ÜBER DIE LINEARE INTEGRALGLEICHUNG, WELCHE DURCH ZWEI LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN M-TER ORDNUNG KONSTRUIERT WERDEN KANN

Von

Yoshiro IKEDA

In meiner früheren Abhandlung(1) habe ich gezeigt, dass man aus den Lösungen der zwei linearen Differentialgleichungen m-ter Ordnung zwei Volterrasche Integralgleichungen, wovon die eine die Lösung der andern ist, bilden kann. Im allgemeinen wird die Lösung der linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung durch m lineare unabhängige Anfangsbedingungen oder m lineare unabhängige Randbedingungen vollständig bestimmt. Die Lösung der Volterraschen Integralgleichung ist durch die Anfangsbedingungen, dagegen die der Fredholmschen Integralgleichung durch die Randbedingungen bestimmt. Daraus vermutet man, dass man die Volterrasche Integralgleichung in die Fredholmsche Integralgleichung überführen kann, wenn man die Anfangsbedingungen durch die Randbedingungen eliminieren kann. In der Tat gelang es mir durch Benutzung der Ergebnisse meiner früheren Abhandlung die lineare Differentialgleichung in die Volterrasche Integralgleichung und die Volterrasche Integralgleichung in die Fredholmsche Integralgleichung überzuführen und aus den Lösungen der zwei linearen Differentialgleichungen, die den Randbedingungen genügen, zwei Fredholmsche Integralgleichungen, wovon die eine die Lösung der andern ist, zu bilden.

(1) Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaidô Imperial University, Bd. 1. (1928) S. 193–209.

Journal of Facutly of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. I, Vol. I, No. 2, 1931.

Über die überführung der linearen Differentialgleichung in die Integralgleichung allein hat schon Herr Kowalewski eine auf das Cauchysche bzw. Lagrangesche Integrationsproblem sich gründende Methode gezeigt. Herren Takasu und Takahashi haben in ähnlicher Weise die Überführungsmethode des linearen Differentialgleichungssystems behandelt.

Die vorliegende Methode gestattet nicht nur, die lineare Differentialgleichung in die Fredholmsche Integralgleichung überzuführen, sondern auch die Resolvente der Integralgleichung zu gewinnen.

Da sich die Methode nicht auf die Greensche Formel, sondern auf eine Integralformel, durch die die Lösungen der zwei linearen Differentialgleichungen m-ter Ordnung miteinander verknüpft werden, gründet, so sind unsere Ergebnisse nicht nur auf die sich selbst adjungierte Differentialgleichung, sondern auch auf die lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung anzuwenden. In letzten Paragraphen sind einigen Beispiele hinzufügt worden. Im ersten Beispiel wird eine Schmidtsche Eigenfunktion als die einfachste Anwendung auf die lineare Differentialgleichung erster Ordnung gewonnen. Im zweiten Beispiel wird die Greensche Funktion in dem Falle, wo letztere nicht im engeren Sinne auftritt als eine Anwendung auf die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung berechnet.

INHALT

---

(2) G. Kowalewski, Überführung linearer Differentialgleichungen in Integralgleichungen. Leipziger Berichte, 80, Bd. **4** (1928) S. 224–236.

(3) S. Takahashi, Überführung linearer Differentialgleichungssysteme in Integralgleichungen. Tôhoku Math. Journal, 1929. S. 366–377.

(4) T. Takasu, Zur Überführungsmethode linearer Differentialgleichungen in lineare Integralgleichungen. Tôhoku Math. Journal 1929, S. 378–387.

I. ÜBERFÜHRUNG DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG M-TER ORDNUNG IN DIE FREDHOLMSCHE INTEGRALGLEICHUNG.

Satz I. Es seinen

$$u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \dots\dots\dots + a_m u = 0\,, \tag{1}$$

$$v^{(m)} + b_1 v^{(m-1)} + \dots\dots\dots + b_m v = 0 \tag{2}$$

lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung, deren Koeffizienten a und b keinen singulären Punkt zwischen α und x besitzen, und es seien $u_1, \dots\dots, u_m$ die unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (1).

Die Lösung der Differentialgleichung (2), deren Anfangswerte $v_1(\alpha), \dots\dots, v_m(\alpha)$ sind, genügt der Integralgleichung

$$v(x) = F_1(x, \alpha) + \int_\alpha^x D(x, \xi) F_3(\xi) d\xi\,, \tag{3}$$

wobei

$$F_1(x, \xi) = - \begin{vmatrix} 0\,, & u_1(x)\,, & \dots\dots\dots, & u_m(x) \\ v^{(m-1)}(\xi)\,, & u_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \dots\dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v(\xi)\,, & u_1(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix} \div \varDelta \tag{4}$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} u_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(1)}(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m^{(1)}(\xi) \\ u_1(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}\,, \tag{5}$$

$$D(x, \xi) = \begin{vmatrix} u_1(x)\,, & \dots\dots\dots, & u_m(x) \\ u_1^{(m-2)}(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1(\xi)\,, & \dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix} \div \varDelta\,, \tag{6}$$

$$F_3 = (a_1 - b_1) v^{(m-1)} + \dots\dots\dots + (a_m - b_m) v\,. \tag{7}$$

Obgleich der Beweis dafür in meiner früheren Abhandlung gegeben ist, wollen wir ihn hier kurz wiedergeben, denn die vorliegende Untersuchung gründet sich ausschliesslich auf die Formel (3). Die Differentialgleichung (2) lässt sich in der Form

$$(8) \qquad \begin{aligned} & v^{(m)}(\xi) + a_1(\xi)v^{(m-1)}(\xi) + \dots\dots\dots + a_m(\xi)v(\xi) \\ & = \left\{a_1(\xi) - b_1(\xi)\right\}v^{(m-1)}(\xi) + \dots\dots + \left\{a_m(\xi) - b_m(\xi)\right\} v(\xi) \end{aligned}$$

schreiben.

Multiplizieren wir die beiden Seiten der Gleichung (8) mit $D(x, \xi)$ und integrieren von α bis x, so erhalten wir durch die partiellen Integrationen

$$(9) \qquad F(x, x) - F(x, \alpha) + \int_\alpha^x F_2(x, \xi)v(\xi)d\xi = \int_\alpha^x D(x, \xi)F_3(\xi)d\xi\,,$$

wobei

$$(10) \qquad F(x, \xi) = v^{(m-1)}f_0 + (-1)v^{(m-2)}f_1 + \dots\dots + (-1)^{m-1}vf_{m-1}\,,$$

$$(11) \qquad F_2(x, \xi) = (-1)^m f_m\,,$$

$$(12) \qquad f_0 = D(x, \xi)\,,$$

$$(13) \qquad \begin{aligned} f_n = {} & \frac{\partial^n}{\partial\xi^n} D(x, \xi) + (-1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}\left\{a_1 D(x, \xi)\right\} + \dots\dots \\ & + (-1)^n a_n D(x, \xi)\,. \end{aligned}$$

Um $F(x, \xi) = F_1(x, \xi)$, $F_2(x, \xi) = 0$ zu beweisen, betrachten wir die nachstehende Determinante:

$$(14) \qquad A_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \dots\dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \dots\dots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-2)}(\xi), & \dots\dots, & u_m^{(m-n-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & u_1(\xi), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

Differentiieren wir jede Zeile der Determinante A_n nach ξ, so erhalten wir nur zwei von Null verschiedene Determinanten:

$$(15)\qquad (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0\,, & u_1(x)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0\,, & u_1^{(m)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ 0\,, & u_1^{(m-2)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1\,, & u_1^{(m-n-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0\,, & \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0\,, & u_1(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

und

$$(16)\qquad (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0\,, & u_1(x)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0\,, & u_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1\,, & u_1^{(m-n-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0\,, & u_1^{(m-n-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0\,, & u_1(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

wenn $n \neq 0$ und $n < m-1$. Im Falle wo $n = 0$ ist, haben wir nur eine Determinante:

$$(17)\qquad (-1)\begin{vmatrix} 0\,, & u_1(x)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 1\,, & u_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ 0\,, & u_1^{(m-1)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0\,, & u_1(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

ebenso im Falle wo $n = m-1$ ist:

$$(18)\qquad (-1)^{m}\begin{vmatrix} 0\,, & u_1(x)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0\,, & u_1^{(m)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ 0\,, & u_1^{(m-2)}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u^{(m-2)}(\xi) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1\,, & u(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m\,(\xi) \end{vmatrix}$$

denn die übrigen $m-2$ bzw. $m-1$ Determinanten müssen sämtlich verschwinden, weil die zwei Zeilen einander gleich sind.

Da die Determinante ihren Wert nicht ändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Faktor multiplizierten entsprechenden Elemente einer anderen Zeile addiert, so lässt sich die Determinante (15) in der Form

$$(19) \qquad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(x) \\ a_{n+1}, & c_1, & \dots\dots\dots\dots, & c_m \\ 0, & u_1^{(m-2)}(\xi), & \dots\dots\dots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \dots\dots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & \dots & \dots & \dots \\ 0, & u_1(\xi), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei

$$c_i = u_i^{(m)} + a_2 u_i^{(m-2)} + \dots + a_m u_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Also folgt aus (1)

$$c_i = -a_1 u_i^{(m-1)}. \qquad i = 1, 2, \dots\dots, m.$$

Daher wird die Determinante (19) folgendermassen dargestellt:

$$-(-1)^{n+1} a_{n+1} \begin{vmatrix} u(x), & \dots\dots\dots\dots\dots, & u_m(x) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), & \dots\dots\dots\dots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ u(\xi), & \dots\dots\dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

$$-a_1(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \dots\dots\dots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \dots\dots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & \dots & \dots & \dots \\ 0, & u_1(\xi), & \dots\dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

Also;

die erste Determinante $= -a_{n+1}A_0(-1)^{n+1}$

die zweite Determinante $= -a_1 A_n$

In analoger Weise folgt aus (18)

$$\frac{\partial A_{m-1}}{\partial \xi} = -a_m A_0(-1)^m - a_1 A_{m-1} \tag{20}$$

und

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} u_1^{(m)}(\xi), & \dots\dots\dots\dots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), & \dots\dots\dots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ u_1(\xi), & \dots\dots\dots\dots\dots, & u_m(\xi) \end{vmatrix} = -a_1\varDelta . \tag{21}$$

Endlich betrachten wir die Determinante (16). Durch Vergleich mit (14) kann man leicht sehen, dass sie gleich A_{n+1} ist.
Daraus

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi} = -a_{n+1}A_0(-1)^{n+1} - a_1 A_n + A_{n+1}. \quad [n \neq 0,\ n < m-1] \tag{22}$$

Aus (17)

$$\frac{\partial A_0}{\partial \xi} = A_1 . \tag{23}$$

Daraus

$$\frac{\partial}{\partial \xi} D(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{A_0}{\varDelta}\right\} = \frac{\partial A_0}{\partial \xi}\frac{1}{\varDelta} - \frac{A_0}{\varDelta^2}\frac{\partial \varDelta}{\partial \xi} = \frac{A_1}{\varDelta} + \frac{A_0}{\varDelta}a_1 ,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \xi} D(x, \xi) - a_1 D(x, \xi) = \frac{A_1}{\varDelta} . \tag{24}$$

Nimmt man an, dass

$$\frac{\partial^n}{\partial \xi^n} D(x, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}}\left\{a_1 D(x, \xi)\right\} + \dots\dots\dots \tag{25}$$
$$+ (-1)^n a_n D(x, \xi) = \frac{A_n}{\varDelta} ,$$

so wird

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\xi^{n+1}}D(x,\xi)-\frac{\partial^{n}}{\partial\xi^{n}}\left\{a_1D(x,\xi)\right\}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{a_nD(x,\xi)\right\}=\frac{\partial A_n}{\partial\xi}\frac{1}{\Delta}-\frac{A_n}{\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi},$$

gemäss (21) und (22)

$$=-a_{n+1}(-1)^{n+1}\frac{A_0}{\Delta}-a_1\frac{A_n}{\Delta}+\frac{A_{n+1}}{\Delta}+\frac{A_n}{\Delta}a_1,$$

also

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial\xi^{n+1}}D(x,\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{a_1D(x,\xi)\right\}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}a_{n+1}D(x,\xi)=\frac{A_{n+1}}{\Delta}.$$

