QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS

Par

Takeshi INAGAKI

Dans les autres travaux[1], j'ai étudié quelques propriétés des espaces abstraits sous le rapport du problème de SOUSLIN. Cette Note est une continuation de l'étude: Dans le premier paragraphe, nous donnons un théorème ayant des relations avec le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits. Dans le second paragraphe, tout d'abord nous donnons une résolvante du problème du continu au moyen de l'axiome du choix, et ensuite nous montrons une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du continu ait la réponse affirmative. Dans le dernier paragraphe, nous cherchons quelques propriétés des espaces abstraits par rapport aux propriétés traitées dans §2.

Mentionnons enfin que, pour un ensemble M, le symbole $M(\aleph_\alpha)$ désigne l'ensemble de tout point p pour lequel la partie commune $V(p)\cdot M$ est de puissance $\geq \aleph_\alpha$ pour tout voisinage $V(p)$ de p.

§ 1. Dans un autre travail[2], nous avons vérifié le

Théorème 0. *Dans un espace accessible, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*1*). *Tout ensemble isolé est au plus dénombrable.*

(*2*). *Tout ensemble non dénombrable ou bien est séparable ou bien contient au moins un point de condensation.*

(*3*). *Tout ensemble non dénombrable ou bien est séparable ou bien contient un noyau dense en soi non vide.*

(*4*). *Tout ensemble clairsemé est séparable.*

---

(1) Voir nos articles: Le problème de SOUSLIN et les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. 1, t. 7 (1939), p. 191-201; Le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. 1, t. 8 (1939), p. 25 46; Les espaces abstraits et les ensembles ordonnés, Ces. Jour., sér. 1, t. 8 (1940), p. 145-162.

(2) Voir ma Note, Les espaces abstraits et les ensembles ordonnés, Ces Jour., sér. 1, t. 8 (1940), p. 152.

Le théorème 0 entraîne le corollaire suivant :

Corollaire. *Dans un espace accessible jouissant de la propriété (1) du théorème 0, tout ensemble M tel que $M\cdot M(\aleph_1) = 0$ est de puissance $\leq \aleph_1$.*

Démonstration. Soit M un ensemble non dénombrable tel que $M\cdot M(\aleph_1) = 0$. Alors, chaque sous-ensemble de M ne contient aucun point de condensation et donc, par la propriété (2) du théorème 0, il est séparable. Ceci étant posé, nous allons vérifier notre proposition. Désignons par M_1 un ensemble de la puissance $\aleph_0$ tel que $M_1 \subseteq M \subseteq \overline{M}_1$, où $\overline{M}_1$ signifie la fermeture de M_1, ce qui est possible par la remarque citée plus haut. Maintenant soit α un nombre ordinal donné $< \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini les ensembles M_ξ pour tout ξ inférieur à α, et nous définirons un ensemble M_α comme suivant: Si l'ensemble $M - \sum_{1\leq\xi<\alpha} M_\xi$ n'est pas vide, il est séparable ; donc il existe un ensemble N de puissance $\aleph_0$ tel que $N \subseteq M - \sum_{1\leq\xi<\alpha} M_\xi \subseteq \overline{N}$. Posons $M_\alpha = N$. Ainsi nous avons une famille $\{M_\alpha\}$, $1 \leq \alpha < \Omega$, des ensembles disjoints deux à deux. Je dis que $M = \sum_{1\leq\alpha<\Omega} M_\alpha$. En effet, si $M - \sum_{1\leq\alpha<\Omega} M_\alpha$ n'est pas vide, il existe un point p appartenant à $M - \sum_{1\leq\alpha<\Omega} M_\alpha$. Alors, par définition de $M_\alpha (1 \leq \alpha < \Omega)$, on a $V(p)\cdot M_\alpha \neq 0$ pour tout voisinage $V(p)$ de p, c.-à-d. le point p est de condensation de M. Ainsi nous aboutissons à une contradiction ; donc $M - \sum_{1\leq\alpha<\Omega} M_\alpha$ est vide et du fait que chaque ensemble M_α est de puissance $\aleph_0$, la puissance de M est $\aleph_1$, c. q. f. d.

On sait que, dans un espace accessible dense en soi, tout ensemble clairsemé est non dense. Par suite, il sera intéressant de chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble non dense soit séparable. A propos de la question, nous avons le

Théorème 1. *Dans un espace accessible dense en soi, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*1*). *Tout ensemble non dense est séparable.*

(*2*). *Tout ensemble non dénombrable ou bien est séparable ou bien contient un noyau dense en soi tel qu'il est partout dense dans un ensemble ouvert non vide.*

Démonstration. (1) → (2). Soit M un ensemble non dénombrable et supposons que M n'est pas séparable. Alors, d'après la propriété (1), M n'est pas non dense et par conséquent sa fermeture $\overline{M}$ contient un ensemble ouvert non vide. Désignons par G le plus grand ensemble ouvert contenu dans $\overline{M}$ et par N la partie commune à M et à G. Comme l'espace considéré est accessible et $G \subseteq \overline{M}$, N est partout dense dans G. D'après l'hypothèse que l'espace considéré est accessible et dense en soi, G est dense en soi et par suite N l'est aussi, puisque N est partout dense dans G. Par conséquent, le noyau dense en soi de M contient N et ce dernier est partout dense dans l'ensemble G ouvert non vide.

(2)$\rightarrow$(1). Soit M un ensemble non dense. Supposons que M n'est pas séparable; alors M est non dénombrable. Donc, par hypothèse (2), M contient un noyau dense en soi N tel qu'il est partout dense dans un ensemble G ouvert non vide. De là nous avons la relation $G \subseteq \overline{N} \subseteq \overline{M}$; donc M n'est pas non-dense. Ainsi nous aboutissons à une contradiction, c. q. f. d.

