

# DIE GEOMETRIE DES SYSTEMS DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Von

Akitsugu KAWAGUCHI und Hitoshi HOMBU

Die Geometrie der "paths", welche von der Schule von Princeton entwickelt wurde und ein Übergang von der RIEMANNschen Geometrie zu der einer affinen Übertragung war, ist erst von J. DOUGLAS in dem Falle eines Systems der Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + H^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

erweitert worden ([7]<sup>(1)</sup>). Die Theorie hat sich notwendig auf die Mannigfaltigkeit von Linienelementen bezogen, und wir können die Nützlichkeit dieser Theorie in der von L. BERWALD schon veröffentlichten Theorie der Mannigfaltigkeit mit der FINSLERSchen Massbestimmung finden ([1]). Es ist zu beachten, dass J. DOUGLAS in dem Falle des obigen Systems und dem des weiter verallgemeinerten Systems der partiellen Differentialgleichungen

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} + H_{ab}^i\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^c}\right) = 0$$
$$(i, j = 1, 2, \dots, n; a, b, c = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{K})$$

("K-spreads") nach den zugrundegelegten Gruppen der Koordinaten- und Parametertransformationen die zugehörigen Geometrien mit den Adjektiven *affine*, *deskriptive*, *projektive* und *voluminäre* voneinander unterschieden hat ([7], [8]). Da er aber die Invarianz der Systeme unter beliebiger linearer Parametertransformation gefordert hat, musste die Funktionen  $H^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}\right)$  bzw.  $H_{ab}^i(x^j, p_c^j)$  in bezug auf  $\frac{dx^j}{dt}$  bzw.  $p_c^j$  homogen von zweiter Ordnung bzw. homogen in erweitertem Sinne sein. D. D. KOSAMBI ([17]), E. CARTAN ([4]) und danach W. SLEBODZIŃSKI ([21]) haben diese Forderung in dem Falle (1) beiseite-

---

(1) Man vergleiche die Literatur am Schluss dieser Arbeit.

gesetzt und die Abhängigkeit der Funktionen  $H^i$  auch von dem Parameter  $t$  angenommen. Die dabei verfolgte Geometrie hat die Gruppe der Transformationen

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{oder} \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n; t)$$

und der identischen Parametertransformation (rheonome oder kinematische) zugrundegelegt. Kürzlich hat E. BORTOLOTTI eine neue Geometrie des Systems (2) ( $H_{ab}^i$ : von den Parametern  $u^c$  abhängig) unter der Gruppe aller Koordinaten- und Parametertransformationen

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2, \dots, u^k)$$

untersucht, die *intrinsek* genannt wird ([2]). Sie ist eine einheitliche affine Geometrie der verallgemeinerten "paths" und "K-spreads". Von D. D. KOSAMBI ist in diesem Jahre der erste Schritt in die Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$x^{(m)i} + \alpha^i(t, x^j, x^{(1)j}, \dots, x^{(m-1)j}) = 0$$

gemacht worden ([18], [19]). Unter Zugrundelegung der Gruppe aller Koordinatentransformationen und der identischen Parametertransformation ist es ihm gelungen, in der Mannigfaltigkeit der Elemente  $t, x, x', \dots, x^{(m-1)}$  statt der partiellen Ableitungen nach  $t, x, \dots, x^{(m-1)}$  der geometrischen Grössen die kovarianten partiellen Ableitungen derselben Zahl anzusetzen, woraus wir eine Grundlage der affinen Geometrie des Systems finden können. Man bedarf aber bei der Herleitung dieser Ableitungen der Differentialquotienten von  $\alpha^i$  bis zur  $m$ -ten Ordnung.

Andererseits hat seit einigen Jahren die Theorie der KAWAGUCHI-schen Räume durch die Untersuchungen von A. KAWAGUCHI ([9], [11], [12]), J. L. SYNGE ([22]) und H. V. CRAIG ([5]) eine progressive Entwicklung gemacht; vor allem in den neueren Arbeiten [11], [12] können wir einen tieferen Grund für die kovarianten Ableitungsverfahren und grosse Hoffnung für die Entwicklung der Theorie dieser Räume finden. In der vorliegenden Arbeit möchten wir uns von diesem geometrischen Standpunkte aus mit der Theorie des Systems der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$(3) \quad \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_m}} + H_{a_1 a_2 \dots a_m}^i \left( u^b, x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^{b_1}}, \dots, \frac{\partial^{m-1} x^j}{\partial u^{b_1} \dots \partial u^{b_{m-1}}} \right) = 0$$

beschäftigen. Zunächst in Kapitel 1 versuchen wir als Vorbereitung die neue Formulierung der Sätze hauptsächlich der letzten Arbeiten in der Mannigfaltigkeit von  $K$ -dimensionalen Flächenelementen  $s(\geq 1)$ -ter Ordnung  $F_n^{(s)}$ .  $F_n^{(s)}$  ist nichts anderes als eine Art Mannigfaltigkeit, welche aus einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in jedem Punkte durch Adjungierung von beliebigen Matrizen bestimmter Art entsteht. Da aber bei einer Koordinatentransformationen die adjungierten Matrizen einer nicht allgemeinen sondern einer linearen Transformation von einer speziellen Gestalt unterworfen sind, so treten verschiedene, weiter reichende Beziehungen hervor. Unter diesem Umstand beziehen sich die Sätze in §§ 3–5 auf kovariante Ableitungen verschiedener Arten und Systeme der PFAFFSchen Ausdrücke mit der Eigenschaft eines Affinors. Im Zusammenhang mit den Parametertransformationen geben wir in §§ 6, 7 einen kleinen Hinblick auf die Verallgemeinerung der SYNGESchen Vektoren der KAWAGUCHISchen Räume. In Kapitel 2 unter Zugrundelegung der Gruppe aller Koordinaten- und linearer Parametertransformationen kommen mit Hilfe des vorigen Kapitels alle Werkzeuge in Vorbereitung, welche für die geometrische, vollständige Behandlung des Systems (3) unentbehrlich sind: kovariantes Differential eines beliebigen Vektors, Systeme der Grundübertragungen im erweiterten Sinne, somit auch verschiedene kovariante Ableitungsverfahren beliebiger Grössen. Endlich werden die Systeme der Funktionen  $H_{a(m)}^i$  durch  $K_{a(m)}^i$  (Affinor in bezug auf sämtliche Indizes) ersetzt. Gemäss der geometrischen Methode, wobei statt kovarianter Ableitungen das kovariante Differential und die Grundübertragungen sich zu allererst definieren lassen, scheint die ganze Überlegung durchsichtig, und ausserdem hängen die kovarianten Ableitungen von den Differentialquotienten von  $H_{a(m)}^i$  bis zur zweiten Ordnung ab. Es ist interessant, dass die Übertragungsparameter  $\overset{K}{\Gamma}_{jk}^{*i}$  von D. D. KOSAMBI sich aus unserem kovarianten Differential ( $K = 1$ ) durch gewisse Zerlegung ergeben. In Kapitel 3, lässt sich der in dem Sinne von E. BORTOLOTTI intrinseken Theorie der verallgemeinerten "paths" mittels der Differentialquotienten bis zur  $(m+1)$ -ten Ordnung ein Fundament angeben.

Es scheint uns möglich, dass wir in den speziellen KAWAGUCHISchen Räumen viele Anwendungen unserer Theorie finden (vgl. KAWAGUCHI, [15], [16]; OHKUBO, [20]).

## KAPITEL 1. DIE MANNIGFALTIGKEIT VON $K$ -DIMENSIONALEN FLÄCHENELEMENTEN HÖHERER ORDNUNG.

1. Die Mannigfaltigkeit  $F_n^{(s)}$ . Es seien  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die Koordinaten eines Punktes in einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X_n$  und  $u^a$  ( $a = 1, 2, \dots, K$ ;  $K \leq n$ ) voneinander unabhängige, vorläufig festgelegte Parameter. Mittels dieser Parameter wird jede  $K$ -dimensionale Fläche durch Gleichungen  $x^i = x^i(u^a)$  gegeben. In jedem Punkte der  $K$ -dimensionalen Fläche bestimmen die Größen

$$(1.1) \quad \begin{cases} x^i = x^i(u^a), & p_{a(1)}^i \equiv p_{a_1}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^{a_1}}, & p_{a(2)}^i \equiv p_{a_1 a_2}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2}}, \dots, \\ p_{a(s)}^i \equiv p_{a_1 a_2 \dots a_s}^i = \frac{\partial^s x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_s}} \end{cases} \quad (a_1, a_2, \dots, a_s = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{K})^{(1)}$$

Flächenelement  $s$ -ter Ordnung. Adjungieren wir nun in jedem Punkte von  $X_n$  ein beliebiges Wertesystem (1.1), so kommt die Mannigfaltigkeit  $F_n^{(s)}$  von Dimensionen

$$\binom{n+s-1}{s} + \binom{n+s-2}{s-1} + \dots + \binom{n}{1} + n = \binom{n+s}{s} + n - 1$$

zustande, die aus allen  $K$ -dimensionalen Flächenelementen  $s$ -ter Ordnung ( $x^i, p_{a(1)}^i, p_{a(2)}^i, \dots, p_{a(s)}^i$ ) besteht. Diese Mannigfaltigkeit ist der hauptsächliche Gegenstand unserer Untersuchung in diesem Kapitel (vgl. KAWAGUCHI, [10], [14]; DE DONDER, [6]).

Für späteren Zweck stellen wir zwei einfache Formeln in unserer Schreibweise wieder vor, von denen die erste nichts anderes als die bekannte LEIBNIZSche Formel ist. Seien  $A, B$  beliebige Funktionen von  $u^a$  ( $a = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{K}$ ), so bestehen

$$(1.2) \quad (AB)_{/a(r)} = \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} A_{/a_1 a_2 \dots a_{r-t}} B_{/a_{r-t+1} \dots a_r} \\ \equiv \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} A_{/a(r-t)} B_{/a(t)},$$

$$(1.3) \quad AB_{/a(r)} = \sum_{t=0}^r (-1)^t \binom{r}{t} (A_{/a(t)} B)_{/a(r-t)},$$

(1) Durch die geklammerte Zahl in einem Index (z.B.  $m$  in  $a_{(m)}$ ) bezeichnen wir die Anzahl der voneinander verschiedenen Indizes, welche je einen zweiten Hilfsindex zu sich nehmen (z.B.  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ). Danach schreiben wir so:

$$A_{a(p)} B_{a(q)} C_{a(r)} = A_{(a_1 a_2 \dots a_p} B_{a_{p+1} \dots a_{p+q}} C_{a_{p+q+1} \dots a_{p+q+r}}.$$

wo  $A/a_{(t)}$  partielle Ableitung von  $t$ -ter Ordnung nach  $u^{a_1}, u^{a_2}, \dots, u^{a_t}$  bedeutet.

Beweis. Offenbar sind (1.2) und (1.3) beide richtig für  $r = 0$ , und wir haben nach Induktion bezüglich  $r$

$$\begin{aligned}
 (AB)_{/a_{(r)}/a_{r+1}} &= \sum_{t=0}^r \binom{r}{t} \left[ A_{/(a_{(r-t)}|a_{r+1}|B/a_{(t)})} + A_{/(a_{(r-t)}B/a_{(t)})a_{r+1}} \right] \\
 &= A_{/a_{(r+1)}}B + AB_{/a_{(r+1)}} + \sum_{t=1}^r \left[ \binom{r}{t} A_{/a_{r+1}(a_{(r-t)}B/a_{(t)})} \right. \\
 &\quad \left. + \binom{r}{t-1} A_{/(a_{(r+1-t)}B/a_{(t-1)})a_{r+1}} \right] \\
 &= A_{/a_{(r+1)}}B + AB_{/a_{(r+1)}} + \sum_{t=1}^r \binom{r+1}{t} \left[ \frac{r+1-t}{r+1} A_{/a_{r+1}(a_{(r-t)}B/a_{(t)})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t}{r+1} A_{/(a_{(r+1-t)}B/a_{(t-1)})a_{r+1}} \right] \\
 &= \sum_{t=0}^{r+1} \binom{r+1}{t} A_{/(a_{(r+1-t)}B/a_{(t)})},^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB_{/a_{(r+1)}} &= AB_{/a_{(r)}/a_{r+1}} = (AB_{/a_{(r)}})_{/a_{r+1}} - A_{/a_{r+1}}B_{/a_{(r)}} \\
 &= \sum_{t=0}^r (-1)^t \binom{r}{t} (A_{/(a_{(t)}B)}/a_{(r-t)})_{a_{r+1}} \\
 &\quad - \sum_{t=0}^r (-1)^t \binom{r}{t} (A_{/a_{r+1}(a_{(t)}B)}/a_{(r-t)}) \\
 &= (AB)_{/a_{(r+1)}} - (-1)^r A_{/a_{(r+1)}}B \\
 &\quad + \sum_{t=1}^r (-1)^t \binom{r+1}{t} \left[ \frac{r+1-t}{r+1} (A_{/(a_{(t)}B)}/a_{(r-t)})_{a_{r+1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t}{r+1} (A_{/a_{r+1}(a_{(t-1)}B)}/a_{(r+1-t)}) \right] \\
 &= \sum_{t=0}^{r+1} (-1)^t \binom{r+1}{t} (A_{/(a_{(t)}B)}/a_{(r+1-t)}). \quad \text{Q. E. D.}
 \end{aligned}$$

---

(1) 
$$\begin{aligned}
 &\frac{r+1-t}{r+1} A_{/a_{r+1}(a_{(r-t)}B/a_{(t)})} + \frac{t}{r+1} A_{/(a_{(r+1-t)}B/a_{(t-1)})a_{r+1}} \\
 &= \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^{r-t+1} A_{/(a_1 \dots a_{i-1}|a_{r+1}|a_i \dots a_{r-t}B/a_{r-t+1} \dots a_r)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=r-t+2}^{r+1} A_{/(a_1 \dots a_{r-t+1}B/a_{r-t+2} \dots a_{i-1}|a_{r+1}|a_i \dots a_r)} \right\} \\
 &= A_{/(a_{(r+1-t)}B/a_{(t)})}.
 \end{aligned}$$

2. Erweiterung von Koordinatentransformation. Bei einer Koordinatentransformation  $x^\lambda = x^\lambda(x^i)$  mit nicht verschwindender Determinante verändern sich die Bestimmungszahlen des  $K$ -dimensionalen Flächenelementes  $s$ -ter Ordnung folgendermassen:

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^\lambda = x^\lambda(x^i), \quad p_{a_1}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} p_{a_1}^i, \\ p_{a_1 a_2}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} p_{a_1 a_2}^i + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^j} p_{a_1}^i p_{a_2}^j, \dots, \\ p_{a(s)}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} p_{a(s)}^i + R_{a(s)}^\lambda(x, p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(s-1)}). \end{array} \right.$$

Dann gilt

$$(1.5) \quad \left( \frac{\partial p_{a(r)}^\lambda}{\partial x^i} \right)_{/b(t)} = \frac{\partial p_{a(r)b(t)}^\lambda}{\partial x^i}, \quad (1)$$

da

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} p_{a(r)b}^\lambda &= \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{u=0}^r \frac{\partial p_{a(r)}^\lambda}{\partial p_{c(u)}^j} p_{c(u)b}^j = \sum_{u=0}^r \frac{\partial}{\partial p_{c(u)}^j} \left( \frac{\partial p_{a(r)}^\lambda}{\partial x^i} \right) p_{c(u)b}^j \\ &= \left( \frac{\partial p_{a(r)}^\lambda}{\partial x^i} \right)_{/b}. \end{aligned}$$

Berücksichtigend die Symmetrie von  $p_{b(t)}^i$  bezüglich  $b(t)$ , definieren wir den Operator  $H_{;i}^{(b(t))} \equiv \frac{\bar{\partial}}{\partial p_{b(t)}^i} H$  als  $\frac{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_u!}{t!} \frac{\partial H}{\partial p_{b(t)}^i}$ , wenn die Indizes  $b_1, b_2, \dots, b_t$  aus  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_u$  gleichen Indizes bestehen ( $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_u = t$ ). So ist z.B. die folgende Schreibweise gestattet:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_r H_{;i}^{(a(r))} dp_{a(r)}^i, \\ \frac{\bar{\partial} p_{a_1 a_2 \dots a_r}^i}{\bar{\partial} p_{b_1 b_2 \dots b_r}^j} &= \delta_j^i \delta_{(a_1}^{b_1} \delta_{a_2}^{b_2} \dots \delta_{a_r)}^{b_r} = \delta_j^i \delta_{a(r)}^{b(r) (2)}. \end{aligned}$$

In (1.4) besteht die Identität ( $r \geq t$ )

- (1) Ist  $A_{a(r)}$  in bezug auf  $a_1, a_2, \dots, a_r$  symmetrisch ( $A_{a(r)} = A_{(a(r))}$ ), so schreiben wir  $A_{b_1 b_2 \dots b_t c_1 \dots c_{r-t}}$  als  $A_{b(t)c(r-t)}$ .
- (2)  $\delta_{a(r)}^{b(r)} = \delta_{(a_1}^{b_1} \delta_{a_2}^{b_2} \dots \delta_{a_r)}^{b_r} = \delta_{a_1}^{(b_1} \delta_{a_2}^{b_2} \dots \delta_{a_r)}^{b_r}$ .

$$(1.6a) \quad \frac{\bar{\partial} p_{a(r)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b(t)}^k} = \binom{r}{t} \delta_{(a_1)}^{b_1} \delta_{a_2}^{b_2} \dots \delta_{a_t}^{b_t} \frac{\partial p_{a_{t+1} \dots a_r}^\lambda}{\partial x^k} = \binom{r}{t} \delta_{(a(t))}^{b(t)} \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^k} \right)_{/a(r-t)},$$

welche in dem Falle  $K = 1$  schon H.V. CRAIG ([5]) gefunden hat.