Damit wird die Annahme (25) bestätigt. Nach (13) lautet die Formel

$$f_n=\frac{A_n}{\Delta}\tag{26}$$

Im Falle wo $n=m-1$ ist, erhält man aus (20) und (21)

$$\frac{\partial^{m}}{\partial\xi^{m}}D(x,\xi)-\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\left\{a_1D(x,\xi)\right\}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{a_{m-1}D(x,\xi)\right\}$$

$$=-(-1)^{m}\frac{a_mA_0}{\Delta}-a_1\frac{A_{m-1}}{\Delta}+a_1\frac{A_{m-1}}{\Delta}$$

Also

$$\frac{\partial^{m}}{\partial\xi^{m}}D(x,\xi)-\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\left\{a_1D(x,\xi)\right\}+\ldots\ldots\ldots\tag{27}$$
$$+(-1)^{m}a_mD(x,\xi)=0,$$

oder

$$f_m=0.\tag{28}$$

Damit können wir schliessen aus (10) und (4)

$$(29) \qquad F(x, \xi) = \frac{v^{(m-1)}A_0 - v^{(m-1)}A_1 + \ldots\ldots + (-1)^{m-1}vA_{m-1}}{\Delta} = F_1(x, \xi)\,,$$

$$(30) \qquad F_1(x, x) = v(x)\,,$$

$$(31) \qquad F_2(x, \xi) = 0\,.$$

Aus (29), (30) und (31) wird die Integralgleichung (9) mit (3) übereinstimmen, und die Forderung wird vollständig erledigt. Aus (4), (6), (14) und (25) folgt sogleich der Satz:

Satz 2.

$$D(x, \xi)\Big|_{\xi=x} = 0\,, \quad \frac{\partial D(x, \xi)}{\partial \xi}\Big|_{\xi=x} = 0\,, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^{m-2} D(x, \xi)}{\partial \xi^{m-2}}\Big|_{\xi=x} = 0$$

$$\frac{\partial D(x, \xi)}{\partial x}\Big|_{\xi=x} = 0\,, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^{m-2} D(x, \xi)}{\partial x^{m-2}}\Big|_{\xi=x} = 0$$

Die Integralgleichung (3) wird durch die partiellen Integrationen in eine Volterrasche Integralgleichung transformiert.

$$(32) \qquad v(x) = U(x, \alpha) + \int_\alpha^x K(x, \xi) v(\xi) d\xi\,,$$

wobei

$$(33) \qquad K(x, \xi) = D(x, \xi)\,(a_m - b_m) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{D(x, \xi)\,(a_{m-1} - b_{m-1})\right\}$$

$$+ \ldots\ldots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}}\left\{D(x, \xi)\,(a_1 - b_1)\right\}.$$

gesetzt ist, und aus dem Satz 2 folgt

$$U(x, \alpha) = F_1(x, \alpha) - D(x, \xi)\,(a_1 - b_1) v^{(m-2)}\Big|_{\xi=\alpha}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{D(x, \xi)\,(a_1 - b_1)\right\} v^{(m-3)}\Big|_{\xi=\alpha}$$

$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-2}}{\partial \xi^{m-2}}\left\{D(x, \xi)\,(a_1 - b_1)\right\} v\Big|_{\xi=\alpha}$$

$$- D(x, \xi)(a_2 - b_2)v^{(m-2)}\Big|_{\xi=\alpha} + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{m-2} \frac{\partial^{m-3}}{\partial \xi^{m-3}} \left\{ D(x, \xi)(a_2 - b_2) \right\} v \Big|_{\xi=\alpha}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- D(x, \xi)(a_{m-1} - b_{m-1}) v \Big|_{\xi=\alpha}$$

$$= F_1(x, \alpha) - D(x, \alpha)\big(a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\big) v^{(m-2)}(\alpha)$$

$$+ v^{m-3}(\alpha)\Big[\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{ D(x, \alpha)\big(a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\big)\Big\}$$

$$- D(x_1 \alpha)\big(a_2(\alpha) - b_2(\alpha)\big)\Big] + \cdots\cdots$$

$$+ v(\alpha)\Big[- D(x, \alpha)\big(a_{m-1}(\alpha) - b_{m-1}(\alpha)\big)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{ D(x, \alpha)\big(a_{m-2}(\alpha) - b_{m-2}(\alpha)\big)\Big\} + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-2}}{\partial \alpha^{m-2}} \Big\{ D(x, \alpha)\big(a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\big)\Big\}\Big].$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(34) \quad \begin{cases} U_{m-1}(x, \alpha) = D(x, \alpha) \\ U_{m-2}(x, \alpha) = - D(x, \alpha)\big(a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\big) - \dfrac{A_1(x, \alpha)}{\Delta}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ U_0(x, \alpha) = - D(x, \alpha)\big(a_{m-1}(\alpha) - b_{m-1}(\alpha)\big) \end{cases}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{ D(x, \alpha)\big(a_{m-2}(\alpha) - b_{m-2}(\alpha)\big)\Big\}$$

$$+ \cdots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-2}}{\partial \alpha^{m-2}}\Big\{ D(x, \alpha)\big(a_1(\alpha) - b_1(\alpha)\big)\Big\}$$

$$+ (-1)^{m-1} \frac{A_{m-1}(x, \alpha)}{\Delta},$$

so erhalten wir

$$U(x, \alpha) = U_{m-1}v^{(m-1)}(\alpha) + U_{m-2}v^{(m-2)}(\alpha) + \ldots\ldots + U_0v(\alpha)\,. \tag{35}$$

Differentiiert man die Integralgleichung (32) nach x und setzt man $x = \beta$, so folgt

$$\tag{36} \begin{cases} v(\beta) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} U_n(\beta, \alpha)v^{(n)}(\alpha) + \int_\alpha^\beta K(\beta, \xi)v(\xi)d\xi\,, \\ v^{(1)}(\beta) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{\partial U_n(\beta, \alpha)}{\partial\beta} v^{(n)}(\alpha) + \int_\alpha^\beta \dfrac{\partial K(\beta, \xi)}{\partial\beta} v(\xi)d\xi\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v^{(m-1)}(\beta) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{\partial^{m-1} U_n(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}} v^{(n)}(\alpha) + \int_\alpha^\beta \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial\beta^{m-1}} K(\beta, \xi)v(\xi)d\xi\,, \end{cases}$$

denn es folgt gleich aus dem Satz 2, dass

$$K(x, \xi)\Big|_{\xi=x} = 0\,, \quad \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\Big|_{\xi=x} = 0\,, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^{m-2}}{\partial x^{m-2}} K(x, \xi)\Big|_{\xi=x} = 0 \tag{37}$$

Es seien die m unabhängigen Randbedingungen folgendermassen gegeben

$$\tag{38} \begin{cases} \nu_{01}v(\alpha) + \nu_{11}v^{(1)}(\alpha) + \nu_{21}\nu^{(2)}(\alpha) + \ldots\ldots + \nu_{m-1\,1}v^{m-1}(\alpha) \\ + \mu_{01}v(\beta) + \mu_{11}v^{(1)}(\beta) + \mu_{21}v^{(2)}(\beta) + \ldots\ldots + \mu_{m-1\,1}v^{m-1}(\beta) = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_{0m}v(\alpha) + \nu_{1m}v^{(1)}(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \nu_{m-1m}v^{m-1}(\alpha) \\ + \mu_{0m}v(\beta) + \mu_{1m}v^{(1)}(\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1m}v^{m-1}(\beta) = c_m \end{cases}$$

Diese Randbedingungen heissen wir die inhomogenen Randbedingungen R_1, um sie von den Randbedingungen, deren rechte Seiten alle Null sind, zu unterscheiden. Die letzteren Randbedingungen heissen wir homogene Randbedingungen R_2.

$$v(\alpha)\Big\{\nu_{01} + \mu_{01}U_0(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_0(\beta, \alpha)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_0(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}\Big\}$$

$$+ v^{(1)}(\alpha)\Big\{\nu_{11} + \mu_{01}U_1(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_1(\beta, \alpha)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_1(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}\Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ v^{(m-1)}(\alpha)\Big\{\nu_{m-11} + \mu_{01}U_{m-1}(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_{m-1}(\beta, \alpha)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_{m-1}(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}\Big\}$$

$$+\int_\alpha^\beta\Big\{\mu_{01}K(\beta, \xi) + \mu_{11}\frac{\partial K(\beta, \xi)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\beta^{m-1}}K(\beta, \xi)\Big\}v(\xi)d\xi = c_1\,,$$

oder

$$v(\alpha)\Big\{\nu_{01} + \mu_{01}U_0(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_0(\beta, \alpha)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_0(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}\Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ v^{(m-1)}(\alpha)\Big\{\nu_{m-11} + \mu_{01}U_{m-1}(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_{m-1}(\beta, \alpha)}{\partial\beta} + \cdots\cdots\cdots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_{m-1}(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}\Big\}$$

$$= c_1 - \int_\alpha^\beta \left\{ \mu_{01} K(\beta, \xi) + \ldots\ldots + \mu_{m-11} \frac{\partial^{m-1} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-1}} \right\} v(\xi) d\xi ,$$

....

....

$$v(\alpha) \left\{ \nu_{0m} + \mu_{0m} U_0(\beta, \alpha) + \ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1m} \frac{\partial^{m-1} U_0(\beta, \alpha)}{\partial \beta^{m-1}} \right\}$$

....

$$+ v^{(m-1)}(\alpha) \left\{ \nu_{m-1m} + \mu_{0m} U_{m-1}(\beta, \alpha) + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \mu_{m-1m} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \beta^{m-1}} U_{m-1}(\beta, \alpha) \right\}$$

$$= c_m - \int_\alpha^\beta \left\{ \mu_{0m} K(\beta, \xi) + \ldots\ldots + \mu_{m-1m} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \beta^{m-1}} K(\beta, \xi) \right\} v(\xi) d\xi .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$E_{ik} = \nu_{ik} + \mu_{0k} U_i(\beta, \alpha) + \ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} U_i(\beta, \alpha)}{\partial \beta^{m-1}} , \tag{39}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, m-1, \quad k = 1, 2, \ldots\ldots, m .$$

$$K_k(\beta, \xi) = \mu_{0k} K(\beta, \xi) + \ldots\ldots + \mu_{m-1k} \frac{\partial^{m-1} K(\beta, \xi)}{\partial \beta^{m-1}} , \tag{40}$$

so lautet das System der Randbedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} & v(\alpha) E_{01} + v^{(1)}(\alpha) E_{11} + \ldots\ldots\ldots + v^{(m-1)}(\alpha) E_{m-11} \\ & \qquad = c_1 - \int_\alpha^\beta K_1(\beta, \xi) v(\xi) d\xi , \\ & v(\alpha) E_{02} + v^{(1)}(\alpha) E_{12} + \ldots\ldots\ldots + v^{(m-1)}(\alpha) E_{m-12} \\ & \qquad = c_2 - \int_\alpha^\beta K_2(\beta, \xi) v(\xi) d\xi , \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & v(\alpha) E_{0m} + v^{(1)}(\alpha) E_{1m} + \ldots\ldots\ldots + v^{(m-1)}(\alpha) E_{m-1m} \\ & \qquad = c_m - \int_\alpha^\beta K_m(\beta, \xi) v(\xi) d\xi . \end{aligned} \right. \tag{41}$$

