beta_{\nu+1} x^{-\nu-1} + \dots$$

$$\chi(x) \sim e^{-B(x)} x^p \{ \gamma_0 + \gamma_1 x^{-1} + \dots. \},$$

$B(x)$ étant un polynome de degré α:

$$B(x) = \frac{b_0}{\alpha} x^\alpha + \dots\dots..$$

Nous supposons ici que a_μ et c_ν sont les premiers coefficients non nuls dans les séries (2_a) et (2_c).

Ainsi dans tous les cas on peut obtenir une expression asymptotique pour la solution génerale. A l'aide de cette expression on pourra étudier l'allure de la solution d'une équation de RICCATI dans le voisinage d'un point singulier.

CHAPITRE I

Introduction

I.—PROCÉDÉ DE RÉDUCTION

1. Considérons d'abord une équation de RICCATI dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante x. On sais que toute solution de cette équation n'admet pas de points critiques ni de points singuliers transcendants à distance finie en dehors des points singuliers des coefficients. Pour étudier comment se comporte la solution dans le voisinage d'un point singulier x_0 des coefficients, nous prenons $\frac{1}{x-x_0}=\xi$ comme variable indépendante. Alors le point singulier que nous considérons est à l'infini. Les coefficients étant algébriques, ils sont développables en séries de puissances entières de $\xi^{\frac{1}{p}}$ ne contenant qu'un nombre fini de puissances négatives, où p désigne un entier positif. Si l'on prend $t=\xi^{\frac{1}{p}}$ comme variable indépendante, les coefficients sont méromorphes dans le voisinage du point à l'infini. Nous supposons donc l'équation de RICCATI écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=x^{\alpha-1}\left\{a(x)+b(x)y+c(x)y^2\right\}, \tag{1}$$

où α désigne un entier et $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini. En choisissant convenablement l'entier α, nous pouvons supposer qu'un au moins des nombres $a(\infty)$, $b(\infty)$, $c(\infty)$ ne soit pas nul. Nous appelerons l'entier α ainsi choisi la classe de l'équation (1) au point $x=\infty$. Considérons d'abord le cas où l'équation en λ

$$c(\infty)\lambda^2+b(\infty)\lambda+a(\infty)=0, \tag{2}$$

que nous appellerons l'équation déterminante[1] de l'équation (1) au point $x = \infty$, admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2. Par le changement de variables[2]

$$z = \frac{y-\lambda_1}{y-\lambda_2}$$

l'équation (1) se transforme en

$$\text{(3)} \qquad \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{a_1(x)+b_1(x)z+c_1(x)z^2\right\},$$

où $a_1(x)$, $b_1(x)$ et $c_1(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini et de plus

$$a_1(\infty) = 0, \quad b_1(\infty) \neq 0, \quad c_1(\infty) = 0.$$

Considérons ensuite le cas où l'équation déterminante (2) admet une racine double λ_1. Nous faisons alors le changement de variables[3] $z = y-\lambda_1$. L'équation (1) se transforme en (3), où $a_1(x)$, $b_1(x)$ et $c_1(x)$ sont des fonctions régulières à l'infini et de plus

$$a_1(\infty) = 0, \quad b_1(\infty) = 0, \quad c_1(\infty) \neq 0.$$

Si la classe α est positive, désignons par μ, ν les ordres des zéros $x = \infty$ des fonctions $a_1(x)$, $b_1(x)$, et faisons le changement de variables $u = x^r z$. L'équation (3) se transforme en

$$\text{(4)} \qquad \frac{du}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{a_2(x)+b_2(x)u+c_2(x)u^2\right\},$$

(1) Supposons que $\alpha > 0$ et que les deux racines de l'équation (2) soient distinctes. Si une fonction méromorphe satisfait à l'équation (1), elle est d'ordre α et admet deux valeurs asymptotiques λ_1 et λ_2.

(2) Si $c(\infty)=0$, $b(\infty)\neq 0$, un des racines, soit λ_2, est ∞ et l'autre λ_1 est $a(\infty)/b(\infty)$. Le changement de variables est alors $z=y-\lambda_1$.

(3) Dans le cas où $\lambda_1=\infty$ (c'est-à-dire le cas où $a(\infty)\neq 0$, $b(\infty)=0$, $c(\infty)=0$), le changement de variables est $z=\frac{1}{y}$.

où

$$\begin{cases} a_2(x) = x^r a_1(x) , \\ b_2(x) = b_1(x) + \dfrac{r}{x^\alpha} , \\ c_2(x) = \dfrac{c_1(x)}{x^r} . \end{cases}$$

Distinguons trois cas suivant que $\mu <, >, = 2\nu$. Dans les deux premiers cas nous posons $r = \frac{\mu}{2}$, $\xi = x^{\frac{1}{2}}$. Alors l'équation (4) se transforme en

$$\frac{du}{d\xi} = \xi^{\beta-1}\{a_3(\xi) + b_3(\xi)u + c_3(\xi)u^2\} \quad \left(\beta = \begin{cases} 2\alpha - \mu & \text{si } \mu < 2\nu \\ 2(\alpha-\nu) & \text{si } \mu > 2\nu \end{cases}\right),$$

où $a_3(\xi)$, $b_3(\xi)$ et $c_3(\xi)$ sont des fonctions régulières à l'infini. Dans le premier cas on a

$$a_3(\infty) \neq 0 , \quad b_3(\infty) = 0 , \quad c_3(\infty) \neq 0$$

et l'équation déterminante admet deux racines distinctes. Dans le second cas on a

$$a_3(\infty) = 0 , \quad b_3(\infty) \neq 0 , \quad c_3(\infty) = 0$$

à moins que α ne soit égale à ν. Si $\alpha = \nu$ et $b_2(\infty) = 0$, la classe devient négative. Dans le troisième cas, nous posons $r = \nu = \frac{\mu}{2}$. Si $\alpha < \nu$, l'équation déterminante admet deux racines distinctes 0 et ∞. Si $\alpha \leqq \nu$, la classe est au plus égale à $\alpha - \nu$. Si la classe de cette nouvelle équation est positive, et si son équation déterminante admet une racine double, on répétera, en partant de cette nouvelle équation, la même marche exposée ci-dessus. On arrivera alors après un nombre fini d'opérations à une équation dont l'équation déterminante admet deux racines distinctes ou à une équation dont la classe est nulle ou négative. Il suffit donc de considérer les quatre cas suivants :

$1^\circ \quad \alpha < 0\,;$

$2^\circ \quad \alpha = 0\,, \quad a(\infty) = c(\infty) = 0\,, \quad b(\infty) \neq 0\,;$

$3^\circ \quad \alpha = 0\,, \quad a(\infty) = b(\infty) = 0\,, \quad c(\infty) \neq 0\,;$

$4^\circ \quad \alpha > 0\,, \quad a(\infty) = c(\infty) = 0\,, \quad b(\infty) \neq 0\,.$

2. Faisons maintenant le changement de variables $t = \dfrac{1}{x}$. L'équation transformée prend la forme

$$\frac{dy}{dt} = t^{-\alpha-1}\left\{A(t) + B(t)y + C(t)y^2\right\} \tag{5}$$

où $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont des fonctions régulières à l'origine $t = 0$, un au moins des trois nombres $A(0)$, $B(0)$, $C(0)$ étant différent de zéro. Si $\alpha < 0$, le second membre de l'équation (5) est régulier pour $t = 0$. Par suite, toute solution admet le point $t = 0$ comme point régulier ou pôle. Le point $x = \infty$ n'est pas un point singulier de l'équation (1). Dans les autres cas le point $x = \infty$ est un point singulier. Nous l'appellerons point singulier régulier dans les deux cas 2° et 3° et point singulier irrégulier dans le cas 4°. Cette dénomination est bien d'accord avec celle que l'on emploie pour les équations différentielles linéaires. En effet, supposons que $C(0) \neq 0$, $B(0) = 0$, en faisant préalablement, s'il est nécessaire, une transformation linéaire relative à y. Posons

$$y = \frac{r(t)}{Y}\frac{dY}{dt} \qquad \text{ou} \qquad Y = e^{\int \frac{y}{r(t)}dt}.$$

Pour que l'on obtienne une équation linéaire

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = p(t)\frac{dY}{dt} + q(t)Y \tag{6}$$

on doit prendre

$$r(t) = -\frac{t^{\alpha+1}}{C(t)}\,.$$

On aura ensuite

$$p(t) = -\frac{\alpha+1}{t} + \frac{C'(t)}{C(t)} - \frac{B(t)}{C(t)},$$

$$q(t) = -\frac{A(t)C(t)}{t^{2(\alpha+1)}}.$$

Le point $t=0$ est un point singulier régulier de (6) si $\alpha=0$ et un point singulier irrégulier[(1)] de (6) si $\alpha<0$.