Du théorème 1, nous avons le

Corollaire. *Dans un espace accessible R dense en soi possédant la propriété (1) du théorème 1, toute suite décroissante des ensembles ouverts est du type inférieur à Ω^2; donc l'espace considéré est $\aleph_1$-séparable.*

Démonstration. Par contre, supposons qu'il existe une suite décroissante des ensembles ouverts du type $\geq \Omega^2$:

$$G_0 > G_1 > \cdots > G_\alpha > \cdots \mid \gamma\,, \quad (\gamma \geq \Omega^2)\,.$$

Par hypothèse même, la différence $G_\beta - G_{\beta+1}$ n'est pas vide; désignons par p_β un point de $G_\beta - G_{\beta+1}$ et posons $M_\alpha = \sum_{\Omega\alpha \leq \beta < \Omega(\alpha+1)} p_\beta$. Or, comme on peut aisément vérifier, l'ensemble M_α est non séparable. Par conséquent, de la supposition posée et de la propriété (2) du théorème 1, la fermeture $\overline{M}_\alpha$ contient un ensemble ouvert non vide. Soit g_α le plus grand ensemble ouvert contenu dans $\overline{M}_\alpha$; alors on a $g_\alpha \cdot G_{\Omega(\alpha+1)} = 0$ et $g_\alpha \subseteq G_{\Omega\alpha}$, puisque tous les G_β sont ouverts et décroissants. Ainsi nous avons une famille $\{g_\alpha\}$, $0 \leq \alpha < \Omega$, de puissance $\aleph_1$, des ensembles ouverts disjoints deux à deux. Maintenant posons:

$g_\Omega =$ le plus grand ensemble ouvert contenu dans $R - \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} g_\alpha$

et $$N = R - \sum_{0 \leq \alpha \leq \Omega} g_\alpha + \sum_{0 \leq \alpha \leq \Omega} p_\alpha \quad \text{où} \quad p_\alpha \in g_\alpha\,.$$

Comme on peut sans peine prouver, N est fermé, non dense et non séparable. Nous aboutissons donc à une contradiction et l'implication que nous avions en vue est établie.

Du fait démontré plus haut, nous pouvons immédiatement conclure que l'espace considéré est $\aleph_1$-séparable, c. q. f. d.

Remarque—En rapprochant les théorèmes 0 et 1, nous pouvons considérer les questions: 1° Un espace accessible—qui est même un espace de HAUSDORFF—vérifiant le premier axiome de séparabilité (erstes Abzählbarkeitsaxiom) et jouissant de la propriété (1) du théorème 0, est-il nécessairement $\aleph_1$-séparable?, 2° Un espace accessible—qui est même un espace de HAUSDORFF—vérifiant le premier axiome de séparabilité et jouissant de la propriété (1) du théorème 1, est-il nécessairement séparable?

Si les questions 1° et 2°, respectivement, sont résolues affirmativement, on a alors les réponses affirmatives des problèmes du continu de CANTOR et de SOUSLIN respectivement. Par conséquent, il sera intéressant de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les espaces dans les questions précédentes soient respectivement $\aleph_1$-séparable et séparable.

§2. En se basant sur l'axiome du choix, nous donnons ici une résolvante du problème du continu de CANTOR. Tout d'abord, prenons l'espace (R, V) de tous les nombres réels. Comme on sait, l'espace (R, V) est parfaitement séparable et il existe donc une famille $\{V\}$ d'une infinité dénombrable des intervalles telle que, quel que soit le point p de R, la famille des voisinages $\{V(p)\}$ dans lesquels p est contenu soit équivalente à la famille, donnée d'avance, des voisinages de p. Or, il résulte du théorème de M. ZERMELO qu'il existe une suite transfinie

$$(*) \qquad p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_\alpha,\ \ldots \mid \varphi, \qquad (\alpha < \varphi),$$

formée de tous les nombres réels; nous pouvons supposer que le type φ de cette suite est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu. En modifiant la définition de la dérivation de l'espace (R, V), nous allons maintenant définir un nouvel espace (R, V^*) de HAUSDORFF comme il suit: Pour un point p_α de R, désignons par $\{V(p_\alpha)\}$ la famille des voisinages du point p_α dans l'espace (R, V) et définissons les voisinages $\{V^*(p_\alpha)\}$ du point p dans le nouvel espace (R, V^*) par le symbole logique:

$$(**) \qquad \left[p \in V^*(p_\alpha)\right] \equiv \left[\left\{p \in V(p_\alpha)\right\} \cdot \left\{(p = p_\beta) \rightarrow (0 \leq \beta \leq \alpha)\right\}\right].$$

L'espace $(R,\ V^*)$ ainsi défini est un espace de HAUSDORFF vérifiant le premier axiome de séparabilité.

Nous allons à présent prouver que l'espace $(R,\ V^*)$ possède les propriétés suivantes :

1° Dans l'espace $(R,\ V^*)$, tout ensemble est clairsemé.

2° Dans l'espace $(R,\ V^*)$, tout ensemble isolé est au plus dénombrable.

En effet, pour prouver que la propriété 1° est vérifiée par l'espace $(R,\ V^*)$, prenons un ensemble M quelconque. Comme tous les points de R sont rangés dans la suite $(*)$ bien ordonnée, il existe un point p_α qui est le premier d'entre tous les points de M, et, en tenant compte de la définition de l'espace $(R,\ V^*)$, p_α est un point isolé de M, ce qui démontre ce que nous avions en vue.

