SUR L'HYPOTHÈSE DE M. B. KNASTER DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES DE POINTS

Par

Motokiti KONDÔ

Dans sa note, M. W. SIERPIŃSKI[1] a proposé un problème suivant qui a été posé par M. B. KNASTER:

Est ce qu'on peut nommer une correspondance qui ferait correspondre à tout ensemble parfait linéaire un de ses points, de sorte qu'aux ensembles différents correspondent des points différents?

Dans la théorie des ensembles de points, il serait très intéressant de résoudre ce problème, mais il est très difficile de donner une solution de ce problème dans l'actualité de la théorie des ensembles. Ici, je n'essayerai pas d'en donner une solution, mais je vais prouver quelques propositions déduites de la supposition que l'on peut résoudre affirmativement ce problème.

Dans la théorie des ensembles, tous les êtres mathématiques définis en faisant appel à l'axiome de M. E. ZERMELO ou l'axiome analogue sont considerés uniformément comme êtres singuliers. Mais, il me parait qu'il existe divers ordres de la singularité de ces ensembles. Je ne sais pas malheureusement si l'hypothèse de M. B. KNASTER, c'est-à-dire, la supposition que l'on peut résoudre affirmativement le problème ci-dessus, est plus faible que l'axiome du choix. Mais, je pourrai considérer que les êtres mathématiques définis, en admettant l'hypothèse de M. B. KNASTER, sont presque réguliers.

Ici, nous donnerons quelques remarques sur l'axiome du choix. Comme M. W. SIERPIŃSKI a dit dans son célèbre mémoire sur l'axiome du choix, lorsque nous donnons un être mathématique, en faisant appel à l'axiome du choix, on peut distinguer les deux cas, c'est-à-dire, le cas où l'on peut nommer un être ayant la propriété donnée, mais il faut admettre cet axiome pour démontrer que l'être nommé satisfait à la condition donnée, et le cas où il faut user de cet axiome pour donner

(1) W. SIERPIŃSKI, Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable, ne contenant aucun sous-ensemble parfait, Fund. Math., t. 14 (1929), p. 229.

Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. VI, No. 1, 1937.

l'être demandé. Dans la suite, pour démontrer que l'être nommé jouit de la propriété proposée, j'admets cet axiome pour le cas où l'on choisit un élément dans un ensemble non vide donné, sauf quelque exception.

§ 1. L'existence de fonctions du choix.

Lorsqu'on peut résoudre affirmativement le problème de M. B. KNASTER, on peut aussi effectivement prouver l'axiome du choix pour quelques familles d'ensembles non vides. Nous allons considérer dans ce paragraphe quelques problèmes sur l'axiome du choix. Pour cela, commençons par la définition de fonctions du choix. Soient R un espace métrique quelconque (non vide), et $\mathfrak{F}$ une famille d'ensembles non vides de l'espace R. Si l'on peut définir une correspondance $\varphi(E)$ qui correspond à chaque ensemble E de la famille $\mathfrak{F}$ un point $\varphi(E)$ contenu dans E, nous appellerons $\varphi(E)$ la fonction du choix définie sur $\mathfrak{F}$.

Pour une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles non vides de R, lorsqu'il existe une fonction du choix $\varphi(E)$, telle que pour deux ensembles différents E et F de $\mathfrak{F}$ nous ayons $\varphi(E) \neq \varphi(F)$, nous dirons que $\varphi(E)$ jouit de la propriété (K).

De plus, nous entendrons dans la suite par l'hypothèse de M. B. KNASTER la supposition que l'on peut nommer pour tous les ensembles parfaits linéaires une fonction du choix ayant la propriété (K).

Soit R un espace métrique. Si l'on peut définir effectivement un nombre fini ou une infinité dénombrable de points $\{p_n\}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dans R, tels qu'il existe pour tout point p de R et tout nombre positif ε au moins un points p_n pour lequel nous avons dis $(p, p_n) < \varepsilon$, nous dirons que l'espace R est effectivement séparable. Nous avons alors le

Lemme 1. Soit R un espace métrique complet effectivement séparable ayant une infinité indénombrable de points. On peut définir effectivement une transformation continue biunivoque $T(x)$ qui transforme tous les nombres irrationnels en un sous-ensemble R^* de R, tel que $R-R^*$ soit un ensemble d'un nombre fini ou une infinité effectivement dénombrable de points.

Dans l'hypothèse de M. B. KNASTER, la fonction du choix est définie pour tous les sous-ensembles parfaits de l'ensemble de tous les nombrés réels. Or, en admettant l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut l'étendre comme il suit.

Proposition 1. *Soit R un espace métrique complet effectivement séparable qui contient une infinité indénombrable de points. On peut* *nommer pour tous les sous-ensembles parfaits de R une fonction du choix jouissant de la propriété (K).*

Pour démontrer la proposition 1, tout d'abord, nous donnerons quelques lemmes.

Lemme 2. Pour tous les sous-ensembles parfaits N de l'ensemble L de tous les nombres réels, on peut effectivement correspondre une suite infinie dénombrable de sous-ensembles parfaits $\varphi_k(N)(k = 1, 2, 3, \ldots)$ telle qu'on ait

1°, $\varphi_k(N)$ ne contient que les nombres irrationels,

2°, $N > \varphi_k(N) > \varphi_{k+1}(N) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots.)$,

3°, le diamétre de $\varphi_k(N) \leqq \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots.)$.

Démonstration. Comme l'ensemble de tous les nombres rationnels est effectivement dénombrable, on peut ranger effectivement tous les nombres rationnels en une suite infinie

$$s_1, \; s_2, \; s_3, \; \ldots.,$$

telle que $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$. Soit N un sous-ensemble parfait de L. Pour N, désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble consistant de tous les intervalles fermés contigus[1] à N dans L et de tous les nombres rationnels qui sont contenus dans N et qui ne sont pas les points extrêmes de l'intervalle fermé contigu à N dans L. Puisque l'ensemble de $\mathfrak{F}$ contient au moins un nombre rationnel, on peut voir que $\mathfrak{F}$ est (effectivement) dénombrable, et par suite, on peut définir effectivement une suite infinie d'ensembles de $\mathfrak{F}$

$$\Lambda_1, \; \Lambda_2, \; \Lambda_3, \; \ldots.,$$

telle que $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ pour $i \neq j$. Pour deux ensembles différents Λ_i et Λ_j, nous savons que l'on a $x_i < x_j$ ou $x_j < x_i$, quels que soient les nombres x_i de Λ_i et x_j de Λ_j. Lorsque nous avons $x_i < x_j$, quels que soient les nombres x_i de Λ_i et x_j de Λ_j, nous posons $\Lambda_i < \Lambda_j$ ou $\Lambda_j > \Lambda_i$. Selon la définition de cette relation, on peut définir un ordre des ensembles de $\mathfrak{F}$. Maintenant. nous définirons une correspondance $\omega(s_k)$ entre s_i et Λ_i, comme il suit:

1°, $\omega(s_1) = \Lambda_1$,

2°, lorsque nous avons $s_i < s_j$, nous avons aussi $\omega(s_i) < \omega(s_j)$, et inversement,

---

(1) Nous entendrons par un intervalle fermé contigu à N la ferméture d'un intervalle contigu à N.