Dans ce qui suit, nous supposerons seulement que les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont développables asymptotiquement pour

$$\Omega < \arg x < \Omega', \quad x \to \infty$$

en séries de puissances non négatives de x, et nous discuterons les quatre cas correspondant à ceux qui ont été indiqué plus haut.

II.—Points Ordinaires

3. Il est commode dans ce cas de faire le changement de variables $t=\frac{1}{x}$ de sorte que le point que nous considérons est à l'origine. Nous supposons donc que l'équation est de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions développables asymptotiquement pour

$$(2) \qquad \Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to 0$$

comme il suit:

$$(3) \qquad \begin{cases} a(x) \sim a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \\ b(x) \sim b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots \\ c(x) \sim c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + \dots \end{cases}$$

(1) Dans le cas 4° l'équation déterminante admettant deux racines distinctes, l'hypothèse que $C(0)\neq 0$, $B(0)=0$ entraîne $A(0)\neq 0$.

Soit $x = re^{i\theta}$ et supposons que θ garde une valeur fixe entre Ω et Ω'. Si l'on considère une solution quelconque de (1) comme fonction d'une variable réelle r, elle vérifie l'équation

$$(4) \qquad \frac{dy}{dr} = e^{i\theta}\left\{a(re^{i\theta}) + b(re^{i\theta})y + c(re^{i\theta})y^2\right\}$$

dont le second membre est une fonction continue de (r, y) et remplie la condition de Lipschitz dans le domaine

$$0 \leqq r \leqq \delta, \qquad |y| < H$$

δ désignant un nombre positif assez petit et H un nombre positif quelconque. L'équation (4) admet donc une solution et une seul qui tend vers une valeur fiinie donnée y_0 quand $r \to +0$. En faisant le changement de variables $y = \frac{1}{z}$ nous voyons de même que l'équation (4) admet une solution et une seule qui tend vers ∞ quand $r \to +0$. On peut aussi voir facilement que toute solution de (4) tend vers une valeur déterminée (finie ou infinie) quand $r \to +0$.

Supposons ensuite que r garde une valeur fixe. Toute solution de l'équation (1) considérée comme fonction de la variable réelle θ vérifie l'équation

$$(5) \qquad \frac{dy}{d\theta} = ire^{i\theta}\left\{a(re^{i\theta}) + b(re^{i\theta})y + c(re^{i\theta})y^2\right\}$$

dont le second membre est une fonction continue dans le domaine

$$(6) \qquad \Omega + \varepsilon \leqq \theta \leqq \Omega' - \varepsilon, \quad 0 \leqq r \leqq \delta, \quad |y| \leqq H$$

ε désignant un nombre positif arbitrairement petit et H un nombre positif arbitrairement grand. Il existe donc un nombre positif M tel que le module du second membre de (5) soit au plus égale à rM. Soient θ_0 et θ_1 deux nombres quelconques entre $\Omega+\varepsilon$ et $\Omega'-\varepsilon$ et considérons une solution $y(x)$ de (1) telle que $\lim_{r\to 0} y(re^{i\theta_0}) = y_0$. Supposons que

$$|y_0| < H, \quad r(\Omega' - \Omega)\, M \leqq H - |y_0|\,.$$

$y(re^{i\theta})$ étant une solution de l'équation (5), nous obtenons

$$|y(re^{i\theta_1})-y(re^{i\theta_0})|<r(\Omega'-\Omega)M \ .$$

On peut en conclure que $y(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers 0 à l'intérieur du domaine angulaire (2)[1]. Il en sera de même quand $\lim\limits_{r\to+0} y(re^{i\theta_0})=\infty$. Nous arrivons donc à cette conclusion: *Toute solution de (1) converge vers une valeur déterminée (finie ou infinie) quand x tend vers 0 à l'intérieur du domaine angulaire (2). Inversement, étant donné un nombre (fini ou non), il existe une solution de (1) et une seule qui tend vers ce nombre quand x tend vers 0 à l'intérieur du domaine (2).*

4. Etant donné un nombre β_0, il existe une série et une seule

$$y\sim\beta_0+\beta_1x+\dots\dots+\beta_nx^n+\dots\dots \tag{7}$$

qui satisfait formellement à l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\sum a_nx^n+y\sum b_nx^n+y^2\sum c_nx^n \ . \tag{8}$$

Si l'on pose

$$P_n(x)=\beta_0+\beta_1x+\dots\dots+\beta_nx^n \ ,$$

$$z=y-(\beta_0+\beta_1x+\dots\dots+\beta_nx^n)=y-P_n(x) \ ,$$

on a

$$\frac{dz}{dx}=\bar a(x)+\bar b(x)z+\bar c(x)z^2$$

où

$$\bar a(x)=a(x)+b(x)P_n(x)+c(x)P_n(x)^2-P_n'(x) \ ,$$

$$\bar b(x)=b(x)+2c(x)P_n(x) \ , \quad \bar c(x)=c(x) \ .$$

(1) Nous dirons "à l'intérieur du domaine angulaire $\Omega<\arg x<\Omega'$" au lieu de dire "dans tout domaine angulaire $\Omega+\varepsilon<\arg x<\Omega-\varepsilon\ (\varepsilon>0)$."

Les coefficients $\bar{a}(x)$, $\bar{b}(x)$ et $\bar{c}(x)$ sont donc développables asymptotiquement pour

$$(2) \qquad \Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to 0$$

comme il suit

$$\bar{a}(x) \sim \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1} x^{n+1} + \ldots .$$

$$\bar{b}(b) \sim \bar{b}_0 + \bar{b}_1 x + \ldots .$$

$$\bar{c}(x) \sim \bar{c}_0 + \bar{c}_1 x + \ldots .$$

Nous pouvons donc supposer que dans le domaine

$$\Omega + \varepsilon \leqq \theta \leqq \Omega' - \varepsilon, \qquad \gamma \leqq \delta \qquad |y| < \infty$$

le module du second membre de l'équation (1) soit au plus égal à

$$Ar^n + B|y| + C|y|^2,$$

A, B, C désignant des constantes. Si l'on pose $Y = Kr^{n+1}$, nous obtenons

$$Y' = (n+1)Kr^n > Ar^n + BY + CY^2$$

pourvu que K soit plus grand que A et que r soit suffisamment petit. Par suite, la solution qui tend vers zéro quand $x \to 0$ à l'intérieur du domaine angulaire (2) satisfait à la relation

$$|y| < Kr^{n+1}$$

pour $\Omega + \varepsilon \leqq \theta \leqq \Omega' - \varepsilon$, $0 \leqq r \leqq \delta$. On peut en conclure que la solution de l'équation (1) qui converge vers β_0 quand $x \to 0$ est développables asymptotiquement pour

$$\Omega + \varepsilon < \arg x < \Omega - \varepsilon, \quad |x| \leqq R$$

en série (7). On peut de même discuter la solution qui devient infinie quand $x \to 0$. Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 1. *Si les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont développables asymptotiquement en séries* (3) *pour*

$$\Omega < \arg x < \Omega' , \qquad x \to 0$$

toute solution est développable asymptotiquement à l'intérieur de ce domaine angulaire en une série de la forme

$$y \sim \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n + \dots$$

ou

$$y \sim \frac{\gamma - 1}{x} + \gamma + \gamma x + \dots + \gamma_n x^n + \dots$$

qui satisfait formellement à l'équation (8). *Etant donnée une valeur déterminée (finie ou infinie), il existe une solution et une seule qui tend vers cette valeur quand* $x \to 0$ *à l'intérieur du domaine angulaire* (2)."

5. Supposons maintenant que les coefficients sont des fonctions régulières à l'origine et soit $\varphi(x)$ la solution développable asymptotiquement en série (7). Supposons que θ garde une valeur quelconque mais fixe. Les fonctions de la variable r: $\varphi(re^{i\theta})$ et $\varphi(re^{i(\theta+2\pi)})$ admettent le même développement asymptotique. Elles doivent donc coïncider et la solution $\varphi(x)$ est uniforme. On en conclut que la solution est régulière en $x = 0$. De même, la solution qui devient infinie pour $x = 0$ admet ce point comme pôle. Les séries asymptotiques correspondantes convergent et représentent ces solutions. Nous retrouvons ainsi les résultats bien connus.