Daraus erhalten wir

$$
(42)\qquad v^{(i)}(\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots, & E_{i-1\,1}, & c_1 - \int_\alpha^\beta K_1(\beta,\xi)v(\xi)d\xi, & E_{i+1\,1}, & \ldots, & E_{m-1\,1} \\ E_{02}, & \ldots, & E_{i-1\,2}, & c_2 - \int_\alpha^\beta K_2(\beta,\xi)v(\xi)d\xi, & E_{i+1\,2}, & \ldots, & E_{m-1\,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{0m}, & \ldots, & E_{i-1\,m}, & c_m - \int_\alpha^\beta K_m(\beta,\xi)v(\xi)d\xi, & E_{i+1\,m}, & \ldots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,1} \\ E_{02}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{0m}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}
$$

$$
i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots,\ m-1.
$$

Durch (42) eliminieren wir $v(\alpha)$, $v^{(1)}(\alpha)\ \ldots,\ v^{(m-1)}(\alpha)$ aus der Formel (35), so erhalten wir

$$
U(x,\alpha) = \frac{(-1)\begin{vmatrix} 0 & , U_0(x,\alpha), & U_1(x,\alpha), & \ldots, & U_{m-1}(x,\alpha) \\ c_1 - \int_\alpha^\beta K_1(\beta,\xi)v(\xi)d\xi, & E_{01} & , E_{11} & , \ldots\ldots, & E_{m-1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m - \int_\alpha^\beta K_m(\beta,\xi)v(\xi)d\xi, & E_{0m}, & E_{1m}, & \ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & E_{11}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{0m}, & E_{1m}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}
$$

Also wird die Volterrasche Integralgleichung (32) in die Fredholmsche Integralgleichung übergeführt.

$$v(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0, & U_0(x,\alpha), & U_1(x,\alpha), & \dots\dots\dots, & U_{m-1}(x,\alpha) \\ c_1, & E_{01}, & E_{11}, & \dots\dots\dots, & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m, & E_{0m}, & E_{1m}, & \dots\dots\dots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & E_{11} & \dots\dots\dots, & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{0m}, & E_{1m}, & \dots\dots\dots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}$$

$$+\int_\alpha^\beta \frac{\begin{vmatrix} 0, & U_0(x,\alpha), & U_1(x,\alpha), & \dots\dots, & U_{m-1}(x,\alpha) \\ K_1(\beta,\xi), & E_{01}, & E_{11}, & \dots\dots, & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(\beta,\xi), & E_{0m}, & E_{1m}, & \dots\dots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & E_{11}, & \dots\dots\dots, & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_{0m}, & E_{1m}, & \dots\dots\dots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}} v(\xi)d\xi$$

$$+\int_\alpha^x K(x,\xi)v(\xi)d\xi\,.$$

Nehmen wir an, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} E_{01}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-11} \\ E_{02}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-12} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{0m}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist, so können wir ausschreiben:

$$(43)\qquad v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x,\xi)v(\xi)d\xi\,,$$

wo

$$(44)\qquad U(x) = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & U_0(x, \alpha), & \dots\dots\dots\dots, & U_{m-1}(x, \alpha) \\ c_1, & E_{01}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_m, & E_{0\,m}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{0\,m}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}$$

und

$$(45)\qquad \underset{x>\xi}{G(x, \xi)} = \frac{\begin{vmatrix} K(x, \xi), & U_0(x, \alpha), & \dots\dots, & U_{m-1}(x, \alpha) \\ K_1(\beta, \xi), & E_{01}, & \dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_m(\beta, \xi), & E_{0m}, & \dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{0\,m}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}$$

$$\underset{x<\xi}{G(x, \xi)} = \frac{\begin{vmatrix} 0, & U_0(x, \alpha), & \dots\dots, & U_{m-1}(x, \alpha) \\ K_1(\beta, \xi), & E_{01}, & \dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_m(\beta, \xi), & E_{0\,m}, & \dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,1} \\ E_{02}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{0m}, & \dots\dots\dots\dots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}$$

gesetzt sind.

Der soeben bewiesene Satz lässt sich also so aussprechen:

Satz 3. Ist $v(x)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung (2) welche den inhomogenen Randbedingungen R_1 (38) genügt, so genügt $v(x)$ der Fredholmschen Integralgleichung

$$v(x) = U(x) + \int_\alpha^\beta G(x, \xi) v(\xi) d\xi$$

wobei U aus (44), $G(x, \xi)$ aus (45) gegeben sind.

Im Falle wo die Randbedingungen folgendermassen sind

$$v(a) = c_1, \qquad v^{(1)}(a) = c_2, \; \ldots\ldots, \qquad v^{(m-1)}(a) = c_m,$$

reduziert sich die Gleichung wieder in die Volterrasche Integralgleichung, denn

$$\begin{array}{llll}
E_{01} = 1 & E_{11} = E_{21} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & = E_{m-1 1} = 0 \\
E_{02} = 0 & E_{12} = 1 & E_{22} = E_{32} = \ldots\ldots & = E_{m-1 2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
E_{0m} = E_{1m} = \ldots\ldots & = E_{m-1\, m-1} = 0 & & E_{m-1\, m} = 1
\end{array}$$

Anstatt der Gleichung (2) setzten wir

$$v^{m} + a_1 v^{(m-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_m v = \varphi(x),$$

so erhalten wir

$$F_3 = \varphi(\xi), \quad K(x, \xi) = D(x, \xi),$$

$$U(x, a) = F_1(x, a), \quad U_0 = \frac{A_{m-1}}{\Delta}, \quad U_1 = \frac{A_{m-2}}{\Delta}, \; \ldots\ldots\ldots$$

und man braucht nur anstatt $G(x, \xi)v$, $G(x, \xi)\, \varphi(\xi)$ einzusezten. Wenn man alle Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ welche in den Randbedingungen enthalten sind, gleich Null setzt, d.h. wenn man die homogene Randbedingungen R_2 wählt, so folgt $u \equiv 0$.

Folglich

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi .$$

Es ist evident, dass $v(x)$ den Randbedingungen genügt, denn $G(x, \xi)$ genügt den Randbedingungen, wie schon gezeigt. Wir können beweisen, dass $v(x)$ auch der Differentialgleichung genügt. In der Tat folgt es unmittelbar aus (45)

$$v^{m}(x) + a_1 v^{m-1}(x) + \dots\dots\dots + a_m v(x)$$

$$= -\frac{\partial^m}{\partial x^m}\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi - a_1\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}\left\{\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi\right\} + \dots\dots$$

$$- a_m\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$-\int_\alpha^\beta\left\{\frac{\partial^m}{\partial x^m} + a_1\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} + \dots + a_m\right\}\frac{\begin{vmatrix} 0 , & U_0(x, \alpha) , & \dots\dots , & U_{m-1}(x, \alpha) \\ K_1(\beta, \xi) , & E_{01} , & \dots\dots , & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01} , & \dots\dots , & E_{m-11} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{0m} , & \dots\dots , & E_{m-1m} \end{vmatrix}}$$

$$\times\ \varphi(\xi)d\xi .$$

Da jede U_i der Differentialgleichung

$$u^{(m)} + a_1 u^{m-1} + \dots\dots\dots + a_m u = 0$$

genügt, so verschwindet das letzte Integral.
Da

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = K(x, x)\varphi(x) + \int_\alpha^x\frac{\partial}{\partial x}K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_\alpha^x\frac{\partial}{\partial x}K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi .$$

ist, so folgt aus Satz 2.,

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_\alpha^x\frac{\partial^n}{\partial x^n}K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi , \qquad n > m$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\int_\alpha^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}K(x, \xi)\varphi(\xi)\Big|_{\xi=x}$$

$$+\int_\alpha^x \frac{\partial^m}{\partial x^m}K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi\,, \qquad n = m$$

$K(x, \xi)$ ist eine lineare Funktion von $u_1, u_2, \ldots. u_m$, daher

$$\frac{\partial^m K}{\partial x^m} + a_1\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}K + \ldots\ldots.. + a_m K = 0\,.$$

Also

$$v^{(m)} + a_1 v^{(m-1)} + \ldots\ldots + a_m v(x) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}K(x, \xi)\Big|_{\xi=x}\varphi(x)$$

Da

$$K(x,\xi) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} u_1(x)\,, & u_2(x)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ u_1^{m-2}(\xi)\,, & u_2^{m-2}(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{m-2}(\xi) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_1(\xi)\,, & u_2(\xi)\,, & \ldots\ldots\ldots, & v_m(\xi) \end{vmatrix}$$

ist, wird

$$\frac{\partial^{m-1}K(x, \xi)}{\partial x^{m-1}}\Big|_{\xi=x} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1\,.$$

Tatsächlich genügt $v(x)$ der Differentialgleichung .

$$v^{(m)} + a_1 v^{(m-1)} + \ldots\ldots\ldots. + a_m v = \varphi(x)$$

Satz 4. Wenn der nach unseren Methode berechnete Kern $G(x, \xi)$ als Kern einer Integralgleichung erster Art

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

genommen wird, wobei $v(x)$ eine gegebenen m-mal stetig differenzierbare Funktion ist, die den betreffenden Randbedingungen genugt, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(x)$, und man erhält ihre Lösung durch die Formel

$$v^{(m)}(x) + a_1 v^{(m-1)}(x) + \dots\dots\dots + a_m v(x) = \varphi(x) ,$$

wenn umgekehrt, $\varphi(x)$ irgend eine stetige Funktion ist, und eine Lösung der Differentialgleichung

$$v^{(m)}(x) + a_1 v^{(m-1)}(x) + \dots\dots\dots + a_m v(x) = \varphi(x)$$

gefunden werden soll, die den allgemeinen Randbedingungen genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

Der Satz ist analog mit dem von Herrn Prof. Hilbert gewonnenen Satz. Aber nach unserem Beweis finden wir, dass er nicht nur auf sich selbst adjungierte Differentialgleichungen, sondern auch auf die linearen Differentialgleichungen m-ter Ordnung angewandt werden kann und zweitens dass die Randbedingungen die allgemeineren linearen Relationen (38) sind. Folglich ist der Kern nicht immer symmetrisch.

II. REZIPROZITÄTSSATZ

Der soeben bewiesene Satz muss offenbar gültig bleiben, auch wenn man u und v miteinander vertauscht.

Satz 5. Wenn $u(x)$ die Lösung der linearen Differentialgleichung (1) ist, und denselben Randbedingungen wie (38) genügt, so genügt $u(x)$ auch der Fredholmschen Integralgleichung

$$u(x) = V(x) - \int_\alpha^\beta \Gamma(x, \xi)u(\xi)d\xi , \tag{46}$$

wobei

$$(47)\qquad \Gamma(x,\xi) = \frac{(-1)\begin{vmatrix} S(x,\xi) & , & V_0(x,\alpha), & \ldots\ldots, & V_{m-1}(x,\alpha) \\ S_1(\beta,\xi) & , & H_{01} & , \ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_m(\beta,\xi) & , & H_{0m} & , \ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{01} & , \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ H_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}}, \qquad x > \xi$$

$$(48)\qquad \Gamma(x,\xi) = \frac{(-1)\begin{vmatrix} 0 & , & V_0(x,\alpha), & \ldots\ldots, & V_{m-1}(x,\alpha) \\ S_1(\beta,\xi) & , & H_{01} & , \ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ S_m(\beta,\xi), & & H_{0m} & , \ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{01} & , \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ H_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}}, \qquad x < \xi.$$

$$(49)\qquad V(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & , & V_0(x,\alpha), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & V_{m-1}(x,\alpha) \\ c_1 & , & H_{01} & , \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ c_m, & & H_{0m} & , \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{01} & , \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ H_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}},$$

$$(50)\qquad H_{ik} = \nu_{ik} + \mu_{0k}\, V_i + \ldots\ldots + \mu_{m-1k}\frac{\partial^{m-1} V_i(\beta,\alpha)}{\partial\beta^{m-1}},$$

$$S_k(\beta,\xi)=\mu_{0k}S(\beta,\xi)+\cdots\cdots\cdots+\mu_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}S(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}, \tag{51}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V_{m-1}=N(x,\alpha) \\ V_{m-2}=-N(x,\alpha)\Big(b_1(\alpha)-a_1(\alpha)\Big)-\dfrac{B_1}{\varDelta_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_0=-N(x,\alpha)\Big(b_{m-1}(\alpha)-a_{m-1}(\alpha)\Big) \\ \qquad\qquad+\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\Big\{N(x,\alpha)\Big(b_{m-2}(\alpha)-a_{m-2}(\alpha)\Big)\Big\} \end{array}\right. \tag{52}$$

$$\cdots\cdots+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-2}}{\partial\alpha^{m-2}}\Big\{N(x,\alpha)\Big(b_1(\alpha)-a_1(\alpha)\Big)\Big\}$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{B_{m-1}}{\varDelta_1},$$

$$B_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0, & v_1(x) & , \cdots\cdots\cdots, & v_m(x) \\ 0, & v^{(m-1)}(\alpha) & , \cdots\cdots\cdots, & v_m{}^{(m-1)}(\alpha) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1, & v^{(m-n-1)}(\alpha) & , \cdots\cdots\cdots, & v_m{}^{(m-n-1)}(\alpha) \\ 0, & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0, & v(\alpha) & , \cdots\cdots\cdots, & v(\alpha) \end{vmatrix} \tag{53}$$

$$\varDelta_1(\xi)=\begin{vmatrix} v_1{}^{(m-1)}(\xi), & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & v_m{}^{(m-1)}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ v_1(\xi) & , \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & v_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{54}$$

$$N(x,\xi)=\frac{1}{\varDelta_1(\xi)}\begin{vmatrix} v_1(x) & , v_2(x), \cdots\cdots\cdots, & v_m(x) \\ v_1{}^{(m-2)}(\xi), & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & v_m{}^{(m-2)}(\xi) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ v_1(\xi) & , \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & v_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{55}$$

$$(56)\qquad S(x, \xi) = N(x, \xi)\left\{b_m(\xi) - a_m(\xi)\right\}$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{N(x, \xi)\left(b_{m-1}(\xi) - a_{m-1}(\xi)\right)\right\}$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}}\left\{N(x, \xi)\left(b_1(\xi) - a_1(\xi)\right)\right\},$$