Beweis. Da

$$p_{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}^\lambda = (p_{a_1 a_2 \dots a_r}^\lambda)_{/a_{r+1}} = \sum_{u=0}^r \frac{\bar{\partial} p_{a_1 \dots a_r}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c_1 \dots c_u}^l} p_{c_1 \dots c_u a_{r+1}}^l$$

ist, so ist nach Induktion bezüglich  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} p_{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b_1 \dots b_t}^k} &= \frac{\bar{\partial} p_{a_1 \dots a_r}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c_1 \dots c_{t-1}}^k} \delta_{(c_1)}^{b_1} \dots \delta_{c_{t-1}}^{b_{t-1}} \delta_{a_{r+1}}^{b_t} + \sum_{u=0}^r \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} p_{c(u)}^l} \left( \frac{\bar{\partial} p_{a(r)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b(t)}^k} \right) \cdot p_{c(u) a_{r+1}}^l \\ &= \binom{r}{t-1} \delta_{(a_1)}^{c_1} \dots \delta_{a_{t-1}}^{c_{t-1}} \frac{\partial p_{a_t \dots a_r}^\lambda}{\partial x^k} \delta_{(c(t-1))}^{b(t-1)} \delta_{a_{r+1}}^{b_t} \\ &\quad + \binom{r}{t} \delta_{(a_1)}^{b_1} \dots \delta_{a_t}^{b_t} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sum_{u=0}^r \frac{\bar{\partial} p_{a_{t+1} \dots a_r}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c_1 \dots c_u}^l} p_{c_1 \dots c_u a_{r+1}}^l \right) \\ &= \binom{r+1}{t} \left[ \frac{t}{r+1} \delta_{(a(t-1))}^{b(t-1)} \delta_{a_{r+1}}^{b_t} \mid \frac{\partial p_{a_{(r+1-t)}}^\lambda}{\partial x^k} + \frac{r+1-t}{r+1} \delta_{(a(t))}^{b(t)} \frac{\partial p_{a_{(r-t)} a_{r+1}}^\lambda}{\partial x^k} \right] \\ &= \binom{r+1}{t} \delta_{(a(t))}^{b(t)} \frac{\partial p_{a_{(r+1-t)}}^\lambda}{\partial x^k} = \binom{r+1}{t} \delta_{(a(t))}^{b(t)} \left( \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^k} \right)_{/a(r+1-t)}. \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Aus (1.6a) ergibt sich auch

$$(1.6b) \quad \frac{\bar{\partial} p_{a(r)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b(t)}^k} = \frac{r}{t} \delta_{(a_1)}^{b_1} \frac{\bar{\partial} p_{a_{(r-1)}}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b_{(t-1)}}^k} = \frac{r! (t-u)!}{t! (r-u)!} \delta_{(a(u))}^{b(u)} \frac{\bar{\partial} p_{a_{(r-u)}}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b_{(t-u)}}^k}.$$

**3. Verallgemeinerter KAWAGUCHI'scher Satz und seine Anwendung.** Einer der beiden Verfasser hat in einem KAWAGUCHI'schen Raume einen umfangreichen Satz hergeleitet, der z.B. eine Ableitungsmethode von Vektoren angibt (KAWAGUCHI [11]). Nun möchten wir diesen Satz in unserer verallgemeinerten Mannigfaltigkeit folgendermassen übersetzen:

**Satz 1.** *Ein Affinor  $T$  (mit einem Gewichte oder nicht) sei von dem  $K$ -dimensionalen Flächenelemente  $s$ -ter Ordnung abhängig. Ist ein Vektor  $v^j$  von  $u^a$  abhängig, so sind*

$$(1.7) \quad \overset{s}{D}_j^{\alpha(p)}(T)v^j = \sum_{r=p}^s \binom{r}{p} T_{;j}^{(a(p))b(r-p)} v_{/b(r-p)}^j \quad (p = 1, 2, \dots, s)$$

die Bestimmungszahlen eines Affinors von derselben Art wie  $T$ .

Beweis. Da nach (1.6 b)

$$T_{;j}^{(a_{(p)}b_{(r-p)})} = \sum_{t=r}^s T_{;\mu}^{(c_{(t)})} \frac{\bar{\partial} p_{c_{(t)}}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{a_{(p)}b_{(r-p)}}^j} = \frac{(r-p)!}{r!} \sum_{t=r}^s \frac{t!}{(t-p)!} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \frac{\bar{\partial} p_{c_{(t-p)}}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{b_{(r-p)}}^j}$$

ist, so erhalten wir wegen (1.2), (1.5), (1.6 a)

$$\begin{aligned} (1.8) \quad \sum_{r=p}^s \binom{r}{p} T_{;j}^{(a_{(p)}b_{(r-p)})} v_{|b_{(r-p)}}^j &= \sum_{r=p}^s \sum_{t=r}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \frac{\bar{\partial} p_{c_{(t-p)}}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{b_{(r-p)}}^j} \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^{\lambda}} v^{\lambda} \right)_{|b_{(r-p)}} \\ &= \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \sum_{r=p}^t \binom{t-p}{r-p} \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^j} \right)_{|(c_{(t-r)})} \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^{\lambda}} v^{\lambda} \right)_{|(c_{(r-p)})} \\ &= \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \sum_{u=0}^{t-p} \sum_{r=u+p}^t \binom{t-p}{r-p} \binom{r-p}{u} \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^j} \right)_{|(c_{(t-r)})} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial x^j}{\partial x^{\lambda}} \right)_{|c_{(r-p-u)}} v_{|c_{(u)}}^{\lambda} \\ &= \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \sum_{u=0}^{t-p} \binom{t-p}{u} (\delta_{\lambda}^{\mu})_{|(c_{(t-p-u)})} v_{|c_{(u)}}^{\lambda} \\ &= \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} v_{|c_{(t-p)}}^{\mu}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt.

Ganz analog haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{r=p}^s \binom{r}{p} T_{;j}^{(a_{(p)}b_{(r-p)})} dp_{b_{(r-p)}}^j &= \sum_{r=p}^s \sum_{t=r}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \frac{\bar{\partial} p_{c_{(t-p)}}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{b_{(r-p)}}^j} dp_{b_{(r-p)}}^j \\ &= \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} \sum_{r=p}^t \frac{\bar{\partial} p_{c_{(t-p)}}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{b_{(r-p)}}^j} dp_{b_{(r-p)}}^j = \sum_{t=p}^s \binom{t}{p} T_{;\mu}^{(a_{(p)}c_{(t-p)})} dp_{c_{(t-p)}}^{\mu}, \end{aligned}$$

somit gilt

**Satz 2.** Ist  $T$  ein Affinor, der von dem Flächenelemente  $s$ -ter Ordnung abhängt, so transformieren sich unter (1.4) die PFAFFschen Ausdrücke

$$(1.9) \quad \sum_{r=p}^s \binom{r}{p} T_{;j}^{(a_{(p)}b_{(r-p)})} dp_{b_{(r-p)}}^j \quad (p = 1, 2, \dots, s)$$

in derselben Weise wie  $T$ .

Bemerkung. Wenn  $T$  eine Invariante ist, so ist der Ausdruck (1.7) für  $p = 0$



$$\overset{s}{D}_j(T)v^j = \sum_{r=0}^s T_{:j}^{(b(r))} v^j_{/b(r)}$$

auch eine Invariante. Setzen wir darin ein mit einer Invariante  $\phi(u)$  multipliziertes  $v^j$  an Stelle von  $v^j$ , so können wir alle Ausdrücke (1.7) für die Invariante  $T$  aus Koeffizienten verschiedener Ableitungen von  $\phi$  herleiten. Somit ist (1.8) erwiesen. Die Ausdrücke (1.7) leiten sich dann aus  $\overset{s}{D}_j(T)v^j$  für einen beliebigen Affinor  $T$  ab.

Wie nach der Anwendung des KAWAGUCHISCHEN Satzes auf die verallgemeinerte Geometrie der "paths" ein Ableitungsverfahren von D. D. KOSAMBI ([18], [19]) sogleich hergestellt wird (KAWAGUCHI, [11]), wenden wir Satz 1 auf ein System der partiellen Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung

$$(1.10) \quad \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_m}} + H_{a_1 a_2 \dots a_m}^i \left( u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \dots, \frac{\partial^{m-1} x}{\partial u^{m-1}} \right) = 0$$

$$(H_{a(m)}^i = H_{(a(m))}^i) \quad (i = 1, 2, \dots, n; a_1, a_2, \dots, a_m = \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{K})$$

an und gewinnen damit ein ähnliches Verfahren. Dabei setzen wir voraus, dass die Funktionen  $H_{a(m)}^i$  von dem Flächenelemente  $(m-1)$ -ter Ordnung stetig differenzierbar sind. Das System (1.10) ist eine unmittelbare Verallgemeinerung des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen der "paths":

$$(1.11) \quad x^{(m)i} + \alpha^i(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) = 0 \quad \left( x^{(r)i} = \frac{d^r x^i}{dt^r} \right).$$

Da die linke Seite von (1.10) sich bei einer Koordinatentransformation wie ein kontravarianter Vektor verändert, so erhalten wir aus (1.7) für  $s = m$ ,  $p = m-1$  und

$$(1.12) \quad T_{c(m)}^i = p_{c(m)}^i + H_{c(m)}^i$$

die Ausdrücke

$$m \delta_{(c(m-1))}^{a(m-1)} v^i_{/c(m)} + H_{c(m); j}^i (a(m-1)) v^j,$$

woraus wir durch Überschiebung bezüglich  $a_1 = c_1, a_2 = c_2, \dots, a_{m-1} = c_{m-1}$  und Multiplikation mit  $\frac{(m-1)!}{(K+1)(K+2)\dots(K+m-1)}$  die folgende Ableitung definieren können:

$$(1.13) \quad \Delta_b v^i = v^i_{/b} + G_{bj}^i v^j,$$

wo

$$(1.14) \quad G_{bj}^i = \frac{(m-1)!}{(K+1)(K+2)\dots(K+m-1)} H_{a(m-1) b; j}^i \quad (a(m-1))$$

gesetzt sind. Offenbar ist die Ableitung  $\Delta_b v^i$  kovariant in bezug auf  $b$  unter linearen  $u$ -Transformationen von der Gestalt

$$(1.15) \quad u^\alpha = U_a^\alpha u^a + U^\alpha \quad (\alpha = 1', 2', \dots, K'),$$

da die Funktionen  $H_{c(m)}^i$  in bezug auf  $c_1, c_2, \dots, c_m$  kovariant sind.

4. Sätze über Systeme von PFAFFSchen Ausdrücken. In Satz 2 haben wir das System der PFAFFSchen Ausdrücke (1.9) betrachtet, welche sich bei Koordinatentransformation wie ein Vektor transformieren. Im allgemeinen, wenn die PFAFFSchen Ausdrücke

$$(1.16) \quad \sum_{r=0}^s \overset{r}{P} \cdot \overset{A}{i}^{a(r)} dp_{a(r)}^i \quad (A = 1, 2, \dots, N)$$

in den Veränderlichen  $x^i, p_{a_1}^i, \dots, p_{a(s)}^i$  sich unter (1.4) wie ein Affinor (mit einem Gewichte oder nicht) bezüglich  $A$  verändern:

$$\sum_{r=0}^s \overset{r}{P} \cdot \overset{A}{i}^{a(r)} dp_{a(r)}^i = P_{\mathfrak{A}}^A \sum_{r=0}^s \overset{r}{P} \cdot \overset{\mathfrak{A}}{\lambda}^{a(r)} dp_{a(r)}^\lambda,$$

so führen wir sogleich aus

$$(1.17) \quad \overset{r}{P} \cdot \overset{A}{i}^{a(r)} = P_{\mathfrak{A}}^A \sum_{t=r}^s \overset{t}{P} \cdot \overset{\mathfrak{A}}{\lambda}^{b(t)} \frac{\partial p_{b(t)}^\lambda}{\partial p_{a(r)}^i} \quad (r = 0, 1, \dots, s).$$

Dabei sind  $P_{\mathfrak{A}}^A$  von  $x^i$  und nicht von dem Flächenelemente abhängig. Aus dem Systeme der PFAFFSchen Ausdrücke (1.16) können wir ein System der Differentialausdrücke in den Veränderlichen  $x^i, \dots, p_{a(s)}^i$  und einem beliebigen Vektor herausstellen, dessen Transformationsformel dieselbe wie in (1.16) ist.

Satz 3. Das System der Differentialausdrücke

$$(1.18) \quad \overset{s}{P} \cdot \overset{A}{i}^{b(s)} dv^i + \sum_{r=0}^s \overset{r}{P} \cdot \overset{A}{i}^{a(r)} \overset{(b(s))}{j} v^j dp_{a(r)}^i,$$

im allgemeinen die Systeme ( $p = 0, 1, \dots, s-1$ )

$$(1.19) \quad \sum_{t=0}^p \binom{s-p+t}{t} \left[ \overset{s-p+t}{P} \cdot \overset{A}{i}^{b(s-p)c(t)} dv_{/c(t)}^i + \sum_{r=0}^s \overset{r}{P} \cdot \overset{A}{i}^{a(r)} \overset{(b(s-p)c(t))}{j} v_{/c(t)}^j dp_{a(r)}^i \right]$$

transformieren sich je wie ein Affinor bezüglich  $A$ .