3°, pour tous les ensembles Λ_j, il existe un et seul un nombre rationnel s_j, tel qu'on ait $\omega(s_j) = \Lambda_j$.
Grâce à la correspondance $\omega(s_k)$, on peut effectivement correspondre les nombres irrationnels et les points de $N - \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$, comme il suit:

1°, lorsqu'il correspond à un nombre irrationnel x un point x^* de $N - \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$, et pour un nombre rationnel s_i, $x < s_i$, nous avons $x^* < \omega(s_i)$,

2°, lorsqu'il correspond à un nombre irrationnel x un point x^* de $N - \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i$ et lorsque pour un ensemble Λ_i de $\mathfrak{F}$, nous avons $x^* < \Lambda_i$, nous avons aussi $x < \omega^{-1}(\Lambda_i)$.

Or, comme on voit, cette correspondance est définie uniquement par la correspondance $\omega(x)$ et $\omega(x)$ est définie effectivement pour chaque sous-ensemble parfait N de L, et de plus la définition de $\omega(x)$ est indépendante de la définition de N. Par suite, pour tous les sous-ensembles parfaits N de L, on peut nommer une fonction continue $\varphi_N(x)$ définie sur l'ensemble de tous les nombres irrationnels, telle qu'on ait

1°, $\varphi_N(x) \in N$ pour tous les nombres irrationnels,

2°, $\varphi_N(x') \neq \varphi_N(x'')$ pour deux nombres irrationnels différents x' et x''.

Or, on peut définir effectivement une suite infinie dénombrable de sous-ensembles parfaits $M_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ dans l'ensemble de tous les nombres irrationnels, telle qu'on ait

1°, $M_k > M_{k+1} (k = 1, 2, 3, \ldots)$,

2°, le diamètre de M_k tend vers 0 avec $k \to \infty$.

Maintenant, posons $\varphi_k(N) = \varphi_N(M_k) (k = 1, 2, 3, \ldots)$. On voit alors que les correspondances $\varphi_k(N)$ satisfont à la condition du lemme 2.

C. Q. F. D.

Puis, en admenttant l'hypothèse de M. B. KNASTER, nous allons démontrer le

Lemme 3. Pour tous les sous-ensembles parfaits de l'ensemble L on peut nommer une fonction du choix $\varphi^*(E)$ ayant la propriété (K), telle que $\varphi^*(E)$ est un nombre irrationnel pour tout sous-ensemble parfait E de L.

Démonstration. Selon l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut nommer pour tous les sous-ensembles parfaits de L une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K). Lorsque $\varphi(N)$ est un nombre irrationnel. quelque soit l'ensemble parfait N de L, il suffit de prendre comme $\varphi^*(E)$ la fonction du choix $\varphi(E)$.

Puis, nous allons considérer le cas où il existe dans L au moins un ensemble parfait N tel que $\varphi(N)$ soit un nombre rationnel. Puisque l'ensemble de tous les nombres rationnels est effectivement dénombrable, la famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles parfaits N de L, tel que $\varphi(N)$ soit un nombre rationnel, est effectivement d'un nombre fini ou une infinité dénombrable. Or, on peut supposer, sans perdre la généralité, que la famille $\mathfrak{F}$ est effectivement dénombrable. On peut alors ranger effectivement tous les ensembles parfaits de $\mathfrak{F}$ en une suite infinie :

$$N_1,\ N_2,\ N_3,\ \ldots\ldots,$$

telle que $N_i \neq N_j$ pour $i \neq j$. Selon le lemme 2, on peut définir effectivement le système d'ensembles parfaits $\{N_{k,n}\}(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$, tel qu'on ait

1°, $N_k \supset N_{k,n} \supset N_{k,n+1} (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

2°, $N_{k,n}$ ne contient que les nombres irrationnels,

3°, le diamètre de $N_{k,n}$ tend vers 0 avec $n \to \infty$, pour tout nombre naturel k.

Or, on peut modifier, sans perdre l'effectivité, les ensembles $N_{k,n}$ $(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$, comme nous avons $N_{k,n}N_{k',n'} = 0$ pour les nombres k, k', n et n' tels qu'on ait $k \neq k'$ ou $n \neq n'$. Maintenant, nous définirons la fonction du choix $\varphi^*(E)$ pour tous les sous-ensembles parfaits de L, comme il suit :

1°, lorsque nous avons $N \neq N_{k,n}(k, n+1 = 1, 2, 3, \ldots)$, où $N_{k,0} = N_k(k = 1, 2, 3, \ldots)$, posons $\varphi^*(N) = \varphi(N)$,

2°, pour tous les ensembles $N_{k,n}(k, n+1 = 1, 2, 3, \ldots)$, posons $\varphi^*(N_{k,n}) = \varphi(N_{k,n+1})$.

Alors, puisque les ensembles $N_{k,n}(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$ ne contiennent que les nombres irrationnels, $\varphi^*(N_{k,n})(k, n+1 = 1, 2, 3, \ldots)$ est un nombre irrationnel. Par suite, pour tous les ensembles parfaits N de L, $\varphi^*(N)$ est un nombre irrationnel. Or, comme on voit que $\varphi^*(N)$ jouit de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L, $\varphi^*(N)$ satisfont à la condition du lemme 3. C. Q. F. D.

La démonstration de la proposition 1. Selon le lemme 1, on peut nommer une transformation continue biunivoque qui transforme l'ensemble L^* de tous les nombres en un sous-ensemble R^* de R, tel que $R - R^*$ soit d'au plus une infinité dénombrable.

Pour l'ensemble parfait P dans l'espace R, désignons par $\lambda(P)$ l'ensemble de tous les points de condensations de $T(PR^*)$. Nous avons alors pour deux ensembles parfaits différents P et Q de R, $\lambda(P) \neq \lambda(Q)$. En effet, comme nous avons $P \neq Q$, on a $(P-Q)R^* \neq 0$ ou $(Q-P)R^* \neq 0$.

Pour le moment, nous supposons que $(P-Q)R^* \neq 0$. Or, pour un sous-ensemble parfait P^* de $(P-Q)R^*$, $T^{-1}(P^*)$ et $T^{-1}(QR^*)$ sont disjoints et fermés dans l'ensemble L^*. Par conséquent, $\lambda(P^*)$ et $\lambda(Q)$ sont aussi disjoints, sauf au plus une infinité dénombrable de points rationnels. Or, comme $\lambda(P^*)$ est un sous-ensemble de $\lambda(P)$, nous avons $\lambda(P) \neq \lambda(Q)$.