CHAPITRE II

Points Singuliers Réguliers

I.—Cas Général

6. Nous supposons ici que le point singulier est à l'origine et écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 ,$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions régulières et développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire

$$(2) \qquad \Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to 0$$

comme il suit

$$(3) \qquad \begin{cases} a(x) \sim a_\mu x^\mu + a_{\mu+1}x^{\mu+1} + \dots\dots & (\mu > 0 , \ a_\mu \neq 0) , \\ b(x) \sim b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots & (b_0 \neq 0) , \\ c(x) \sim c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + \dots\dots & (\nu > 0 , \ c_\nu \neq 0) . \end{cases}$$

Nous voulons montrer que si $|b_0| < \mu$, il existe une solution de (1) et une seule telle que

$$y(re^{i\theta}) = O(r^\mu)$$

à l'intérieur du domaine angulaire (2)[(1)]. Supposons d'abord que θ garde une valeur quelconque mais fixe. Une solution de (1) considérée comme fonction de r satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{dr} = \frac{e^{i\theta}}{r}\left\{a(re^{i\theta}) + b(re^{i\theta})y + c(re^{i\theta})y^2\right\} .$$

Le module du second membre de cette équation est au plus égal à

$$\frac{1}{r}\left\{Ar^\mu + B|y| + Cr^\nu|y|^2\right\}$$

A, B et C désignant des constantes positives. Si l'on prend une constante K positive et assez grande et si l'on pose $Y = Kr^\mu$ on aura

$$\frac{dY}{dr} = \mu K r^{\mu-1} > \frac{1}{r}\left\{Ar^\mu + BY + Cr^\nu Y^2\right\} .$$

(1) Cela signifie que quelque petit que soit le nombre ε on peut trouver deux nombres positifs δ, K tels que

$$|y(x)| < Kr^\mu \quad \text{pour} \quad \Omega + \varepsilon \leqq \arg x \leqq \Omega - \varepsilon, \ |x| \leqq \delta.$$

On en conclut qu'il existe une solution $y(x)$ de (1) telle que

$$|y(re^{i\theta})| < Kr^{\mu} .$$

Supposons qu'il existe deux telles solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Leur différence $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ considérée comme fonction de la seule variable r satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{du}{dr} = \frac{e^{i\theta}}{r}\left\{b(re^{i\theta}) + c(re^{i\theta})\Big(y_1(re^{i\theta}) + y_2(re^{i\theta})\Big)\right\}u .$$

Cette équation n'admet pas de solution non identiquement nulle et telle que $|u| < Kr^{\mu}$. Par suite les deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ coïncident.

Supposons ensuite r fixe et θ variable. La solution de (1) considérée comme fonction de la variable θ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{d\theta} = i\left\{a(re^{i\theta}) + b(re^{i\theta})y + c(re^{i\theta})y^2\right\} .$$

Quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre les constantes A, B, C et δ de manière que le module du second membre de cette équation ne surpasse pas

$$Ar^{\mu} + B|y| + C|y|^2$$

dans le domaine $\Omega + \varepsilon \leqq \theta \leqq \Omega' - \varepsilon$, $0 \leqq r \leqq \delta$. Soit θ_0 un nombre entre $\Omega+\varepsilon$ et $\Omega'-\varepsilon$, et soit $y(x)$ la solution de (1) telle que

$$y(re^{i\theta_0}) = O(r^{\mu})$$

ou

$$|y(re^{i\theta_0})| \leqq Kr^{\mu}$$

pourvu que r soit assez petit. Prenons un nombre suffisamment grand L, et posons

$$Y = (K + L|\theta - \theta_0|)r^{\mu} .$$

Nous aurons alors[1]

$$\operatorname{sgn}(\theta-\theta_0)\frac{dY}{d\theta} = Lr^{\mu} > Ar^{\mu}+BY+CY^2$$

pourvu que $B\,|\,\theta-\theta_0\,| < \frac{1}{2}$, $0 \leqq r \leqq \delta$, δ étant assez petit. On aura donc $|\,y(re^{i\theta})\,| < Lr^{\mu}$ pour

$$0 \leqq r \leqq \delta\ , \quad B\,|\,\theta-\theta_0\,| < \frac{1}{2}\ , \quad \Omega+\varepsilon \leqq \theta \leqq \Omega'-\varepsilon\ .$$

On peut en conclure facilement que l'on a

$$y(re^{i\theta}) = O\,(r^{\mu})$$

à l'intérieur du domaine angulaire (2).

7. On verra facilement que si b_0 n'est pas un entier au moins égal à μ il existe une série et une seule

$$(4) \qquad y \sim a_{\mu}\,x^{\mu}+a_{\mu+1}x^{\mu+1}+\ldots. \qquad (a_{\mu} \neq 0)$$

qui satisfait foremellement à l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \sum a_j x^j + y\sum b_j x^j + y^2 \sum c_j x^j\ .$$

Pour démontrer qu'il existe une solution de (1) et une seule développable asymptotiquement en série (4) à l'intérieur du domaine angulaire (2), nous posons

$$P_{n-1}(x) = a_{\mu}\,x^{\mu}+a_{\mu+1}x^{\mu+1}+\ldots.+a_{n-1}x^{n-1}\ ,$$
$$z = y-P_{n-1}(x)\ .$$

Nous obtenons alors

$$(5) \qquad x\frac{dz}{dx} = \bar{a}(x)+\bar{b}(x)z+\bar{c}(x)z^2.\ ,$$

(1) $\operatorname{sgn} x = +1$ ou -1 suivant que $x > 0$ ou < 0.

où

$$\bar{a}(x) = a(x) + b(x)P_{n-1}(x) + c(x)P_{n-1}(x)^2 - P'_{n-1}(x)$$
$$\sim \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1}x^{n+1} + \ldots .$$

$$\bar{b}(x) = b(x) + 2c(x)P_{n-1}(x)$$
$$\sim b_0 + \bar{b}_1 x + \ldots .$$

$$\bar{c}(x) = c(x) \sim c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + \ldots .$$

Si donc $n > |b_0|$, l'éqation (5) admet une solution et une seule telle que

$$z(re^{i\theta}) = O(r^n)$$

à l'intérieur du domaine augulaire (2). Désignons-la par $\varphi_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)$. $\varphi_{n-1}(x)$ est une solution de (1). Par conséquent, si $n > |b_0|$, l'équation (1) admet une solution et une seule telle que

$$y(re^{i\theta}) = P_{n-1}(x) + O(r^n)$$

à l'intérieur du domaine angulaire (2). C'est la fonction définie plus haut. Soit $m > n$. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}\varphi_{m-1}(x) &= P_{m-1}(x) + O(r^m)\\ &= P_{n-1}(x) + O(r^n) .\end{aligned}$$

$\varphi_{m-1}(x)$ coïncide donc avec $\varphi_{n-1}(x)$ quelque grand que soit l'entier positif m. Nous arrivons ainsi à la proposition annoncée au début de ce numéro.

Si b_0 est un entier au moins égal à p, il suffit de considérer au lieu de (1) l'équation

$$x\frac{dz}{dx} = -a(x)z^2 - b(x)z - c(x)$$

que l'on obtient en posant $z = \dfrac{1}{y}$.

8. Soit $\varphi(x)$ la solution de l'équation (1) développable asymptotiquement en série (4), et posons

$$z = \frac{1}{y - \varphi(x)} \,.$$

Nous aurons alors

$$x\frac{dz}{dx} = -\left[b(x) + 2c(x)\varphi(x)\right]z - c(x) \,.$$

En intégrant cette équation nous obtenons

$$z = -e^{-\int \frac{p(x)}{x}dx} \int e^{+\int \frac{p(x)}{x}dx} c(x)\frac{dx}{x} \,,$$

où

$$\begin{aligned} p(x) &= +b(x) + 2c(x)\varphi(x) \\ &\sim +b_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots . \end{aligned}$$

Par suite on aura en général $z = \psi + C\chi$, ψ et χ étant développables asymptotiquement pour (2) comme il suit

$$e^{-\int \frac{p(x)}{x}dx} \sim x^{-b_0}\left\{\gamma_0 + \gamma_1 x + \dots .\right\} \quad (\gamma_0 \neq 0) \tag{6}$$

$$\psi \sim \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu+1} x^{\nu+1} + \dots . \qquad (\beta_\nu \neq 0) \,, \tag{7}$$

où C désigne la constante arbitraire. Si $-b_0$ est un entier au moins égal à ν, la fonction ψ prend la forme

$$\psi \sim c\chi \log x + \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu+1} x^{\nu+1} + \dots . \tag{8}$$
$$\begin{pmatrix} \beta_\nu \neq 0 \quad \text{si } -b_0 > \nu \\ \beta_\nu = 0, \quad c \neq 0 \quad \text{si } -b_0 = \nu \end{pmatrix},$$

où c désigne une certaine constante. La solution générale s'écrit donc

$$y = \varphi - \frac{1}{\psi + C\chi} \,. \tag{9}$$

Les fonctions φ, ψ, χ étant développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire (2) comme nous l'avons déjà indiqué.