Beweis. Wir führen aus wegen (1.17), (1.6 b)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=0}^p \binom{s-p+t}{t} P^{s-p+t} \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)c(t)} dv^i|_{c(t)} \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{u=s-p+t}^s \binom{s-p+t}{t} P^u \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)} \frac{\bar{\partial} p d_{(u)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{b_{(s-p)c(t)}^i}} dv^i|_{c(t)} \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{u=s-p+t}^s \binom{u}{u-s+p} P^u \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)d_{(u-s+p)}} \frac{\bar{\partial} p d_{(u-s+p)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c(t)}^i} dv^i|_{c(t)} \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{v=t}^p \binom{s-p+v}{v} P^{s-p+v} \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)d_{(v)}} \frac{\bar{\partial} p d_{(v)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c(t)}^i} dv^i|_{c(t)} \\
 &= \sum_{v=0}^p \binom{s-p+v}{v} P^{s-p+v} \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)d_{(v)}} \sum_{t=0}^v \frac{\bar{\partial} p d_{(v)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{c(t)}^i} dv^i|_{c(t)}, \\
 \\
 & \sum_{t=0}^p \sum_{r=0}^s \binom{s-p+t}{t} P^r \cdot \overset{\cdot}{A} a_{(r)}(b_{(s-p)c(t)}) v^j|_{c(t)} dp_{a(r)}^i \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{r=0}^s \binom{s-p+t}{t} \sum_{u=r}^s \left[ (P^u \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)}(b_{(s-p)c(t)})) \frac{\bar{\partial} p d_{(u)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i} \right. \\
 & \quad \left. + P^u \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)} \frac{\bar{\partial}^2 p d_{(u)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i \bar{\partial} p_{b_{(s-p)c(t)}^j}} \right] v^j|_{c(t)} dp_{a(r)}^i \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{u=0}^s \binom{s-p+t}{t} v^j|_{c(t)} dp_{d_{(u)}}^\lambda \sum_{r=s-p+t}^s P^r \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)}(f_{(r)}) \frac{\bar{\partial} p f_{(r)}^\mu}{\bar{\partial} p_{b_{(s-p)c(t)}^j}} \\
 & \quad + \sum_{t=0}^p \sum_{u=0}^s \sum_{r=0}^u \binom{s-p+t}{t} P^u \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)} \frac{\bar{\partial}^2 p d_{(u)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i \bar{\partial} p_{b_{(s-p)c(t)}^j}} v^j|_{c(t)} dp_{a(r)}^i \\
 &= \sum_{t=0}^p \sum_{u=0}^s \sum_{r=s-p+t}^s \binom{r}{s-p} P^r \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)}(b_{(s-p)} f_{(r-s+p)}) \frac{\bar{\partial} p f_{(r-s+p)}^\mu}{\bar{\partial} p_{c(t)}^j} v^j|_{c(t)} dp_{d_{(u)}}^\lambda \\
 & \quad + \sum_{t=0}^p \sum_{u=s-p}^s \sum_{r=0}^{u-s+p} \binom{u}{s-p} P^u \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)d_{(u-s+p)}} \frac{\bar{\partial}^2 p d_{(u-s+p)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i \bar{\partial} p_{c(t)}^j} v^j|_{c(t)} dp_{a(r)}^i \\
 &= \sum_{u=0}^s dp_{d_{(u)}}^\lambda \sum_{r=0}^p \sum_{t=0}^v \binom{s-p+v}{v} P^u \cdot \overset{\cdot}{A} d_{(u)}(b_{(s-p)} f_{(v)}) \frac{\bar{\partial} p f_{(v)}^\mu}{\bar{\partial} p_{c(t)}^j} v^j|_{c(t)} \\
 & \quad + \sum_{t=0}^p \sum_{v=0}^p \sum_{r=0}^v \binom{s-p+v}{v} P^{s-p+v} \cdot \overset{\cdot}{A} b_{(s-p)d_{(v)}} \frac{\bar{\partial}^2 p d_{(v)}^\lambda}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i \bar{\partial} p_{c(t)}^j} v^j|_{c(t)} dp_{a(r)}^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v=0}^p \binom{s-p+v}{v} P^{s-p+v} A_{\lambda}^{b(s-p)d(v)} \sum_{r=0}^v \sum_{t=0}^r \frac{\bar{\partial}^2 p_{d(v)}^{\lambda}}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i \bar{\partial} p_{c(t)}^j} v_{|c(t)}^j dp_{a(r)}^i \\
&\quad + \sum_{v=0}^p \binom{s-p+v}{v} \sum_{r=0}^s \bar{P} A_{\lambda}^{d(r)(b(s-p)f(v))} dp_{d(r)}^{\lambda} \sum_{t=0}^v \frac{\bar{\partial} p_{f(v)}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{c(t)}^j} v_{|c(t)}^j
\end{aligned}$$

und

$$v_{|f(v)}^{\mu} = \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^j} v^j \right)_{|f(v)} = \sum_{t=0}^v \frac{\bar{\partial} p_{f(v)}^{\mu}}{\bar{\partial} p_{c(t)}^j} v_{|c(t)}^j .$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Der folgende Satz bezieht sich sozusagen auf eine kovariante Ableitung von den PFAFFSchen Ausdrücken (1.16).

**Satz 4.** *Ist*

$$(1.20) \quad \Delta_b v^i = v_{|b}^i + \gamma_{bj}^i v^j$$

ein Ableitungsverfahren, so transformieren sich die PFAFFSchen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
(1.21) \quad \Delta_b P^i(d) &\equiv \sum_{r=0}^s \bar{P}^{ia(r)}_{\cdot k} dp_{a(r)b}^k \\
&\quad + \sum_{r=0}^s \left[ (\bar{P}^{ia(r)}_{\cdot k})_{|b} + \gamma_{bj}^i \bar{P}^{ja(r)}_{\cdot k} \right] dp_{a(r)}^k
\end{aligned}$$

wie ein Vektor bei Koordinatentransformation, wenn Gleiches für

$$(1.22) \quad P^i(d) \equiv \sum_{r=0}^s \bar{P}^{ia(r)}_{\cdot k} dp_{a(r)}^k$$

gilt.

**Beweis.** Bei der Transformation (1.4) erhalten wir wegen (1.17)

$$\begin{aligned}
(1.23) \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{\lambda}} \gamma_{b\mu}^{\lambda} &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{\mu}} \gamma_{bj}^i + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\mu} \partial x^{\omega}} p_b^{\omega} , \\
\sum_{r=0}^s \bar{P}^{ia(r)}_{\cdot k} dp_{a(r)b}^k &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{\lambda}} \sum_{t=0}^s \sum_{r=0}^t \bar{P}^{i\lambda d(t)}_{\cdot v} \frac{\bar{\partial} p_{d(t)}^v}{\bar{\partial} p_{a(r)}^k} dp_{a(r)b}^k , \\
\sum_{r=0}^s (\bar{P}^{ia(r)}_{\cdot k})_{|b} dp_{a(r)}^k &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{\lambda}} \sum_{r=0}^s (\bar{P}^{i\lambda a(r)}_{\cdot v})_{|b} dp_{a(r)}^v \\
&\quad + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{\mu} \partial x^{\omega}} p_b^{\omega} \sum_{r=0}^s \bar{P}^{i\lambda a(r)}_{\cdot v} dp_{a(r)}^v + \frac{\partial x^i}{\partial x^{\lambda}} \sum_{t=0}^s \sum_{r=0}^t \bar{P}^{i\lambda d(t)}_{\cdot v} \left( \frac{\bar{\partial} p_{d(t)}^v}{\bar{\partial} p_{a(r)}^k} \right)_{|b} dp_{a(r)}^k ,
\end{aligned}$$

somit  $\Delta_b P^i(d) = \frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda} \Delta_b P^\lambda(d)$ , da infolge (1.6 a) besteht:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^t \left( \frac{\bar{\partial} p_{a(r)}^{\check{d}(t)}}{\bar{\partial} p_{a(r)}^k} \right) / b \, dp_{a(r)}^k + \sum_{r=0}^t \frac{\bar{\partial} p_{d(r)}^{\check{d}(t)}}{\bar{\partial} p_{a(r)}^k} dp_{a(r)}^k b \\ &= \sum_{r=0}^t \binom{t}{r} \left[ \frac{\partial p_{d(r)}^{\check{d}(t-r) b}}{\partial x^k} dp_{d(r)}^k + \frac{\partial p_{d(r)}^{\check{d}(t-r)}}{\partial x^k} dp_{d(r)}^k b \right] \\ &= \frac{\partial p_{d(t)}^{\check{d}(t) b}}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial x^v}{\partial x^k} dp_{d(t) b}^k \\ & \quad + \sum_{r=1}^t \binom{t+1}{r} \left[ \frac{t+1-r}{t+1} \frac{\partial p_{d(r)}^{\check{d}(t-r)}}{\partial x^k} dp_{d(r)}^k + \frac{r}{t+1} \frac{\partial p_{d(r-1)}^{\check{d}(t-r+1)}}{\partial x^k} dp_{d(r-1) b}^k \right] \\ &= \sum_{r=0}^{t+1} \binom{t+1}{r} \frac{\partial p_{d(r)}^{\check{d}(t-r) b}}{\partial x^k} dp_{d(r)}^k = \sum_{r=0}^{t+1} \frac{\bar{\partial} p_{d(t) b}^{\check{d}(t)}}{\bar{\partial} p_{a(r)}^k} dp_{a(r)}^k = dp_{d(t) b}^{\check{d}(t)}. \end{aligned}$$

Q. E. D.

Dieser Satz kann in verschiedener Richtung verallgemeinert werden.

5. Operatoren von tensorieller Ableitung. Wenn ein Vektor  $v^i$  von dem Flächenelemente  $s$ -ter Ordnung abhängt, so sind die Grössen

$$(1.24a) \quad \bar{v}_j^{a(s)} v^i = v_{;j}^{i(a(s))}$$

die Bestimmungszahlen eines Affinors mit Indizes  $i, j$  ( $a$ : fest), und dagegen nicht die Grössen  $v_{;j}^{i(a(r))}$  ( $r < s$ ). Oft treten aber die Operatoren von der Gestalt

$$\sum_{r=q}^s U_{a(r)}^{Aj} v_{;j}^{i(a(r))} + \Gamma_q^{*A_i} v^k \quad (q = 0, 1, \dots, s-2 \text{ oder } s-1)$$

ein, die je tensorielle Ableitungen sind. Da die Funktionen  $\Gamma_q^{*A_i}$  für  $q \geq 1$  Bestimmungszahlen eines Affinors sind, lassen wir daraus das Glied  $\Gamma_q^{*A_i} v^k$  ( $q \geq 1$ ) weg und betrachten insbesondere die folgenden Operatoren

$$(1.24b) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{v}_j^{a(q)} v^i &= v_{;j}^{i(a(q))} - \sum_{r=q+1}^s V_{b(r)j}^k v_{;k}^{i(b(r))} \\ & \quad (q = 1, 2, \dots, s-2 \text{ oder } s-1), \\ \bar{v}_j v^i &= v_{;j}^i - \sum_{r=1}^s V_{b(r)j}^k v_{;k}^{i(b(r))} + \bar{\Gamma}_{kj}^{*i} v^k. \end{aligned} \right.$$

Unmittelbar können wir zeigen:

$$(1.25) \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} V_{c(t)^\mu}^\nu a_{(q)} = \sum_{r=q+1}^t \binom{t}{r} V_{(c(r)|j|}^{k a_{(q)}} \frac{\partial p_{c(t-r)}^\nu}{\partial x^k} - \binom{t}{q} \delta_{(c(q)}^{a_{(q)}} \frac{\partial p_{c(t-q)}^\nu}{\partial x^j} \\ (t = q+1, q+2, \dots, s),$$

$$(1.26) \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{*\lambda} = \bar{\Gamma}_{jk}^{*i} \frac{\partial x^j}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^k}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.$$

Sei  $\varepsilon \leq s - q$ . Multiplizieren wir (1.25) (für  $t + \varepsilon \leq s$ ) mit  $\frac{q!(t+\varepsilon)!}{t!(q+\varepsilon)!} \delta_{c_{t+1}}^{a_{q+1}} \delta_{c_{t+2}}^{a_{q+2}} \dots \delta_{c_{t+\varepsilon}}^{a_{q+\varepsilon}}$  und mischen dann die Indizes  $c_1, c_2, \dots, c_{t+\varepsilon}$  und die Indizes  $a_1, a_2, \dots, a_{q+\varepsilon}$ , so haben wir

$$(1.27) \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} V_{c(t+\varepsilon)^\mu}^{\nu a_{(q+\varepsilon)}} = \sum_{r=q+1}^t \binom{t+\varepsilon}{r+\varepsilon} V_{(c(r+\varepsilon)|j|}^{k a_{(q+\varepsilon)}} \frac{\partial p_{c(t-r)}^\nu}{\partial x^k} \\ - \binom{t+\varepsilon}{q+\varepsilon} \delta_{(c(q+\varepsilon)}^{a_{(q+\varepsilon)}} \frac{\partial p_{c(t-q)}^\nu}{\partial x^j} \quad (t = q+1, q+2, \dots, s-\varepsilon),$$

setzend

$$(1.28) \quad V_{c(t+\varepsilon)j}^{k a_{(q+\varepsilon)}} = \frac{q!(t+\varepsilon)!}{t!(q+\varepsilon)!} V_{(c(t)|j|}^k a_{(q)} \delta_{c(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)}.$$

Vergleichend (1.27) mit (1.25) ( $q+\varepsilon$  statt  $q$ ), erreichen wir

**Satz 5.** Sei ein Operator  $\bar{F}_j^{(q)} \nu^i$  ( $0 \leq q < s$ ) vorgegeben, so lassen sich die Operatoren  $\bar{F}_j^{(q+\varepsilon)} \nu^i$  ( $\varepsilon = 1, 2, \dots, s-q$ ) durch (1.28) definieren.

**Satz 6.** Aus dem Systeme der PFAFFschen Ausdrücke (1.16) lassen sich andere Systeme der PFAFFschen Ausdrücke bilden, wie folgt:

$$(1.29) \quad \sum_{r=0}^{s-\varepsilon} \binom{r+\varepsilon}{\varepsilon} P_{\varepsilon}^{Ab(\varepsilon)a(r)} dp_{a(r)}^i \quad (\varepsilon = 1, 2, \dots, s),$$

welche sich bei Koordinatentransformation mit festen  $b_{(\varepsilon)}$  wie ein Affinor transformieren.

In dem Falle  $K=1$  lassen sich diese Sätze gewissermassen umkehren. Z.B. aus  $V_{(t+\varepsilon)j}^{k(q+\varepsilon)}$  eines Operators  $\bar{F}_j^{(q+\varepsilon)} \nu^i$  werden die Funktionen  $V_{(t)j}^{k(q)}$  für  $t = q+1, q+2, \dots, s-\varepsilon$  durch

$$(1.30) \quad V_{(t)j}^{k(q)} = \frac{t!(q+\varepsilon)!}{q!(t+\varepsilon)!} V_{(t+\varepsilon)j}^{k(q+\varepsilon)}$$

gegeben. Da aber  $V_{(t)j}^{k(q)}$  für  $t = s-\varepsilon+1, \dots, s$  frei wählbar sind, ist  $\bar{F}_j^{(q)} \nu^i$  nicht ganz bestimmt.

Wenn  $A$  ein System der Funktionen, welche obere sowie untere Indizes besitzen, ist, so definieren wir wegen der Bequemlichkeit der Schreibweise dann auch rein formelhaft Operatoren von tensoriellen Ableitungen von  $A$  (wie (1.24 a, b)), indem wir das System  $A$  in bezug auf seine oberen bzw. unteren Indizes als kontra- bzw. kovariant ansehen. So gilt nach (1.23)

**Satz 7.** Sind  $\gamma_{ij}^a$  die Parameter einer kovarianten Ableitung (1.20), welche von dem Flächenelemente  $s$ -ter Ordnung abhängt, so sind  $\bar{\Gamma}_k^{a(q)\gamma_{ij}^a}$  für  $q = 2, 3, \dots, s$  in bezug auf  $i, j, k$  Affinoren, während aus  $\bar{\Gamma}_k^a \gamma_{ij}^a$  ein System der Übertragungsparameter durch Überschiebung bezüglich  $a, b$  entsteht:

$$(1.31) \quad \bar{\Gamma}_{jk}^{*i} = \frac{1}{K} \bar{\Gamma}_k^b \gamma_{bj}^i,$$

deren Transformationsformeln (ben (1.26) sind.

**6. Parametertransformation.** Invarianz des mehrfachen Integrals. Die bisherige Theorie, bei der die Parameter  $u^a$  festgehalten werden, bleibt gültig bei ihren linearen Transformationen wie (1.5) in dem Sinne, dass, wenn z.B. die vorgegebenen Systeme der Funktionen in bezug auf deren Indizes Affinoren sind, Gleiches für die durch die Formeln oder Sätze gegebenen Systeme der Funktionen gilt. Unter allgemeinen Transformationen von  $u^a$  wird dagegen der Sache ganz kompliziert. Wir möchten hier nur eine kleine Bemerkung über das Verhalten von den Bestimmungszahlen des Flächenelementes machen. Unter  $u^\alpha = u^\alpha(u^a)$  verhalten sich wie folgt:

$$(1.32) \quad \begin{cases} u^\alpha = u^\alpha(u^a), & p_\alpha^i = p_\alpha^a u_\alpha^a, & p_{\alpha\beta}^i = p_{\alpha\beta}^a u_\alpha^a u_\beta^b + p_\alpha^a u_{\alpha\beta}^b, \dots, \\ p_{\alpha(r)}^i = p_{a(r)}^i u_{\alpha_1}^{a_1} u_{\alpha_2}^{a_2} \dots u_{\alpha_r}^{a_r} + \dots, \dots \\ \left( u_{\alpha(r)}^a = u_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^a = \frac{\partial^r u^a}{\partial u_{\alpha_1} \partial u_{\alpha_2} \dots \partial u_{\alpha_r}} \right). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $u_{\beta(t)}^a$  bezüglich  $\beta(t)$  definieren wir den Operator  $\frac{\bar{\partial}}{\partial u_{\beta(t)}^a}$  durch  $\frac{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_n!}{t!} \frac{\partial}{\partial u_{\beta(t)}^a}$ , wenn die Indizes  $\beta(t)$  aus  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  gleichen Indizes bestehen. Danach besteht

$$\frac{\bar{\partial} u_{\alpha(r)}^a}{\partial u_{\beta(r)}^b} = \delta_b^a \delta_{\alpha(r)}^{\beta(r)}.$$

So gelten in (1.32)

$$(1.33) \quad \frac{\bar{\partial} p_{\alpha(r)}^i}{\bar{\partial} p_{\alpha(r-1)}^j} = \frac{r(r-1)}{2} \delta_j^i u_{\alpha_1}^{a_1} u_{\alpha_2}^{a_2} \dots u_{\alpha_{r-2}}^{a_{r-2}} u_{\alpha_{r-1}}^{a_{r-1}}$$

und

$$(1.34) \quad \left[ \frac{\bar{\partial} p_{\alpha(r)}^i}{\bar{\partial} u_{\beta(t)}^b} \right] = \binom{r}{t} \delta_{(\alpha(t))}^{\beta(t)} p_{\alpha(r-t)b}^i \quad (r \geq t),$$

wobei die Zeichen  $[G]$  den Wert von  $G$  für  $u_b^\alpha = \delta_b^\alpha$ ,  $u_{b(s)}^\alpha = 0$  ( $s \geq 2$ ) bedeutet.