Maintenant, pour une fonction du choix $\varphi^*(E)$ donnée dans le lemme 3, considérons $\varphi^*(\lambda(P))$. Comme $T^{-1}(PR^*)$ est fermé dans l'ensemble L pour un sous-ensemble parfait P de R, $\lambda(P)$ est contenue dans $T^{-1}(PR^*)$ sauf au plus une infinité dénombrable de points rationnels. Par suite, selon la définition de $\varphi^*(E)$, $\varphi^*(\lambda(P)) \in T^{-1}(PR^*)$, ou $T(\varphi^*(\lambda(P))) \in PR^* \subset P$. Or, pour deux ensembles parfaits différents P et Q, nous avons $\lambda(P) \neq \lambda(Q)$. Donc, grâce à la définition de $T(P)$ et $\varphi^*(E)$, nous avons $T(\varphi^*(\lambda(P))) \neq T(\varphi^*(\lambda(Q)))$, c'est-à-dire, $T(\varphi^*(\lambda(P)))$ est une fonction du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de R. C. Q. F. D.

Remarque. De même que nous avons fait dans le lemme 3, on peut démontrer le corollaire suivant :

Soient R un espace métrique complet effectivement séparable ayant une infinité indénombrable de points, et N un sous-ensemble (effectivement) dénombrable contenu dans R. Lorsqu'on peut une fonction du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits non vides de R, on peut aussi nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la même propriété qui $\varphi(E)$ appartient à l'ensemble $R-N$, quel que soit l'ensemble parfait E de R.

On peut démontrer la réciproque de la proposition 1, sans faire appel à aucune hypothèse, c'est-à-dire,

Proposition 2. *Soit R un espace métrique complet effectivement séparable qui contient une infinité indénombrable de points. Lorsqu'on peut nommer pour tous les sous-ensembles parfaits de R une fonction du choix $\varphi(E)$ jouissant de la propriété (K), on peut démontrer l'hypothèse de M. B. KNASTER sans faire appel à aucune hypothèse.*

Démonstration. Selon la supposition sur l'espace R, on peut nommer un sous-ensemble parfait discontinu N de R. Et, comme on sait, on peut définir effectivement une transformation continue biunivoque qui transforme l'ensemble de tous les nombres irrationnels L^*

en un sous-ensemble N^* de N, tel que $D = N - N^*$ soit (effectivement) dénombrable. Or, comme on peut nommer pour tous les sous-ensembles parfaits de R une fonction du choix ayant la propriété (K), on peut aussi nommer pour tous les sous-ensembles parfaits de N une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K). Ici, selon une remarque du lemme 3, on peut supposer que $\varphi(E)$ soit un point de N^* pour tous les sous-ensembles parfaits E de N.

Maintenant, pour un sous-ensemble parfait P de L, l'ensemble $\lambda(P)$ de tous les points de condensation de $T(PL^*)$ est un sous-ensemble parfait de N. Or, comme $T(PL^*)$ est fermé dans N, nous avons $\varphi(\lambda(P)) \in T(PL^*)$, c'est-à-dire, $T^{-1}(\varphi(\lambda(P))) \in PL^* \subset P$. De plus, comme pour deux sous-ensembles parfaits différents P et Q, nous avons $\lambda(P) \neq \lambda(Q)$, nous avons donc $\varphi(\lambda(P)) \neq \varphi(\lambda(Q))$ ou $T^{-1}(\varphi(\lambda(P))) \neq T^{-1}(\varphi(\lambda(Q)))$. Par conséquent, $T^{-1}(\varphi(\lambda(P)))$ jouit de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L.

C. Q. F. D.

Nous avons donné, dans la proposition 1, une fonction du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits d'un espace. Or, on peut donner de plus une fonction du choix jouissant de la même propriété pour tout sous-ensemble fermé indénombrable, c'est-à-dire,

Proposition 3. *Soit R un espace métrique complet effectivement separable qui contient une infinité indénombrable de points. Si l'on peut nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les ensembles parfaits linéaires, qui satisfait à la condition* $(*)$: *il existe (effectivement) un sous-ensemble parfait non dense Q dans L, tel que pour tous les sous-ensembles parfaits N de L $\varphi(N) \in Q$ entraine $N \subset Q$, on peut aussi nommer une fonction du choix jouissant de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles fermés indénombrables de R.*

Démonstration. Tout d'abord, nous considérons le cas où $R = L$. Comme la famille de tous les intervalles ouverts de L est effectivement de puissance du continu, on peut nommer une correspondance biunivoque entre des intervalles ouverts de L et des nombres irrationnels de l'intervalle I dans cette correspondance. Soit N un sous-ensemble fermé clairsemé de L. Comme on voit, on peut nommer une méthode qui range tous les intervalles contigus de N en une suite infinie :

$$(*) \qquad I_1, I_2, I_3, \dots\dots$$

Pour l'intervalle I_k, posons

$$\nu(I_k) = (n_{k1}, n_{k2}, \ldots\ldots),$$

et

$$\mu(N) = (n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{13}, n_{22}, n_{31}, \ldots\ldots).$$

Alors, la correspondance $\mu(N)$ est définie pour tous les sous-ensembles fermés clairsemés de L et pour deux sous-ensembles fermés clairsemés différents E et F, nous avons $\mu(E) \neq \mu(F)$.

Soit E un sous-ensemble fermé de L, tel que le noyau parfait de E soit un ensemble parfait donné N. Selon la méthode donnée plus haut, on peut ranger effectivement tous les intervalles contigus de N en une suite infinie (*). Puisque les ensembles $\bar{I}_k E$ sont fermés et clairsemés, on peut correspondre les nombres irrationnels $\mu(\bar{I}_k E)$. Pour

$$\mu(\bar{I}_k E) = (n_{k1}, n_{k2}, n_{k3}, \ldots\ldots),$$

considérons le nombre irrationnel

$$\lambda(N, E) = (n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{13}, n_{22}, n_{31}, \ldots\ldots).$$

Alors, $\lambda(N, E)$ est un nombre irrationnel tel que $0 < \lambda(N, E) < 1$ et pour deux ensembles fermés indénombrables différents $E_k (k = 1, 2)$, tels que leur noyau parfait est simultanément un ensemble parfait N, nous avons $\lambda(N, E_1) \neq \lambda(N, E_2)$.