Ensuite, nous allons démontrer que l'espace $(R,\ V^*)$ vérifie la propriété 2°. Pour ce but, il est suffisant de prouver que tout ensemble non dénombrable contient au moins un point d'accumulation de lui-même. Soit M un ensemble non dénombrable; alors M contient une suite transfinie du type Ω:

$$p_{\alpha_1},\ p_{\alpha_2},\ \ldots,\ p_{\alpha_\beta},\ \ldots \mid \Omega,\quad (1 \leq \beta < \Omega),$$

où $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\beta < \ldots$. Posons $N = \sum_{1 \leq \beta < \Omega} p_{\alpha_\beta}$ et démontrons que $N \cdot N(\aleph_0) \neq 0$. Considérons N comme un ensemble dans l'espace $(R,\ V)$, et il existe alors dans N un ensemble dénombrable $\{p_{\alpha_{\beta_n}}\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, tel qu'il est partout dense sur N dans l'espace $(R,\ V)$, puisque l'espace $(R,\ V)$ est parfaitement séparable. Or, pour tout nombre entier n, le nombre ordinal β_n est de seconde classe ou fini, et donc il existe un nombre ordinal β_0 de seconde classe supérieur à tout β_n. Par conséquent, l'ensemble $N^* = \sum_{1 \leq \beta < \beta_0} p_{\alpha_\beta}$ est au plus dénombrable. Je dis que l'ensemble N^* est partout dense sur N dans l'espace $(R,\ V^*)$. En effet, soit p_{α_β} est un point de N n'appartenant pas à N^*; alors, selon la définition de N^*, on a $\beta > \beta_n$ pour tout n. Par suite, pour tout voisinage $V(p_{\alpha_\beta})$ de p_{α_β} dans l'espace $(R,\ V)$, la partie commune $V(p_{\alpha_\beta}) \cdot N^*$ n'est pas vide, puisque N^* est partout dense sur N dans l'espace $(R,\ V)$ et de la définition de l'espace $(R,\ V^*)$ on a $V^*(p_{\alpha_\beta}) \cdot N^* \neq 0$. Autrement dit, N^* est partout dense sur N dans l'espace $(R,\ V^*)$. Par suite N n'est pas un ensemble isolé, et à plus forte raison l'ensemble M n'est pas isolé, c. q. f. d.

Ces préliminaires étant posés, désignons par $R(\aleph_1)$ l'ensemble de tous les points de condensation dans l'espace $(R,\ V^*)$. Je dis que $R(\aleph_1)$ est une résolvante du problème du continu de CANTOR. En effet, si $R(\aleph_1)=0$, du corollaire du théorème 0, nous pouvons conclure que la puissance de R est $\aleph_1$, c.-à-d. la puissance du continu est $\aleph_1$. D'autre part, si $R(\aleph_1)\neq 0$, il existe un point p_α de R et, en vertu de la définition de l'espace (R, V^*), on a $\alpha \geq \Omega$; donc, d'après la propriété de la suite $(*)$, on a $\varphi > \Omega$, c.-à-d. la puissance du continu est plus grande que $\aleph_1$, c. q. f. d.

Nous pouvons comprendre de la résolvante du problème du continu donnée plus haut qu'il est intéressant de chercher cette propriété d'un espace où il n'y a aucun point de condensation d'un ensemble clairsemé. A propos de cette question, nous aurons à discuter dans le paragraphe suivant.

Puis nous considérons une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du continu ait la réponse affirmative. Pour le voir, nous adoptons tout d'abord la définition suivante:

Un ensemble M est dit $\aleph_2$-hyper-condensé en soi, si tout sous-ensemble E de puissance $\geq \aleph_2$ de M possède la propriété que $E\cdot E(\aleph_2)\neq 0$. D'après cette définition, nous pouvons sans peine obtenir le théorème suivant en vertu du même raisonnement que celui qui a été usé pour un ensemble possédant la propriété hyper-condensé en soi:

Théorème 2. *Dans un espace (v), les quatre propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*1*). *Soit M un sous-ensemble quelconque dans l'espace (v). Une famille $\{V\}$ d'ensemble couvrant M telle que, pour chaque point p de M il existe un ensemble V contenant le point p à son intérieur, contient une sous-famille $\{V\}^*$ couvrant M telle que la puissance de $\{V\}^*$ est au plus $\aleph_1$.*

(*2*). *Tout sous-ensemble M de puissance $\geq \aleph_2$ de l'espace (v) possède la propriété que $M\cdot M(\aleph_2)\neq 0$.*

(*3*). *Tout ensemble clairsemé dans l'espace (v) est au plus de puissance $\aleph_1$.*

(*4*). *Chaque famille $\{F_\alpha\}$ bien ordonnée d'ensembles monotones décroissants telle que F_α ne sont pas contenus dans la fermeture de $F_{\alpha+1}$, est au plus de puissance $\aleph_1$.*

Or, ces préliminaires étant posés, dans un espace (v) nous considérons les cinq propriétés ci-dessous; Pour tout ensemble M de l'espace considéré:

(A). $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_1 \rightarrow M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$,

(B). $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_1 \rightarrow M \cdot M(\aleph_0) \neq 0$,

(C). $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_2 \rightarrow M \cdot M(\aleph_2) \neq 0$,

(D). $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_2 \rightarrow M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$,

(E). $\overline{\overline{M}} \geq \aleph_2 \rightarrow M \cdot M(\aleph_0) \neq 0$,

où comme d'habitude $\overline{\overline{M}}$ désigne la puissance de M et le symbole " $\longrightarrow$ " signifie " si..., alors... "