Beweis. (1.33) leitet sich leicht ab. Wegen

$$p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r+1}}^i = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha_{r+1}}} p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}^i = \sum_{u=1}^r \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} u_{\gamma(u)}^a} p_{\alpha(r)}^i \cdot u_{\gamma(u)\alpha_{r+1}}^a + \sum_{u=1}^r \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} p_{b(u)}^j} p_{\alpha(r)}^i \cdot p_{b(u)\alpha_{r+1}}^c$$

wird der Beweis von (1.34) induktiv durchgeführt: z.B. für  $t > 1$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\bar{\partial} p_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r+1}}^i}{\bar{\partial} u_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_t}^b} \right] &= \left[ \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} u_{\gamma(t-1)}^b} p_{\alpha(r)}^i \right] \delta_{\gamma(t-1)\alpha_{r+1}}^{\beta(t)} \\ &\quad + \sum_{u=1}^r \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} p_{b(u)}^j} \left\{ \binom{r}{t} \delta_{(\alpha(t))}^{\beta(t)} p_{\alpha(r-t)b}^i \right\} \cdot p_{b(u)\alpha_{r+1}}^j \\ &= \binom{r}{t-1} \delta_{(\alpha(t-1))}^{\beta(t-1)} \delta_{\alpha_{r+1}}^{\beta(t)} p_{\alpha(r-t+1)b}^i + \binom{r}{t} \delta_{(\alpha(t))}^{\beta(t)} p_{\alpha(r-t)b}^i p_{\alpha_{r+1}}^j \\ &= \binom{r+1}{t} \delta_{(\alpha(t))}^{\beta(t)} p_{\alpha(r+1-t)b}^i. \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Als eine Anwendung von (1.34) betrachten wir das  $K$ -fache Integral

$$(1.35) \quad \iint \dots \int F(u^\alpha, x^i, p_{a(1)}^i, \dots, p_{a(m)}^i) du^1 du^2 \dots du^K,$$

welches sich über ein beliebiges  $K$ -dimensionales Flächenstück erstreckt (vgl. DE DONDER, [6]). Wenn der Wert des Integrals sich stets an dem betreffenden  $K$ -dimensionalen Flächenstück allein beteiligt und von der Wahl der Parameter  $u^\alpha$  unabhängig ist, so sehen wir auf die übliche Weise, dass ein  $K$ -dimensionaler Flächeninhalt sich von (1.35) definieren lässt. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass



$$F(u^\alpha, x^i, p_{\alpha(1)}^i, \dots, p_{\alpha(m)}^i) = \left| \frac{\partial u^b}{\partial u^\alpha} \right| F(u^\alpha, x^i, p_{\alpha(1)}^i, \dots, p_{\alpha(m)}^i)$$

identisch besteht. Differenzierend die letzte Identität nach  $u_{\beta(s)}^b$  ( $s = 0, 1, 2, \dots, m$ ) und setzend dann  $u_b^\alpha = \delta_b^\alpha$ ,  $u_{b(r)}^\alpha = 0$  ( $r \geq 2$ ), erhalten wir wegen (1.34) den bekannten Satz:

**Satz 8.** Das  $K$ -fache Integral (1.35) bleibt dann und nur dann invariant bei  $u$ -Transformationen, wenn die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(1.36) \quad \begin{cases} F_{u^\alpha} = 0, & \sum_{r=1}^m r p_{ba(r-1)}^i F_{;i}^{(ca(r-1))} = \delta_b^c F, \\ \sum_{r=s}^m \binom{r}{s} p_{ba(r-s)}^i F_{;i}^{(c(s)a(r-s))} = 0 & (m \geq s > 1)^{(1)}. \end{cases}$$

Für  $K = 1$  ist die Formel (1.36) als die ZERMELOSche wohlbekannt.

**7. Verallgemeinerte SYNGEsche Vektoren.** Ist  $F$  eine Invariante, welche von  $u^\alpha$  und dem  $K$ -dimensionalen Flächenelemente  $m$ -ter Ordnung abhängig ist, so sind  $n$  Grössen

$$(1.37) \quad E_i^0 = \sum_{s=0}^m (-1)^s (F_{;i}^{(b(s))})_{/b(s)}$$

die Bestimmungszahlen eines Vektors, der üblich mit den Namen EULER-LAGRANGE benannt wird (vgl. DE DONDER, [6]). Denn es ist

$$\begin{aligned} E_i^0 &= \sum_{s=0}^m (-1)^s \left( \sum_{t=s}^m F_{;i}^{(c(t))} \frac{\partial p_{c(t)}^\lambda}{\partial p_{b(s)}^i} \right)_{/b(s)} \\ &= \sum_{s=0}^m \sum_{t=s}^m (-1)^s \binom{t}{s} \left( F_{;i}^{(b(s)c(t-s))} \frac{\partial p_{c(t-s)}^\lambda}{\partial x^i} \right)_{/b(s)} \\ &= \sum_{t=0}^m \sum_{s=0}^t (-1)^s \binom{t}{s} \sum_{u=0}^s \binom{s}{u} (F_{;i}^{(b(t))})_{/b(u)} \left( \frac{\partial p_{b(t-s)}^\lambda}{\partial x^i} \right)_{/b(s-u)} \\ &= \sum_{t=0}^m (-1)^t \sum_{u=0}^t \binom{t}{u} (F_{;i}^{(b(t))})_{/b(u)} \sum_{s=u}^t (-1)^{t-s} \binom{t-u}{s-u} \frac{\partial p_{b(t-u)}^\lambda}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \sum_{t=0}^m (-1)^t (F_{;i}^{(b(t))})_{/b(t)} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} E_\lambda^0. \end{aligned}$$

(1) J. GÉHÉNIU, Sur la forme paramétrique d'une intégrale  $n$ -uple, Bull. Acad. Roy. Belg., Bd. 20 (1934), S. 1091-95. Vgl. auch TH. DE DONDER, [6], S. 53.

Wenn wir nach J. L. SYNGE ein mit einer Invariante  $\Phi(u)$  multipliziertes  $F^* = F\Phi$  an Stelle von  $F$  in (1.37) setzen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \overset{0}{E}_i^* &= \sum_{s=0}^m (-1)^s (F^{*(b(s))})_{/b(s)} = \sum_{s=0}^m (-1)^s (F^{(b(s))} \Phi)_{/b(s)} \\ &= \sum_{s=0}^m (-1)^s \sum_{r=0}^s \binom{s}{r} (F^{(b(s))})_{/(b(s-r))} \Phi_{/b(r)} \\ &= \sum_{r=0}^m \sum_{s=r}^m (-1)^s \binom{s}{r} (F^{(b(s))})_{/b(s-r)} \Phi_{/b(r)}, \end{aligned}$$

somit haben wir aus den Koeffizienten von  $\Phi_{/b(r)}$

$$(1.38) \quad \overset{r}{E}_i^{a(r)} = \sum_{s=r}^m (-1)^s \binom{s}{r} (F^{(a(r) b(s-r))})_{/b(s-r)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, m),$$

welche wir die verallgemeinerten SYNGESchen Vektoren nennen wollen. Sie sind offenbar nicht invariant bei  $u$ -Transformationen. Da nach (1.3)

$$\begin{aligned} \overset{r}{E}_i^{a(r)} p_b^i &= \sum_{s=r}^m (-1)^s \binom{s}{r} (F^{(a(r) b(s-r))})_{/b(s-r)} p_b^i \\ &= \sum_{s=r}^m (-1)^s \binom{s}{r} \sum_{t=0}^{s-r} (-1)^t \binom{s-r}{t} (p_b^i b^{(t)} F^{(a(r) b(s-r))})_{/b(s-r-t)} \\ &= \sum_{s=r}^m (-1)^s \binom{s}{r} \sum_{u=s-r}^0 (-1)^{s-r-u} \binom{s-r}{u} (p_b^i b^{(s-r-u)} F^{(a(r) b(s-r))})_{/b(u)} \\ &= (-1)^r \sum_{u=0}^{m-r} (-1)^u \binom{u+r}{r} \left( \sum_{s=u+r}^m \binom{s}{u+r} F^{(a(r) b(s-r))} p_b^i b^{(s-r-u)} \right)_{/b(u)} \end{aligned}$$

ist, so haben wir wegen Satz 8

**Satz 9.** Wenn das  $K$ -fache Integral (1.35) gegenüber  $u$ -Transformation invariant ist, so genügen die verallgemeinerten SYNGESchen Vektoren den folgenden Identitäten:

$$(1.39) \quad \overset{r}{E}_i^{a(r)} p_b^i = 0 \quad (r = 0, 2, 3, \dots, m),$$

$$\overset{1}{E}_i^a p_b^i = -\delta_b^a F.$$

## KAPITEL 2. GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNG EINES SYSTEMS DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

8. System der partiellen Differentialgleichungen. In diesem Kapitel möchten wir die geometrische Theorie, die gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen

$$(2.1) \quad x^\lambda = x^\lambda(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

( $u$ : fest) invariant ist, des schon hergestellten Systems der partiellen Differentialgleichungen  $m$ -ter Ordnung (1.10) oder

$$(2.2) \quad \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_m}} + H_{a_1 a_2 \dots a_m}^i \left( u, x, \frac{\partial x}{\partial u^{b_1}}, \dots, \frac{\partial^{m-1} x}{\partial u^{b_1} \dots \partial u^{b_{m-1}}} \right) = 0$$

behandeln. Dabei setzen wir voraus, dass die Funktionen  $H_{a(m)}^i$  notwendig vielmal differenzierbar sind. Da wir vorher keine Kenntnis haben, wieviele Lösungen das System (2.2) für  $K > 1$  gestattet, oder, ob überhaupt eine Lösung existiert, so können wir diese Theorie nicht wie die des Raumes der verallgemeinerten "K-spreads" benennen. Sie ist nichts anderes als die Invariantentheorie des Funktionensystems  $H_{a(m)}^i$ , dessen Transformationsregel bei (2.1)

$$(2.3) \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} H_{a(m)}^i = H_{a(m)}^\lambda + R_{a(m)}^\lambda(x^i, p_{a_1}^i, \dots, p_{a_{m-1}}^i)$$

ist.

Wenn das System (2.2) eine Lösung

$$(2.4) \quad x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^K),$$

deren funktionale Matrix  $\left( \frac{\partial x^i}{\partial u^a} \right)$  den höchsten Rang  $K$  hat, gestattet, so ist ihr Ort eine  $K$ -dimensionale Fläche in  $X_n$ . Und sodann können wir dem nach (2.4) berechneten Wertesysteme

$$u^a, x^i(u^a), p_{b(1)}^i(u^a), p_{b(2)}^i(u^a), \dots, p_{b(m-1)}^i(u^a), -H_{b(m)}^i(u^a)$$

ein einziges  $K$ -dimensionales Flächenelement  $m$ -ter Ordnung zuordnen, welches zu der Fläche (2.4) gehört, da das Parametersystem  $u^i$ ,

$u^{\dot{2}}, \dots, u^{\dot{k}}$  wegen (2.4) eindeutig fest bestimmt wird. Hingegen, wenn unter den Anfangsbedingungen für

$$(2.5) \quad u^a = u^a_0, \quad x^i = x^i_0, \quad p^i_{b(1)} = p^i_{b(1)0}, \quad \dots, \quad p^i_{b(m-1)} = p^i_{b(m-1)0}$$

keine Lösung von (2.2) existiert, so können wir durch ein Wertesystem  $u^a_0, x^i_0, p^i_{b(1)0}, \dots, -H^i_{b(m)0}$  nicht ein einziges Flächenelement  $m$ -ter Ordnung in Betracht ziehen, denn das Parametersystem  $u^1, \dots, u^k$  kann im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt werden. Trotz alledem ziehen wir im Folgenden die Mannigfaltigkeit  $F_n^{*(m-1)} = F_n^{(m-1)} \times u$ -Mannigfaltigkeit (topologisches Produkt) oder  $F_n^{(m-1)}$  in Betracht, je nachdem die Funktionen  $H^i_{a(m)}$  wirklich die Argumente  $u^a$  enthalten oder nicht. Dabei darf z.B.  $F_n^{*(m-1)}$  als der Inbegriff der Wertesysteme  $(x^i, p^i_{b(1)}, \dots, p^i_{b(m-1)})$  und nicht als die Mannigfaltigkeit von Flächenelementen gedeutet werden, insofern die  $u^a$  nicht in  $X_n$  irgendwie festgelegt werden; die Wertesysteme transformieren sich bei (2.1) wie (1.4) ( $s = m-1$ ). So beschäftigen wir uns mit der Untersuchung des Funktionensystems  $H^i_{a(m)}$  in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$ .

Die folgenden Beziehungen sind als die vollständigen Integrierbarkeitsbedingungen des Systems (2.2) wohlbekannt:

$$(2.6) \quad \mathfrak{D}_{[b_1 H^i_{b_2}] a(m-1)} = 0,$$

wobei wir die Verkürzung

$$\mathfrak{D}_b f = f_{;b} + \sum_{s=0}^{m-2} f_{;j}^{(c(s))} p^j_{c(s)b} - f_{;j}^{(c(m-1))} H^j_{c(m-1)b}$$

für die Funktion  $f$  in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  benutzen. Sind sie erfüllt, so existiert unter beliebigen Anfangsbedingungen (2.5) eine und nur eine Lösung von (2.2), oder durch jedes  $K$ -dimensionale Flächenelement  $(m-1)$ -ter Ordnung mit Anfangswerten  $u^a_0$  läuft stets eine einzige Integralfäche von (2.2). Die Integralfächen mit verschiedenen Anfangswerten  $u^a_0$ , aber mit denselben Anfangsbedingungen (2.5) sind verschieden oder koinzident, je nachdem die  $H^i_{a(m)}$   $u^a$  enthalten oder nicht.

9. Verallgemeinerte Übertragung in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$ . Da offenbar wegen (1.4)

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} p^j_{b(m-1)}} R^{\lambda}_{a(m)} = \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} p^j_{b(m-1)}} p^{\lambda}_{a(m)}$$

ist, so folgt aus (2.3) wegen (1.6 a)

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} H_{a(m); j}^i (b(m-1)) = H_{a(m); \mu}^\lambda (b(m-1)) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} + m \delta_{(a(m-1))}^{b(m-1)} \frac{\partial p_{a_m}^\lambda}{\partial x^j},$$

daraus entsteht durch Überschiebung in bezug auf  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{m-1} = b_{m-1}$

$$(2.7) \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} G_{a_m j}^i = G_{a_m \mu}^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^j \partial x^i} p_{a_m}^i$$

(vgl. (1.14)). Aus (2.7) erkennen wir wieder die tensorielle Eigenschaft des Operators  $\Delta_b$  (1.13). Ist der Vektor  $v^i$  in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  definiert, so können wir neu die Ableitung  $\Delta_b v^i$  so angeben:

$$(2.8) \quad \Delta_b v^i = \mathfrak{D}_b v^i + G_{b j}^i v^j,$$

indem wir  $\mathfrak{D}_b v^i$  an Stelle von  $v_{,b}^i$  in (1.13) setzen. In dem Falle, wenn (2.2) vollständig integrabel ist, nennen wir üblich  $\Delta_b v^i$  die kovariante Ableitung längs der Integralfläche von (2.2).

Aus (2.7) folgen weiter gemäss (1.6 b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} G_{b j; k}^i (b) &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \sum_{s=1}^{m-1} s G_{b \mu; \nu}^\lambda (bc_{(s-1)}) \frac{\partial p_{c_{(s-1)}}^\nu}{\partial x^k} + K \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^j \partial x^k}, \\ \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} G_{b j; k}^i (bc_{(r-1)}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \sum_{s=r}^{m-1} s G_{b \mu; \nu}^\lambda (bd_{(s-1)}) \frac{\partial p_{d_{(s-1)}}^\nu}{\partial p_{c_{(r-1)}}^k} \quad (m-1 \geq r > 1). \end{aligned}$$

Daher können wir das kovariante Differential  $Dv^i$  durch

$$(2.9) \quad \boxed{Dv^i = dv^i + \sum_{u=0}^{m-2} \Gamma_{j k}^{i c(u)} v^j dp_{c(u)}^k}$$

definieren, wobei

$$(2.10) \quad \boxed{\begin{aligned} \Gamma_{j k}^{i c(u)} &= \frac{u+1}{K} G_{b j; k}^i (bc_{(u)}) \\ &= \frac{(u+1) \cdot (m-1)!}{K(K+1) \dots (K+m-1)} H_{a(m-1) b; j}^i (a(m-1)) (bc_{(u)}) ; k \\ &\quad (m-2 \geq u \geq 0) \end{aligned}}$$

gesetzt sind;  $\Gamma_{jk}^{ic(u)}$  sind die Parameter unserer verallgemeinerten Übertragung genannt.