Comme l'ensemble parfait Q est non dense dans L, il existe un intervalle qui est contigu à N dans L. Or, puisque la famille de tous les sous-ensembles parfaits de Q est effectivement de la puissance du continu, on peut nommer une correspondance biunivoque entre tous les sous-ensembles parfaits de Q et tous les nombres irrationnels contenus dans l'intervalle $(0, 1)$. En désignant par Q_ν un sous-ensemble parfait de Q qui correspond à un nombre irrationnel ν tel que $0 < \nu < 1$, posons pour l'enesemble parfait E contenu dans l'intervalle fermé I, $\chi_\nu(EI) = \varphi(E + Q_\nu)$. On voit alors que $\chi_\nu(EI)$ est un point de E et pour $\nu \neq \nu'$ ou $E \neq E'$, nous avons $\chi_\nu(EI) \neq \chi_{\nu'}(E'I)$.

Pour une transformation topologique[1]

$$\sigma(x) = \frac{a + be^x}{1 + e^x}$$

(1) Pour le cas où $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, on peut modifier sans peine la transformation $\sigma(x)$ comme il transforme L en I.

qui transforme L en l'intervalle I, où a et $b(a < b)$ sont les points extrêmes de I, considérons $\varphi_\nu(E) = \chi_\nu(\sigma(E))$. $\varphi_\nu(E)$ est une fonction du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits E de R, quel que soit le nombre irrationnel ν tel que $0 < \nu < 1$, et $\varphi_\nu(E) = \varphi_{\nu'}(E')$ n'a lieu que pour le cas où $\nu = \nu'$ ou $E = E'$.

Maintenant, nous définirons une fonction du choix $\chi(E)$ pour tous les sous-ensembles fermés indénombrables de L, comme il suit,

1°, pour un sous-ensemble fermé indénombrable E de L, tel qu'on ait $E \neq L$, posons $\chi(E) = \varphi_{\lambda(N, E)}(N)$, où N est le noyau parfait de E,

2°, Pour l'ensemble L, posons $\chi(L) = \varphi_{\nu_0}(L)$, où $\nu_0 = (n_1, n_2, n_1, n_2, n_3, \ldots)$ pour $\nu(I) = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$. Puisque il n'existe aucun ensemble E tel qu'on ait $\nu_0 = \lambda(I, E)$, nous avons $\chi(E) \neq \chi(L)$, quel que soit l'ensemble fermé indénombrable E de L qui $E \neq L$. Par suite, $\chi(E)$ est une fonction du choix qui jouit de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles fermés indénombrables de L.

De même que nous avons fait plus haut, on peut démontrer qu'il existe dans un espace métrique complet effectivement separable ayant une infinité indénombrable de points, une fonction du choix qui satisfait à la condition de la proposition 3. C. Q. F. D.

Proposition 4. *Soit R un espace métrique complet effectivement séparable ayant une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L, qui satisfait à la condition $(*)$ donnée dans la proposition 3, on peut nommer aussi une fonction du choix $\varphi^*(E)$ jouissant de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles développables*[1] *de R qui contiennent une infinité indénombrable de points.*

Démonstration. Comme R est effectivement séparable, on peut nommer pour chaque sous-ensemble développable N de R une suite transfiine $\{E_\alpha\}(\alpha < \lambda < \Omega)$ de sous-ensembles fermés de R, comme il suit :

1°, $E_\alpha > E_\beta$ pour $\alpha \leq \beta < \lambda$,

2°, $N = E_0 - E_1 + E_2 - E_3 + \ldots$,

3°, la suite $\{E_\alpha\}$ est effectivement dénombrable.

Nous dirons que la suite $\{E_\alpha\}$ est fondamentale pour N. Or, puisque la famille de tous les sous-ensembles fermés de R est (effectivement) de puissance du continu, on peut nommer une correspondance $\gamma(N)$

(1) Voir C. Kuratowski, Topologie, t. 1, 1933, p. 59.

entre tous les sous-ensembles développables N de R est les nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1) telle qu'on ait $\nu(N_1) \neq \nu(N_2)$ pour $N_1 \neq N_2$. Soient N un sous-ensemble développable de R qui contient une infinité indénombrable de points et $\{E_\alpha\}(\alpha < \lambda < \Omega)$ la suite fondamentale de N. Comme nous avons $N = \Sigma(E_\alpha - E_{\alpha+1})$, il existe au moins un nombre ordinal α tel que $E_\alpha - E_{\alpha+1}$ soit de puissance du continu. Désignons par α_0 le plus petit nombre ordinal dans tels nombres α. Or, il existe le plus petit nombre entier positif n_0 tel que $E_{\alpha_0} - U\left(\frac{1}{n_0}, E_{\alpha_0+1}\right)$[1] soit fermé et indénombrable. Posons $\chi(N) = E_{\alpha_0} - U\left(\frac{1}{n_0}, E_{\alpha_0+1}\right)$. Alors, $\chi(N)$ est définie effectivement pour tous les sous-ensembles développables N de R ayant une infinité indénombrable de points. Comme nous avons fait dans la proposition 3, on peut nommer une famille (effectivement) de puissance du continu de fonctions du choix $\varphi_\lambda(E)(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles fermés de R qui continennent une infinité indénombrable de points et que $\varphi_\lambda(E) = \varphi_\mu(E)$ entraine $\lambda = \mu$. Posons $\varphi^*(E) = \varphi_{\nu(E)}(\chi(E))$ pour tous les sous-ensembles développables E de R ayant une infinité indénombrable de points. Alors, on voit sans peine que $\varphi^*(E)$ satisfait à la condition de la proposition 4. C. Q. F. D.

§ 2. L'existence de quelques ensembles singuliers.

Lorsque nous supposons l'existence de fonctions du choix ayant la propriété (K), nous pouvons donner des divers ensembles singuliers, sans faire appel à l'axiome du choix.

M. F. Bernstein a donné un ensemble linéaire totalement imparfait en admettant l'axiome du choix. Or, on peut démontrer sur l'existence des ensembles totalement imparfaits la

Proposition 5. *Lorsqu'il existe une fonction du choix $\varphi(E)$ jouissant de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits d'un espace métrique R, on peut nommer dans l'espace R un sous-ensemble qui—de même que son complémentaire—est totalement imparfait.*

Démonstration. Tout d'abord, pour un nombre positif λ, considérons l'ensemble $E(\lambda) = \sum_{\delta(N) > \lambda} \varphi(N)$, où la sommation $\sum_{\delta(N) > \lambda}$ s'étend à tous les

(1) Pour un nombre positif r et un sous-ensemble E de R, nous désignons par $U(r, E)$ l'ensemble de tous les points p tels qu'on ait dis $(p, E) < r$.

sous-ensembles parfaits N de R, tels que leur diamètre $\delta(N) > \lambda$. L'ensemble $E(\lambda)$ est alors totalement imparfait.