Dans un espace accessible, du corollaire du théorème 0 et du théorème 2 nous avons les implications suivantes:

(*A*) *entraîne* (*B*) *et* (*C*), (*B*) *et* (*C*) *entraînent* (*D*), *et* (*D*) *entraîne* (*E*). D'où nous aurons immédiatement la question: *Quelle condition est nècessaire et suffisante pour que* (*B*) *entraîne* (*C*)? Il me semble qu'il est assez difficile de donner une telle condition pour un espace accessible général, mais on peut en donner une pour un espace de Hausdorff vérifiant le premier axiome de séparabilité:

Théorème 3. *Dans un espace de HAUSDORFF vérifiant le premier axiome de sèparabilitè, une condition nècessaire et suffisante pour que* (*B*) *entraîne* (*C*) *est que* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Démonstration. Nécessité—Considérons l'espace (R, V^*) défini dans le début de ce paragraphe. Comme on a démontré ci-dessus, cet espace possède la propriété (B) et de plus il est clairsemé et de puissance $2^{\aleph_0}$. D'après l'hypothèse que (B) entraîne (C), l'espace considéré jouit de la propriété (C) et par conséquent du théorème 2 la puissance de l'espace est au plus $\aleph_1$. On a donc $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$. En outre on a $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$, donc il vient $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Suffisance—Comme on sait, dans un espace de Hausdorff vérifiant le premier axiome de séparabilité la puissance d'ensemble séparable est au plus $2^{\aleph_0}$. D'après l'hypothèse, on a $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et par conséquent tout ensemble clairsemé de l'espace considéré est au plus $\aleph_1$, puisque, par hypothèse que l'espace considéré possède la propriété (B) et du théorème 0, tout ensemble clairsemé est séparable. Par conséquent, l'espace considéré possède la propriété (C) selon le théorème 2, c. q. f. d.

§ 3. Dans ce paragraphe, nous chercherons la propriété suivante d'un espace: pour tout ensemble clairsemé M de l'espace, on a

$M(\aleph_1) = 0$. Tout d'abord, nous faisons connaître la situation de cette propriété dans la théorie des espaces abstraits. Pour ce but, nous démontrons le

Théorème 4. *Pour qu'un espace* (v) *possède la propriété hyper-condensé en soi, il est nécessaire et suffisante que deux affirmations suivantes soient vraies à la fois :*

(1). L'espace possède la propriété condensé en soi.

(2). On a $M(\aleph_1) = 0$ *pour tout ensemble clairsemé* M *de l'espace.*

Démonstration. Il est évident que la propriété (1) est nécessaire pour qu'un espace (v) possède la propriété hyper-condensé en soi. Quant à la propriété (2), il sera suffisant de rappeler que dans un espace (v) la propriété hyper-condensé en soi équivaut à la propriété que tout ensemble clairsemé est au plus dénombrable.

Réciproquement, soit M un ensemble clairsemé de l'espace (v). Par la propriété (2), on a $M(\aleph_1) = 0$ et selon la propriété (1) on a $\overline{\overline{M}} \leq \aleph_0$, c. q. f. d.

Relativement aux propriétés condensé en soi et (2) du théorème 4, nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 5. *Dans un espace quasiaccessible* (R, V), *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1). L'espace (R, V) *est condensé en soi.*

(2). S'il existe une suite décroissante des ensembles fermés du type Ω *:*

$$F_0 > F_1 > \cdots > F_\alpha > \cdots \mid \Omega ,$$

la partie commune $\prod_{0 \leq \alpha < \Omega} F_\alpha$ *n'est pas vide.*

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2). Soit p_α un point de F_α et n'appartenant pas à $F_{\alpha+1}$ et posons $M = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} p_\alpha$. Par la supposition (1), il existe au moins un point p de condensation de M. Je dis que le point p est contenu dans la partie commune $\prod_{0 \leq \alpha < \Omega} F_\alpha$. En effet, si p n'appartient pas à un ensemble F_{α_0}, il existe un voisinage $V(p)$ de p tel que $V(p) \cdot F_{\alpha_0} = 0$, puisque F_{α_0} est fermé, et par suite de la définition de M la partie commune $V(p) \cdot M$ est au plus dénombrable. Donc le point p n'est pas de condensation de M, ce qui contredit l'hypothèse que $p \in M(\aleph_1)$. Ainsi nous avons l'implication (1) $\rightarrow$ (2).

(2) $\rightarrow$ (1). Supposons que l'espace (R, V) n'est pas condensé en soi. Alors nous pouvons supposer sans perdre la généralité du

raisonnement qu'il existe dans l'espace (R, V) un sous-ensemble M de puissance $\aleph_1$ tel que $M(\aleph_1) = 0$. Rangeons l'ensemble M en une suite transfinie du type Ω:

$$p_0, \; p_1, \; \ldots, \; p_\alpha, \; \ldots \mid \Omega$$

et posons $R = \overline{M} + G_0$, où $\overline{M}$ est la fermeture de M et $G_0 = R - \overline{M}$. Il est clair que G_0 est ouvert, puisque l'espace considéré est quasiaccessible. Or, en tenant compte de la propriété de M, pour chaque point p de $\overline{M}$ il existe un voisinage $V(p)$ tel que la partie commune $V(p)\cdot M$ est au plus dénombrable et non vide, et faisons correspondre à chaque point p de $\overline{M}$ un tel voisinage $V(p)$. Cela posé, soit