Danach möchten wir an Stelle von den Differentialen  $dp_{a(q)}^i$  ( $q = 1, 2, \dots, m-1$ ) Systeme der PFAFFSchen Ausdrücke mit festen  $a$ -Indizes setzen, welche sich bei (2.1) wie ein kontravarianter Vektor transformieren. Dies wird aber gleich mit Hilfe von Satz 2 erreicht. Setzen wir nämlich statt  $T$  in (1.9)  $T_{c(m)}^i$  in (1.12) und überschieben die sich so ergebenden Ausdrücke in bezug auf  $c_1 = a_1, c_2 = a_2, \dots, c_p = a_p$ , so erhalten wir

$$\binom{K+m-1}{p} dp_{a(m-p)}^i + \sum_{s=p}^{m-1} \binom{s}{p} H_{a(m-p)c(p); j}^i \binom{c(p)b(s-p)}{j} dp_{b(s-p)}^j,$$

somit sind die Ausdrücke

$$(2.11) \quad \delta p_{a(q)}^i = dp_{a(q)}^i + \sum_{r=0}^{q-1} Q_{a(q)j}^i b_j^{(r)} dp_{b(r)}^j$$

die gesuchten kontravarianten, wobei gesetzt sind:

$$(2.12) \quad Q_{a(q)j}^i b_j^{(r)} = \frac{(K+q-1)! (m-q+r)!}{(K+m-1)! r!} H_{a(q)c(m-q); j}^i \binom{c(m-q)b(r)}{j}$$

( $q = 1, 2, \dots, m-1; 0 \leq r < q$ ).

Bemerkung. In dem Falle des Raumes der verallgemeinerten "paths" ( $K=1$ ) werden das kovariante Differential  $Dv^i$  und die kontravarianten PFAFFSchen Ausdrücke so geschrieben:

$$(2.9a) \quad Dv^i = dv^i + \sum_{u=0}^{m-2} \Gamma_{jk}^i v^j dx^{(u)k},$$

$$(2.10a) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{u+1}{m} H_{(m-1)j; (u+1)k}^i \quad (m-2 \geq u \geq 0),$$

$$(2.11a) \quad \delta x^{(a)i} = dx^{(a)i} + \sum_{r=0}^{q-1} Q_{(a)j}^{i(r)} dx^{(r)j},$$

$$(2.12a) \quad Q_{(a)j}^{i(r)} = \frac{q! (m+r-q)!}{m! r!} H_{(m+r-q)j}^i$$

( $q = 1, 2, \dots, m-1; 0 \leq r < q$ ).

Die PFAFFSchen Ausdrücke  $\delta p_{a(m-1)}^i$  stehen mit dem kovarianten Differential  $Dv^i$  (2.9) in enger Beziehung. Setzen wir in der Tat  $\delta p_{c(m-1)}^i$  an Stelle von (1.16) in (1.18) von Satz 3 ( $s = m-1$ ) und über-

schieben die Ausdrücke bezüglich  $b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots, b_{m-1} = c_{m-1}$ , so erhalten wir

$$\frac{K(K+1)\dots(K+m-2)}{(m-1)!} dv^i + \sum_{r=0}^{m-2} Q_{c(m-1)j}^i \begin{matrix} b(r)c(m-1) \\ ; k \end{matrix} v^k dp_{b(r)}^j,$$

welche nach (2.10), (2.12) nichts anderes als  $\frac{K(K+1)\dots(K+m-2)}{(m-1)!} Dv^i$  sind.

Bemerkung. Setzen wir ferner  $\delta p_{d(q)}^i (q > 0)$  in (1.19) ( $s = m-1, p = m-q-1$ ) und überschieben dann die Ausdrücke bezüglich  $b_1 = d_1, b_2 = d_2, \dots, b_q = d_q$ , so haben wir

$$(2.9b) \quad \overset{q}{D}v^i = dv^i + \sum_{t=0}^{m-q-1} v^j / c(t) \sum_{r=0}^{q-1} \overset{q}{\Gamma}_{j k}^{i c(t) a(r)} dp_{a(r)}^k,$$

wobei gesetzt sind:

$$(2.10b) \quad \overset{q}{\Gamma}_{j k}^{i c(t) a(r)} = \frac{(K-1)! (q+t)! (m-q+r)!}{t! r! (K+m-1)!} H_{b(q)d(m-a); j ; k}^i \begin{matrix} (b(q)c(t)) \\ (d(m-a)a(r)) \end{matrix}.$$

Die Gestalt von  $\overset{q}{D}v^i (q < m-1)$  ist nicht im allgemeinen die von gewöhnlichem kovarianten Differential. Daraus können wir aber ein anderes kovariantes Differential als  $Dv^i$  herleiten, wenn wir z.B. die folgenden tensoriellen Ableitungsverfahren berücksichtigen:

$$(1.13a) \quad \Delta_{c(t)} v^i = v^i / c(t) + \sum_{u=0}^{t-1} G_{c(t)j}^i \begin{matrix} b(u) \\ v^j / b(u) \end{matrix} \quad (t = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$(1.14a) \quad G_{c(t)j}^i \begin{matrix} b(u) \\ v^j / b(u) \end{matrix} = \frac{(K+t-1)! (u+m-t)!}{(K+m-1)! u!} H_{a(m-t)c(t); j}^i \begin{matrix} (a(m-t)b(u)) \end{matrix},$$

welche wir aus (1.7) für  $s = m, p = m-t$  und  $T_{c(m)}^i$  erhalten. Die sich so ergebenden kovarianten Differential<sup>(1)</sup> ( $q = 1, 2, \dots, m-2$ ) sind auch von den Differentialquotienten von  $H_{a(m)}^i$  bis zur zweiten Ordnung abhängig.

10. Kovariante Ableitungen. Ist  $v^i$  ein Vektor in  $F_n^{*(m-1)}$  bzw.  $F_n^{(m-1)}$ , so definieren wir üblicherweise seine kovarianten Ableitungen verschiedener Arten  $\nabla_a v^i, \nabla_k^{\alpha(q)} v^i$  in  $F_n^{*(m-1)}$  bzw.  $\nabla_k^{\alpha(q)} v^i$  in  $F_n^{(m-1)}$  durch

(1) In der rechten Seite von (2.9b) setzen wir an Stelle von  $v^j / c(m-q-1)$  die Ausdrücke  $v^j / c(t) - \Delta_{c(t)} v^j$  aus (1.13a) ( $t = m-q-1$ ) und setzen sodann, wenn  $m-q-2 > 0$  ist, an Stelle von  $v^j / c(m-q-2)$  die Ausdrücke  $v^j / c(t) - \Delta_{c(t)} v^j$  ( $t = m-q-2$ ), usw.

$$Dv^i = \nabla_a v^i \cdot du^a + \sum_{q=0}^{m-1} \nabla_k^{a(q)} v^i \cdot \delta p_{a(q)}^k,$$

woraus wir die rekurrenten Formeln erhalten :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_a v^i = v^i_{;a}, \quad \nabla_k^{a(m-1)} v^i = v^i_{;k}^{a(m-1)}, \\ \nabla_k^{a(q)} v^i = v^i_{;k}^{a(q)} + \Gamma_{jk}^{ia(q)} v^j - \sum_{s=q+1}^{m-1} Q_{b(s)k}^j{}^{a(q)} \nabla_j^{b(s)} v^i \\ \quad (q = 0, 1, \dots, m-2); \end{array} \right.$$

in  $F_n^{(m-1)}$  kommt  $\nabla_a v^i$  nicht in Betracht. Setzen wir nach (2.11)

$$(2.14) \quad dp_{a(q)}^i = \delta p_{a(q)}^i - \sum_{r=0}^{q-1} Q_{a(q)j}^{b(r)} dp_{0(r)}^j = \delta p_{a(q)}^i - \sum_{r=0}^{q-1} R_{a(q)j}^i{}^{b(r)} \delta p_{b(r)}^j \\ (q = 0, 1, \dots, m-1),$$

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{a(q)j}^i{}^{b(q-1)} = Q_{a(q)j}^i{}^{b(q-1)}, \\ R_{a(q)j}^i{}^{b(r)} = Q_{a(q)j}^i{}^{b(r)} - \sum_{s=r+1}^{q-1} R_{a(q)k}^i{}^{c(s)} Q_{c(s)j}^k{}^{b(r)}, \end{array} \right.$$

so können wir die kovarianten Ableitungen aus (2.13) in der folgenden Gestalt schreiben :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla_a v^i = v^i_{;a}, \quad \nabla_k^{a(m-1)} v^i = v^i_{;k}^{a(m-1)}, \\ \nabla_k^{a(q)} v^i = v^i_{;k}^{a(q)} + \Gamma_{jk}^{ia(q)} v^j - \sum_{s=q+1}^{m-1} R_{b(s)k}^l{}^{a(q)} (v^i_{;l}^{b(s)} + \Gamma_{jl}^{ib(s)} v^j) \\ = v^i_{;k}^{a(q)} - \sum_{s=q+1}^{m-1} R_{b(s)k}^l{}^{a(q)} v^i_{;l}^{b(s)} + \Gamma_{jk}^{ia(q)} v^j \\ \quad (q = 0, 1, \dots, m-2), \end{array} \right.$$

wo

$$(2.17) \quad \Gamma_{jk}^{*ia(q)} = \Gamma_{jk}^{ia(q)} - \sum_{s=q+1}^{m-2} R_{b(s)k}^l{}^{a(q)} \Gamma_{jl}^{ib(s)}.$$

Die kovarianten Ableitungsverfahren (2.16) sind gebildet von den partiellen Differentialquotienten der Funktionen  $H_{a(m)}^i$  erster und zweiter Ordnung. Da  $\Gamma_{jk}^{*ia(q)} (q \geq 1)$  mit festen  $a(q)$  in bezug auf  $i, j, k$  ein Affinor ist, dürfen wir aber in  $F_n^{*(m-1)}$  bzw.  $F_n^{(m-1)}$  die folgenden neuen Verfahren zusammen mit den Affinoren  $\Gamma_{jk}^{*ia(q)} (q \geq 1)$  in Betracht ziehen (vgl. § 5) :



$$(2.18) \quad \begin{cases} \bar{v}_a v^i = v^i_{;a}, \quad \bar{v}_k v^i = v^i_{;k} - \sum_{s=1}^{m-1} R_{b(s)k}^l v^i_{;l}^{(b(s))} + \Gamma_{jk}^{*i} v^j, \\ \bar{v}_k^{a(q)} v^i = v^i_{;k}^{(a(q))} - \sum_{s=q+1}^{m-1} R_{b(s)k}^l v^i_{;l}^{(b(s))} \quad (q = 1, 2, \dots, m-1). \end{cases}$$

Wir können leicht die Strukturgrößen (Krümmungs- und Torsionsgrößen) von (2.16) berechnen (§ 12). Die Affinoren  $\Gamma_{jk}^{*i a(q)} (q \geq 1)$  sind je eine der Torsionsgrößen.

Andererseits bilden wir aus dem Vektor  $T_{a(m)}^i$  in (1.12) und den kontravarianten Ausdrücken  $\delta p_{a(m-1)}^i$  in (2.11) die Größen

$$(2.19) \quad \begin{aligned} K_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} b}^i &= T_{a_1 a_2 \dots a_{m-1} b}^i - \frac{\delta p_{a_1 a_2 \dots a_{m-1}}^i}{\partial u^b} \\ &= H_{a(m-1)b}^i - \frac{1}{K + m - 1} \sum_{r=0}^{m-2} (r+1) H_{a(m-1)c}^i \binom{cb(r)}{j} p_{b(r)b}^j, \end{aligned}$$

Größen mit festen  $a$ -Indizes, welche offenbar je ein Vektor (symmetrisch in  $a_{(m-1)}$ ) sind. Wir erreichen so den Reduktionssatz betreffend die Differentialkomitanten des Systems (2.2):

**Satz 10.** Sei ein System der partiellen Differentialgleichungen  $m (\geq 2)$ -ter Ordnung (2.2) gegeben. Dann bestimmt sich in  $F_n^{*(m-1)}$  (oder  $F_n^{(m-1)}$ , wenn  $H_{a(m)}^i$  alle von  $u^a$  unabhängig sind) eine verallgemeinerte Übertragung (2.9), (2.11) somit die zugehörigen kovarianten Ableitungsverfahren (2.16). Der Vektor  $K_{(a_1 a_2 \dots a_m)}^i$ , die Krümmungs- und Torsionsgrößen und deren kovariante Ableitungen bilden das vollständige System der Differentialkomitanten von (2.2) gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen und linearer Parametertransformationen (vgl. §§ 3,6).

Der Vektor  $K_{a(m)}^i$  verschwindet nicht im allgemeinen. Es gibt aber einen wichtigen Fall, wenn  $K_{a(m)}^i$  identisch verschwindet. Unter linearen Parametertransformationen von der Gestalt (1.15) bleibt die Gestalt des Systems (2.2) dann und nur dann invariant, wenn

$$\begin{aligned} H_{a(m)}^i(u^b, x^j, p_{0(1)}^j, \dots, p_{b(m-1)}^j) \\ = U_{a_1}^{\alpha_1} U_{a_2}^{\alpha_2} \dots U_{a_m}^{\alpha_m} H_{\alpha(m)}^i(u^b, x^j, p_{\beta(1)}^j, \dots, p_{\beta(m-1)}^j) \end{aligned}$$

für jede  $U_a^\alpha$ ,  $U^\alpha$  bestehen. Daraus können wir mit Hilfe von (1.34) ( $t = 1$ ) den folgenden Satz herleiten:

**Satz 11.** Das System der partiellen Differentialgleichungen (2.2) behält dann und nur dann seine Gestalt gegen beliebige lineare Parametertransformation unverändert, wenn

$$(2.20) \quad H_{a(m)}^i; b = 0, \quad \sum_{r=0}^{m-2} (r+1) H_{a(m); j}^i (c_{b(r)}^j) p_{b(r)}^j f = m \delta_{(a_1}^c H_{a(m-1)}^i) f$$

bestehen. Der Vektor  $K_{a(m)}^i$  verschwindet dann identisch.

In dem Falle  $K = 1$  ist das Verschwinden von  $K_{a(m)}^i$  mit den zweiten Gleichungen von (2.20) gleichbedeutend.