Pour le voir, supposons, par impossible, que $E(\lambda)$ contienne un sous-ensemble parfait P de R. Or, tout ensemble parfait de R contient au moins un sous-ensemble parfait ayant le diamètre $< \varepsilon$, quel que soit le nombre positif ε. P contient donc un sous-ensemble parfait Q au diamètre $< \lambda$. Alors, d'après la définition de $E(\lambda)$, nous avons $\varphi(Q) \bar{\in} E(\lambda)$. D'autre part, comme P est un sous-ensemble de $E(\lambda)$ et $\varphi(Q) \in Q < P$, nous avons $\varphi(Q) \in E(\lambda)$, qui est contradictoire avec $\varphi(Q) \bar{\in} E(\lambda)$. Donc, $E(\lambda)$ est totalement imparfait. Par conséquent, lorsque $R-E(\lambda)$ est totalement imparfait pour un nombre positif λ suffisamment petit, on peut nommer d'après le principle minimum le plus petit nombre entier positif n, tel que $R-E\left(\frac{1}{n}\right)$ soit totalement imparfait. Donc, dans ce cas, l'ensemble $E\left(\frac{1}{n}\right)$ satisfait à la condition de la proposition 5. Dans le cas où $R-E(\lambda)$ contient au moins un ensemble parfait pour tous les nombres positifs λ, nous désignons par $S(\lambda)$ la somme de tous les sous-ensembles parfaits de $R-E(\lambda)$. Alors, le diamètre $\delta(S(\lambda))$ n'est pas supérieur à λ. Pour le voir, supposons que $\delta(S(\lambda)) > \lambda$. Il existe alors dans $S(\lambda)$ les deux points p et q tels qu'on ait dis $(p, q) > \lambda$. Comme $S(\lambda)$ est la somme des ensembles parfaits, il existe deux sous-ensembles P et Q de $S(\lambda)$, tel qu'on ait $p \in P$ et $q \in Q$. Puisque le diamètre $\delta(P+Q)$ de $P+Q$ est supérieur à λ, nous avons $\varphi(P+Q) \in E(\lambda)$; par suite $(P+Q)E(\lambda) \neq 0$. Or, comme on a $P+Q < R-E(\lambda)$, nous avons $(P+Q)E(\lambda) = 0$, ce qui est une contradiction. Pour $S(\lambda)$, posons

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \overline{S\left(\frac{1}{n-1}\right)} - \overline{S\left(\frac{1}{n}\right)} \right\},$$

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \overline{S\left(\frac{1}{n-1}\right)} - \overline{S\left(\frac{1}{n}\right)} \right\} + \prod_{n=1}^{\infty} \overline{S\left(\frac{1}{n}\right)},$$

où $S\left(\frac{1}{0}\right) = R$ et $F\left(\frac{1}{n}\right) = R - E\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors, E et F sont totalement imparfaits. En effet, supposons que E contienne au moins un ensemble parfait. Comme les ensembles parfaits $\overline{S\left(\frac{1}{n}\right)}$ satisfont aux conditions: $\overline{S\left(\frac{1}{n}\right)} > \overline{S\left(\frac{1}{n+1}\right)}$ et $\delta\left(\overline{S\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \leqq \frac{1}{n}$, il existe un nombre naturel N tel que $E\left\{\overline{S\left(\frac{1}{N}\right)} - \overline{S\left(\frac{1}{N+1}\right)}\right\}$ contienne un ensemble parfait.

Or, puisque nous avons $E\left\{\overline{S\left(\frac{1}{N}\right)}-\overline{S\left(\frac{1}{N+1}\right)}\right\} < E\left(\frac{1}{N}\right)$, $E\left(\frac{1}{N}\right)$ contient un ensemble parfait. D'autre part, nous avons vu que $E\left(\frac{1}{N}\right)$ est totalement imparfait, ce qui donne une contradiction. Donc E est totalement imparfait. De même, on peut voir que F est aussi totalement imparfait. Or, comme nous avons $F = R-E$, E satisfait à la condition de la proposition 5. C. Q. F. D.

Dans la proposition 5, nous avons donné un sous-ensemble totalement imparfait E d'espace R, dont le complémentaire $R-E$ jouit aussi de la même propriété.

Or, en supposant l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut donner une famille de puissance du continu d'ensembles totalement imparfaits, tels que leur complémentaire soit aussi totalement imparfait. Mais, dans ce cas, on ne sait pas si l'on peut donner une famille (effectivement) de puissance du continu de tels ensembles.

Proposition 6. *Soit R un espace métrique complet effectivement séparable qui contient une infinité indénombrable de points, On peut alors nommer une famille de puissance de continu $\{E_\lambda\}(\lambda \in \Lambda, \Lambda = 2^{\aleph_0})$ d'ensembles totalement imparfaits disjoints tels qu'on ait $R-E_\lambda$ jouissant aussi de la même propriété.*

Démonstration. Tout d'abord, considérons le cas où l'espace R est l'ensemble de tous les nombres réels L. Selon l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L. Pour un nombre réel x, posons $F(x) = \text{Ens}\,\{\varphi(N);\ \text{borne sup. de } N = x\}$ c'est-à-dire, l'ensemble de tous $\varphi(N)$ tels que la borne supérieure de N est x. On voit alors que $F(x)$ est totalement imparfait. En effet, lorsque l'ensemble $F(x)$ contient un sous-ensemble parfait de R, il contient aussi un sous-ensemble parfait N de R, tel que la borne supérieure de N est $< x$. Pour cet ensemble N, nous avons $\varphi(N) \bar{\in} F(x)$. Or, d'autre part, comme N est un sous-ensemble de $F(x)$, $\varphi(N) \in N < F(x)$, ce qui donne une contradiction. Par suite, $F(x)$ est totalement imparfait.

Or, il existe au plus un intervalle I tel que $I-F(x)$ est totalement imparfait dans R. En effet, par contre, admettons que $I-F(x)$ contienne un sous-ensemble parfait pour tous les intervalles I. Maintenant, considérons les intervalles I_n: $\left(-\frac{1}{n}+x,\ -\frac{1}{n+1}+x\right)(n = 1, 2, \ldots)$. D'après la supposition sur $F(x)$, $I-F(x)$ contient au moins un sous-ensemble parfait de R. Pour un sous-ensemble parfait Q_n de $I_n-F(x)$, posons $N_1 = (x) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n}$, $N_2 = (x) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{2n-1}$(1). Alors, les ensembles N_1, N_2 sont les sous-ensembles parfaits de R et leur borne supérieure est x. Par conséquent, d'après la définition de $F(x)$, $\varphi(N_k) \in F(x)$. Or, comme nous avons $Q_n F(x) = 0$ et par suite $N_k F(x) < (x)$, on a $\varphi(N_k) = x \ (k = 1, 2)$ ou $N_1 = N_2$, ce qui donne une contradiction. Par suite, il existe au moins un intervalle I tel que $I - F(x)$ soit un sous-ensemble totalement imparfait.