Théorème 2. *Si les coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire (2) en séries (3) et si b_0 n'est pas un entier au moins égal à μ, ou au plus égal à $-\nu$, la solution générale s'écrit sous la forme (9), φ, ψ, χ étant développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire (2) en séries (4), (6), (7). Si b_0 est un entier au plus égal à $-\nu$, la solution générale prend aussi la même forme (9), φ et χ étant développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire (2) en séries (4), (6). Mais le développement asymptotique de la fonction ψ prend la forme (8).*"

Remarque 1. Si b_0 n'est pas un entier au moins égal à μ ou au plus égal à $-\nu$, il existe deux séries

$$y \sim a_\mu x^\mu + a_{\mu+1} x^{\mu+1} + \ldots .$$

$$y \sim a'_{-\nu} x^{-\nu} + a'_{-\nu+1} x^{-\nu+1} + \ldots . + a_0 + a'_1 x + \ldots .$$

qui satisfont formellement à l'équation

$$x \frac{dy}{dx} = \sum a_j x^j + y \sum b_j x^j + y^2 \sum c_j x^j .$$

Il existe deux solutions développables asymptotiquement en ces séries, ce sont les solutions correspondant aux valeurs ∞ et 0 de la constante d'intégration C.

Remarque 2. Si les coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont uniformes dans le voisinage de $x = 0$, c'est-à-dire réguliers à l'origine nous verrons comme dans la section précédente que la solution $\varphi(x)$ est régulière à l'origine. Par conséquent la relation (4) ainsi que les autres relations asymptotiques deviennent des égalités.

II.—Cas Spécial

9. Considérons maintenant le cas où les coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ de l'équation

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx} = a(x)+b(x)y+c(x)y^2$$

sont des fonctions régulières et développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire

$$(2) \qquad \Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to 0,$$

comme il suit:

$$(3) \qquad \begin{cases} a(x) \sim a_\mu x^\mu + a_{\mu+1}x^{\mu+1} + \dots & (\mu > 0,\ a_\mu \neq 0) \\ b(x) \sim b_\nu x^\nu + b_{\nu+1}x^{\nu+1} + \dots & (\nu > 0,\ b_\nu \neq 0) \\ c(x) \sim c_0 + c_1 x + \dots & (c_0 \neq 0). \end{cases}$$

Supposons, comme nous l'avons fait plusieurs fois, que θ garde une valeur fixe entre Ω et Ω'. La solution y de (1) considérée comme fonction de r satisfait à l'équation

$$(4) \qquad r\frac{dy}{dr} = e^{i\theta}\left\{a(re^{i\theta})+b(re^{i\theta})y+c(re^{i\theta})y^2\right\}.$$

Si r est suffisamment petit, le module du second membre de cette équation est au plus égale à

$$Ar^\mu + Br^\nu|y| + C|y|^2.$$

Si l'on pose $Y = Kr^\mu$ ($\mu K > A$), on aura

$$r\frac{dY}{dr} = \mu Kr^\mu > Ar^\mu + Br^\nu Y + CY^2$$

pourvu que r soit suffisamment petit. On en conclut que l'équation (4) admet une solution telle que

$$y = O(r^\mu).$$

Or, il est facile de voir qu'il n'existe qu'une telle solution. Donc, quel que soit le nombre θ entre Ω et Ω', l'équation (4) admet une solution et une seule telle que $y = O(r^\mu)$.

Supposons ensuite r fixe et θ variable. On aura alors

$$\frac{dy}{d\theta} = i\left\{a(re^{i\theta}) + b(re^{i\theta})y + c(re^{i\theta})y^2\right\} . \tag{5}$$

Soit θ_0 une valeur quelconque entre Ω et Ω' et considérons la solution de (1) telle que

$$y(re^{i\theta_0}) = O(r^{\mu}) .$$

On a

$$|\, y(re^{i\theta_0})\, | < Kr^{\mu}$$

pour $0 < r \leqq \delta$, δ désignant un nombre positif assez petit. Le module du second membre de l'équation (5) ne surpasse pas

$$\left\{A + BLr^{\nu} + CL^2 r^{\mu}\right\} r^{\mu}$$

si $0 \leqq r \leqq \delta$, $|\, y\, | \leqq Lr^{\mu}$, $\Omega + \varepsilon < \theta < \Omega' - \varepsilon$, A, B, C étant des constantes. On peut choisir δ et L de manière que l'on ait

$$(\Omega' - \Omega)\, \{\, A + BL\delta^{\nu} + CL^2 \delta^{\mu}\, \} + K < L .$$

Par conséquent $|\, y(re^{i\theta})\, | < Lr^{\mu}$ pour

$$r \leqq \delta , \qquad \Omega + \varepsilon < \theta < \Omega' - \varepsilon .$$

L'équation admet donc une solution et une seule telle que

$$y(x) = O(r^{\mu})$$

à l'intérieur du domaine angulaire (2).

10. Il est facile de voir qu'il existe une série

$$y \sim a_{\mu} x^{\mu} + a_{\mu+1} x^{\mu+1} + \ldots . \qquad (a_{\mu} \neq 0) \tag{6}$$

qui vérifie formellement à l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \sum a_n x^n + y \sum b_n x^n + y^2 \sum c_n x^n .$$

Posons

$$P_{n-1}(x) = a_\mu x^\mu + \dots\dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$z = y - P_{n-1}(x) .$$

On aura alors

$$(7) \qquad x\frac{dz}{dx} = \bar{a}(x) + \bar{b}(x)z + \bar{c}(x)z^2 ,$$

où

$$\bar{a}(x) = a(x) + b(x)P_{n-1}(x) + c(x)P_{n-1}(x)^2 - P'_{n-1}(x) ,$$

$$\sim \bar{a}_n x^n + \bar{a}_{n+1}x^{n+1} + \dots\dots$$

$$\bar{b}(x) = b(x) + 2c(x)P_{n-1}(x)$$

$$\sim \bar{b}_1 x + \bar{b}_2 x^2 + \dots\dots$$

$$\bar{c}(x) = c(x) \sim c_0 + c_1 x + \dots\dots$$

L'équation (7) admet une solution et une seule telle que $z(re^{i\theta}) = O(r^n)$ à l'intérieur du domaine angulaire (2). Désignons-la par $\varphi_{n-1}(x)$. Alors

$$y = P_{n-1}(x) + \varphi_{n-1}(x)$$

est la solution de (1) telle que $y = O(r^\mu)$ à l'intérieur du domaine angulaire (2). Cette solution est donc développable asymptotiquement en série (6) à l'intérieur du domaine angulaire (2).

11. Désignons par $\varphi(x)$ la solution développable asymptotiquement en série (6), et posons

$$z = \frac{1}{y - \varphi(x)} .$$

Nous aurons alors

$$x\frac{dz}{dx} = -\left[b(x) + 2c(x)\varphi(x)\right]z - c(x) .$$

En intégrant cette équation, nous obtenons

$$z = e^{-\int \frac{p(x)}{x} dx} \int e^{\int \frac{p(x)}{x} dx} c(x) \frac{dx}{x} ,$$

où

$$p(x) = b(x) + 2c(x)\varphi(x)$$
$$\sim p_1 x + p_2 x^2 + \dots .$$

Par suite

$$z = \psi(x) + c_0 \log x + C\chi(x)$$

où

$$\chi(x) \sim \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots . \qquad (\gamma_0 \neq 0) \tag{8}$$

$$\psi(x) \sim \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots . \tag{9}$$

En revenant à l'équation (1), nous voyons que la solutions générale est

$$y = \varphi(x) - \frac{1}{\psi(z) + c_0 \log x + C\chi(z)} . \tag{10}$$

Théorème 3. *Si les coefficients $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont développables asymptotiquement en séries (3) à l'intérieur du domaine angulaire (2), la solution générale de (1) prend la forme (10), $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant développables asymptotiquement en séries (6), (8), (9) à l'intérieur du domaine angulaire (2).*

Remarque. Nous voyons, comme dans la section précédente, que si les fonctions sont régulières à l'origine, les relations asymptotiques deviennent des égalités.