**11. Einige Geometrisches.** Sei ein Vektor  $v^i$  in einem Elemente  $(u^a, x^i, p_{b(1)}^i, \dots, p_{b(m-1)}^i)$  oder  $(x^i, p_{b(1)}^i, \dots, p_{b(m-1)}^i)$  von  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  gegeben. Entspricht eine  $K$ -dimensionale Fläche in  $X_n$  diesem Elemente für  $w^a = u^a$ :

$$x^i = x^i(u^a), \quad p_{b(1)}^i = \left( \frac{\partial x^i}{\partial w^{b_1}} \right)_{w=u}, \dots,$$

$$p_{b(m-1)}^i = \left( \frac{\partial^{m-1} x^i}{\partial w^{b_1} \partial w^{b_2} \dots \partial w^{b_{m-1}}} \right)_{w=u},$$

so können wir, unter Berücksichtigung der Ableitungsvorschrift  $\Delta_b$ , den Vektor  $v^i$  nach dem den Parameterwerten  $u^a + du^a$  entsprechenden Elemente der Fläche parallel verschieben:

$$(2.21) \quad d_{\Delta} v^i = -G_{b_j}^i v^j du^b.$$

Mittels  $D$ -Übertragung können wir dagegen die parallele Verschiebung des Vektors nach einem beliebigen benachbarten Element definieren, wobei beide benachbarte Elemente nicht notwendig einer  $K$ -dimensionalen Fläche angehören:

$$(2.22) \quad d_D v^i = - \sum_{u=0}^{m-2} \Gamma_{j k}^i c_{(u)}^k v^j dp_{c(u)}^k.$$

Der Einfachheit der geometrischen Erläuterung halber fassen wir  $F_n^{(m-1)}$  oder  $F_n^{*(m-1)}$  als die Mannigfaltigkeit von  $K$ -dimensionalen Flächenelementen in  $X_n$  oder die Produktmannigfaltigkeit von dieser mit  $u$ -Mannigfaltigkeit auf, als ob die Parameter  $u^a$  in irgendeiner Weise festgelegt seien. Wenn zwei einander benachbarte Flächenelemente in der Beziehung

$$(2.23) \quad dx^i = p_a^i du^a, \quad dp_{b(1)}^i = p_{b(1)a}^i du^a, \dots, \quad dp_{b(s)}^i = p_{b(s)a}^i du^a,$$

wo  $s < m-1$  ist, oder in der Beziehung

$$(2.24) \quad \begin{aligned} dx^i &= p_a^i du^a, \dots, & dp_{b(m-2)}^i &= p_{b(m-2)}^i adu^a, \\ dp_{b(m-1)}^i &= -H_{b(m-1)}^i adu^a \end{aligned}$$

stehen, so sagen wir, dass das eine bis zur  $s$ -ten Ordnung an dem anderen oder an einem verallgemeinerten "K-spread" entlang geht. Die beiden Beziehungen (2.23) und (2.24) sind bei (2.1) invariant, wenn auch das System (2.2) nicht integrabel ist. Da nun nach (1.14), (2.10), (2.19)

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{m-2} \Gamma_{j k}^{ic(u)} p_{c(u)f}^k &= \frac{(m-1)!}{K(K+1)\dots(K+m-1)} \sum_{u=0}^{m-2} (u+1) H_{a(m-1)b; j}^i \binom{(a(m-1))(bc(u))}{k} p_{c(u)f}^k \\ &= \frac{(m-1)!}{K(K+1)\dots(K+m-1)} \left[ (K+m-1) (H_{a(m-1)f}^i - K_{a(m-1)f}^i) \binom{(a(m-1))}{j} \right. \\ &\quad \left. - (m-1) H_{c(m-2)bf; j}^i \binom{(bc(m-2))}{j} \right] \\ &= G_{fj}^i - \frac{(m-1)!}{K(K+1)\dots(K+m-2)} K_{a(m-1)f; j}^i \binom{(a(m-1))}{j} \end{aligned}$$

ist, so besteht nach (2.9) längs des betreffenden Elementes (bis zur  $(m-2)$ -ten Ordnung)

$$(2.25) \quad Dv^i = \Delta_f v^i \cdot du^f - \frac{(m-1)!}{K(K+1)\dots(K+m-2)} K_{a(m-1)f; j}^i \binom{(a(m-1))}{j} v^j du^f \quad (1)$$

für das Vektorfeld  $v^i$ , somit ist auch bei Parallelverschiebung

$$(2.26) \quad d_D v^i - d_\Delta v^i = \frac{(m-1)!}{K(K+1)\dots(K+m-2)} K_{a(m-1)f; j}^i \binom{(a(m-1))}{j} v^j du^f.$$

**Satz 12.** Wenn  $K_{a(m-1)f}^i = 0$  ist, z.B. wenn das System (2.2) sich unter homogenen linearen Parametertransformationen invariant verhält, so stimmt das kovariante Differential  $Dv^i$  längs des Flächenelementes mit dem kovarianten Differential  $\Delta_f v^i \cdot du^f$  überein.

Demnächst kann man aus den Systemen der PFAFFSchen Ausdrücke  $\delta p_{b(s)}^i$  viele geometrischen Tatsachen in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  herauslesen. Die Rolle, welche diese Systeme in gegenwärtiger Theorie spielen, ist

(1) Dabei ist gemeint:  $\Delta_f v^i \cdot du^f = dv^i + G_{fj}^i v^j du^f$ .

aber ganz dieselbe wie die der Grundübertragungen in der KAWAGUCHI-schen Theorie des verallgemeinerten Raumes ([9], [10]); die  $\delta p_{b(s)}^i$  sind nicht von dem Flächenelemente  $s$ -ter Ordnung gebildet, sondern in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  definiert. Es gibt noch einen weiteren Grund dafür, dass wir sagen dürfen, die Systeme definieren die *Grundübertragungen* in  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$ . Da  $\delta p_{b(s)}^i$  mit festem  $b(s)$  kontravariant ist, so geben jede der Gleichungen  $\delta p_{b(1)}^i = 0, \delta p_{b(2)}^i = 0, \dots, \delta p_{b(m-1)}^i = 0$  das invariante Zueinanderstehen zweier einander benachbarten Flächenelemente, insbesondere, wenn alle  $\delta p_{b(s)}^i = 0$  ( $s \geq 1$ ) oder im allgemeinen

$$(2.27) \quad \delta p_{b(s)}^i = 0 \quad \text{für} \quad r \geq s \geq q$$

( $m-1 \geq r, q \geq 1$ ) sind, so können wir das Flächenelement  $(u^\alpha, x^i, \dots, p_{b(m-1)}^i)$  mit dem in der Richtung  $dx^i, \dots, dp_{b(q-1)}^i$  benachbarten  $(u^\alpha + du^\alpha, x^i + dx^i, \dots, p_{b(m-1)}^i + dp_{b(m-1)}^i)$  ( $r, q$ )-parallel nennen. Dann entstehen nach (2.14)

$$(2.28) \quad dp_{a(s)}^i = - \sum_{t=0}^{q-1} R_{a(s)j}^{i \quad b(t)} \delta p_{b(t)}^j \quad (r \geq s \geq q);$$

die Richtung  $dx^i, \dots, dp_{b(q-1)}^i$  mag bis zur gewissen Ordnung an dem Flächenelemente entlang gehen. Wenn nun eine  $K$ -dimensionale Fläche in  $X_n$  vorliegt und eins ihrer Flächenelemente  $(m-1)$ -ter Ordnung längs der Fläche  $(m-1, m-1)$ -parallel ist, so ist nach (2.19)

$$(2.29) \quad p_{a(m-1)b}^i + H_{a(m-1)b}^i = K_{a(m-1)b}^i.$$

Somit gilt

**Satz 13.** *In dem Raume, für welchen die fundamentalen Vektoren  $K_{a(m)}^i$  verschwinden, ist jede Integralfläche des Systems (2.2) als eine Untermannigfaltigkeit von  $F_n^{*(m-1)}$  oder  $F_n^{(m-1)}$  längs derselben  $(m-1, m-1)$ -parallel, d.h. verschiebt man eins ihrer Flächenelemente  $(m-1)$ -ter Ordnung längs desselben mit sich  $(m-1, m-1)$ -parallel, so entsteht die Integralfläche.*

**12. Krümmungs- und Torsionsgrößen.** Man berechnet leicht die folgenden Formeln, woraus die Krümmungs- und Torsionsgrößen unserer Übertragung hervortreten:

$$(2.30a) \quad 2[\nabla_a \nabla_b] v^i = 0, \quad (1)$$

---

(1)  $2[\nabla \nabla'] = \nabla \nabla' - \nabla' \nabla.$

$$(2.30b) \quad 2[\Gamma_k^{a(q)} \Gamma_b] v^i = -R_{k b j}^{a(q) \cdot j} v^j + 2 \sum_{s=q+1}^{m-1} S_{k b c(s)}^{a(q) \cdot j} \Gamma_j^{c(s)} v^i,$$

$$(2.30c) \quad 2[\Gamma_k^{a(q)} \Gamma_l^{b(r)}] v^i = -R_{k l j}^{a(q) b(r) \cdot j} v^j + 2 \sum_{s=q}^{m-1} S_{k l c(s)}^{a(q) b(r) j} \Gamma_j^{c(s)} v^i$$

( $0 \leq q \leq r \leq m-1$ ), und

$$(2.31a) \quad 2S_{k b c(s)}^{a(q) \cdot j} = R_{c(s) k ; b}^j a(q) + \sum_{u=q+1}^{s-1} Q_{c(s) l}^j d(u) R_{d(u) k ; b}^l a(q) \quad (q+1 \leq s),$$

$$(2.31b) \quad 2S_{k l c(q)}^{a(q) b(q) j} = \delta_{c(q)}^{a(q)} \Gamma_{k l}^{*j b(q)} - \delta_{c(q)}^{b(q)} \Gamma_{l k}^{*j a(q)},$$

$$(2.31c) \quad 2S_{k l c(q)}^{a(q) b(r) j} = \delta_{c(q)}^{a(q)} \Gamma_{k l}^{*j b(r)} \quad (q < r),$$

$$(2.31d) \quad 2S_{k l c(s)}^{a(q) b(r) j} = \bar{v}_l^{b(r)} R_{c(s) k}^j a(q) + \sum_{u=q+1}^{s-1} Q_{c(s) h}^j d(u) \bar{v}_l^{b(r)} R_{d(u) k}^h a(q) \quad (q < s < r),$$

$$(2.31e) \quad 2S_{k l c(r)}^{a(q) b(r) j} = -\delta_{c(r)}^{b(r)} \Gamma_{l k}^{*j a(q)} + \bar{v}_l^{b(r)} R_{c(r) k}^j a(q) + \sum_{u=q+1}^{s-1} Q_{c(r) h}^j d(u) \bar{v}_l^{b(r)} R_{d(u) k}^h a(q) \quad (q < r),$$

$$(2.31f) \quad 2S_{k l c(s)}^{a(q) b(r) j} = \bar{v}_l^{b(r)} R_{c(s) k}^j a(q) - \bar{v}_k^{a(q)} R_{c(s) l}^j b(r) + \sum_{u=q+1}^{s-1} Q_{c(s) h}^j d(u) \bar{v}_l^{b(r)} R_{d(u) k}^h a(q) - \sum_{u=r+1}^{s-1} Q_{c(s) h}^j d(u) \bar{v}_k^{a(q)} R_{d(u) l}^h b(r) \quad (q \leq r < s);$$

$$(2.32a) \quad R_{k b j}^{a(q) \cdot i} = \Gamma_{j k ; b}^{*i a(q)} + \sum_{s=q+1}^{m-1} \Gamma_{j l}^{i c(s)} R_{c(s) k ; b}^l a(q),$$

$$(2.32b) \quad R_{k l j}^{a(q) b(r) \cdot i} = \bar{v}_l^{b(r)} \Gamma_{j k}^{*i a(q)} - \bar{v}_k^{a(q)} \Gamma_{j l}^{*i b(r)} + \Gamma_{j k}^{*h a(q)} \Gamma_{h l}^{*i b(r)} - \Gamma_{j l}^{*h b(r)} \Gamma_{h k}^{*i a(q)} + 2 \sum_{s=q+1}^{m-1} \Gamma_{j h}^{i c(s)} S_{k l c(s)}^{a(q) b(r) h} \quad (q \leq r).$$

Die Strukturgrößen ergeben sich bekanntlich auch nach paralleler Verschiebung beliebiges Vektors um einen infinitesimalen Weg und aus anderen geometrischen Betrachtungen, was wir hier übergehen. In  $F_n^{(m-1)}$  treten die Größen  $S_{k b c(s)}^{a(q) \cdot j}$ ,  $R_{k b j}^{a(q) \cdot i}$  nicht auf. Wird in (2.30),

(1) Unter einer Summe  $\sum_{u=a}^b$  für  $a > b$  versteht man, dass die Summe nicht eintritt.

(2.31), (2.32)  $\Gamma_{jk}^{*ia(q)} (q \geq 1) = 0$  gesetzt, so entstehen die Formeln der  $\bar{V}$ -Operatoren in (2.18).

Für die so gefundenen Krümmungs- sowie Torsionsgrößen werden die sogenannten BIANCHISCHEN Identitäten nach (2.30) aufgefunden:

$$(2.33a) \quad \nabla_{[b} R_{|k|c]j}^{a(q) \cdot \cdot i} + 2 \sum_{s=q+1}^{m-1} S_{k[b|c(s)}^{a(q) \cdot h} R_{h|c]j}^{c(s) \cdot \cdot i} = 0,$$

$$(2.33b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(q)} R_{l c j}^{b(r) \cdot \cdot i} - \nabla_l^{b(r)} R_{k c j}^{a(q) \cdot \cdot i} + \nabla_c R_{k l j}^{a(q)b(r) \cdot \cdot i} \\ & = 2 \sum_{s=q+1}^{m-1} S_{k c c(s)}^{a(q) \cdot h} R_{l h j}^{b(r)c(s) \cdot \cdot i} - 2 \sum_{s=r+1}^{m-1} S_{l c c(s)}^{b(r) \cdot h} R_{k h j}^{a(q)c(s) \cdot \cdot i} \\ & \quad + 2 \sum_{s=q}^{m-1} S_{k l c(s)}^{a(q)b(r)h} R_{h c j}^{c(s) \cdot \cdot i} \quad (q \leq r), \end{aligned} \right.$$

$$(2.33c) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(q)} R_{l h j}^{b(r)c(s) \cdot \cdot i} + \nabla_l^{b(r)} R_{h k j}^{c(s)a(q) \cdot \cdot i} + \nabla_h^{c(s)} R_{k l j}^{a(q)b(r) \cdot \cdot i} \\ & \quad + 2 \sum_{u=r}^{m-1} S_{l h d(u)}^{b(r)c(s)p} R_{k p j}^{a(q)d(u) \cdot \cdot i} + 2 \sum_{u=q}^{m-1} S_{h k d(u)}^{c(s)a(q)p} R_{l p j}^{b(r)d(u) \cdot \cdot i} \\ & \quad + 2 \sum_{u=q}^{m-1} S_{k l d(u)}^{a(q)b(r)p} R_{h p j}^{c(s)d(u) \cdot \cdot i} = 0 \quad (q \leq r \leq s); \end{aligned} \right.$$

$$(2.34a) \quad \nabla_{[b} S_{|k|c]c(s)}^{a(q) \cdot j} + 2 \sum_{u=q}^{s-1} S_{k[b|d(u)}^{a(q) \cdot h} S_{h|c]c(s)}^{d(u) \cdot j} = 0,$$

$$(2.34b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nabla_c S_{k l c(q)}^{a(q)b(r)j} + 2 \sum_{u=r+1}^{m-1} S_{l c d(u)}^{b(r) \cdot h} S_{k h c(q)}^{a(q)d(u)j} - \frac{1}{2} \delta_{c(q)}^{a(q)} R_{l c k}^{b(r) \cdot \cdot j} \\ & = 2 \sum_{u=q+1}^{m-1} S_{k c d(u)}^{a(q) \cdot h} S_{l h c(q)}^{b(r)d(u)j} - \frac{1}{2} \delta_{c(q)}^{b(r)} R_{k c l}^{a(q) \cdot \cdot j} \quad \text{für } r = q \\ & = 0 \quad \text{für } r > q, \end{aligned} \right.$$

$$(2.34c) \quad \left\{ \begin{aligned} & \nabla_c S_{k l c(s)}^{a(q)b(r)j} - \nabla_l^{b(r)} S_{k c c(s)}^{a(q) \cdot j} + 2 \sum_{u=r+1}^{m-1} S_{l c d(u)}^{b(r) \cdot h} S_{k h c(s)}^{a(q)d(u)j} \\ & \quad - 2 \sum_{u=q}^{s-1} S_{k l d(u)}^{a(q)b(r)h} S_{h c c(s)}^{d(u) \cdot j} \\ & = 2 \sum_{u=q+1}^s S_{k c d(u)}^{a(q) \cdot h} S_{l h c(s)}^{b(r)d(u)j} \quad \text{für } q < s < r \\ & = 2 \sum_{u=q+1}^{m-1} S_{k c d(u)}^{a(q) \cdot h} S_{l h c(r)}^{b(r)d(u)j} - \frac{1}{2} \delta_{c(r)}^{b(r)} R_{k c l}^{a(q) \cdot \cdot j} \\ & \quad \text{für } q < s = r, \end{aligned} \right.$$

$$(2.34d) \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(a)} S_l^{b(r)} \cdot j_{c c(s)} - \nabla_l^{b(r)} S_k^{a(a)} \cdot j_{c c(s)} + \nabla_c S_k^{a(a)b(r)} j_{l c(s)} \\ & + 2 \sum_{u=r+1}^{m-1} S_l^{b(r)} \cdot h_{c d(u)} S_k^{a(a)d(u)} j_{l c(s)} - 2 \sum_{u=q+1}^{m-1} S_k^{a(a)} \cdot h_{c d(u)} S_l^{b(r)d(u)} j_{l c(s)} \\ & - 2 \sum_{u=q}^{s-1} S_k^{a(a)b(r)} h_{l d(u)} S_h^{d(u)} \cdot j_{c c(s)} = 0 \quad (q \leq r < s), \end{aligned} \right.$$