$$p_{\alpha_1}, \; p_{\alpha_2}, \; \ldots, \; p_{\alpha_n}, \; \ldots .$$

une suite de tous les points d'un ensemble $V(p)\cdot M$. Pour tout n, α_n est un nombre ordinal de seconde classe ou fini et donc il existe le plus petit nombre ordinal α de seconde classe ou fini supérieur à α_n pour tout n. Ceci étant posé, nous dirons que le voisinage $V(p)$ est du rang α. Désignons par g_α la somme de tous les voisinages dont les rangs sont inférieurs à α; alors on peut sans peine vérifier que g_α est ouvert et que $g_\alpha < g_{\alpha+1}$ pour tout α. Si l'on pose $G_\alpha = G_0 + \sum_{1 \leq \beta \leq \alpha} g_\beta$, on a

$$(*) \qquad G_0 < G_1 < \cdots < G_\alpha < \ldots \mid \Omega \qquad \text{et} \quad \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} G_\alpha = R,$$

puisque chaque point de $\overline{M}$ est contenu dans un voisinage du certain rang α. Posons $F_\alpha = R - G_\alpha$; alors les ensembles F_α sont fermés et décroissants, et de plus, comme on peut voir de la formule $(*)$, la partie commune $\prod_{0 \leq \alpha < \Omega} F_\alpha$ est vide, ce qui est contraire à la supposition (2), c. q. f. d.

Ensuite, nous allons étudier la propriété d'un espace où il n'y a aucun point de condensation d'un ensemble clairsemé. Pour le voir, nous adoptons tout d'abord la définition suivante:

Définition. Soit M un ensemble dans un espace (v). Alors nous dirons que l'ensemble M possède la propriété hyper-condensé en soi au point p, lorsqu'il existe un voisinage $V(p)$ de ce point tel que la partie commune $V(p)\cdot M$ est hyper-condensé en soi. Notamment, un ensemble M est dit localement hyper-condensé en soi, lorsqu'il est hyper-condensé en soi à chaque point de l'espace.

De la définition posée, nous avons les

Théorème 6. *Dans un espace* (v), *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*1*). *Pour tout ensemble clairsemé* M, *on a* $M(\aleph_1) = 0$.

(*2*). *Tout ensemle clairsemé est localemente hyper-condensé en soi.*

Démonstration. (1)→(2). Soit M un ensemble clairsemé. D'après l'hypothèse, on a $M(\aleph_1) = 0$, et par conséquent il y a, pour un point p quelconque de l'espace, un voisinage $V(p)$ tel que $V(p)\cdot M$ est au plus dénombrable ; donc l'ensemble $V(p)\cdot M$ est hyper-condensé en soi.

(2)→(1). Soit M un ensemble clairsemé et supposons, par contre, qu'il y a un point p de condensation de M. Alors, selon l'hypothèse (2), il y a un voisinage $V(p)$ tel que $V(p)\cdot M$ est hyper-condensé en soi et de plus non dénombrable. Par conséquent, $V(p)\cdot M$ contient un noyau dense en soi non vide et à plus forte raison l'ensemble M contient un noyau dense en soi non vide, ce qui contredit que M est clairsemé, c. q. f. d.

Théorème 7. *Dans un espace* (v) — *qui est même un espace de* HAUSDORFF *vérifiant le premier axiome de séparabilité—les trois propriétés suivantes sont indépendantes deux à deux.*

(*1*). *L'espace est condensé en soi.*

(*2*). *L'espace est localement hyper-condensé en soi.*

(*3*). *Tout ensemble isolé de l'espace est au plus dénombrable.*

Démonstration. (1) n'entraîne pas (2) et (3) : Considérons un espace qui se compose de toutes les couples (x, y) des nombres réels, où $0 < x < 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Nous définirons la relation de l'ordre entre les points de l'espace comme suivant:

$$\text{Si } x > x', \text{ alors } (x, y) > (x', y') \text{ pour tout } y \text{ et } y'.$$
$$\text{Si } x = x' \text{ et } y > y', \text{ alors } (x, y) > (x', y').$$

Comme j'ai démontré dans un autre travail,[1] l'espace ainsi défini est condensé en soi. Mais l'ensemble formé de tous les points $\left\{\left(x, \frac{1}{2}\right)\right\}$, où $0 < x < 1$, est évidemment un ensemble isolé et non dénombrable. Et de plus, l'espace considéré n'est pas hyper-condensé en soi à chaque point $(x, 0)$, où $0 < x < 1$, puisque, comme on peut sans peine voir, chaque intervalle contenant à ce

(1) Voir mon article, Le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. 1, t. 8 (1939), p. 29-30.

point $(x, 0)$ contient une infinité non dénombrable des intervalles disjoints deux à deux.

(2) n'entraîne pas les autres : Prenons un espace linéairement ordonné qui se compose de toutes les couples (α, x), excepté $(0, 0)$, des nombres ordinaux α et des nombres réels x, où $0 \leq \alpha < \Omega$ et $0 \leq x < 1$, tel que

$$\text{si } \alpha > \alpha', \text{ alors } (\alpha, x) > (\alpha', x') \text{ pour tout } x \text{ et } x',$$

$$\text{et si } \alpha = \alpha', \quad x > x', \quad \text{alors } (\alpha, x) > (\alpha', x') .$$

Comme on peut aisément prouver, l'espace ainsi défini possède cette propriété que, pour chaque point (α, x), il existe un intervalle contenant au point (α, x) qui est semblable à l'intervalle $0 < y < 1$ des nombres réels. Par conséquent, l'espace considéré est localement hyper-condensé en soi. Mais, d'autre part, l'ensemble formé de tous les points $\left\{\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)\right\}$, où $0 \leq \alpha < \Omega$, est isolé et de plus cet ensemble ne possède aucun point de condensation dans l'espace. Il en résulte que (2) n'entraîne pas (3) et (1).