Um die Reziprozität zwischen (43) und (46) zu beweisen, wollen wir zeigen, dass $U(x)$ denselben inhomogenen Randbedingungen R_1 wie $v(x)$ genügt.

Also sind die Randbedingungen

$$(57)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu_{01}U(\alpha) + \nu_{11}U^{(1)}(\alpha) + \ldots\ldots\ldots + \nu_{m-1\,1}U^{(m-1)}(\alpha) \\ + \mu_{01}U(\beta) + \mu_{11}U^{(1)}(\beta) + \ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1\,1}U^{(m-1)}(\beta) = c_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_{0m}U(\alpha) + \nu_{1m}U^{(1)}(\alpha) + \ldots\ldots\ldots + \nu_{m-1\,m}U^{(m-1)}(\alpha) \\ + \mu_{0}U(\beta) + \mu_{1m}U^{(1)}(\beta) + \ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1\,m}U^{(m-1)}(\beta) = c_m \end{array}\right.$$

Da $U(x)$ in (44) gegeben ist, können wir die Werte $U(\beta)$, $U^{(1)}(\beta)$, ... $U^{(m-1)}(\beta)$ in der Summe der linken Seite der ersten Randbedingung (57) substituieren, so erhalten wir

$$(58)\qquad -\frac{\begin{vmatrix} 0, & \sum_{01}, & \sum_{11}, & \ldots\ldots\ldots, & \sum_{m-1\,1} \\ c_1, & E_{01}, & E_{11}, & \ldots\ldots\ldots, & E_{m-1\,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m, & E_{0m}, & E_{1m}, & \ldots\ldots\ldots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & E_{11}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{0m}, & E_{1m}, & \ldots\ldots, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}},$$

wobei

$$(59)\qquad \sum_{ik} = \nu_{0k}U_i(\alpha) + \nu_{1k}U_i^{(1)}(\alpha) + \ldots\ldots + \nu_{m-1k}U_i^{(m-1)}(\alpha)$$
$$+ \mu_{0k}U_i(\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1k}U_i^{(m-1)}(\beta)$$

gesetzt ist.

Aus dem Satz 2 folgt

$$D(\alpha, \alpha) = 0 \qquad \left.\frac{\partial^n D(x, \alpha)}{\partial x^n}\right|_{x=\alpha} = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots.,\ m-1,$$

$$A_n(\alpha, \alpha) = 0 \qquad n = 2,\ 3,\ \ldots.,\ m-1,\ A_1 = \Delta(-1)^{m-1}.$$

Daraus haben wir

$$U_0(\alpha, \alpha) = 1,\quad U_1(\alpha, \alpha) = U_2(\alpha, \alpha) = \ldots. = U_{m-1}(\alpha, \alpha) = 0.$$

Weiter

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial x^n} D(x, \alpha)\right|_{x=\alpha} = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial x^i} A_n(x, \alpha)\right|_{x=\alpha} = 0 \text{ mit Ausnahme } \left.\frac{\partial^{m-n-1}A_n(x, \alpha)}{\partial x^{m-n-1}}\right|_{x=\alpha} = 1$$

Folglich erhalten wir

$$(60)\qquad U_0^{(n)}(\alpha, \alpha) = U_1^{(n)}(\alpha, \alpha) = \ldots\ldots = U_{m-1}^{(n)}(\alpha, \alpha) = 0$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1$$

mit Ausnahme $\qquad U_{i-1}^{(i)}(\alpha, \alpha) = 1$

Daher wird (59)

$$\sum_{01} = \nu_{01} + \mu_{01}U_0(\beta, \alpha) + \ldots\ldots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}U_0(\beta, \alpha)}{\partial\beta^{m-1}}$$

Durch Vergleich mit (39), folgt

$$(61)\qquad \sum_{01} = E_{01}$$

In gleicher Weise, erhalten wir

$$(62)\qquad \sum_{ik} = E_{ik}$$

Wenn man von der ersten Zeile der Determinante (58) die zweite Zeile substrahiert, so erhält man nach (61)

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0\,, & E_{01}\,, & E_{11}\,, & \cdots\cdots\cdots\,, & E_{m-1\,1} \\ c_1\,, & E_{01}\,, & E_{11}\,, & \cdots\cdots\cdots\,, & E_{m-1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m\,, & E_{0m}\,, & E_{1m}\,, & \cdots\cdots\cdots\,, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}\,, & E_{11}\,, & \cdots\cdots\,, & E_{m-1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{0m}\,, & E_{1m}\,, & \cdots\cdots\,, & E_{m-1\,m} \end{vmatrix}} = c_1\,.$$

Also genügt $U(x)$ den inhomogenen Randbedingungen R_1. In analoger Weise können wir beweisen, dass U den $m-1$ übrigen Randbedingungen genügt. Weiter können wir beweisen, dass $V(x)$ auch den inhomogenen Randbedingungen (38) genügt. Im allgemeinen, muss die Lösung der linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung durch m unabhängige inhomogene Randbedingungen vollständig bestimmt werden, wenn sie vorhanden ist. Daher folgt

$$V(x) = v(x)\,, \tag{63}$$

$$U(x) = u(x)\,. \tag{64}$$

Also ist die Reziprozität vollständig bewiesen.

Satz 6. Es seien u und v die Lösungen der Gleichungen

$$u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots\cdots\cdots + a_m u = 0\,, \tag{65}$$

bzw.

$$v^{(m)} + b_1 v^{(m-1)} + \cdots\cdots\cdots + b_m v = 0\,, \tag{66}$$

welche denselben Randbedingungen (38) genügen.

Bilden wir nun zwei Kerne $G(x, \xi)$, und $\Gamma(x, \xi)$, so erhalten wir zwei Integralgleichungen, wobei die eine die Lösung der andern ist.

$$v(x) = u(x) + \int_\alpha^\beta G(x, \xi)v(\xi)d\xi\,. \tag{67}$$

$$u(x) = v(x) - \int_\alpha^\beta \Gamma(x, \xi)u(\xi)d\xi\,. \tag{68}$$

wobei $G(x, \xi)$, $\Gamma(x, \xi)$ in (45) bzw. (47) (48) gegeben sind.

Unmittelbar folgt daraus

$$G(x, \xi) = \text{der Resolvente des Kerns } \Gamma(x, \xi)$$

$$\Gamma(x, \xi) = \text{der Resolvente des Kerns } G(x, \xi)$$

Wir haben vorausgesetzt, dass die Randbedingungen in den zwei Punkten α, β gegeben sind. Aber man braucht die Randbedingungen nicht nur in zwei Punkten zu begrenzen. Im allgemeinen werden die Randbedingungen so charakterisiert;

$$\begin{cases} \nu_{0i}v(\alpha) + \nu_{1i}v^{(1)}(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \nu_{m-1i}v^{(m-1)}(\alpha) \\ + \mu_{0i}^1 v(\beta_1) + \mu_{1i}^1 v^{(1)}(\beta_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1i}^1 v^{(m-1)}(\beta_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \mu_{0i}^n v(\beta) + \mu_{1i}^n v^{(1)}(\beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_{m-1i}^n v^{(m-1)}(\beta) = c_i \\ \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots,\ m \\ \qquad \alpha < \beta_1 < \beta_2 < \ldots\ldots\ldots < \beta_{n-1} < \beta_n = \beta \end{cases} \tag{69}$$

Substituieren wir die Werte $v(\beta_1), \ldots\ldots, v(\beta) \ldots\ldots, v^{(m-1}(\beta)$, in (69), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} v^k(\alpha)\Big\{\nu_{0i} &+ \mu_{0i}^1 U_k(\beta_1, \alpha) + \ldots\ldots + \mu_{m-1i}^1 \frac{\partial^{m-1}U_k(\beta_1, \alpha)}{\partial {\beta_1}^{m-1}} \\ &+ \mu_{0i}^2 U_k(\beta_2, \alpha) + \ldots\ldots + \mu_{2\ \ i}^{m-1} \frac{\partial^{m-1}U_k(\beta_2, \alpha)}{\partial \beta_2^{m-1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mu_{0i}^n U_k(\beta, \alpha) + \ldots\ldots + \mu_{m-1i}^n \frac{\partial^{m-1}U_k(\beta, \alpha)}{\partial \beta^{m-1}} \end{aligned}$$

$$+\int_\alpha^\beta\left\{\mu_{0i}^1 K(\beta_1,\xi)+\ldots\ldots+\mu_{m-1i}^1\frac{\partial^{m-1}K(\beta_1,\xi)}{\partial\beta_1^{m-1}}\right\}v d\xi+\ldots\ldots$$

$$+\int_\alpha^\beta\left\{\mu_{0i}^n K(\beta,\xi)+\ldots\ldots+\mu_{m-1i}^m\frac{\partial^{m-1}K(\beta,\xi)}{\partial\beta^{m-1}}\right\}v d\xi=c_i$$

Nun setzen wir zur Abkürzung

$$E_{ik}=\nu_{ik}+\mu_{0k}^1 U_i(\beta_1,a)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^1\frac{\mu^{m-1}U_i(\beta_1,a)}{\partial\beta_1^{m-1}}\tag{70}$$

$$+\mu_{0k}^2 U_i(\beta_2,a)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^2\frac{\partial^{m-1}U_1(\beta_2,a)}{\partial\beta_2^{m-1}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\mu_{0k}^n U_i(\beta,a)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^n\frac{\partial^{m-1}U_i(\beta,a)}{\partial\beta^{m-1}}$$

$$K_k(\beta,\xi)=\sum_{i=j}^n\left\{\mu_{0k}^i K(\beta_i,\xi)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^i\frac{\partial^{m-1}U_i(\beta_i,a)}{\partial\beta^{m-1}}\right\},\ \beta_j>\xi\tag{71}$$

und

$$H_{ik}=\nu_{ik}+\mu_{0k}^1 V_i(\beta_1,a)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^1\frac{\partial^{m-1}}{\partial\beta^{m-1}}V_i(\beta_1,a)\tag{72}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\mu_{0k}^n V_i(\beta,a)+\ldots\ldots+\mu_{m-1k}^n\frac{\partial^{m-1}}{\partial\beta^{m-1}}V_i(\beta,a),$$

$$S_k(\beta,\xi)=\sum_{i=j}^n\left\{\mu_{0k}^i S(\beta_i,\xi)+\ldots+\mu_{m-1k}^i\frac{\partial^{m-1}}{\partial\beta_i^{m-1}}K(\beta_i,\xi)\right\},\ \beta_j>\xi,\tag{73}$$

so ist der oben bewiesene Satz 6 ohne weiteres in diesem erweiteren Falle brauchbar. Endlich ist aber zu bemerken, dass es einen Fall gibt, wo sich keine Lösung ausser den trivialen Lösungen $v\equiv 0$, $u\equiv 0$ gibt.