Maintenant, comme l'ensemble $\mathfrak{F}$ de tous les intervalles ouverts dont les deux points extrêmes sont des nombres rationnels est (effectivement) dénombrable, on peut ranger effectivement tous les intervalles de $\mathfrak{F}$ en une suite infinie:

$$(*) \qquad I_1, I_2, I_3, \ldots\ldots,$$

telle qu'on ait $I_i \neq I_j$ pour $i \neq j$. Pour tous les nombres naturels n, désignons par T_n tous les nombres réels x tels que $I_n F(x)$ et $I_n - F(x)$ soient simultanément totalement imparfaits dans R. Puisqu'il existe pour tous les points x de R un intervalle, et par suite dans $(*)$ un intervalle I tel que $IF(x)$ et $I - F(x)$ soient des sous-ensembles totalement imparfaits de R, nous avons $R = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$. Or, comme R est de puissance du continu, selon le théorème de M. W. SIERPŃISKI,(2) il existe parmi $T_n (n = 1, 2, \ldots)$ au moins un ensemble T_n dont la puissance est $2^{\aleph_0}$. Désignons par n_0 le nombre naturel minimum n tel que T_n soit de puissance du continu. Alors, pour tous les nombres x tel qu'on ait $x \in T_{n_0}$, $I_{n_0} - F(x)$ et $I_{n_0} F(x)$ sont totalement imparfaits de R. Pour les les deux points extrêmes a et b $(a < b)$ de l'intervalle I_{n_0}, posons

$$\chi(x) = \tan \frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{(3)}$$

et considérons tous les ensembles $\chi(F(x))$ pour tous les points x de T_{n_0}. On voit alors que la famille de tous les ensembles $\chi(F(x))$ satisfait à la condition de la proposition 5.

Puis, nous allons considérer le cas où R est un espace mètrique complet effectivement séparable ayant une infinité indénombrable de

(1) Ici, nous nous servons de l'axiome du choix pour le cas où l'on choisit un élément dans chaque ensemble d'une famille (effectivement) dénombrable d'ensembles non vides.

(2) Voir W. SIERPIŃSKI, Hypothèse du continu, Warszawa, 1934, p. 6.

(3) Voir la note (1) de la page 8.

points. D'après le lemme 1, on peut nommer une transformation continue biunivoque $\chi(t)$ qui transforme l'ensemble de tous les nombres irrationnels L^* en un sous-ensemble R^* de R, tel que $R-R^*$ soit au plus dénombrable. Or, comme il existe une famille $\{E_\lambda\}(\lambda \in \Lambda, \overline{\overline{\Lambda}} = 2^{\aleph_0})$ de sous-ensembles totalement imparfaits de L tels que $L-E_\lambda$ soit aussi totalement imparfait pour tous les éléments λ de Λ, il existe aussi une famille $\{E^*_\lambda\}(\lambda \in \Lambda)$ de sous-ensembles disjoints de L^* qui pour tous les éléments λ de Λ les ensembles E^*_λ et $L^*-E^*_\lambda$ sont totalement imparfaits. Maintenant, considérons les ensembles $\{\chi(E^*_\lambda)\}$ $(\lambda \in \Lambda)$. Puisque $R-R^*$ soit au plus dénombrable, et son complémentaire $R-\chi(E^*_\lambda)$ sont totalement imparfaits. Donc, on voit facilement que la famille de tous les ensembles $\chi(E^*_\lambda)$ satisfait à la condition de la proposition 6. C. Q. F. D.

Lorsqu'on peut nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L, qui satifait à la condition $(*)$ donnée dans la proposition 3, on peut donner une famille (effectivement) de puissance du continu de sous-ensembles de L qui satisfait à la condition de la proposition 6. En effet, selon la remarque de la proposition 3, on peut nommer une famille de fonctions du choix $\varphi_\lambda(E)(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, telle qu'on ait, 1°, $\varphi_\lambda(E)$ jouit de la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L, 2°, $\varphi_\lambda(E) = \varphi_{\lambda'}(E')$ n'a lieu que pour le cas où $\lambda = \lambda'$ ou $E = E'$.

Considérons alors les ensembles $E_\lambda = \sum_N \varphi_\lambda(N)$, où la sommation $\sum_N$ s'étend sur tous les sous-ensembles parfaits de L. Comme E_λ contient un point $\varphi(N)$ pour tous les sous-ensembles parfaits non vides N de L, $L-E_\lambda$ est totalement imparfait. D'autre part, puisque pour deux nombres différents λ et μ de l'intervalle $[0, 1]$ les ensembles E_λ et E_μ contiennent au moins un point de N, quel que soit l'ensemble parfait non vide N de L, E_λ est aussi totalement imparfait. Donc, en étendant ce résultat pour un espace métrique, novs avons la

Proposition 7. *Soit R un espace métrique complet effectivement séparable qui contient une infinité indénombrable de points. Lorsqu'on peut nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de L, qui satisfait à la condition $(*)$ donnée dans la proposition 3. On peut nommer une famille (effectivement) de puissance de continu $\{E_\lambda\}(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ des sous-ensembles disjoints de R, tels que E_λ et $R-E_\lambda$ soient simultanément totalement imparfaits.*

Déjà, nous avons donné des ensembles totalement imparfaits. Or, pour des ensembles partout de deuxième catégorie, en admettant l'hypothèse de M. B. KNASTER, nous avons la

Proposition 8. *Soit R un espace euclidien de dimensions quelconques. On peut nommer alors une famille (effectivement) de puissance du continu des sous-ensembles disjoints de R dont chacun est partout de deuxième catégorie dans R.*

Démonstration. Selon l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut définir une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits de R. Pour un nombre positif x, posons $F(x) = \sum_{\delta(N)=x}\varphi(N)$ où la sommation $\sum_{\delta(N)=x}$ s'étend à tous les sous-ensembles parfaits N de R, tels que leur diamètre $\delta(N) = x$. Posons encore, pour un nombre irrationnel ν tel qu'on ait $0 < \nu < 1$, $E(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x_\nu}{2^n}\right)$ où $x_\nu = \frac{1}{2^{n_1}}(1+\nu)$, pour le nombre naturel n_1, tel qu'on ait $1 < 2^{n_1}\nu < 2$. Alors, la famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles $E(\nu)$ est effectivement de puissance du continu. Je dis que la famille $\mathfrak{F}$ satisfait à la condition de la proposition 8. En effet, montrons d'abord que $E(\mu)E(\nu) = 0$ pour deux nombres irrationnels différents μ et ν. Pour cela supposons, par impossible, qu'on ait $E(\mu)E(\nu) \neq 0$. Alors, pour un point x_0 de $E(\mu)E(\nu)$, il existe les deux nombres naturels m et n tels qu'on ait $x_0 \in F\left(\frac{x_\mu}{2^m}\right)F\left(\frac{x_\nu}{2^n}\right)$. Par suite, selon la définition de $F(x)$, il existe un sous-ensemble parfait N de R, tel qu'on ait $x_0 = \varphi(N)$ et $\delta(N) = \frac{x_\mu}{2^m}$. Or, comme x_0 est aussi un point de $F\left(\frac{x_\nu}{2^m}\right)$, on voit que $\delta(N) = \frac{x_\nu}{2^n}$, ce qui donne $\frac{x_\mu}{2^m} = \frac{x_\nu}{2^n}$, ou $\mu = \nu$. C'est contradictoire avec $\mu \neq \nu$. Nous avons donc $E(\mu)E(\nu) = 0$.