CHAPITRE III

Points Singuliers Irréguliers

I.—Développements Asymptotiques

12. Nous considérerons dans cette section le cas de l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{a(x)+b(x)y+c(x)y^2\right\}$$

où α est un entier positif et $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions régulières et développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire

$$(2) \qquad \Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to \infty,$$

comme il suit:

$$(3) \qquad \begin{cases} a(x) \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1}x^{-\mu-1} + \dots & (\mu > 0,\ a_\mu \neq 0), \\ b(x) \sim b_0 + b_1 x^{-1} + \dots & (b_0 \neq 0), \\ c(x) \sim c_\nu x^{-\nu} + c_{\nu+1}x^{-\nu-1} + \dots & (\nu > 0,\ c_\nu \neq 0). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(4) \qquad y = ze^{\int x^{\alpha-1}b(x)dx},$$

on a

$$(5) \qquad \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{a(x)e^{-\int x^{\alpha-1}b(x)dx} + c(x)e^{\int x^{\alpha-1}b(x)dx}z^2\right\}.$$

Posons $x = re^{i\theta}$ et supposons comme d'habitude que θ garde une valeur fixe entre Ω et Ω'. La solution de (5) considérée comme fonction de r vérifie

$$(6) \qquad \frac{dz}{dr} = e^{i\theta}x^{\alpha-1}\left\{a(x)e^{-\int x^{\alpha-1}b(x)dx} + c(x)e^{\int x^{\alpha-1}b(x)dx}z^2\right\}.$$

Si l'on pose

$$\beta(r, \theta) = \Re\left(\int x^{\alpha-1}b(x)\,dx\right)$$

et l'on désigne par A, C des consatantes plus grandes que $|a_\mu|$, $|c_\nu|$, le module du second membre est au plus égal à

$$(7) \qquad (A + CK^2 r^{-\mu-\nu})r^{\alpha-\mu-1}e^{-\beta(r,\theta)}.$$

dans les hypothèses que

$$(8) \qquad |z| < Kr^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)}$$

et que $r \geqq R_0$, R_0 étant un nombre suffisamment grand. Il est évident que l'on a[1]

$$\begin{cases} \beta(r,\theta) = \dfrac{\rho r^{\alpha}}{\alpha} \cos(\alpha\theta - \omega) + O(r^{\alpha-1}) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\beta(r,\theta) = \rho r^{\alpha-1} \cos(\alpha\theta-\omega) + O(r^{\alpha-2}) \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\beta(r,\theta) = -\rho r^{\alpha} \sin(\alpha\theta-\omega) + O(r^{\alpha-1}) \end{cases}$$

où l'on a posé $b_0 = \rho e^{-i\omega}$. Pour étudier si l'équation (6) admet une solution telle que (8) nous devons distinguer trois cas suivant que la valeur $\cos(\alpha\theta-\omega)$ est positives, négative ou nulle.

1° Le cas de $\cos(\alpha\theta-\omega) > 0$. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial r} r^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)} = -\rho r^{\alpha-\mu-1}\Big[\cos(\alpha\theta-\omega) + O(r^{-1})\Big] e^{-\beta(r,\theta)}$$

l'expression (7) est moindre que

$$-K\frac{\partial}{\partial r} r^{-r} e^{-\beta(r,\theta)}$$

pourvu que $\rho K \cos(\alpha\theta-\omega) > A$ et que R_0 soit assez grand. L'équation (6) admet donc une solution telle que (8). S'il existe deux telles solutions z_1, z_2, leur différence $u = z_1 - z_2$ satisfait à l'équation

$$\frac{du}{dr} = e^{i\theta} x^{\alpha-1} c(x) e^{\int x^{\alpha-1} b(x)\,dx} (z_1 + z_2) u\ .$$

On en verra sans peine que u doit être identiquement nulle. En revenant à l'équation (1) nous voyons qu'il existe une solution et une

(1) Si $\alpha=1$, on doit remplacer $O(r^{\alpha-1})$ par $O(\log r)$.

seule telle que

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$$

pourvu que θ soit une valeur fixe (mais quelconque) pour laquelle $\cos(\alpha\theta-\omega) > 0$.

2° Le cas de $\cos(\alpha\theta-\omega) < 0$. Soit ε un nombre positif moindre que $-\frac{1}{C}\rho\cos(\alpha\theta-\omega)$. On verra sans peine que l'expression (7) est moindre que

$$\varepsilon r_0^{r+\nu} \frac{\partial}{\partial r} r^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)}$$

pour $r \geqq r_0$, $K = \varepsilon r_0^{\mu+\nu}$, si $r_0 \geqq R_0$, R_0 étant un nombre assez grand. Donc la solution de (6) qui prend une valeur moindre que

$$\varepsilon r_0^{\nu} e^{-\beta(r_0,\theta)}$$

en module satisfait à l'inégalité (8). En revenant à l'équation (1) nous obtenons cette proposition : La solution de (1) telle que

$$|y(r_0e^{i\theta})| < \varepsilon r_0^{\nu} \qquad (r_0 \geqq R_0)$$

satisfait à la relation

$$|y(re^{i\theta})| = O(r^{-\mu})$$

où ε désigne un nombre positif assez petit et R_0 un nombre positif assez grand.

Le cas de $\cos(\alpha\theta-\omega) = 0$ sera discuté plus loin.

En combinant les deux propositions obtenues tout à l'heurs, nous arrivons immédiatement à cette conclusion :

Dans le premier cas, l'équation (1) admet une solution telle que $y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$, *et les autres solutions satisfont à la relation* $\frac{1}{y(re^{i\theta})} = O(r^{-\nu})$. *Dans le second cas, l'équation (1) admet une solution telle que* $\frac{1}{y(re^{i\theta})} = O(r^{-\nu})$ *et les autres solutions satisfont à la relation* $y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$.

13. Soit $\cos(\alpha\theta_0-\omega) \neq 0$ et considérons par exemple la solution satisfaisant à la relation

$$y(re^{i\theta_0}) = O(r^{-\mu}) .$$

Nous voulons montrer que *si ε est un nombre positif assez petit, on a la relation*

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$$

pour $|\theta-\theta_0| \leqq \varepsilon$. En prenant $e^{-i\theta_0}x$ pour variable indépendante nous pouvons supposer $\theta_0 = 0$ sans perdre la généralité.

Posons $x = re^{i\theta} = r_0(ht+1)e^{it}$, et supposons r_0, h fixes et t variable. L'équation (5) devient alors

$$(9)\qquad \frac{dz}{dt} = \left(i+\frac{h}{1+ht}\right)x^{\alpha}\left\{a(x)e^{-\int x^{\alpha-1}b(x)d} + c(x)e^{\int x^{\alpha-1}b(x)dx}z^2\right\} .$$

Soient A et C des constantes plus grandes que $|a_\mu|$ et $|c_\nu|$ respectivement et soit R_0 un nombre positif assez grand. Le module du second membre de l'équation (9) ne surpasse pas

$$(10)\qquad \left(1+\frac{|h|}{1-|h|\varepsilon}\right)\left(A\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\mu} + CM^2 r_0^{-\mu} r^{-\nu}\right) r^{\alpha} r_0^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)}$$

si

$$|t| \leqq \varepsilon, \quad r_0 \geqq R_0, \quad |z| \leqq M r_0^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)} .$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}e^{-\beta(r,\theta)} = \rho r^{\alpha}\left\{\sin(\alpha t-\omega) - \frac{hr_0}{r}\cos(\alpha t-\omega) + O(r^{-1})\right\}^{-\beta(r,\theta)} .$$

Puisque

$$1-\varepsilon|h| < \frac{r_0}{r} < 1+\varepsilon|h| ,$$

nous pouvons supposer que $\frac{1}{2} < \frac{r_0}{r} < 2$. Cela posé, il est facile de choisir les constante ε, h de manière que(1)

$$\sin(at-\omega) - \frac{hr_0}{r}\cos(at-\omega)$$

soit plus grand qu'un nombre positif pour $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Alors, il est facile de voir que l'expression (10) ne surpasse pas

$$Mr_0^{-\mu}\frac{d}{dt}e^{-\beta(r,\theta)}$$

si M et $\frac{R_0}{M}$ sont assez grands. On en conclut que la solution de (5) telle que

$$|z(r_0)| \leqq Mr_0^{-\mu}e^{-\beta(r,\theta)}$$

vérifie l'inégalité

$$|z(re^{i\theta})| \leqq Mr_0^{-\mu}e^{-\beta(r,\theta)} \leqq 2^{\mu}Mr^{-\mu}e^{-\beta(r,\theta)}$$

pour $r = r_0(ht+1)$, $0 \leqq t \leqq \varepsilon$. Par conséquent on a

$$z(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu}e^{-\beta(r,\theta)})$$

pour $0 \leqq \theta \leqq \varepsilon$. On verra de même que cette relation est vérifiée pour $0 \geqq \theta \geqq -\varepsilon$ pourvu que le nombre positif ε soit assez petit. En revenant à l'équation (1) nous obtenons la proposition annoncée plus haut.