III. HOMOGENE INTEGRALGLEICHUNG.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die Kerne $G(x,\xi)$ und $\Gamma(x,\xi)$ denselben homogenen Randbedingungen genügen.

Nun aus (45)

$$(74)\qquad G(\beta,\xi)=\frac{\begin{vmatrix} K(\beta,\xi), & U_0(\beta,\alpha), & \ldots\ldots, & U_{m-1}(\beta,\alpha) \\ K_1(\beta,\xi), & E_{01} & ,\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_m(\beta,\xi), & E_{0m} & ,\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-11}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}$$

$$\beta>\xi$$

$$G(\alpha,\xi)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & , U_0(\alpha,\alpha), & \ldots\ldots, & U_{m-1}(\alpha,\alpha) \\ K_1(\beta,\xi) & , E_{01} & ,\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_m(\beta,\xi) & , E_{0m} & ,\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}$$

$$\alpha<\xi$$

Substituieren wir $v(\alpha)$, $v(\beta)$ und ihre Ableitungen in den homogenen Randbedingungen durch $G(\alpha,\xi)$, $G(\beta,\xi)$ und ihre Ableitungen, so wird die linke Seite der ersten Randbedingung

$$=\frac{\begin{vmatrix} P_{1k} & , E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ K_1(\beta,\xi) & , E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_m(\beta,\xi) & , E_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{0m} & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}}=P_{1k}-K_1(\beta,\xi)$$

wobei

$$P_{1k} = \mu_{01}K(\beta, \xi) + \ldots\ldots\ldots + \mu_{m-11}\frac{\partial^{m-1}k(\beta, \xi)}{\partial\beta^{m-1}}$$

Also nach (40)

$$K_1(\beta, \xi) - P_{1k} = 0 .$$

In gleicher Weise folgt, dass $G(x, \xi)$ den $m-1$ übrigen homogenen Randbedingungen R_2 genügt.

Satz 7. Der Kern $G(x, \xi)$ genügt den homogenen Randbedingungen.

Wir haben vorausgesetzt, dass die Determinante

$$(75) \qquad D = \begin{vmatrix} E_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-11} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ E_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & E_{m-1m} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Wenn $c_1 = c_2 \ldots\ldots = c_m = 0$, so ist $U(x)$ gleich Null. Woraus

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi)v(\xi)d\xi .$$

Aus denselben Grund, folgt dass $V(x)$ gleich Null ist, wenn die Determinante

$$(76) \qquad D_1 = \begin{vmatrix} H_{01}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-11} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ H_{0m}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & H_{m-1m} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist. Also folgt der Satz

Satz 8. Wenn $D \neq 0$ und $D_1 \neq 0$, so haben wir nur triviale Lösungen der homogenen Integralgleichungen.

$$v(x) = \int_{\alpha} G(x, \xi) v(\xi) d\xi \tag{77}$$

$$u(x) = -\int_{\alpha}^{\beta} \Gamma(x, \xi) u(\xi) d\xi \tag{78}$$

Also sind die Lösungen

$$v \equiv 0, \qquad u \equiv 0.$$

Satz 9. Wenn $D \neq 0$ und $D_1 = 0$, und wenn es eine solche Lösung der Differentialgleichung (2) gibt, die denselben Randbedingungen mit $G(x, \xi)$ zu genügen, so ist sie auch die Lösung der homogenen Integralgleichung (77).

Wenn auch die Randbedingungen im erweiterten Sinne wie (69) gegeben sind, braucht das den Satz nicht zu modifizieren.

IV. HILBERTSCHE THEORIE DER SICH SELBST ADJUNGIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG.

Es handelt sich nun um die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx} \right) + qu = 0, \tag{79}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dv}{dx} \right) + qv + \lambda v = 0, \tag{80}$$

woraus durch Vergleich mit (1) folgt

$$a_1 = \frac{\frac{dp}{dx}}{p}, \quad a_2 = \frac{q}{p}, \quad b_1 = \frac{\frac{dp}{dx}}{p}, \quad b_2 = \frac{q+\lambda}{p}$$

$$a_1 - b_1 = 0, \qquad a_2 - b_2 = \frac{-\lambda}{p}.$$

Da es bekannt ist, dass

$$\begin{vmatrix} u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \\ u_1(\xi) & u_2(\xi) \end{vmatrix} = c\, e^{-\int_{\alpha}^{\xi} a(x)dx} = c\, e^{-\int_{\alpha}^{\xi} \frac{dp}{p}} = c\, \frac{p(\alpha)}{p(\xi)}, \tag{81}$$

so erhält man nach den Definitionen

$$D(x, \xi) = \frac{1}{c}\frac{p(\xi)}{p(\alpha)}\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(\xi) & u_2(\xi) \end{vmatrix}, \tag{82}$$

$$K(x, \xi) = -\frac{1}{c}\frac{\lambda}{p(\alpha)}\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(\xi) & u_2(\xi) \end{vmatrix}, \tag{83}$$

$$U_1 = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(\alpha) & u_2(\alpha) \end{vmatrix}, \tag{84}$$

$$U_0 = -\frac{1}{c}\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1^{(1)}(\alpha) & u_2^{(1)}(\alpha) \end{vmatrix}, \tag{85}$$

$$\left\{\begin{aligned} E_{01} &= \nu_{01} + \mu_{01}U_0(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_0(\beta, \alpha)}{\partial \beta}, \\ E_{02} &= \nu_{02} + \mu_{02}U_0(\beta, \alpha) + \mu_{12}\frac{\partial U_0(\beta, \alpha)}{\partial \beta}, \\ E_{11} &= \nu_{11} + \mu_{01}U_1(\beta, \alpha) + \mu_{11}\frac{\partial U_1(\beta, \alpha)}{\partial \beta}, \\ E_{12} &= \nu_{12} + \mu_{02}U_1(\beta, \alpha) + \mu_{12}\frac{\partial U_1(\beta, \alpha)}{\partial \beta}, \end{aligned}\right. \tag{86}$$

$$\left\{\begin{aligned} K_1(\beta, \xi) &= \mu_{01}K(\beta, \xi) + \mu_{11}\frac{\partial K(\beta, \xi)}{\partial \beta}, \\ K_2(\beta, \xi) &= \mu_{02}K(\beta, \xi) + \mu_{12}\frac{\partial K(\beta, \xi)}{\partial \beta}, \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Nach den oben bewiesenen Ergebnissen, können wir schliessen,

1) Der Kern $G(x, \xi)$ genügt der Differentialgleichung

$$u^{(2)} + a_1u^{(1)} + a_2u = 0$$

2) Der Kern $G(x, \xi)$ genügt den homogenen Randbedingungen

$$\nu_{01}G(\alpha, \xi) + \nu_{11}\frac{\partial G(\alpha, \xi)}{\partial \alpha} + \mu_{01}G(\beta, \xi) + \mu_{11}\frac{\partial G(\beta, \xi)}{\partial \beta} = 0$$

$$\nu_{02}G(\alpha, \xi) + \nu_{12}\frac{\partial G(\alpha, \xi)}{d\alpha} + \mu_{02}G(\beta, \xi) + \mu_{12}\frac{\partial G(\beta, \xi)}{\partial\beta} = 0$$

3) Der Kern $G(x, \xi)$ ist stetig in $x = \xi$

4) Der Kern $G(x, \xi)$ besitzt unstetige Ableitung in $x = \xi$, also

$$\left.\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+\varepsilon} - \left.\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-\varepsilon} = -\left.\frac{\partial K(x, \xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+\varepsilon} = -\frac{1}{p(\xi)}$$

Da der Kern $G(x, \xi)$ den allgemeineren Randbedingungen als den Bedingungen, welche Herr Prof. Hilbert gezeichnet hat, genügt, so ist der Kern nicht immer symmetrisch.

Um die Bedingungen der Symmetrie des Kerns zu suchen, wollen wir zunächst die folgende Identität beweisen.

$$(88) \qquad U_1(\xi, \alpha)U_0(x, \alpha) - U_0(\xi, \alpha)U_1(x, \alpha) = \frac{p(\alpha)}{\lambda}K(x, \xi)$$

In der Tat folgt das aus (83), (84) und (85).

Nun

$$\underset{x>\xi}{G(x, \xi)} = \frac{\lambda}{p(\alpha)} \cdot \frac{1}{D} \begin{vmatrix} K(x, \xi)\frac{p(\alpha)}{\lambda} & U_0(x, \alpha) & U_1(x, \alpha) \\ K_1(\beta, \xi)\frac{p(\alpha)}{\lambda} & E_{01} & E_{11} \\ K_2(\beta, \xi)\frac{p(\alpha)}{\lambda} & E_{02} & E_{12} \end{vmatrix}$$

Multiplizieren wir die zweite Kolonne mit $U_1(\xi, \alpha)$, und die dritte Kolonne mit $U_0(\xi, \alpha)$, und addieren wir sie zu der ersten Kolonne, so erhalten wir aus (88):

$$(89) \qquad = \frac{-\lambda}{p(\alpha)}\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & U_0(x, \alpha) & U_1(x, \alpha) \\ -\nu_{11}U_0(\xi, \alpha) + \nu_{01}U_1(\xi, \alpha) & E_{01} & E_{11} \\ -\nu_{12}U_0(\xi, \alpha) + \nu_{02}U_1(\xi, \alpha) & E_{02} & E_{12} \end{vmatrix}$$

und in analoger Weise

(90)

$$G(x,\xi)=\frac{-\lambda}{p(\alpha)}\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -K(x,\xi)\dfrac{p(\alpha)}{\lambda} & U_0(x,\alpha) & U_1(x,\alpha) \\ -\nu_{11}U_0(\xi,\alpha)+\nu_{01}U_1(\xi,\alpha) & E_{01} & E_{11} \\ -\nu_{12}U_0(\xi,\alpha)+\nu_{02}U_1(\xi,\alpha) & E_{02} & E_{12} \end{vmatrix}$$

$$x<\xi$$

Um die Funktion $G(x, \xi)$ symmetrisch zu machen;

$$\underset{(x>\xi)}{G(x,\xi)}-\underset{(x>\xi)}{G(\xi,x)}=0,$$

$$\underset{(x<\xi)}{G(x,\xi)}-\underset{(x<\xi)}{G(\xi,x)}=0,$$

Also muss die Differenz der Determinanten gleich Null sein,

$$(91)\qquad \begin{vmatrix} K(x,\xi) & U_0(x,\alpha) & U_1(x,\alpha) \\ K_1(\beta,\xi) & E_{01} & E_{11} \\ K_2(\beta,\xi) & E_{02} & E_{12} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & U_0(\xi,\alpha) & U_1(\xi,\alpha) \\ K_1(\beta,x) & E_{01} & E_{11} \\ K_2(\beta,x) & E_{02} & E_{12} \end{vmatrix}$$

Aus (89) und (90) folgt, dass

die Differenz (91)

$$=K(x,\xi)\left\{\nu_{02}E_{11}-\nu_{01}E_{12}+\nu_{11}E_{02}-\nu_{12}E_{01}+E_{01}E_{12}-E_{11}E_{02}\right\}$$

$$=K(x,\xi)\left[\nu_{02}\nu_{11}-\nu_{01}\nu_{12}+\left\{U_0(\beta,\alpha)\frac{\partial U_1(\beta,\alpha)}{\partial\beta}-U_1\frac{\partial U_0}{\partial\beta}\right\}\left\{\mu_{01}\mu_{12}-\mu_{11}\mu_{02}\right\}\right].$$

Aber es folgt unmittelbar aus (84) und (85).

$$U_0\frac{\partial U_1}{\partial\beta}-U_1\frac{\partial U_0}{\partial\beta}=\frac{1}{c^2}\begin{vmatrix} u_1^{(1)}(\alpha) & u_2^{(1)}(\alpha) \\ u_1(\alpha) & u_2(\alpha) \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_1^{(1)}(\beta) & u_2^{(1)}(\beta) \\ u_1(\beta) & u_2(\beta) \end{vmatrix}=\frac{p(\alpha)}{p(\beta)}$$

Endlich gelangt man zu

$$(92)\qquad G(x,\xi)-G(\xi,x)$$

$$=\frac{K(x,\xi)}{D}\left[(\nu_{02}\nu_{11}-\nu_{01}\nu_{12})-(\mu_{02}\mu_{11}-\mu_{01}\mu_{12})\frac{p(\alpha)}{p(\beta)}\right]$$

Um $G(x, \xi)-G(\xi, x)=0$ werden zu lassen, also um den Kern symmetrisch zu bilden, ist die Bedingung:

$$(93)\qquad (\nu_{02}\nu_{11}-\nu_{01}\nu_{12})-(\mu_{02}\mu_{11}-\mu_{01}\mu_{12})\frac{p(\alpha)}{p(\beta)}=0$$

Herr Prof. Hilbert hat folgende Randbedingungen gewählt.