(3) n'entraîne pas (1) et (2) : Soit

$$p_0, \; p_1, \; \ldots, \; p_\alpha, \; \ldots, \; p_\Omega \mid \Omega + 1$$

une suite transfinie des nombres réels différents du type $\Omega + 1$ et soit p_Ω un point de condensation, dans l'espace des nombres réels (R, V), de l'ensemble $\sum\limits_{0 \leq \alpha < \Omega} p_\alpha$. Désignons par R^* l'ensemble formé de tous les nombres réels p_α $(0 \leq \alpha \leq \Omega)$ et définissons un espace (R^*, V^*) de HAUSDORFF en suivant la même consideration que celle qui a été employée dans § 2 pour donner une résolvante du problème du continu et en modifiant la formule $(**)$ comme il suit :

$$\left[p \in V^*(p_\alpha)\right] \equiv \left[(p \in R^*) \cdot \left\{p \in V(p_\alpha)\right\} \cdot \left\{(p = p_\beta) \rightarrow (0 \leq \beta \leq \alpha)\right\}\right],$$

où $0 \leq \alpha \leq \Omega$.

Or, en vertu de la considération usée dans § 2, nous pouvons sans peine démontrer que cet espace (R^*, V^*) possède la propriété (3). Puis, dans cet espace (R^*, V^*) il est clair qu'il y a un voisinage $V^*(p_\Omega)$ du point p_Ω tel que l'ensemble $R^* - V^*(p_\Omega)$ est de puissance $\aleph_1$ et que l'ensemble $R^* - V^*(p_\Omega)$ ne possède aucun point de condensation ; donc l'espace considéré n'est pas condensé en soi. Finalement, je dis que cet espace n'est pas hyper-condensé en soi au point p_Ω. En effet, par hypothèse posée, chaque voisinage $V^*(p_\Omega)$ du point p_Ω est de puissance $\aleph_1$ et du plus, selon la définition de l'espace, il est clairsemé, et par conséquent notre assertion est établie, c. q. f. d.

Quant à un espace localement hyper-condensé en soi, on a le

Lemme. *Dans un espace (v) localement hyper-condensé en soi, pour un ensemble M, si $M(\aleph_1) \neq 0$, alors on a $M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$.*

En effet, supposons que $p \in M(\aleph_1)$, alors il existe un voisinage $V(p)$ du point p tel que $V(p) \cdot M$ est de puissance $\geq \aleph_1$ et hyper-condensé en soi. Par conséquent, $V(p) \cdot M$ contient au moins un point de condensation de $V(p) \cdot M$, et à plus forte raison M contient un point de condensation, autrement dit $M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$, c. q. f. d.

Théorème 8. *Dans un espace de* HAUSDORFF *vérifiant le premier axiome de séparabilité, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1). *L'espace est localement hyper-condensé en soi.*

(2). *Pour tout ensemble M, si $M(\aleph_1) \neq 0$, alors on a $M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$.*

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2). Cette implication est évidemment vraie selon le lemme précédent.

(2) $\rightarrow$ (1). Supposons que l'espace considéré n'est pas hyper-condensé en soi à un point p. Comme l'espace de HAUSDORFF considéré vérifie le premier axiome de séparabilités, sans perdre la généralité du raisonnement, on peut désigner par $\{V_n(p)\}$ tous les voisinages du point p et de plus supposer que:

$$V_1(p) > V_2(p) > \cdots > V_n(p) > \cdots .$$

et

$$\prod_{n=1}^{\infty} V_n(p) = p .$$

En tenant compte du fait qu'une somme d'une infinité dénombrable des ensembles possédant la propriété hyper-condensé en soi l'est aussi, on peut conclure qu'il existe une suite des nombres naturels n_k, où $n_k < n_{k+1}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, tel que l'ensemble différent $V_{n_k}(p) - V_{n_{k+1}}(p)$ n'est pas hyper-condensé en soi. Posons $N_k = V_{n_k}(p) - V_{n_{k+1}}(p)$ pour tout k; alors il est évident qu'on peut tirer un ensemble M_k non dénombrable tel que $M_k \subseteq N_k$ et $M_k \cdot M_k(\aleph_1) = 0$. Dans ce cas, il y a deux cas possibles:

Premier cas: Pour certain k, $M_k(\aleph_1)$ est non vide. Dans ce cas, pour l'ensemble M_k, la propriété (2) n'est pas vraie et par conséquent nous aboutissons à une contradiction.

Deuxième cas, où tous les $M_k(\aleph_1)$ sont vides. Posons $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$. Il est clair que $p \bar{\in} M$ et $p \in M(\aleph_1)$. Nous allons maintenant prouver que $M \cdot M(\aleph_1) = 0$. En effet, soit q un point de M. Il existe alors deux voisinages $V(q)$ et $V_n(p)$ dont la partie commune est vide, puisque l'espace considéré est un espace de HAUSDORFF et $p \neq q$. Or, d'après l'hypothèse posée, il y a un nombre naturel n_k tel que $V_n(p) \supseteq V_{n_k}(p)$. Par conséquent, de la définition de M_k, on a $V(q) \cdot \sum_{i=k}^{\infty} M_i = 0$ et il y a un voisinage $V_i(q)$ tel que, pour $i = 1, 2, \ldots, n_k - 1$, $V_i(q) \cdot M_i$ est au plus de puissance $\aleph_0$, puisque $M_i(\aleph_1) = 0$ pour tout entier i. Si l'on désigne par $U(q)$ un voisinage de ce point q contenu dans l'ensemble produit $V(q) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} V_i(q)$, on a évidemment $U(q) \cdot M = U(q) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} M_i$ et ce membre droit de l'égalité est au plus de puissance $\aleph_0$. De là le point q n'est pas de condensation de M, et par conséquent on a $M \cdot M(\aleph_1) = 0$, ce qui contredit la propriété (2), c. q. f. d.