Puis, nous prouverons que $E(\nu)$ est partout de deuxième catégorie dans R, quelque soint le nombre irrationnel ν tel que $0 < \nu < 1$. Supposons, par contre, que $E(\nu)$ ne soit pas partout de deuxième catégorie dans R. Il existe alors dans R un sous-ensemble ouvert U tel que $E(\nu)$ est de première catégorie dans U. Or, comme R est euclidienne, on peut choisir dans U un segment I tel que les deux points extrêmes sont a et b, et que sa longuer est $l = \frac{x_\nu}{2^N}$, pour un nombre naturel N suffisamment grand. En prenant sur I les points a_n et b_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$, tels qu'on ait $\operatorname{dis}(a, a_n) = \operatorname{dis}(b, b_n) = \frac{l}{2^n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, considérerons les sphères ouvertes

$U(a_n) = U\left(a_n, \frac{l}{2(n+1)^2}\right)$ et $U(b_n) = U\left(b_n, \frac{l}{2(n+1)^2}\right)$. Puisque $UU(a_n)$ et $UU(b_n)$ sont de deuxième catégorie dans R et les sous-ensembles disjoints de U, on peut choisir dans chaque ensemble $UU(a_n)$ et $UU(b_n)$ respectivement des sous-ensembles parfaits A_n et B_n[1], tels qu'on ait $(A_n+B_n)E(\nu) = 0$. Alors, on voit sans peine que les ensembles

$$M_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n+k} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{3n+k} + (a) + (b) \qquad (k = 0, 1, 2)$$

satisfont aux conditions suivantes:

1°, M_k $(k = 0, 1, 2)$ sont parfaits et $\delta(M_k) = \frac{x_\nu}{2^N}$,

2°, $M_k-(a)-(b) \subset R-E(\nu)$,

3°, $M_iM_j \subset (a)+(b)$ pour $i \neq j$.

Selon la définition de $F\left(\frac{x_\nu}{2^N}\right)$ et $E(\nu)$, les points distincts $\varphi(M_k)$ sont continus dans $F\left(\frac{x_\nu}{2^N}\right)$ et par suite dans $E(\nu)$. Or, comme M_k satisfont à la condition 2, nous avons $\sum_{k=0}^{2}\varphi(M_k) \subset (a)+(b)$ ce qui donne une contradiction. Donc, $E(\nu)$ est partout de deuxième catégorie dans R.

Dans la proposition 7, nous avons donné ensembles partout de deuxième catégorie. Or, au lieu de la catégorie, pour la mesure on peut démontrer à l'aide de l'hypothèse de M. B. KNASTER la

Proposition 9. *Soit R un espace mètrique où est definie une fonction du choix $\varphi(E)$ pour tous les sous-ensembles parfaits non vides de R. Lorsque la mesure règulière de* M. C. CARATHÉODORY[2] *est dèfinie pour tous les sous-ensembles mesurables (B) de R, on peut choisir effectivement une famille de puissance du contiuu des sous-ensembles disjoints de R dont l'ètendue extèrieure en mesure*[3] *est èquivalent à R.*

Démonstration. Pour un nombre positif x, posons $F(x) = \sum_{\text{mes}(N)=x}\varphi(N)$ où la sommation $\sum_{\text{mes}(N)=x}$ s'étend à tous les sous-ensembles parfaits N de R, tels qu'on ait mes $(N) = x$. Et, de même que nous avons fait

(1) Voir la note (1) de la page 13.

(2) Voir, C. CARATHÉODORY, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1927.

(3) Nous entendrons par une étendue extérieure en mesure " massgleiche Hülle."

dans la démonstration de la proposition 8, posons pour un nombre irrationnel ν tel qu'on ait $0 < \nu < 1$, $E(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{x_\nu}{2^n}\right)$. Alors, la famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles $E(\nu)$ satisfait à la condition de la proposition 9. Comme on peut voir $E(\mu)E(\nu) = 0$ pour $\mu \neq \nu$ de la même façon que nous avons démontré la proposition 8, nous allons montrer que l'étendue extérieure en mesure de $E(\nu)$ est équivalente à R. Pour cela supposons, par impossible; que l'étendue extérieure en mesure de $E(\nu)$ ne soit pas équivalente à R. Il existe alors dans $R - E(\nu)$ un ensemble parfait P de mesure positive. Or, puisque P contient un sous-ensemble parfait de la mesure ε pour un nombre positif ε suffisamment petit, il existe dans P un sous-ensemble parfait Q de la mesure $\frac{x_\nu}{2^N}$ pour un nombre naturel N suffisamment grand. Alors, d'après la définition de $F\left(\frac{x_\nu}{2^N}\right)$, le point $\varphi(Q)$ est contenu dans $F\left(\frac{x_\nu}{2^N}\right)$ et par suite dans $E(\nu)$. D'autre part, comme Q est un sous-ensemble de $R - E(\nu)$ et $\varphi(Q) \in Q$, nous avons $\varphi(Q) \bar{\in} E(\nu)$, ce qui donne une contradiction. C. Q. F. D.

§ 3. Quelques applications aux fonctions non mesurables (L).

En appliquant les propositions obtenues dans le paragraphe 2, on peut donner diverses propositions sur les fonctions non mesurables (L). Or, nous nous satisfaisons de démontrer la proposition suivante.

Proposition 10. *Lorsque l'on peut nommer une fonction du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits linéaires, qui satisfait à la condition* (*) *donnée dans la proposition 3, on peut aussi nommer une fonction non mesurable (L)* $F(x)$ *définie sur tous les nombres réels qui satisfait aux conditions suivantes: 1°, pour deux nombres réels différents* x *et* x', $F(x) \neq F(x')$, *2°, l'image géométrique de la fonction* $F(x)$ *est non mesurable (L) superficiellement dans le plan.*

Démonstration. Pour un sous-ensemble E du plan R, nous désignons par $E(x = x_0)$ (ou $E(y = y_0)$) l'ensemble de tous les points de E situés sur la droite $x = x_0$ (ou $y = y_0$). Désignons encore par $\mathfrak{F}$ la famille de tous les sous-ensembles parfaits N de R, tels qu'on ait, 1°, les projections de l'ensemble N sur les axes d'abscisses et d'ordonnées sont simultanément parfaites, 2°, pour tout nombre réel r, $E(x = r)$

et $E(y=r)$ sont vides ou indénombrables. Or, comme la famille de tous les sous-ensembles parfaits du plan R est effectivement de puissance du continu, on peut nommer une correspondance $\nu(N)$ entre tous les ensembles N de $\mathfrak{F}$ et les nombres réels telle qu'on ait $\nu(N) \neq \nu(N')$ pour deux ensembles différents N et N' de $\mathfrak{F}$.