$$(2.34e) \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(a)} S_l^{b(a)c(s)} j_{h d(a)} + \nabla_l^{b(a)} S_h^{c(s)a(a)} j_{k d(a)} + \nabla_h^{c(s)} S_k^{a(a)b(a)} j_{l d(a)} \\ & + 2 \sum_{v=q}^{m-1} (S_l^{b(a)c(s)} p_{e(v)} S_k^{a(a)e(v)} j_{p d(a)} + S_h^{c(s)a(a)} p_{e(v)} S_l^{b(a)e(v)} j_{p d(a)}) \\ & - \frac{1}{2} \delta_{d(a)}^{a(a)} R_{l h k}^{b(a)c(s)} \cdot j - \frac{1}{2} \delta_{d(a)}^{b(a)} R_{h k l}^{c(s)a(a)} \cdot j \\ & = -2 \sum_{v=q}^{m-1} S_k^{a(a)b(a)} p_{e(v)} S_h^{c(a)e(v)} j_{p d(a)} + \frac{1}{2} \delta_{d(a)}^{c(a)} R_{k l h}^{a(a)b(a)} \cdot j \\ & \qquad \qquad \qquad \text{für } s = q \\ & = -2 S_k^{a(a)b(a)} p_{e(a)} S_h^{c(a)e(a)} j_{p d(a)} \quad \text{für } q < s, \end{aligned} \right.$$

$$(2.34f) \left\{ \begin{aligned} & \nabla_l^{b(r)} S_h^{c(s)a(a)} j_{k d(u)} + \nabla_h^{c(s)} S_k^{a(a)b(r)} j_{l d(u)} + 2 \sum_{v=r}^{m-1} S_l^{b(r)c(s)} p_{e(v)} S_k^{a(a)e(v)} j_{p d(u)} \\ & + 2 \sum_{v=q}^m (S_h^{c(s)a(a)} p_{e(v)} S_l^{b(r)e(v)} j_{p d(u)} + S_k^{a(a)b(r)} p_{e(v)} S_h^{c(s)e(v)} j_{p d(u)}) \\ & = 0 \quad \text{für } q < u < r \leq s \\ & = \frac{1}{2} \delta_{d(a)}^{a(a)} R_{l h k}^{b(r)c(s)} \cdot j \quad \text{für } q = u < r \leq s, \end{aligned} \right.$$

$$(2.34g) \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(a)} S_l^{b(r)c(s)} j_{h d(u)} + \nabla_l^{b(r)} S_h^{c(s)a(a)} j_{k d(u)} + \nabla_h^{c(s)} S_k^{a(a)b(r)} j_{l d(u)} \\ & + 2 \sum_{u=r}^{m-1} S_l^{b(r)c(s)} p_{e(v)} S_k^{a(a)e(v)} j_{p d(u)} + 2 \sum_{v=q}^{m-1} S_h^{c(s)a(a)} p_{e(v)} S_l^{b(r)e(v)} j_{p d(u)} \\ & = -2 \sum_{v=q}^{m-1} S_k^{a(a)b(r)} p_{e(v)} S_h^{c(r)e(v)} j_{p d(r)} + \frac{1}{2} \delta_{d(r)}^{b(r)} R_{h k l}^{c(r)a(a)} \cdot j \\ & + \frac{1}{2} \delta_{d(r)}^{c(r)} R_{k l h}^{a(a)b(r)} \cdot j \quad \text{für } q < r = u = s \\ & = -2 \sum_{v=q}^r S_k^{a(a)b(r)} p_{e(v)} S_h^{c(s)e(v)} j_{p d(r)} + \frac{1}{2} \delta_{d(r)}^{b(r)} R_{h k l}^{c(s)a(a)} \cdot j \\ & \qquad \qquad \qquad \text{für } q < r = u < s \\ & = -2 \sum_{v=q}^u S_k^{a(a)b(r)} p_{e(v)} S_h^{c(s)e(v)} j_{p d(u)} \quad \text{für } q \leq r < u < s, \end{aligned} \right.$$

$$(2.34h) \left\{ \begin{aligned} & \nabla_k^{a(q)} S_{l h d(u)}^{b(r)c(s)j} + \nabla_l^{b(r)} S_{h k d(u)}^{c(s)a(q)j} + \nabla_h^{c(s)} S_{k l d(u)}^{a(q)b(r)j} \\ & + 2 \sum_{v=r}^{m-1} S_{l h e(v)}^{b(r)c(s)p} S_{k p d(u)}^{a(q)e(v)j} \\ & + 2 \sum_{v=q}^{m-1} (S_{h k e(v)}^{c(s)a(q)p} S_{l p d(u)}^{b(r)e(v)j} + S_{k l e(v)}^{a(q)b(r)p} S_{h p d(u)}^{c(s)e(v)j}) \\ & = \frac{1}{2} \delta_{d(s)}^{c(s)} R_{k l h}^{a(q)b(r)j} \quad \text{für } q < r < s = u \\ & = 0 \quad \text{für } q \leq r \leq s < u. \end{aligned} \right.$$

13. Methode von D. D. KOSAMBI. In dem Falle des Systems der Differentialgleichungen (1.11) hat D. D. KOSAMBI eine Reihe von kovarianten Ableitungen hergeleitet ([19]), mit deren Hilfe ein fundamentales Studium des Systems möglich ist. Wir können seine Methode für unser System (2.2) verallgemeinern. Obgleich die Behandlung, die wir nun erzählen wollen, etwas kompliziert ist und noch der Differenzierbarkeit von  $H_{a(m)}^i$  bis zur höheren Ordnung bedarf, scheint es auch möglich, sie in anderen Problemen durch kleine Umgestaltung zu benutzen (vgl. § 15). Da

$$(2.35a) \quad \nabla_k^{K a(m-1)} v^i = v^i \underset{k}{;}^{a(m-1)}$$

eine tensorielle Ableitung ist, so können wir eine neue Ableitung aus  $[\nabla_k^{K a(m-1)} \Delta_b] v^i$  durch Weglassung von  $\nabla_k^{K a(m-1)} G_{bj}^i \cdot v^j$  ( $m > 2$ ), das ein Affinor ist, und durch Überschiebung bezüglich  $a_{m-1} = b$  definieren:

$$(2.35b) \quad \begin{aligned} \nabla_k^{K a(m-2)} v^i &= \frac{m-1}{K+m-2} \left( 2 [\nabla_k^{K a(m-2)d} \Delta_d] v^i - \nabla_k^{K a(m-2)d} G_{dj}^i \cdot v^j \right) \\ &= v^i \underset{k}{;}^{a(m-2)} - S_{c(m-1)k}^l \underset{k}{;}^{a(m-2)} \nabla_l^{K c(m-1)} v^i, \end{aligned}$$

wo

$$(2.36a) \quad S_{c(m-1)k}^l \underset{k}{;}^{a(m-2)} = \frac{m-1}{K+m-2} \left[ \nabla_k^{K a(m-2)d} H_{c(m-1)d}^l - \delta_{(c(m-2))}^{a(m-2)} G_{c(m-1)k}^l \right]$$

ist. Dabei beachten wir

$$(2.37a) \quad \begin{aligned} 2 [\nabla_k^{K a(m-1)} \Delta_b] v^i &= \delta_b^{a(m-1)} \nabla_k^{K a(m-2)} v^i - U_{c(m-1)k}^l \underset{k}{;}^{a(m-1)} \nabla_l^{K c(m-1)} v^i \\ &\quad + \nabla_k^{K a(m-1)} G_{bi}^j \cdot v^j, \end{aligned}$$



$$(2.36b) \quad U_{c(m-1)k}^l \overset{a(m-1)}{b} = \overset{K}{\nabla}_k^{a(m-1)} H_{c(m-1)b}^l - \delta_{c(m-1)}^{a(m-1)} G_{bk}^l \\ - \frac{m-1}{K+m-2} \left[ \overset{K}{\nabla}_k^{d(a(m-2))} H_{c(m-1)d}^{ll} - \delta_{(c(m-2))}^{(a(m-2))} G_{c(m-1)k}^{ll} \right] \delta_b^{a(m-1)}, \\ (U_{c(m-1)k}^l \overset{a(m-2)}{d} = 0).$$

Nun induktiv erhalten wir:

$$(2.35c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{K}{\nabla}_k^{a(r)} v^i = v^i_{;k}^{a(r)} - \sum_{s=r+1}^{m-1} S_{c(s)k}^l \overset{a(r)}{c(s)} \overset{K}{\nabla}_l^{c(s)} v^i \quad (m-1 \geq r \geq 1), \\ \overset{K}{\nabla}_k v^i = v^i_{;k} - \sum_{s=1}^{m-1} S_{c(s)k}^l \overset{K}{\nabla}_l^{c(s)} v^i + \overset{K}{\Gamma}_{jk}^{*i} v^j; \end{array} \right.$$

$$(2.37b) \quad 2 \left[ \overset{K}{\nabla}_k^{a(r)} \Delta_b \right] v^i = \delta_b^{(a(r)} \overset{K}{\nabla}_k^{a(r-1))} v^i - \sum_{s=r}^{m-1} U_{c(s)kb}^l \overset{a(r)}{c(s)} \overset{K}{\nabla}_l^{c(s)} v^i \\ + (1 - \delta_r^1) \overset{K}{\nabla}_k^{a(r)} G_{bj}^i \cdot v^j \quad (r \geq 1);$$

damit bestehen die folgenden Formeln

$$(2.36c) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{c(s)k}^l \overset{(a)}{\delta}_b^{a(q+1)} + U_{c(s)kb}^l \overset{a(q+1)}{c(s)} = S_{bc(q+1)k}^l \overset{a(q+1)}{c(s)} - \delta_{c(q+1)}^{a(q+1)} G_{bk}^l \\ \text{für } s = q+1 \\ = S_{c(s)bk}^l \overset{a(q+1)}{c(s)} - (\mathfrak{D}_b S_{c(s)k}^l \overset{a(q+1)}{c(s)} + G_{bj}^l S_{c(s)k}^j \overset{a(q+1)}{c(s)}) \\ - \sum_{u=q+2}^s S_{d(u)k}^j \overset{a(q+1)}{d(u)} U_{c(s)j}^l \overset{d(u)}{b} \quad \text{für } q+1 < s < m-1 \\ = H_{c(m-1)b;k}^l \overset{(a(q+1))}{c(s)} - (\mathfrak{D}_b S_{c(m-1)k}^l \overset{a(q+1)}{c(s)} + G_{bj}^l S_{c(m-1)k}^j \overset{a(q+1)}{c(s)}) \\ - \sum_{u=q+2}^{m-1} S_{d(u)k}^j \overset{a(q+1)}{d(u)} U_{c(m-1)j}^l \overset{d(u)}{b} \quad \text{für } s = m-1 \\ (0 \leq q < m-2), \end{array} \right.$$

$$(2.36d) \quad U_{c(s)k}^l \overset{a(q)}{b} = 0 \quad (q \geq 0),$$

$$(2.38) \quad \overset{K}{\Gamma}_{jk}^{*i} = \frac{1}{K} \overset{K}{\nabla}_k^b G_{bj}^i.$$

Daraus ergibt sich insbesondere

$$(2.36e) \quad S_{c_{(q+1)k}}^l \stackrel{a(q)}{=} \frac{(q+1)(q+2)\dots(m-1)}{(K+q)(K+q+1)\dots(K+m-2)} H_{c_{(q+1)k}^{l(m-q-1); k}}^{l(a(q)b(m-q-1))} \\ - \frac{(q+1)(m-q-1)}{K+q} \delta_{(c(q))}^{a(q)} G_{c_{(q+1)k}}^l.$$

Setzen wir nun

$$(2.39) \quad \delta p_{a(q)}^i = dp_{a(q)}^i + \sum_{r=0}^{q-1} S_{a(q)j}^{i b(r)} dp_{b(r)}^j \quad (q = 0, 1, \dots, m-1),$$

so sind die Ausdrücke in bezug auf  $i$  kontravariant, da für beliebiges Skalar  $f$  in  $F_n^{*(m-1)}$

$$df = f_{;b} du^b + \sum_{q=0}^{m-1} \nabla_i^{a(q)} f \cdot \delta p_{a(q)}^i$$

ist. Durch  $\delta p_{a(q)}^i$  werden die Grundübertragungen anderer Art als  $\delta p_{a(q)}^i$  in (2.11) definiert angesehen. Da nach (2.36e)  $S_{ck}^l = G_{ck}^l$  ist, stimmt  $\delta p_a^i$  mit  $\delta p_a^i$  überein und ist nichts anderes als  $\Delta_a(dx^i)$ . Für  $K=1$ , d.h. in dem Falle von D. D. KOSAMBI, gilt ferner

**Satz 14.** *In den KOSAMBIschen Ableitungen stimmt das aus der  $q$ -ten Grundübertragung  $\delta x^{(a)i}$  durch Ausübung des Operators  $\Delta$  sich ergebende System bis auf die Glieder in  $dx^j$  mit dem  $(q+1)$ -ten  $\delta x^{(q+1)i}$  überein:*

$$(2.40) \quad \delta x^{(q+1)i} \equiv \Delta(\delta x^{(q)i}) \pmod{dx^j}.$$

In der Tat geben die rekurrenten Formeln (2.36a, c) diesmal das Übergehen von  $\delta x^{(s)i}$  zu  $\delta x^{(s+1)i}$  bis auf die Glieder in  $dx^j$  (vgl. Satz 4, (1.21)). Für  $K > 1$  existieren nicht im allgemeinen solche Beziehungen, aber hier nach Satz 4 können wir auf andere Weise die Grundübertragungen herleiten, die von  $\delta p_{a(q)}^i$  verschieden sind.

Wenn andererseits auch in dem Falle  $K=1$

$$\nabla_k^{(1)} f = f_{;(1)k} - \sum_{s=2}^{m-1} T_{(s)k}^{l(1)} f_{;(s)l}$$

gesetzt wird, so sind die Parameter  $\Gamma_{jk}^{*i}$  (2.38)

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^{*i} &= \nabla_k^{(1)} G_j^i = G_{j;(1)k}^i - \sum_{s=2}^{m-1} T_{(s)k}^{l(1)} G_{j;(s)l}^i \\ &= \Gamma_{jk}^i - \sum_{s=1}^{m-2} \frac{1}{s+1} T_{(s+1)k}^{l(1)} \Gamma_{jl}^i \end{aligned}$$

wegen (2.10), danach, unter Berücksichtigung von Satz 5 und der Gestalt von den Formeln (2.14), (2.17), haben wir

**Satz 15.** Die Parameter  $\Gamma_{jk}^{*i}$  von der KOSAMBISchen Ableitung sind die von einer dem kovarianten Differential (2.9 a) zugehörigen Ableitung, indem man das Differential durch ein beliebiges System der Grundübertragungen

$$\delta'x^{(a)i} = dx^{(a)i} + \sum_{r=0}^{q-1} W_{(a)j}^{i(r)} \delta'x^{(r)j} \quad (q = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

zerlegt, wofür aber

$$W_{(s)k}^{l(0)} = \frac{1}{s+1} T_{(s+1)k}^{l(1)} \quad (s = 1, 2, \dots, m-2)$$

sind.

### KAPITEL 3. INTRINSEKE EIGENSCHAFT EINES SYSTEMS DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

14. **Intrinseke Ableitung  $\Delta$ .** Kürzlich hat E. BORTOLOTTI in seiner geometrischen Untersuchung des Systems der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung diejenigen Eigenschaften, welche gegenüber der Gruppe aller Punkt- und Parametertransformationen invariant sind, intrinsek genannt und sich mit solchen beschäftigt ([2]). In dem Falle, wenn die Ordnung  $m$  unseres Systems (2.2) grösser als 2 ist und  $K \geq 2$  ist, stossen wir auf ungewöhnliche Schwierigkeiten. Wir möchten im Folgenden für  $K = 1$ , d.h. in dem Falle des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen (1.11) fundamentale intrinseke Differentialinvarianten und kovariante Ableitungsverfahren verfolgen.