Les valeurs de θ pour lesquelle $\cos(a\theta-\omega)$ s'annule sont

$$\omega_k = \frac{1}{a}\left(\omega + \frac{2k+1}{2}\pi\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Supposons

$$\underline{\Omega} = \max(\omega_{k-1}, \Omega) < \theta_0 < \min(\omega_k, \Omega') = \bar{\Omega}$$

(1) On prend par exemple $-h\cos\omega > \sin\omega$, et alors la condition voulue sera remplie si ε est suffisamment petit.

et considérons par exemple une solution de (1) telle que $y(re^{i\theta_0}) = O(r^{-\mu})$. Nous dirons que l'on a

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$$

à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega} < \arg x < \overline{\Omega}\,, \qquad x \to \infty\ .$$

En effet, nous avons montré que l'on a $y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$ à l'intérieur du domaine $\theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon'$ pourvu que les nombres positifs ε et ε' soient assez petits. Désignons donc par $\Omega_0 < \theta < \Omega_1$ le plus grand domaine angulaire à l'intérieur duquel on a $y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$. Supposons que l'on ait $\underline{\Omega} < \Omega_0$. Si l'on avait $\dfrac{1}{y(re^{i\theta})} = O(r^{-\nu})$ pour $\theta = \Omega_0$ on aurait $\dfrac{1}{y(re^{i\theta})} = O(r^{-\nu})$ pourvu que θ soit un nombre assez voisin de Ω_0 et plus grand que lui, ce qui est absurde. Nous aurions donc $y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$ pour $\theta = \Omega_0$. Par suite nous aurions cette relation à l'intérieur du domaine angulaire $\Omega_0 - \varepsilon < \theta < \Omega_1$ pourvu que ε soit un nombre positif assez petit, ce qui est contraire à notre hypothèse. Par conséquent on a $\Omega_0 \leqq \underline{\Omega}$, $\Omega_1 \geqq \overline{\Omega}$. Nous arrivons donc à cette conclusion : *Toute solution de l'équation (1) satisfait à l'une des relations*

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})\,, \qquad \frac{1}{y(re^{i\theta})} = O(r^{-\mu})$$

à l'intérieur du domaine angulaire

$$\max(\Omega\,,\, \omega_{k-1}) < \theta < \min(\Omega'\,,\, \omega_k)\ .$$

14. Il est facile de montrer qu'il existe une série

$$y \sim a_\mu x^{-\mu} + a_{\mu+1} x^{-\mu-1} + \dots \qquad (a_\mu \neq 0) \tag{11}$$

qui satisfait formellement à l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{\sum a_j x^{-j} + y \sum b_j x^{-j} + y^2 \sum c_j x^{-j}\right\}\ . \tag{1'}$$

Désignons par θ_0 une valeur quelconque entre $\underline{\Omega}$ et $\bar{\Omega}$. Nous pouvons démontrer par la méthode utilisée plusieurs fois qu'une solution de (1) telle que $y(re^{i\theta_0}) = O(r^{-\mu})$ est développable asymptotiquement en série (11) à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{k-1} = \max(\Omega, \omega_{k-1}) < \theta < \min(\Omega', \omega_k) = \bar{\Omega}_k .$$

Désignons par $\varphi(x)$ une de ces solutions et posons

$$z = \frac{1}{y-\varphi(x)} .$$

Nous obtenons

$$\frac{dz}{dx} = -x^{\alpha-1}\Big\{\Big[b(x)+2c(x)\varphi(x)\Big]z+c(x)\Big\}$$

dont l'intégrale générale est

$$z = \chi(x)\Big\{C-\int\frac{x^{\alpha-1}c(x)}{\chi(x)}dx\Big\}$$

où

$$\chi(x) = \exp\Big\{-\int x^{\alpha-1}\Big[b(x)+2c(x)\varphi(x)\Big]dx\Big\} .$$

On en déduit le développement asymptotique

$$\text{(12)} \qquad \chi(x) = e^{-B(x)}x^{p}\Big\{\gamma_0+\gamma_1 x^{-1}+\dots\Big\} \qquad (\gamma_0 \neq 0)$$

à l'intérieur du domaine angulaire $\underline{\Omega}_{k-1} < \theta < \bar{\Omega}_k$, où $B(x)$ désigne un polynome de degré α:

$$B(x) = \frac{b_0}{\alpha}x^{\alpha}+\dots$$

Si $\cos(\alpha\theta_0-\omega) > 0$, on aura le développement asymptotique

$$\chi(x)\int^{x}\frac{x^{\alpha-1}c(x)}{\chi(x)}dx \sim \frac{\beta_\nu}{x^\nu}+\frac{\beta^{\nu+1}}{x^{\nu+1}}+\dots \qquad (\beta_\nu \neq 0)$$

quelle que soit la limite inférieure de l'intégration. Si $\cos(\alpha\theta_0-\omega)<0$, on prend pour le chemin d'intégration la demi-droite $\overline{x\infty}$ qui fait un angle θ_0 avec l'axe réel positif. On aura alors pour $-\chi(x)\int^x \frac{x^{\alpha-1}c(x)}{\chi(x)}dx$ un développement asymptotique de la même forme à l'intérieur du domaine angulaire $\underline{\Omega}_{k-1}<\theta<\overline{\Omega}_k$. La solution générale de (1) est donc de la forme

$$y=\varphi(x)+\frac{1}{\psi(x)+C\chi(x)},$$

$\psi(x)$ étant développable asymptotiquement en série

$$\psi(x)\sim\beta_\nu x^{-\nu}+\beta_{\nu+1}x^{-\nu-1}+\dots. \tag{13}$$

15. Étudions maintenant comment se comporte la solution de (1) à l'intérieur du domaine angulaire

$$|\theta-\omega_k|<\varepsilon.$$

Considérons par exemple le cas où k est un nombre pair $2m$. Supposons r fixe et θ variable. On aura

$$\frac{dz}{d\theta}=ix^\alpha\left\{a(x)e^{-\int x^{\alpha-1}b(x)dx}+c(x)e^{\int x^{\alpha-1}b(x)dx}z^2\right\}. \tag{14}$$

Le module du second membre de cette équation ne surpasses pas

$$(A+CK^2r^{-\mu-\nu})r^{\alpha-\mu}e^{-\beta(r,\theta)} \tag{15}$$

pour

$$r\geqq R_0,\qquad |z|\leqq Kr^{-\mu}e^{-\beta(r,\theta)},$$

où R_0 est un nombre positif assez grand. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial\theta}e^{-\beta(r,\theta)}=\left(\rho\sin(\alpha\theta-\omega)+O(r^{-1})\right)r^\alpha e^{-\beta(r,\theta)}$$

$$\sin(\alpha\omega_{2m}-\omega)=1,$$

l'expression (15) est au plus égal à

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Kr^{-\mu} e^{-\beta(r,\theta)}$$

pour $|\theta-\omega_{2m}|\leqq\varepsilon$, $r\geqq R_0$, pourvu que K et $\frac{R_0^{\mu+\nu}}{K}$ soient assez grands, et que ε soit assez petit. On en déduit qu'une solution de (1) tell que

$$y(re^{i(\omega_{2m}-\varepsilon)}) = O(r^{-\mu})$$

satisfait à la relation

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu}) \qquad \text{pour} \quad |\theta-\omega_{2m}|\leqq\varepsilon .$$