Comme nous avons fait dans la démonstration de la proposition 3, on peut nommer une famille effectivement de puissance du continu $\varphi_\lambda(E)(-\infty < \lambda < +\infty)$ de fonctions du choix ayant la propriété (K) pour tous les sous-ensembles parfaits linéaires, telles que $\varphi_\lambda(E) = \varphi_{\lambda'}(E')$ n'ait lieu que pour le cas où $\lambda = \lambda'$ ou $E = E'$. Maintenant, posons pour tous les ensembles N de F, $\xi(N) = \varphi_{\nu(N)}(\underset{x}{\text{Proj}}\, N)$. Alors, puisque $\xi(N)$ est un point de $\underset{x}{\text{Proj}}\, N$, l'ensemble fermé $N(x=\xi(N))$ est indénombrable. En désignant par $\mathfrak{P}(N)$ la projection du noyau parfait de N sur l'axe d'ordonnées, posons $\eta(N) = \varphi_{\nu(N)}(\mathfrak{P}(N))$. Alors, selon la définition de $\nu(N)$, nous avons $\xi(N) \neq \xi(N')$ et $\eta(N) \neq \eta(N')$ pour deux ensembles différents N et N' de $\mathfrak{F}$. De plus, comme le point appartient à la projection de $N(x=\xi(N))$ sur l'axe d'ordonnées, le point $(\xi(N), \eta(N))$ est contenu dans N.

Maintenant, cosidérons l'ensemble M de tous les points $(\xi(N), \eta(N))$. L'étendue extérieure en mesure(1) M^* de l'ensemble M est équivalente au plan R en mesure. En effet, supposons, par impossible, que l'ensemble M^* n'est pas équivalent à R. Alors, il existe dans l'ensemble $R-M^*$ un ensemble parfait P de la mesure positive.

Comme on sait, on peut choisir un ensemble parfait Q^* de la mesure linéaire positive dans l'axe d'absisses, tel qu'il existe un nombre positif ε qui est inférieur à la mesure linéaire de $P(x=x_0)$, quel que soit le point x_0 de Q^*. Désignons par Q l'ensemble de tous les points p de l'ensemble P tels que l'abscisse de P appartient à l'ensemble Q^*. Comme la mesure de l'ensemble Q est positive, on peut déterminer un sous-ensemble parfait S^* de la mesure linéaire positive dans l'axe d'ordonnées, tel que la mesure linéaire de (Proj $Q-S^*$) soit $<\frac{1}{2}\varepsilon$ et tel que pour tous les points y_0 de S^* la mesure linéaire de $S^*(y=y_0)$ soit positive. Maintenant, désignons par S l'ensemble de tous les points p de Q tels que l'ordonnée de p appartient à S^*. Alors, pour tous les points y_0 de S^* la mesure linéaire de $S(y=y_0)$ est positive et la projection de sur l'axe d'ordonnées est S^*. D'autre part, pour tous les points x_0 de Q nous avons

(1) Voir la note (3) de le page 16.

$$\operatorname{mes}(S(x=x_0)) = \operatorname{mes}(Q(x=x_0)) - \operatorname{mes}((Q-S)(x=x_0)) > \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon > 0,$$

et la projection de S sur l'axe d'absciesses est Q^*. Donc, S appartient à la famille $\mathfrak{F}$. Donc, le point $(\xi(S), \eta(S))$ est contenu dans l'ensemble M. D'autre part, puisque S est contenu dans $R-M$, le point $(\xi(S), \eta(S))$ n'appartient pas à l'ensemble M, ce qui donne une contradiction. Donc, M est équivalent à R en mesure. De plus, toute droite parallèle à l'axe d'abscisses ou d'ordonnées rencontre l'ensemble M au plus en un point.

En désignant par M_0 l'ensemble de tous les points de M qui appartient au domaine $(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < 0)$, nous définissons la fonction $F(x)$ comme il suit. Soit x_0 un nombre réel donné. S'il existe un point de M_0 sur la droite $x = x_0$ et y_0 est son ordonnée, posons $F(x_0) = y_0$: sinon, posons $F(x_0) = x_0$. Alors, on voit sans peine que la fonction $F(x)$ satisfait aux conditions de la proposition 10.

C. Q. F. D.

Remarque 1. En admettant l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut nommer une fonction non mesurable (L) $F(x)$ définie sur tous les nombres réels, telle que $F(x) \neq F(x')$ pour deux nombres réels différents x et x'. En effet, d'après l'hypothèse de M. B. KNASTER, on peut nommer une fonction du choix $\varphi(E)$ ayant la propriété (K) pour tous les ensembles parfaits linéaires, telle que pour tous les ensembles parfaits linéaires E $\varphi(E)$ soit toujours le point irrationnel. Maintenant, nous définissons la fonction $F(x)$ comme il suit, $F(x) = \varphi([0, x])$ pour $x \neq 0$ et $F(x) = 0$ pour $x = 0$. Alors, d'après la définition de $\varphi(E)$, $F(x) = F(x')$ n'a lieu que pour le cas où $x = x'$. Nous montrons que $F(x)$ est non mesurable (L). Pour cela, selon le théorème de M. W. SIERPIŃSKI(1), il suffit de démontrer que l'ensemble Γ de toutes les valeurs de $F(x)$ est totalement imparfait. Par contre, supposons que Γ contient au moins un sous-ensemble parfait. Alors, il existe dans l'ensemble Γ un sous-ensemble parfait non dense N. Comme nous avons $\varphi(N) \in N < \Gamma$, il existe un nombre réel x_0 tel qu'on ait $\varphi(N) = F(x_0)$, ce qui donne $N = [0, x_0]$. C'est contradictorie à la définition de N. Donc, l'ensemble Γ est totalement imparfait.

---

(1) W. SIERPIŃSKI, Sur l'ensemble des valeurs d'une fonction mesurable à valeurs distinctes, Fund. Math., t. 20 (1933), p. 126.

Remarque 2. Grâce à la proposition 10, on peut démontrer qu'il existe une fonction $f(x, y)$ définie et bornée dans le domaine $(0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1)$ pour laquelle existent les intégrales lebesguiennes

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy ,$$

mais pour laquelle n'existe pas l'integrale lebesguienne

$$\iint\limits_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} f(x, y) dx dy^{(1)} .$$

(1) W. SIERPIŃSKI, Sur les rapports entre l'existence des intégrals

$$\int_0^1 f(x, y) dx, \quad \int_0^1 f(x, y) dy \quad \text{et} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy ,$$

Fund. Math., t. 1 (1920), p. 142.