I. $u(\alpha)=0\,,\quad u(\beta)=0\,,$ also $\nu_{01}=1\,,\quad \mu_{02}=1$ alle übrigen Koeffizienten $=0$.

II. $u^{(1)}(\alpha)=0\,,\quad u^{(1)}(\beta)=0\,,$ also $\nu_{11}=1\,,\quad \mu_{12}=1$ alle übrigen Koeffizienten $=0$.

III. $\left.\dfrac{du}{dx}+hu\right|_{x=\alpha}=0\,,\quad \left.\dfrac{du}{dx}+ku\right|_{x=\beta}=0\,,$ also $\nu_{01}=h\,,\quad \nu_{11}=1\,,$

$\mu_{02}=k\,,\quad \mu_{12}=1$ alle übrigen Koeffizienten $=0$.

IV. $u(\alpha)=hu(\beta)\qquad p(\alpha)u^{(1)}(\alpha)=\dfrac{p(\beta)}{h}u^{(1)}(\beta)\,,$ also

$\nu_{01}=1\,,\quad \mu_{01}=-h\,,\quad \nu_{12}=p(\alpha)\,,\quad \mu_{12}=-\dfrac{p(\beta)}{h}\,,$

alle übrigen Koeffizienten $=0$.

IV*; $u(\alpha)=hp(\beta)u^{(1)}(\beta)\,,\qquad p(\alpha)u^{(1)}(\alpha)=-\dfrac{1}{h}u(\beta)\,,$ also

$\nu_{01}=1\,,\quad \mu_{11}=-hp(\beta)\,,\quad \nu_{12}=p(\alpha)\,,\quad \mu_{02}=\dfrac{1}{h}$

alle übrigen Koeffizierten $=0$.

In der Tat genügt jede Randbedingung I–IV* der Bedingung der Symmetrie des Kerns. Das Resultat, das Herr Prof. D. Hilbert auf die sich selbst adjungierten Differentialgleichungen angewandt hat, kann man daher unmittelbar wiedergeben.

Wir haben vorausgesetzt, dass $a(x)$, $b(x)$ keinen singulären Punkt zwischen α und β besitzen.

Wenn auch $p(a)=0$ oder $p(x)=(x-a)^s E(x)$ $E(a)\neq 0$, $s \geqq 1$ ist, können wir durch die Randbedingung $v(a)\neq\infty$ den Kern $G(x, \xi)$ bestimmen.

Sind die Randbedingungen die folgenden :

$$\lim_{\xi\to a}\frac{v_1(\xi)}{u_1(\xi)}=1\,, \qquad u_1(a)\neq\infty\,, \tag{94}$$

so erhalten wir

$$K(x, \xi) \sim O \quad (\lambda u_2(\xi))$$
$$U_1(x, a) \sim O \quad (u_2(\xi))$$
$$U_0(x, a) \sim O \quad (u_2^{(1)}(\xi))$$

Damit haben wir

$$G(x, \xi) \sim O\left(\lambda\,\frac{u_2(\xi)u_1(\xi)u_2^{(1)}(\xi)}{u_2(\xi)u_2^{(1)}(\xi)}\right) = O\,(u_2(\xi))\,,$$

$$\lim_{x\to a}\int_a^\beta G(x, \xi)v(\xi)d\xi = \lim_{\xi\to\varepsilon\to a} O\,(u_2(\xi)u_1(\xi)d\xi) \to 0\,,$$

denn es folgt

aus $\qquad u_1=u_1(x)\,, \qquad u_2(x)=u_1\int\frac{e^{-\int\frac{dp}{p}dx}}{\{u_1(x)\}^2}\,dx\,,$

dass $u_1u_2=0$.

Als Beispiel wollen wir mit den folgenden Differentialgleichungen beschäftigen

$$\begin{cases} u''+\dfrac{1}{x}u'-\dfrac{n^2}{x^2}u=0\,, \\ v''+\dfrac{1}{x}v'+\left(\lambda-\dfrac{n^2}{x^2}\right)v=0 \end{cases}$$

Die unabhängigen Lösungen sind

$$u_1=x^n\,, \quad u_2=x^{-n}$$

$$v_1 = \frac{2^n J_n(\sqrt{\lambda} x)}{(\sqrt{\lambda})^n} \cdot \Gamma(n+1)\,, \quad v_2 = \frac{-\,Y_n(\sqrt{\lambda} x)}{2^n} \cdot (\sqrt{\lambda})^n \sin n\pi\Gamma(1-n)$$

Nach den Definitionen

$$D(x, \xi) = \frac{x^n\xi^{-n} - x^{-n}\xi^n}{2n}\,\xi$$

$$N(x, \xi) = \frac{J_n(\sqrt{\lambda} x)Y_n(\sqrt{\lambda}\xi) - J_n(\sqrt{\lambda}\xi)Y_n(\sqrt{\lambda} x)}{\sqrt{\lambda}\left\{J_n'(\sqrt{\lambda}\xi)Y_n(\sqrt{\lambda}\xi) - J_n(\sqrt{\lambda}\xi)Y_n'(\sqrt{\lambda}\xi)\right\}}$$

$$= \frac{\left\{J_n(\sqrt{\lambda} x)Y_n(\sqrt{\lambda}\xi) - J_n(\sqrt{\lambda}\xi)Y_n(\sqrt{\lambda} x)\right\}\xi}{2}$$

$$U_1(x, \alpha) = \frac{x^n\alpha^{-n} - x^{-n}\alpha^n}{2n}\,\alpha\,, \quad U_0(x, \alpha) = \frac{x^n\alpha^{-n} + x^{-n}\alpha^n}{2n} \cdot \frac{n}{\alpha}\,\alpha$$

Daraus

$$E_{01} = 1\,, \quad E_{02} = U_0(1\,, \alpha)\,, \quad E_{11} = 0\,, \quad E_{12} = 0$$

$$K_2 = K(1\,, \xi)\,, \quad K_1(1\,, \xi) = 0$$

wenn man annimmt, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{v(x)}{u(x)} = 1 \quad \lim \left| u(x) - v(x) \right| = 0$$

Nach unserer Formel

$$G(x, \xi) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\begin{vmatrix} -\lambda \dfrac{x^n\xi^{-n} - x^n\xi^n}{2n}\,\xi & \dfrac{x^n\alpha^{-n} + x^{-n}\alpha^n}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha} & \dfrac{x^n\alpha^{-n} - x^{-n}\alpha^n}{2n}\,\alpha \\ 0 & \alpha^{-n} & 0 \\ -\lambda \dfrac{\xi^{-n} - \xi^n}{2n}\,\xi & \dfrac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha}\,\alpha & \dfrac{\alpha^{-n} - \alpha^n}{2n}\,\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha^{-n} & 0 \\ \dfrac{\alpha^n + \alpha^{-n}}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha}\,\alpha & \dfrac{\alpha^{-n} - \alpha^n}{2n}\,\alpha \end{vmatrix}}$$

$x > \xi$

$$G(x,\xi)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{x^n\alpha^{-n}+x^{-n}\alpha^n}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha}\,\alpha & \dfrac{x^n\alpha^{-n}-x^{-n}\alpha^n}{2n}\,\alpha \\ 0 & \alpha^{-n} & 0 \\ -\lambda\,\dfrac{\xi^{-n}-\xi^n}{2n}\,\xi & \dfrac{\alpha^n+\alpha^{-n}}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha}\,\alpha & \dfrac{\alpha^{-n}-\alpha^n}{2n}\,\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha^{-n} & 0 \\ \dfrac{\alpha^n+\alpha^{-n}}{2n}\,\dfrac{n}{\alpha}\,\alpha & \dfrac{\alpha^{-n}-\alpha^n}{2n}\,\alpha \end{vmatrix}} \qquad x<\xi$$

Daraus

$$G(x,\xi)=\frac{\xi^n}{2n}\,\lambda(x^n-x^{-n}) \qquad x\geqq\xi$$

$$=\frac{x^n}{2n}\,\lambda(\xi^n-\xi^{-n}) \qquad x\leqq\xi$$

In gleicher Weise

$$\Gamma(x,\xi)=J_n(x\sqrt{\lambda})\,\frac{\left\{J_n(\sqrt{\lambda})Y_n(\xi\sqrt{\lambda})-J_n(\xi\sqrt{\lambda})Y_n(\sqrt{\lambda})\right\}}{J_n(\sqrt{\lambda})}\,\xi \qquad x\leqq\xi\,,$$

$$=J_n(\xi\sqrt{\lambda})\,\frac{\left\{J_n(\sqrt{\lambda})Y_n(x\sqrt{\lambda})-J_n(x\sqrt{\lambda})Y_n(\sqrt{\lambda})\right\}}{J_n(\sqrt{\lambda})}\,\xi \qquad x\geqq\xi$$

Wenn man $\sqrt{x}J_n(x)$, $\sqrt{x}Y_n(x)$ anstatt $J_n(x)$ und $Y_n(x)$, und $\sqrt{x}\,x^n$, $\sqrt{x}\,x^{-n}$ anstatt x^n und x^{-n} setzt, so erhält man

$$G^*(x,\xi)=\sqrt{\frac{x}{\xi}}\,G(x,\xi)\,,$$

$$\Gamma^*(x,\xi)=\sqrt{\frac{x}{\xi}}\,\Gamma(x,\xi)$$

Diese sind die Kerne, die Herr Prof. Hilbert gewonnen hat.

V. ANWENDUNG AUF DIE LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN ERSTER UND DRITTER ORDNUNG.

Zunächst wollen wir uns mit den Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen.

$$u^{(1)}(x) + a(x)u(x) = p(x)\,, \tag{95}$$

$$v^{(1)}(x) + b(x)v(x) = q(x)\,. \tag{96}$$

Die Volterrasche Integralgleichung wird in der Form geschrieben :

$$v(x) = \frac{u(x)v(\alpha)}{u(\alpha)} + \int_\alpha^x \frac{u(x)}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi \tag{97}$$

oder

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \frac{v(\alpha)}{u(\alpha)} + \int_\alpha^x \frac{1}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi$$

Daraus

$$\frac{v(\beta)}{u(\beta)} = \frac{v(\alpha)}{u(\alpha)} + \int_\alpha^\beta \frac{1}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi$$

$$v(\beta) - \mu v(\alpha) = v(\alpha)\,\frac{u(\beta) - \mu u(\alpha)}{u(\alpha)} + \int_\alpha^\beta \frac{u(\beta)}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi$$

Eliminieren wir $\dfrac{v(\alpha)}{u(\alpha)}$ aus (97), so erhalten wir

$$v(x) = u(x)\left[\frac{v(\beta) - \mu v(\alpha)}{u(\beta) - \mu u(\alpha)} - \int_\alpha^\beta \frac{u(\beta)}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi \times \frac{1}{u(\beta) - \mu u(\alpha)}\right]$$

$$+ \int_\alpha^x \frac{u(x)}{u(\xi)} \Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi$$

oder

$$v(x) = u(x)\,\frac{v(\beta) - \mu v(\alpha)}{u(\beta) - \mu u(\alpha)} + \int_\alpha G(x, \xi)\Big\{v(\xi)(a-b) + p - q\Big\}\, d\xi \tag{98}$$

wobei

$$(99) \qquad G(x, \xi) = -\frac{\mu u(\alpha)}{u(\beta) - \mu u(\alpha)} \frac{u(x)}{u(\xi)}, \qquad x > \xi,$$

$$-\frac{u(\beta)}{u(\beta) - \mu u(\alpha)} \frac{u(x)}{u(\xi)}, \qquad x < \xi$$

gesetzt ist.