On verra de même que si

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu}) \qquad \text{pour} \quad \theta=\omega_{2m-1}+\varepsilon$$

on a cette relation pour $|\theta-\omega_{2m-1}|\leqq\varepsilon$, ε désignant toujours un nombre positif assez petit. En combinant ces résultats avec ceux du numéro 13, nous voyons que la solution de (1) telle que l'on ait[1]

$$y(re^{i\theta}) = O(r^{-\mu})$$

pour une valeur quelconque de θ entre $\underline{\Omega}_{2m-1}$ et $\bar{\Omega}_{2m}$ satisfait à cette relation à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{2m-2} < \theta < \bar{\Omega}_{2m+1}, \qquad x\to\infty .$$

On démontre ensuite par la méthode habituelle que cette solution est développable asymptotiquement en série (11) à l'intérieur de ce domaine augulaire. Si l'on désigne par $\varphi(x)$ cette solution, on a pour la fonction

$$\chi(x) = \exp\left\{-\int x^{\alpha-1}\big(b(x)+2c(x)\varphi(x)\big)dx\right\}$$

(1) Il n'existe qu'une telle solution car $\cos(\alpha\theta-\omega)>0$ pour $\omega_{2m-1}<\theta<\omega_{2m}$.

le développement asymptotique (12) à l'intérieur du même domaine. La fonction

$$\psi(x) = -\chi(x)\int^x \frac{x^{\alpha-1}c(x)}{\chi(x)}dx$$

où le chemine d'intégration est la demi-droite $\overline{x\infty}$ qui fait avec l'axe réel positif un angle entre $\underline{\Omega}_{2m}$ et $\overline{\Omega}_{2m+1}$ est développable asymptotiquement en série (13) à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{2m-1} < \theta < \overline{\Omega}_{2m+1}, \qquad x \to \infty .$$

En somme, nous pouvons écrire la solution générale de (1) sous la forme

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\psi(x) + C\chi(x)}$$

les développements asymptotiques des fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant valables à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{k-1} < \theta < \overline{\Omega}_{k+1}, \qquad x \longrightarrow \infty .$$

Nous arrivons ainsi au théorème suivant.

Théorème 4. *Soit α un entier positif, et supposons que l'on ait les développements asymptotiques (3) à l'intérieur du domaine angulaire (2). Alors la solution générale de (1) est de la forme*

$$y = \varphi(x) + \frac{1}{\psi(x) + C\chi(x)}$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\chi(x)$ étant développables asymptotiquement en séries (11), (13) et (12) à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{k-1} < \arg x < \overline{\Omega}_{k+1}, \qquad x \to \infty .$$

Remarque. Plus précisément, si k est pair $\varphi(x)$ est développable asymptotiquement en série (11) à l'intérieur du domaine angulaire $\underline{\Omega}_{k-2} < \arg x < \overline{\Omega}_{k+1}$ et $\varphi(x) + \dfrac{1}{\psi(x)}$ en série

$$a'_{-\nu}x^{\nu}+a'_{-\nu+1}x^{\nu-1}+\ldots.$$

à l'intérieur du domaine angulaire $\underline{\Omega}_{k-1} < \arg x < \overline{\Omega}_{k+2}$. Cette dernière série satisfait formellement à l'équation (1'). On peut faire une remarque analogue si k est impair.

II.—APPLICATIONS

16. Nous conserverons les notations employées dans la section précédente. Soit $\eta(x)$ une fonction régulière et développable asymptotiquement en série

$$\eta(x) \sim x^{\rho}\{\eta_0+\eta_1 x^{-1}+\eta_2 x^{-2}+\ldots.\} \tag{16}$$

(où ρ est un entier)

à l'intérieur du domaine angulaire

$$\Omega < \arg x < \Omega', \qquad x \to \infty.$$

Comme application des résultats de la section précédente, nous voulons discuter la distribution des points x où $y(x)=\eta(x)$, en supposant que la série (16) ne satisfait pas à l'équation formelle (1'). Prenons pour $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ les fonctions développables asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{k-1} < \theta < \overline{\Omega}_{k+1}, \qquad x \to \infty$$

ω_k étant supposé entre Ω et Ω'. L'égalité

$$\varphi(x)+\frac{1}{\psi(x)+C\chi(x)}=\eta(x)$$

peut s'écrire

$$C\chi(x)=\frac{1}{\eta(x)-\varphi(x)}-\psi(x)$$

ou encore

$$\zeta(x) \equiv \log\chi(x)-\log\left\{\frac{1}{\eta(x)-\varphi(x)}-\psi(x)\right\}=2n\pi i-C \tag{17}$$

où n désigne un entier quelconque. Le premier membre de cette équation est développable asymptotiquement en série de la forme

$$\zeta(x) \sim B(x) + (p-\kappa)\log x + \zeta_0 + \zeta_1 x^{-1} + \dots .$$

grâce à la condition imposée à la série (16). Déterminons la série

$$x \sim \sqrt[\alpha]{\frac{aX}{b_0}}\left\{1 + \varepsilon_1 X^{-\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_2 X^{-\frac{2}{\alpha}} + \dots .\right\} \tag{18}$$

de manière que l'on ait formellement

$$B(x) + (p-\kappa)\log x + \zeta_0 + \zeta_1 x^{-1} + \dots . = X . \tag{19}$$

Si l'on restreint que les coefficients ε_j soient indépendants de X, cela n'est possible que dans le cas où $p = \kappa$. Dans le cas où $p \neq \kappa$, on doit supposer que ε_j soit un polynome de degré $j-\alpha+1$ en $(p-\kappa)\log X$ et alors cela est possible d'une seule manière. Nous dirons que la série (18), où les coefficients ε_j sont ainsi choisis, est le développement asymptotique de la fonction $x = \xi(X)$ définie par l'équation

$$\zeta(x) \equiv \log \chi(x) - \log\left\{\frac{1}{\eta(x)-\varphi(x)} - \psi(x)\right\} = X .$$

En effet, si l'on pose

$$P_n(X) = \sqrt[\alpha]{\frac{aX}{b_0}}\left\{1 + \varepsilon_1 X^{-\frac{1}{\alpha}} + \dots . + \varepsilon_n X^{-\frac{n}{\alpha}}\right\}$$

on aura

$$\zeta\big(P_n(X)\big) - X = o(X^{-\frac{n}{\alpha}+1})$$

à l'intérieur du domaine angulaire

$$a\underline{\Omega}_{k-1} - \omega < \arg X < a\bar{\Omega}_{k+1} - \omega , \qquad X \to \infty . \tag{20}$$

Soit δ un nombre positif quelconque et supposons que

$$a\underline{\Omega}_{k-1} - \omega + \delta < \arg X < a\bar{\Omega}_{k+1} - \omega - \delta .$$

Si le nombre positif σ' est assez petit, on aura

$$|\zeta(z)| \leqq M |P_n(X)|^{\alpha}$$

sur le cercle Γ: $|z-P_n(X)| = \sigma' |P_n(X)|$, M désignant une constante. En remarquant que

$$\zeta(x) = \zeta\big(P_n(X)\big)+\zeta'\big(P_n(X)\big)\big(x-P_n(X)\big)$$
$$+\frac{(x-P_n(X))^2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta(z)}{(z-x)(z-P_n(X))^2}dz$$

et en supposant que $|x-P_n(X)| \leqq \sigma |P_n(X)|$ $(\sigma < \sigma')$, on écrit

$$\zeta(x) = \zeta\big(P_n(X)\big) + \big(\zeta'\big(P_n(X)\big) + \Delta\big)\big(x-P_n(X)\big) .$$

On a alors

$$|\Delta| \leqq \frac{\sigma M}{\sigma'(\sigma'-\sigma)} |P_n(X)|^{-1} .$$

Considérons la fonction $\zeta(x) - X$ comme la somme de deux fonctions

$$F(x) = \zeta'\big(P_n(X)\big)\big(x-P_n(X)\big) \quad \text{et} \quad f(x) = \big(x-P_n(X)\big)\Delta+\zeta\big(P_n(X)\big)-X$$

et appliquons le théorème de ROUCHÉ. Il est maintenant facile de voir que l'on a $|F(x)| > |f(x)|$ pour

$$|X|^{-\frac{n-1}{\alpha}} \leqq |x-P_n(X)| \leqq \sigma |P_n(X)|$$

pourvu que $|X|$ soit suffisamment grand, et que σ soit suffisamment petit relativement à σ'. La fonction $F(x)$ admet un seul zéro $P_n(X)$. Donc l'équation $\zeta(x) = X$ admet une seule racine dans le cercle

$$|x-P_n(X)| \leqq R$$

où R est un nombre quelconque entre $|X|^{-\frac{n-1}{\alpha}}$ et $\sigma |P_n(X)|$. Cela suffit de démontrer que la série (18) représente asymptotiquement la fonction $x = \xi(X)$ définie par l'équation $\zeta(x) = X$ à l'intérieur du domaine angulaire (20).