Les théorèmes 6 et 8 nous suggèrent le

Théorème 9. *Dans un espace accessible possédant cette propriété que si $M(\aleph_1) \neq 0$ pour un ensemble M, alors on a $M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$, tout ensemble clairsemé ne possède aucun point de condensation.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver dans l'espace que si $M(\aleph_1) \neq 0$ pour un ensemble M, alors $M \cdot M(\aleph_1)$ est dense en soi et non vide. Or, soit M un ensemble tel que $M(\aleph_1) \neq 0$ et posons $N = M \cdot M(\aleph_1)$ qui n'est pas vide selon l'hypothèse posée. Soient p un point de N et $V(p)$ un voisinage de p. Comme l'espace est accessible, on peut considérer $V(p)$ comme un ensemble ouvert. Or, comme on peut voir, l'ensemble $V(p) \cdot (M - p)$ possède p comme un point de condensation de lui-même, et par conséquent, selon la propriété de l'espace, $V(p) \cdot (M - p)$ contient un point q de condensation différent de p, c.-à-d. $V(p) \cdot (M - p) \cdot M(\aleph_1) \neq 0$. Il vient donc $V(p) \cdot (N - p) \neq 0$, ce qui montre que le point p est d'accumulation de N, autrement dit N est dense en soi, c. q. f. d.

Dans ce qui suit, nous considérons une propriété par rapport à la propriété qu'un ensemble clairsemé ne possède aucun point de condensation : Tout d'abord, nous définirons la dérivée d'ordre α au sens restreint d'un ensemble M par les conditions : $M^{(1)} = M \cdot M(\aleph_0)$, $M^{(\alpha+1)} = M^{(\alpha)} M^{(\alpha)}(\aleph_0)$ et $M^{(\alpha)} = \prod_{1 \leq \xi < \alpha} M^{(\xi)}$ si α est un nombre limite. De la définition, il est clair que

$$M \supseteq M^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq M^{(\alpha)} \supseteq \cdots.$$

Comme on peut voir, si M est un ensemble clairsemé, il y a le plus petit nombre ordinal α pour lequel $M^{(\alpha)}$ est vide. Dans ce cas, M est dit d'ordre α. Par cette convention, nous avons le

Lemme. *Dans un espace accessible, pour un ensemble M, on a $M^{(\alpha)} \subseteq M^{(\beta)}(\aleph_0)$ pour $\beta < \alpha$.*

Démonstration. Posons maintenant $N^{(0)} = M - M^{(1)}$ et $N^{(\alpha)} = M^{(\alpha)} - M^{(\alpha+1)}$; alors, pour démontrer ce lemme, il est suffisant de prouver que $N^{(\alpha)} \subseteq N^{(\beta)}(\aleph_0)$ pour $\beta < \alpha$. Par définition même, tous les $N^{(\alpha)}$ sont isolés. Tout d'abord, nous démontrons que tout $N^{(\alpha)}(\alpha \geq 1)$ est contenu dans $N^{(0)}(\aleph_0)$ par induction transfinie.

Premier cas, où $\alpha = 1$. Soit p un point de $N^{(1)}$, also $p \in M^{(1)} - M^{(2)}$, c.-à-d. le point p est isolé dans l'ensemble $M^{(1)}$, et par conséquent il existe un voisinage $V(p)$ de p tel que $V(p) \cdot M^{(1)} = p$. Supposons, par contre, que le point p n'est pas d'accumulation de $N^{(0)}$, alors il y a un voisinage $U(p)$ pour lequel on a $U(p) \cdot N^{(0)} = 0$. Comme l'espace considéré est accessible, il y a un voisinage $W(p)$ contenu dans la partie commune à $V(p)$ est à $U(p)$, et il vient donc: $W(p) \cdot M = W(p) \cdot \{M - M^{(1)} + M^{(1)}\} = W(p) \cdot N^{(0)} + W(p) \cdot M^{(1)} \subseteq p$. Ce fait montre que le point p n'est pas d'accumulation de M. Nous aboutissons donc à une contradiction.

Deuxième cas. Soit α un nombre ordinal donné d'avance et supposons que tout $N^{(\xi)}(1 \leq \xi < \alpha)$ est contenu dans $N^{(0)}(\aleph_0)$ et démontrons que $N^{(\alpha)} \subseteq N^{(0)}(\aleph_0)$. Soit p un point de $N^{(\alpha)}$. Par définition, p n'appartient pas à $M^{(\alpha+1)}$, et par conséquent p est un point d'accumulation de l'ensemble $\sum_{0 \leq \xi < \alpha} N^{(\xi)}$. Il vient donc $V(p) \cdot (\sum_{0 \leq \xi < \alpha} N^{(\xi)}) \neq 0$ pour tout voisinage $V(p)$ de p. D'autre part, on a $\sum_{0 \leq \xi < \alpha} N^{(\xi)} \subseteq N^{(0)} + N^{(0)}(\aleph_0)$ selon l'hypothèse posée, on a donc $N^{(\alpha)} \subseteq N^{(0)}(\aleph_0)$ en remarquant que l'espace est accessible.