Unter einer betreffenden Transformation

$$(3.1) \quad x^\lambda = x^\lambda(x^i), \quad \bar{t} = \bar{t}(t)$$

haben wir nach (1.33)

$$(3.2) \quad \begin{cases} x^{(1)\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} x^{(1)i}, & x^{(2)\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} x^{(2)i} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^j} x^{(1)i} x^{(1)j}, \dots, \\ x^{(\bar{r})\lambda} = \frac{d^r x^\lambda}{d\bar{t}^r} = \alpha^r x^{(r)\lambda} + \frac{r(r-1)}{2} \alpha^{r-2} \alpha' x^{(r-1)\lambda} + \dots \quad (r \geq 1), \end{cases}$$

$$(3.3) \quad -\bar{H}^\lambda = \alpha^m \left( -H^i \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} + R_{(m)}^\lambda \right) + \frac{m(m-1)}{2} \alpha^{m-2} \alpha' x^{(m-1)\lambda} + \dots,$$

wobei  $\alpha = \frac{dt}{d\bar{t}}$ ,  $\alpha' = \frac{d^2t}{d\bar{t}^2}$ , usw. sind. Aus der letzten Transformationsformel von  $H^i$  führen wir nach den wiederholten Differentiationen in bezug auf die höchsten Ableitungen  $x^{(m-1)}$  für  $m \geq 3$

$$(3.4) \quad -\alpha \bar{H}^\lambda{}_{;(m-1)\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} = \alpha^2 \left( -H^i{}_{;(m-1)j} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} + m \frac{\partial x^{(1)\lambda}}{\partial x^j} \right) + \frac{m(m-1)}{2} \alpha' \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^j},$$

$$(3.5) \quad \alpha^{m-2} \bar{H}^\sigma{}_{;(m-1)\sigma}{}_{;(m-1)\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^p} = H^l{}_{;(m-1)l}{}_{;(m-1)p},$$

$$(3.6) \quad \alpha^{2m-3} \bar{G}_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^k} = G_{jk}$$

wegen (3.2) aus, wo

$$(3.7) \quad G_{jkl} = H^l{}_{;(m-1)l}{}_{;(m-1)j}{}_{;(m-1)k}$$

gesetzt ist. Wir setzen  $|G_{jk}| \neq 0$  voraus und definieren in üblicher Weise den zu  $G_{jk}$  reziproken Tensor  $G^{jk}$ :

$$(3.8) \quad \bar{G}^{\mu\nu} = \alpha^{2m-3} G^{jk} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^k}.$$

Differenzierend (3.5) in bezug auf  $x^{(m-2)j}$ , erhalten wir nach (3.8)

$$(3.9) \quad (m-1) \alpha^2 \frac{\partial x^{(1)\lambda}}{\partial x^j} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} \alpha' \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^j} + \alpha \bar{G}^{\rho\lambda} \bar{H}^\sigma{}_{;(m-1)\sigma}{}_{;(m-1)\rho}{}_{;(m-2)\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} = \alpha^2 G^{pi} H^l{}_{;(m-1)l}{}_{;(m-1)p}{}_{;(m-2)j} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}.$$

Aus (3.4), (3.9) schliessen wir

$$(3.10) \quad \begin{cases} \alpha \frac{\partial x^{(1)\lambda}}{\partial x^j} = \alpha \mathfrak{G}_j^i \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} - \bar{\mathfrak{G}}_\mu^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}, \\ \alpha' \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^j} = \alpha^2 \mathfrak{G}_j^i \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} - \alpha \bar{\mathfrak{G}}_\mu^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}, \end{cases} \quad \alpha' = \alpha^2 \mathfrak{G} - \alpha \bar{\mathfrak{G}},$$

wobei wir setzen:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{G}_j^i &= H^l_{;(m-1)l;(m-1)p;(m-2)j} G^{pi} - \frac{(m-2)}{m} H^i_{;(m-1)j}, \\
 \mathfrak{S}_j^i &= \frac{2}{m} H^i_{;(m-1)j} - \frac{2}{m-1} H^l_{;(m-1)l;(m-1)p;(m-2)j} G^{pi}, \\
 \mathfrak{S} &= \frac{1}{n} \mathfrak{S}_i^i.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Fassen wir nun einen Pseudovektor  $v^i$  von der Klasse  $\mathfrak{k}$ , der sich bei (3.1) wie

$$\bar{v}^\lambda = \alpha^{\mathfrak{k}} v^i \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}$$

transformiert, ins Auge (vgl. [9]), so sind die Ableitung

$$\frac{dv^i}{dt} + \mathfrak{G}_j^i v^j + \mathfrak{k} \mathfrak{S}_j^i v^j$$

und die einfachere

$$\overset{A}{\Delta} v^i = \frac{dv^i}{dt} + \mathfrak{G}_j^i v^j + \mathfrak{k} \mathfrak{S} v^i$$

kovariant und von der Klasse  $\mathfrak{k}+1$ , da nach (3.10) bei (3.1)

$$\overset{A}{\Delta} \bar{v}^\lambda = \alpha^{\mathfrak{k}+1} \overset{A}{\Delta} v^i \cdot \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}$$

ist; sie sind intrinseke Verallgemeinerungen von  $\Delta$ . Es scheint uns schwierig, für  $K > 1$ ,  $m \geq 3$  eine analoge Ableitung zu finden.

Weiter in dem Falle  $m = 3$  führen wir

$$\begin{aligned}
 & \left[ H^i_{;(2)j;(1)k} - H^i_{;(2)j;(2)l} G^{lh} H^p_{;(2)p;(2)h;(1)k} \right] \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i} \\
 &= \left[ H^\lambda_{;(2)\mu;(2)\nu} - H^\lambda_{;(2)\mu;(2)\alpha} G^{\alpha\beta} H^p_{;(2)p;(2)\beta;(1)\nu} \right] \frac{\partial x^\mu}{\partial x^j} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^k} + 3 \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^j \partial x^k}
 \end{aligned}$$

aus, demnach können wir mittels

$$\Pi_{jk}^i = \frac{1}{3} H^i_{;(2)j;(1)k} - \frac{1}{3} H^i_{;(2)j;(2)l} G^{lh} H^p_{;(2)p;(2)h;(1)k}$$



$$\alpha^{t+1} \sum_{r=0}^s \left( \frac{d}{dt} P_k^{(r)i} + \mathfrak{f} \mathfrak{S} P_k^{(r)i} \right) dx^{(r)k} = \sum_{r=0}^s \left( \frac{d}{dt} \bar{P}_k^{(r)i} + \mathfrak{f} \bar{\mathfrak{S}} \bar{P}_k^{(r)i} \right) dx^{\bar{(r)k}} \\ + \sum_{r=0}^s \bar{P}_k^{(r)i} \left[ r \alpha^{r-1} a' dx^{(r)k} + \sum_{t=1}^{r-1} M_{(t)}^{(r)'} dx^{(t)k} \right],$$

daraus erreichen wir wegen (3.16)

$$\overset{A}{\Delta} \bar{P}^i(d) = \alpha^{t+1} \overset{A}{\Delta} P^i(d). \quad \text{Q. E. D.}$$

Wir gehen von den Ausdrücke  $dx^i$  der Klasse 0 aus, und erhalten mit Hilfe des soeben hergeleiteten Satzes (Satz 16) sukzessiv die folgenden kontravarianten Systeme der PFAFFSchen Ausdrücke in  $K_n^{(m-1)}$

$$(3.17) \quad \overset{A}{\delta} x^{(1)i} = \overset{A}{\Delta}(dx^i), \quad \overset{A}{\delta} x^{(2)i} = \overset{A}{\Delta}^2(dx^i), \quad \dots, \quad \overset{A}{\delta} x^{(m-1)i} = \overset{A}{\Delta}^{m-1}(dx^i),$$

die bzw. von der Klasse 1, 2, ...,  $m-1$  sind. Dort bedeutet  $\overset{A}{\Delta}$  dasjenige in  $K_n^{(m-1)}$ . Wir können leicht bestätigen, dass  $\overset{A}{\delta} x^{(q)i}$  wegen (3.15) von der Gestalt

$$(3.18) \quad \overset{A}{\delta} x^{(q)i} = dx^{(q)i} + \sum_{r=0}^{q-1} \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(r)} dx^{(r)j} \quad (q = 1, 2, \dots, m-1)$$

ist und dass die rekurrenten Formeln von den Koeffizienten  $\mathfrak{S}_{(q)j}^{i(r)}$  sind:

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_{(q+1)j}^{i(q)} = \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(q-1)} + \mathfrak{G}_j^i + q \mathfrak{S} A_j^i = (q+1) \mathfrak{G}_j^i + \frac{q(q+1)}{2} \mathfrak{S} A_j^i \\ \hspace{15em} (0 \leq q \leq m-2)^{(1)}, \\ \mathfrak{S}_{(q+1)j}^{i(r+1)} = \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(r)} + \mathfrak{D} \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(r+1)} + \mathfrak{G}_k^i \mathfrak{S}_{(q)j}^{k(r+1)} + q \mathfrak{S} \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(r+1)} \\ \hspace{15em} (0 \leq r, r+2 \leq q \leq m-2), \\ \mathfrak{S}_{(q+1)j}^{i(0)} = \mathfrak{D} \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(0)} + \mathfrak{G}_k^i \mathfrak{S}_{(q)j}^{k(0)} + q \mathfrak{S} \mathfrak{S}_{(q)j}^{i(0)} \quad (1 \leq q \leq m-2). \end{array} \right.$$

Wenn wir mit Hilfe von  $\overset{A}{\delta} x^{(q)i}$  die intrinseken kovarianten Ableitungen eines Pseudoskalars  $f$  von der Klasse  $\mathfrak{f}$  nach der Gleichung

$$df + \mathfrak{f} \mathfrak{S} f = \overset{A}{\nabla} f \cdot dt + \sum_{q=0}^{m-1} \overset{A}{\nabla}_k^{(q)} f \cdot \overset{A}{\delta} x^{(q)k}$$

definieren, so ergeben sich die rekurrenten Formeln

---

(1)  $A_j^i$ : Einheitsaffinor.

$$\overset{A}{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{f} \mathfrak{S} f,$$

$$\overset{A}{\nabla}_k^{(q)} f = f_{; (q)k} - \sum_{s=q+1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(q)} \overset{A}{\nabla}_j^{(s)} f \quad (q = m-1, \dots, 1, 0).$$

Nach Satz 7 und der ersten Gleichung von (3.10) transformieren sich die Funktionen

$$(3.20) \quad \overset{A}{\Gamma}_{jk}^{*i} = \overset{A}{\nabla}_k^{(1)} \mathfrak{S}_j^i \quad (i, j: \text{ abgedrosselt})$$

bei (3.1) wie die Parameter einer affinen Übertragung. Mittels der Grundübertragungen (3.18) und der Parameter (3.20) definieren wir ganz analog wie in § 10 für beliebigen Pseudovektor  $v^i$  von der Klasse  $\mathfrak{f}$  die intrinseken kovarianten Ableitungen durch

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{A}{\nabla} v^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \mathfrak{f} \mathfrak{S} v^i, \\ \overset{A}{\nabla}_k^{(q)} v^i = v^i_{; (q)k} - \sum_{s=q+1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(q)} \overset{A}{\nabla}_j^{(s)} v^i \quad (q = m-1, m-2, \dots, 1), \\ \overset{A}{\nabla}_k^{(0)} v^i = v^i_{; k} - \sum_{s=1}^{m-1} \mathfrak{S}_{(s)k}^{j(0)} \overset{A}{\nabla}_j^{(s)} v^i + \overset{A}{\Gamma}_{jk}^{*i} v^j. \end{array} \right.$$

Die Ableitung  $\overset{A}{\nabla}^{(q)}$  erniedrigt die Klasse einer Grösse um  $q$ , die Ableitung  $\overset{A}{\nabla}$  dagegen erhöht die Klasse um eins. Die so angegebenen Ableitungen sind von  $H^i$  und deren Differentialquotienten bis zur  $(m+1)$ -ten Ordnung abhängig. (In dem Falle  $m = 3$  hängt das kovariante Differential  $\overset{A}{D}v^i$  in (3.14) von  $H^i$  bis zur dritten Ordnung ab, dennoch scheint es uns, dass die Aufstellung der Grundübertragungen und somit der kovarianten Ableitungen der Differentialquotienten vierter Ordnung bedarf.)

Setzen wir wie (2.19)

$$(3.22) \quad \mathfrak{R}^i = T^i - \frac{\overset{A}{\delta} x^{(m-1)i}}{dt} = H^i - \sum_{r=0}^{m-2} \mathfrak{S}_{(m-1)j}^{i(r)} x^{(r+1)j},$$

so sind  $\mathfrak{R}^i$  Komponenten eines Pseudovektors von der Klasse  $m$ . Wir erreichen

**Satz 17.** *Sei ein System der gewöhnlichen Differentialgleichungen  $x^{(m)i} + H^i = 0$  gegeben, so lassen sich in  $K_n^{(m-1)}$  die intrinseken kovarianten Ableitungen (3.21) bestimmen. Die Krümmungs- und Torsionsgrössen desselben, der Pseudovektor  $\mathfrak{R}^i$  und deren sukzessive kovarianten*



Ableitungen bilden das vollständige System der Pseudo-Differentialkomitanten.

Die Berechnung der Strukturgrößen sowie die Aufstellung der BIANCHISCHEN Identitäten lassen wir ausfallen, da sie ganz dieselben wie in der KAWAGUCHISCHEN Arbeit [9] und in Kapitel 2 sind.

Bemerkung 1. Aus den Grundübertragungen (3.19) und den Ableitungen (3.21) wird ein kovariantes Differential in umgekehrter Weise definiert. Wir sind aber demselben nicht besonders bedürftig.

2. Aus dem Ableitungsverfahren  $\overset{A}{\Delta}$  und dem Operator  $\frac{\partial}{\partial x^{(m-1)k}}$  können wir nach der Methode von D. D. KOSAMBI (§ 13) auch andere intrinseken kovarianten Ableitungen wie (3.21) und folglich Grundübertragungen herleiten. Die so sich ergebenden Ableitungen hängen, wie unsere, von den Differentialquotienten von  $H^i$  bis zur  $(m+1)$ -ten Ordnung ab.

3. Wenn wir in dem Falle  $K > 1$  eine intrinseke Ableitung wie  $\overset{A}{\Delta}$  auffinden können, so wird die ganze weitere Überlegung nach Bemerkung 2 oder nach unserer obigen Methode folgen, da Satz 16 sich leicht für  $K > 1$  verallgemeinern lässt.

Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität.  
Nov. 1936.

### Literaturverzeichnis.

- [1] L. BERWALD, Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahresbericht der D.M.V., Bd. 34 (1925), S. 213-226.
- [2] E. BORTOLOTTI, Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, Rendiconti Lincei, Ser. 7, Bd. 23 (1936), S. 16-21; S. 104-110; S. 175-180.
- [3] E. CARTAN, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actualités scientifiques et industrielles 72 (1935).
- [4] ———, Observations sur le mémoire précédent, Math. Zeitschrift, Bd. 37 (1933), S. 619-622.
- [5] H. V. CRAIG, On a generalized tangent vector, American Journal of Mathematics, Bd. 57 (1935), S. 457-462; II, Bd. 58 (1936), S. 833-846.
- [6] TH. DE DONDER, Théorie invariante du calcul des variations, 1935, Paris.
- [7] J. DOUGLAS, The general geometry of paths, Annals of Mathematics, Ser. 2, Bd. 29 (1928), S. 143-168.
- [8] ———, Systems of  $K$ -dimensional manifolds in an  $N$ -dimensional space, Math. Ann., Bd. 105 (1931), S. 707-733.

- [9] A. KAWAGUCHI, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rendiconti di Palermo, Bd. 56 (1932), S. 245–276.
- [10] ———, Theory of connections in the generalized FINSLER manifold, Proc. of the Imperial Academy, Tokyo, Bd. 7 (1931), S. 211–214; Bd. 8 (1932), S. 340–343; Bd. 9 (1933), S. 347–350.
- [11] ———, Some intrinsic derivations in a generalized space, *ibid.*, Bd. 12 (1936), S. 149–151.
- [12] ———, Certain identities in a generalized space, *ibid.*, S. 152–155.
- [13] ———, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des FINSLERSchen Raumes ist, Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 43 (1936), S. 289–297.
- [14] ———, Theorie des Raumes mit den Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist, *ibid.*, Bd. 44 (1936), S. 131–152.
- [15] ———, Die Geometrie des Integrals  $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$ , Proc. of the Imperial Academy, Tokyo, Bd. 12 (1936), S. 205–208.
- [16] ———, Geometry in an  $n$  dimensional space with the arc length  $s = \int (A_i(x, x') \times x''^i + B(x, x'))^{\frac{1}{p}} dt$ , die bald irgendwo publiziert wird.
- [17] D. D. KOSAMBI, Parallelism and path-space, Math. Zeitschrift, Bd. 37 (1933), S. 608–618.
- [18] ———, An affine calculus of variations, Proc. of the Indian Academy, Bd. 2 (1935), S. 333–335.
- [19] ———, Path-spaces of higher order, Quarterly Journal of Math., Oxford Ser., Bd. 7 (1936), S. 97–104.
- [20] T. OHKUBO, Base connections in a special KAWAGUCHI space, dieses Journal, Bd. 5 (1937), S. 167–188.
- [21] W. SLEBODZIŃSKI, Sur deux connexions affines généralisées, Prace Matematyczno-Fizyczne, Bd. 43 (1935), S. 167–205.
- [22] J. L. SYNGE, Some intrinsic and derived vectors in a KAWAGUCHI space, American Journal of Mathematics, Bd. 57 (1935), S. 679–691.