Cela posé, voyons comment se distribuent les points x où $y(x) = \eta(x)$. Pour les obtenir, il suffit de poser

$$x = \xi(2n\pi i - \log C) ,$$

n désignant un entier quelconque. Si n est un entier de module assez grand, il faut et il suffit, pour que le point $2n\pi i - \log C$ soit dans le domaine

$$a\underline{\Omega}_{k-1} + \omega + \delta < \arg X < a\overline{\Omega}_{k+1} + \omega - \delta$$

que n soit positif ou négatif suivant que k est un entier pair ou impair. L'argument du point x correspondant converge vers ω_k lorsque n augmente indéfiniment.

Théorème 5. *Presque tous les points x pour lesquels $y(x) = \eta(x)$ se distribuent dans les domaines*

$$|\arg x - \omega_k| < \delta \qquad (k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots)$$

où δ est un nombre positif arbitrairement petit. Et ces points s'obtiennent asymptotiquement par la série (18) en posant $X = 2n\pi i - \log C_k$ où C_k est une constante pouvant varier avec k, et n un entier (assez grand) positif ou négatif suivant que k est pair ou impair.

17. Nous avons supposé au numéro précédent que $C \neq 0 , \infty$. Si C est 0 ou ∞, nous obtenons une solution développable asymptotiquement à l'intérieur du domaine angulaire

$$\underline{\Omega}_{k-1} < \arg x < \overline{\Omega}_{k+1} , \qquad x \to \infty ,$$

en une série de puissances de x qui satisfait formellement à l'équation (1′). Ces deux solutions sont appelées intégranles tronquées à la direction (ω_k). Il est clair que pour ces intégrales il n'existe qu'un nombre fini de points x où $y(x) = \eta(x)$ dans le domaine

$$\underline{\Omega}_{k-1}+\delta < \arg x < \bar{\Omega}_{k+1}-\delta .$$

Une intégrale tronquée à la direction (ω_k) est nécessairement tronquée à l'une des deux directions (ω_{k-1}) et (ω_{k+1}) comme on a remarqué au numéro 15.

Considérons en particulier le cas où les fonctions $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont uniformes dans le voisinage du point à l'infini. On a vu qu'il n'existe qu'une solution développable asymptotiquement en une série

$$a_\mu x^{-\mu}+a_{\mu+1}x^{-\mu-1}+\dots\dots$$

ou

$$a'_{-\nu}x^{\nu}+a'_{-\nu+1}x^{\nu-1}+\dots\dots$$

à l'intérieur du domaine angulaire

$$\omega_{k-1} < \arg x < \omega_k , \qquad x \to \infty$$

suivant que k est pair ou impair. Cette solution unique est tronquée aux deux directions (ω_{k-1}) et (ω_k). Nous la désignerons par y_{k-1}. Nous aurons ainsi 2α intégrales tronquées $y_1, y_2, \dots\dots, y_{2\alpha}$. Ces intégrales sont distinctes en général.

Théorème 6. *Dans le cas où les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont régulières à l'infini, les relations asymptotiques (11), (12), (13) deviennent des égalités si l'une des conditions suivantes sont remplies.*

(i) *k étant un nombre pair, l'équation (1) admet une solution $y(x)$ développable asymptotiquement pour*

$$\omega_k < \arg x < \omega_{k+1} , \qquad x \to \infty$$

en série de puissances négatives de x et cette solution est tronquée aux directions $\omega_{k+1}, \omega_{k+3}, \dots\dots, \omega_{k+2\alpha+1}$;

(ii) *l'équation (1) admet une solution tronquée aux $2\alpha+1$ directions singulières consécutives:* $\omega_k, \omega_{k+1}, \dots\dots, \omega_{k+2\alpha}$;

(iii) *l'équation (1) admet une solution tronquée aux directions singulières* $\omega_k, \omega_{k+2}, \dots\dots, \omega_{k+4\alpha}$; *etc.*

Car si l'une de ces conditions sont remplie, la solution tronquée $y(x)$ est uniforme à l'infini. Par suite elle admet le point à l'infini comme point régulier ou pôle. Il suffit alors d'intégrer l'équation linéaire en z que l'on obtient en posant $y-y(x)=\frac{1}{z}$.

18. *Si une fonction transcendante méromorphe (ou plus généralement une fonction admettant le point à l'infini comme point singulier essentiel isolé) satisfait à l'équation différentielle du premier ordre*

$$\frac{dy}{dx}=R(x, y) \tag{21}$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x, y (ou plus généralement fonction rationnelle de y dont les coefficients sont des fonctions régulières à l'infini), (1) doit être une équation de RICCATI.

C'est un théorème obtenu par M. J. MALMQUIST dans son beau mémoire : Sur les fonctions à un nombres finis de branches définies par les équations différentielles du premier ordre[1]. En combinant ce théorème avec les résultats obtenus jusqu'ici, nous obtenons de diverses propositions. Nous nous contenterons seulement d'en indiquer un exemple.

Théorème 7. *Si une fonction méromorphe $f(x)$ admettant une valeur exceptionnelle de défaut positif y_0 satisfait à une équation différentielle du premier ordre (21), cette équation se ramène par la transformation $y-y_0=\frac{1}{z}$ à une équation linéaire, et y_0 est une valeur exceptionnelle de $f(x)$ au sens de M.* PICARD.

En effet, l'équation (21) doit être celle de RICCATI. Si $y=y_0$ est la solution de (21), la fonction $f(x)$ ne peut prendre la valeur y_0 qu'aux points singuliers des coefficients de $R(x, y)$. y_0 est donc une valeur exceptionnelle de $f(x)$ au sens de M. PICARD. Si l'on pose $y-y_0=\frac{1}{z}$, z satisfait à une équation différentielle linéaire.

Supposons donc que $y=y_0$ n'était pas une solution de (1). Si par une transformation linéaire de coefficients algébriques

$$Z=\frac{A(x)y+B(x)}{C(x)y+D(x)} \tag{22}$$

(1) Acta Math., t. 36.

l'équation (21) se ramenait à une équation linéaire

$$\frac{dz}{dx} = p(x)z + q(x) \tag{23}$$

$$g(x) = \frac{A(x)f(x) + B(x)}{C(x)f(x) + D(x)}$$

serait une solution transcendante de (23) et

$$h(x) = \frac{A(x)y_0 + B(x)}{C(x)y_0 + D(x)}$$

ne serait pas une solution de (23). Il est aisé de calculer asymptotiquement les points x où l'on a $g(x) = \eta(x)$, si la fonction $\eta(x)$ algébrique à l'infini ne satisfait pas à l'équation (23). Si l'on prend $\eta(x) = h(x)$, nous obtenons les points x où $f(x) = y_0$. On en voit que y_0 n'est pas une valeur exceptionnelle de défaut positif. Cela est contre l'hypothèse. Donc, par la transformation linéaire de coefficients algébriques l'équation (21) ne se ramènerait pas à une équation linéaire. Alors on pourrait trouver une transformation linéaire (22) ramenant l'équation (21) à une des quatre formes étudiées. Il est évident que l'équation transformée

$$\frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1}\left\{a(x) + b(x)z + c(x)z^2\right\} \tag{24}$$

devrait admettre l'infini comme point singulier irrégulier. $g(x)$ serait une solution transcendante de (24) et $h(x)$ ne satisferait pas à l'équation (24). On peut supposer sans perdre la généralité que $h(x)$ est uniforme à l'infini. Car, sinon on prendra $x^{\frac{1}{p}}$ pour variable indépendante, p étant un entier positif convenablement choisi. Nous avons discuté comment se distribuent les points x où $g(x) = \eta(x)$. En posant $\eta(x) = h(x)$, nous obtenons les points où $f(x) = y_0$. On en voit facilement que y_0 n'est pas une valeur exceptionnelle de défaut positif. Cela est aussi contre l'hypothèse. Le théorème est donc établi.