1) $\quad p - q = 0$

$$(100) \qquad v(x) = u(x) \frac{v(\beta) - \mu v(\alpha)}{u(\beta) - \mu u(\alpha)} + \int_\alpha^\beta G(x, \xi)(a - b)v(\xi)d\xi,$$

$$(101) \qquad u(x) = v(x) \frac{u(\beta) - \mu u(\alpha)}{v(\beta) - \mu v(\alpha)} - \int_\alpha^\beta \Gamma(x, \xi)(a - b)v(\xi)d\xi,$$

wobei

$$(102) \qquad \Gamma(x, \xi) = -\frac{\mu v(\alpha)}{v(\beta) - \mu v(\alpha)} \frac{v(x)}{v(\xi)}, \qquad x > \xi,$$

$$= -\frac{v(\beta)}{v(\beta) - \mu v(\beta)} \frac{v(x)}{v(\xi)}, \qquad x < \xi$$

gesetzt ist.

Folglich

$G(x, \xi)\,(a-b) =$ Kern.

$\Gamma(x, \xi)\,(a-b) =$ Resolvente des Kerns $G(x, \xi)\,(a-b)$.

2) $\quad v(\beta) - \mu v(\alpha) = 0$, und $a - b = -\lambda c(x)$

$$v(x) = \int_\alpha^\beta G(x, \xi)(a - b)v(\xi)d\xi,$$

$$v(x) = -\lambda \int_\alpha^\beta G(x, \xi)c(\xi)v(\xi)d\xi$$

3) $p = 0\,,\quad a = b\,,\quad v(\beta) = v(\alpha)\,,\quad \mu = 1\,,$

$$v(x) = -\int_{\alpha}^{\beta} G(x,\,\xi)q(\xi)d\xi\,.$$

Als einfachstes Beispiel, dienen die Differentialgleichungen

$$u'(x) - u(x) = 0\,, \tag{103}$$

$$v'(x) - n\pi i v(x) = 0 \tag{104}$$

Wir wählen die Randbedingung für das Intervall -1 bis $+1$, nämlich

$$v(1) = v(-1) \tag{105}$$

Folglich ist der Kern $(-1 + n\pi i)G(x,\,\xi)$,

$$G(x,\,\xi) = -\frac{e^{-1}}{e^{1} - e^{-1}}\,e^{x-\xi} \qquad x > \xi\,, \tag{106}$$

$$-\frac{e^{1}}{e^{1} - e^{-1}}\,e^{x-\xi} \qquad x < \xi\,,$$

und die Resolvente $(-1 + n\pi i)\Gamma(x,\,\xi)$,

$$\Gamma(x,\,\xi) = -\frac{e^{-n\pi i}}{e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}}\,e^{n\pi i(x-\xi)}\,, \tag{107}$$

$$= -\frac{e^{n\pi i}}{e^{n\pi i} - e^{-n\pi i}}\,e^{n\pi i(x-\xi)}\,.$$

Daraus

$$v(x) = (-1 + n\pi i)\int_{-1}^{1} G(x,\,\xi)v(\xi)d\xi\,.$$

Da die Lösung der Gleichung $v(x) = e^{n\pi ix}$ der Randbedingung (105) genügt, so folgt

$$e^{n\pi ix} = (-1 + n\pi i)\int_{-1}^{1} G(x,\,\xi)e^{n\pi i\xi}d\xi\,,$$

Spalten wir in Reel- und Imaginärteil, so lässt sich schreiben

$$\cos n\pi x = -\int_{-1}^{1} G(x, \xi)(\cos n\pi\xi + n\pi \sin n\pi\xi)d\xi\,, \tag{108}$$

$$\sin n\pi x = -\int_{-1}^{1} G(x, \xi)(\sin n\pi\xi - n\pi \cos n\pi\xi)d\xi\,. \tag{109}$$

Daraus

$$\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x = -(1 + n^2\pi^2)\int_{-1}^{1} G(x, \xi) \cos n\pi\xi \, d\xi\,,$$

$$\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x = -(1 + n^2\pi^2)\int_{-1}^{1} G(-x, -\xi) \cos n\pi\xi \, d\xi. \tag{110}$$

Durch die Addierung

$$\cos n\pi x = -(1 + n^2\pi^2)\int_{-1}^{1} \frac{G(x, \xi) + G(-x, -\xi)}{2} \cos n\pi\xi \, d\xi\,. \tag{111}$$

Aus (108) und (109)

$$\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x = -\int_{-1}^{1} G(x, \xi)(1 + n^2\pi^2) \sin n\pi\xi \, d\xi\,,$$

$$\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x = -\int_{-1}^{1} G(-x, -\xi)(1 + n^2\pi^2) \sin n\pi\xi \, d\xi\,, \tag{112}$$

$$\sin n\pi x = -(1 + n^2\pi^2)\int_{-1}^{1} \frac{G(x, \xi) + G(-x, -\xi)}{2} \sin n\pi\xi \, d\xi\,, \tag{113}$$

$$\begin{aligned} G^*(x, \xi) &= \frac{G(x, \xi) + G(-x, -\xi)}{2} \\ &= \frac{1}{e^1 - e^{-1}} \cosh(|x - \xi| - 1) \end{aligned} \tag{114}$$

Anderseits substituieren wir $\cos n\pi\xi + n\pi \sin n\pi\xi$ in (108) durch (110).

$$\begin{aligned} \cos n\pi x &= \int_{-1}^{1} G(x, \xi)\left\{\int_{-1}^{1} (1 + n^2\pi^2)G(-\xi, -z) \cos n\pi z . \, dz\right\}d\xi\,, \\ &= (1 + n^2\pi^2)\int_{-1}^{1} \cos n\pi z \, dz \left\{\int_{-1}^{1} G(x, \xi)G(-\xi, -z)d\xi\right\} \end{aligned} \tag{115}$$

Setzt man

$$(116) \qquad G^{**}(x, z) = \int_{-1}^{1} G(x, \xi) G(-\xi, -z) d\xi ,$$

so erhalt man wieder durch unmittelbare Berechnung

$$(117) \qquad G^{**}(x, z) = G^{**}(x, z) = \frac{1}{e^1 - e^{-1}} \cosh (x - z - 1) \quad x > z ,$$

$$= \frac{1}{e^1 - e^{-1}} \cosh (z - x - 1) \quad x < z .$$

Da man die Gleichung (108) und (110) wie folgt schreiben kann.

$$\cos n\pi x = -\sqrt{1 + n^2\pi^2} \int_{-1}^{1} G(x, \xi) \frac{\cos n\pi\xi + n\pi \sin n\pi\xi}{\sqrt{1 + n^2\pi^2}} d\xi .$$

$$\frac{\cos n\pi\xi + n\pi \sin n\pi\xi}{\sqrt{1 + n^2\pi^2}} = -\sqrt{1 + n^2\pi^2} \int_{-1}^{1} G(-\xi, -z) \cos n\pi z, dz ,$$

kann, wenn man setzt

$$\varphi(x) = \cos n\pi x , \quad \psi(x) = \frac{\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x}{\sqrt{1 + n^2\pi^2}} ,$$

$$\lambda = \sqrt{1 + n^2\pi^2}$$

so folgt $\qquad G(x, \xi) = G(-\xi, -x) ,$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left\{ - G(x, \xi) \right\} \psi(\xi) d\xi ,$$

$$\psi(\xi) = \lambda \int_{-1}^{1} \left\{ - G(z, \xi) \right\} \varphi(z) dz .$$

Daraus

$$G^{*}(x, z) = \int_{-1}^{1} G(x, \xi) G(z, \xi) d\xi = \overline{G(x, z)} ,$$

$$\cos n\pi x = \lambda^2 \int_{-1}^{1} \overline{G(x, z)} \cos n\pi z . dz ,$$

$$\int_{-1}^{1} G(z, x) G(z, \xi) dz = \underline{G(x, \xi)} ,$$

$$\frac{\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} = \lambda^2 \int_{-1}^{1} G(x, \xi) \frac{(\cos n\pi\xi + n\pi \sin n\pi\xi)}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} d\xi \,.$$

In gleicher Weise

$$\sin n\pi x = \lambda^2 \int_{-1}^{1} G(x, z) \sin n\pi z . dz \,,$$

$$\frac{\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} = \lambda^2 \int_{-1}^{1} G(x, \xi) \frac{\sin n\pi\xi - n\pi \cos n\pi\xi}{\sqrt{1+n^2\pi^2}} d\xi \,.$$

Dies ist der Kern, den Herr Schmid gewonnen hat. Die Entwickelbarkeit des Kerns nach den Eigenfunktionen ist dabei bewiesen worden.

In der Tat ist es gleich wie bei den bekannten Fourierschen Reihen

$$\cosh(\eta - 1) = 2 \sinh 1 \left(\frac{1}{2\pi^2} + \frac{\cos \eta\pi}{\pi^2+1} + \ldots\ldots + \frac{\cos n\pi\eta}{n^2\pi^2+1} + \ldots\ldots \right)$$

also

$$G(x, z) = \frac{1}{2\pi^2} + \frac{\cos \pi x \cos \pi\xi + \sin \pi x \sin \pi\xi}{\pi^2+1} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\cos n\pi x \cos n\pi\xi + \sin n\pi x \sin n\pi\xi}{n^2\pi^2+1} + \ldots\ldots$$

Es ist zu bemerken, dass

$$G(x, z) = \int_{-1}^{1} G(\xi, z) G(\xi, x) d\xi = G(x, z)$$

ist. In der Tat

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(x)\psi_n(z)}{1+n^2\pi^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos n\pi x + n\pi \sin n\pi x)(\cos n\pi z + n\pi \sin n\pi z)}{(1+n^2\pi^2)(1+n^2\pi^2)}$$

$$+ \frac{(\sin n\pi x - n\pi \cos n\pi x)(\sin n\pi z - n\pi \cos n\pi z)}{(1+n^2\pi^2)(1+n^2\pi^2)}$$

Endlich wollen wir uns noch mit einigen Beispielen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung beschäftigen.