Ensuite, nous démontrons que $N^{(\alpha)} \subseteq N^{(\beta)}(\aleph_0)$ pour $\beta < \alpha$. Posons $\tilde{M} = \tilde{M}^{(\beta)}$ et considérons la famille des dérivées au sens restreint de $\tilde{M}$. On a alors $\tilde{N}^{(0)} = \tilde{M} - \tilde{M}^{(1)} = N^{(\beta)}$ et $\tilde{N}^{(\gamma)} = \tilde{M}^{(\gamma)} - \tilde{M}^{(\gamma+1)} = N^{(\alpha)}$, où γ est un nombre ordinal tel que $\beta + \gamma = \alpha$. Du fait démontré plus haut, on a immédiatement $\tilde{N}^{(\gamma)} \subseteq \tilde{N}^{(0)}(\aleph_0)$, c.-à-d. $N^{(\alpha)} \subseteq N^{(\beta)}(\aleph_0)$, c. q. f. d.

Théorème 10. *Dans un espace accessible possédant la propriété (B), les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(*1*). *Pour tout ensemble clairsemé M, on a $M(\aleph_1) = 0$.*

(*2*). *Tout ensemble clairsemé est au plus d'ordre Ω.*

Démonstration. (1) → (2). Soit M un ensemble clairsemé et supposons, par impossible, que $M^{(\Omega)} \neq 0$. Prenons un point p de $M^{(\Omega)}$. Selon le lemme précédent, le point p est d'accumulation de $N^{(\alpha)} (0 \leq \alpha < \Omega)$ et $N^{(\alpha)} \cdot N^{(\beta)} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. Par suite le point p est de condensation de M, ce qui est contraire à la supposition (1).

(2) → (1). Tout d'abord nous allons démontrer que $M \cdot M(\aleph_1) = 0$ pour tout ensemble clairsemé M. Maintenant soit M un ensemble clairsemé et supposons que $M \cdot M(\aleph_1) \neq 0$. Prenons un point p de $M \cdot M(\aleph_1)$ et considérons les dérivées $M^{(\alpha)}$ au sens restreint de M pour tout nombre ordinal α de seconde classe ou fini. En vertu de l'hypothèse que l'espace considéré possède la propriété (B), tous les ensembles $N^{(\alpha)}$, où $N^{(\alpha)} = M^{(\alpha)} - M^{(\alpha+1)}$, sont au plus de puissance $\aleph_0$ et par suite on a $p \in M^{(\alpha)}$ pour tout α inférieur à Ω. Par définition, il vient $p \in M^{(\Omega)}$, ce qui contredit la supposition (2). Nous avons ainsi $M \cdot M(\aleph_1) = 0$ pour tout ensemble clairsemé M. Puis nous démontrons que $M(\aleph_1) = 0$ pour tout ensemble clairsemé M. En effet, par impossible, supposons qu'il existe un ensemble clairsemé N tel que $N \cdot N(\aleph_1) = 0$ et $N(\aleph_1) \neq 0$. Soit p un point de $N(\aleph_1)$; alors l'ensemble formé d'un seul point p est clairsemé. Comme on sait, dans un espace accessible la somme M des ensembles clairsemés N et p l'est aussi. Or, par définition de M, on a $p \in M \cdot M(\aleph_1)$ et ce qui contredit le fait démontré plus haut, c. q. f. d.

En rapprochant les théorèmes 3 et 10, nous considérons la propriété (F) suivante:

(*F*). *Tout ensemble clairsemé est d'ordre inférieur à Ω^*, où Ω^* désigne le plus petit nombre ordinal de quatrième classe de* CANTOR.

Par rapport à la propriété (F), nous avons un théorème suivant qui est présque évident:

Théorème 11. *Pour qu'un espace (v) jouissant d'une des propriétés (B) et (D) soit $\aleph_2$-hyper-condensé en soi, il est nécessaire et suffisante que la propriété (F) soit vérifiée par l'espace considéré.*

Démonstration. Il est évident que la proporiété (F) est nécessaire. Nous allons donc démontrer que si l'espace possède la propriété (F), il jouit aussi de la propriété $\aleph_2$-hyper-condensé en soi.

Or, sans perdre la généralité du raisonnement, nous pouvons supposer que l'espace considéré jouit de la propriété (D). Soient M

un ensemble clairsemé et $M^{(\alpha)}$ la dérivée au sens restreint d'ordre α de M. Si l'on désigne par γ l'ordre de $M^{\cdot}$, selon la propriété (F) γ est un nombre ordinal inférieur à Ω^*, et on a $M=(M-M^{(1)}) + \sum_{1\leq\xi<\gamma} (M^{(\xi)}-M^{(\xi+1)})$, et chaque membre droit de cette égalité est de puissance $\aleph_1$ selon la propriété (D). Par conséquent la puissance de M est au plus $\aleph_1$; donc l'espace est $\aleph_2$-hyper-condensé en soi, c. q. f. d.

Remarquons enfin que, comme on peut voir, la propriété (F) est analogue à la propriété (4) du théorème 2, qui est équivalente à la propriété (C), cependant la première est plus faible que la seconde. En outre, on peut montrer qu'il y a un espace accessible possédant la propriété (B), mais, ne vérifiant pas le premier axiome de séparabilité et ne jouissant pas de la propriété (F). Nous aboutissons donc nécessairement à une question importante par rapport au théorème 3; *Quel rôle joue le premier axiome de séparabilité dans un espace de* HAUSDORFF*?*