Als einfachstes Beispiel dienen die Gleichungen

$$u''' = 0 ,$$

$$v''' + b_1 v'' + b_2 v' + b_3 v = 0$$

Nach unseren Definitionen, bilden wir

$$D(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^2}{2} ,$$

$$U_2 = \frac{(x-a)^2}{2} , \quad U_1 = b_1(a) \frac{(x-a)^2}{2} + (x-a) ,$$

$$U_0 = b_2(a) \frac{(x-a)^2}{2} - \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{(x-a)^2}{2} b_1 \right\} + 1$$

$$K(x, \xi) = - \frac{(x-\xi)^2}{2} b_3 + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{(x-\xi)^2}{2} b_2 \right\} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{(x-\xi)^2}{2} b_1 \right\} ,$$

$$E_{ik} = \nu_{ik} + \mu_{0k} U_i + \mu_{1k} \frac{\partial}{\partial \beta} U_i + \mu_{2k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \beta^2} ,$$

$$K_k = \mu_{0k} K(\beta, \xi) + \ldots\ldots + \mu_{2k} \frac{\partial^2 K(\beta, \xi)}{\partial \beta^2} .$$

Als das erste Beispiel wählen wir den Fall, wo

$$v(0) = 0 , \quad v^{(1)}(0) = 0 , \quad v(1) = 0$$

$$\nu_{01} = 1 \quad \nu_{11} = \nu_{21} = \mu_{01} = \mu_{11} = \mu_{21} = 0 \quad E_{01} = 1, E_{11} = 0, E_{21} = 0$$

$$\nu_{02} = 1 \quad \nu_{02} = \nu_{22} = \mu_{02} = \mu_{12} = \mu_{22} = 0 \quad E_{02} = 0, E_{12} = 1, E_{22} = 0$$

$$\mu_{03} = 1 \quad \nu_{03} = \nu_{13} = \nu_{23} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0 \quad E_{03} = 0, E_{13} = 0, E_{23} = 0$$

$$\begin{array}{c} G(x, \xi) = \\ \\ x < \xi \end{array} \begin{vmatrix} 0 & U_0(x, a) & U_1(x, a) & U_2(x, a) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ K(1, \xi) & U_0(\beta, a) & U_1(\beta, a) & U_2(\beta, a) \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ U_0(\beta, a) & U_1(\beta, a) & U_2(\beta, a) \end{vmatrix}$$

$$G(x,\xi)=\begin{vmatrix} K(x,\xi) & U_0(x,\alpha) & U_1(x,\alpha) & U_2(x,\alpha)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ K(1,\xi) & U_0(\beta,\alpha) & U_1(\beta,\alpha) & U_2(\beta,\alpha)\end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ U_0(\beta,\alpha) & U_1(\beta,\alpha) & U_2(\beta,\alpha)\end{vmatrix}$$

$$x > \xi$$

Wenn $$u''' = 0\,,$$

$$v''' + \lambda v = 0\,,$$

ist, so ist

$$b_1 = b_2 = 0\,,\quad b_3 = \lambda$$

$$U_2 = \frac{x^2}{2}\,,\ U_1 = x,\ U_0 = 1,\ K(x,\xi) = -\lambda\frac{(x-\xi)^2}{2}$$

$$G(x,\xi) = -\lambda\left\{\frac{(x-\xi)^2}{2} - \frac{x^2(1-\xi)^2}{2}\right\} \qquad x > \xi$$

$$= \lambda\frac{x^2(1-\xi)^2}{2} \qquad x < \xi$$

Dies ist ein Beispiel, des Herr Kowalewski durch seine Methode berechnet hat. Nach unserer Methode kann man nicht nur zu demselben Resultat gelangen, sondern auch die Resolvente berechnen.

Also $$v_1 = e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\,,\quad v_2 = e^{-\sqrt[3]{\lambda}\omega_1 x}\,,\quad v_3 = e^{-\sqrt[3]{\lambda}\omega_2 x}$$

$$N(x,\xi) = \frac{(\omega_1-\omega_2)e^{-\sqrt[3]{\lambda}(x-\xi)} - (1-\omega_2)e^{-\sqrt[3]{\lambda}\omega_1(x-\xi)} + (1-\omega_1)e^{-\sqrt[3]{\lambda}\omega_2(x-\xi)}}{3(\omega_2-\omega_1)}\lambda^{-\frac{2}{3}}$$

$$S(x,\xi) = \lambda N(x,\xi)$$

$$-\Gamma'(x,\xi) = \lambda N(x,\xi) + \lambda\frac{N(1,\xi)N(x,0)}{N(1,0)} \qquad x > \xi\,,$$

$$= \lambda\frac{N(x,0)}{N(1,0)}N(1,\xi)\,, \qquad x < \xi\,.$$

Nach der Hilbertschen Theorie können wir die Entwickelbarkeit der Fourierschen Reihen durch die Greensche Funktion beweisen, welche mittelst der Gleichungen.

$$u'' = 0$$

$$v'' + \lambda v = 0$$

mit den Randbedingungen für das Intervall -1 bis $+1$,

$$v(-1) - v(1) = c_1, \quad v^{(1)}(-1) - v^{(1)}(1) = c_2$$

aufgebaut werden. Aber wir finden die Greensche Funktion im engeren Sinne nicht.

Ich behaupte, dass die Greensche Funktion durch die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung gesucht werden könne.

Nun handelt es sich um die Gleichungen

$$u''' = 0,$$

$$v''' + \lambda v' = 0$$

Die Lösungen sind

$$u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2;\ v_1 = \sin\sqrt{\lambda}\,x,\ v_2 = \cos\sqrt{\lambda}\,x,\ v_3 = 1\,.$$

Daher nach unserer Methode

$$K(x, \xi) = -\lambda(x - \xi)$$

$$U_0 = \frac{(x+1)^2}{2}\lambda + 1,\ U_1 = (x+1),\ U_2 = \frac{(x+1)^2}{2}\,.$$

Die gegebenen Randbedingungen sind

$$v(-1) - v(1) = c_1,$$

$$v^{(1)}(-1) - v^{(1)}(1) = c_2\,.$$

Daraus folgt

$$E_{01} = -2\lambda\,, \qquad E_{11} = -2\,, \qquad E_{21} = -2$$

$$E_{02} = -2\lambda\,, \qquad E_{12} = 0\,, \qquad E_{22} = -2$$

Als die dritte Randbedingung nehmen wir an, dass

$$\int_\alpha^\beta v(\xi)d\xi = c_3\,,$$

also aus (32) und (35)

$$c_3 = v^{(2)}(\alpha)\int_\alpha^\beta U\,dx + v^{(1)}(\alpha)\int_\alpha^\beta U_1 dx + v(\alpha)\int_\alpha^\beta U_0 dx$$

$$+\int_{-1}^1 v d\xi \int_\xi^1 K(x, \xi)dx\,.$$

Daraus

$$E_{03} = \int_{-1}^1 U_0 dx = \frac{4}{3}\lambda + 2\,, \quad E_{13} = \int_{-1}^1 U_1 dx = 2\,,$$

$$E_{23} = \int_{-1}^1 U_2 dx = \frac{4}{3}$$

$$K_3(\beta, \xi) = \int_\xi^1 K(x, \xi)dx = -\lambda\,\frac{(1-\xi)^2}{2}\,.$$

Folglich

$$G(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^2}{4} - \frac{(x-\xi)}{2} + \frac{1}{6}\,, \qquad x > \xi\,,$$

$$G(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^2}{4} + \frac{(x-\xi)}{2} + \frac{1}{6}\,, \qquad x < \xi\,.$$

Um die Resolvente zu suchen, berechnen wir nun

$N(x, \xi)$

$$= \begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}\,x & \cos\sqrt{\lambda}\,x & 1 \\ \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\xi & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\xi & 0 \\ \sin\sqrt{\lambda}\,\xi & \cos\sqrt{\lambda}\,\xi & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} -\lambda\sin\sqrt{\lambda}\,\xi\,, & -\lambda\cos\sqrt{\lambda}\,\xi & 0 \\ \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\xi\,, & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\xi & 0 \\ \sin\sqrt{\lambda}\,\xi\,, & \cos\sqrt{\lambda}\,\xi & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)}{\lambda}$$

$$S(x, \xi) = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(x-\xi), \quad V_2 = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,(x-a)}{\lambda}.$$

$$V_1 = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(x-a)}{\sqrt{\lambda}}, \qquad V_0 = \cos\sqrt{\lambda}\,(x-a)$$

$$H_{01} = 1-\cos\sqrt{\lambda}\,2, \quad H_{11} = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,2}{\sqrt{\lambda}}, \quad H_{21} = -\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,2}{\lambda}$$

$$H_{02} = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,2, \quad H_{12} = 1-\cos\sqrt{\lambda}\,2, \quad H_{22} = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,2}{\sqrt{\lambda}}$$

$$H_{03} = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,2}{\sqrt{\lambda}}, \quad H_{13} = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,2}{\lambda}, \quad H_{23} = \frac{2-\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,2}{\sqrt{\lambda}}}{\lambda}$$

$$S_3(\beta, \xi) = \int_{\xi}^{1}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,(x-\xi)dx = 1-\cos\sqrt{\lambda}\,(1-\xi)$$

Daraus folgt aus (47) und (48)

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sin\sqrt{\lambda}}\left\{\cos\sqrt{\lambda}\,(1-x+\xi)\right\} + \frac{1}{2}, \qquad x > \xi$$

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sin\sqrt{\lambda}}\left\{\cos\sqrt{\lambda}\,(1+x-\xi)\right\} + \frac{1}{2}, \qquad x < \xi$$

Anstatt der Randbedingung $\int v(\xi)d\xi = c_3$, wählen wir die Randbedingung $v(0) = c_3$, dann folgt

$$x > 0\begin{cases} G_+(x, \xi) = -(x-\xi) + \frac{1}{8}\left\{-6\xi + 1 + 2x^2 + 4x - 4x\xi\right\} & 0 > \xi > -1 \\ G_+(x, \xi) = -(x-\xi) + \frac{1}{8}\left\{-2\xi + 1 + 2x^2 + 4x - 4x\xi\right\} & x > \xi > 0 \\ G_+(x, \xi) = \frac{1}{8}\left\{-2\xi + 1 + 2x^2 + 4x - 4x\xi\right\} & 1 > \xi > x \end{cases}$$

$$x<0\begin{cases} G_-(x,\xi) = -(x-\xi) + \dfrac{1}{8}\left\{-6\xi+1+2x^2+4x-4x\xi\right\} & x>\xi>-1 \\ G_-(x,\xi) = \qquad\qquad\quad + \dfrac{1}{8}\left\{-6\xi+1+2x^2+4x-4x\xi\right\} & 0>x>\xi \\ G_-(x,\xi) = \qquad\qquad\quad + \dfrac{1}{8}\left\{-2\xi+1+2x^2+4x-4x\xi\right\} & 1>\xi>0 \end{cases}$$

Wenn $\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots . n, \ldots .$ ist, so wird

$$\sin n\pi x = n\pi\int_{-1}^{1} G_+(x,\xi)\sin n\pi\xi d\xi$$

$$x>0$$

$$\sin n\pi x_1 = n\pi\int_{-1}^{1} G_-(x_1,\xi)\sin n\pi\xi d\xi$$

$$x_1<0$$

Wenn $x = -x_1$ ist, so erhält man

$$\sin n\pi x = -n\pi\int_{-1}^{1} G(-x,\xi)\sin n\pi\xi d\xi .$$

Daraus

$$\sin n\pi x = n\pi\int_{1-}^{1}\frac{G_+(x,\xi)-G_-(-x,\xi)}{2}\sin n\pi\xi d\xi .$$

$$x>0$$

Nun setzt man

$$G^\times(x,\xi) = \frac{G_+(x,\xi)-G_-(-x,\xi)}{2},$$

so können wir berechnen,

$$G^\times(x,\xi) = -\frac{(1+\xi)}{2}x \qquad -x>\xi>-1$$

$$= \xi\frac{(1-x)}{2} \qquad 0>\xi>-x$$

$$= \xi\frac{(1-x)}{2} \qquad x>\xi>0$$

$$= \frac{x(1-\xi)}{2} \qquad 1>\xi>x$$

$$\sin n\pi x = n\pi\left\{\int_{-1}^{0} G^{\times}(x,\ \xi)\sin n\pi\xi d\xi + \int_{0}^{1} G^{\times}(x,\ \xi)\sin n\pi\xi d\xi\right\}$$

$$= n\pi\int_{0}^{1}\left\{G^{\times}(x,\ \xi) - G^{\times}(x,\ -\xi)\right\}\sin n\pi\xi d\xi\ .$$

Setzt man wieder

$$G^{\times\times}(x,\ \xi) = G^{\times}(x,\ \xi) - G^{\times}(x,\ -\xi)\ ,$$

so folgt

$$G^{\times\times}(x,\ \xi) = \xi(1-x) \qquad x \geqq \xi$$

$$= x(1-\xi) \qquad x \leqq \xi$$

Dies ist der symmetrische Kern, welcher aus der sich selbst-adjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung leicht konstruiert werden kann.

Es ist zu bemerken, dass man nicht nur mittelst der sich selbst adjungierten Differentialgleichung, sondern auch mittelst der linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung zum symmetrischen Kern gelangen kann.