CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES ENSEMBLES BORELIENS ET ANALYTIQUES, II

Par

Kinjiro KUNUGUI

§ 6. Généralisation du Théorème de sections fermées (suite).

Soit M un ensemble situé dans le plan OXY. Nous avons désigné par $\varDelta(M)$ l'ensemble de tous les points x de l'axe OX jouissant de la propriété suivante : la section de M engendrée par le point $(x, 0)$ (c. à d. la partie commune à l'ensemble M et à la droite parallèle à l'axe OY passant par le point $(x, 0)$) est un ensemble $\mathfrak{F}_\sigma$ non vide. A ce propos, nous avons montré (le théorème 6) que l'ensemble $\varDelta(M)$ est toujours un complémentaire analytique, si M appartient à la fois aux familles $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$.

Nous allons généraliser encore ce théorème. Comme auparavant, désignons par $\mathfrak{F}_B$ la famille de tous les ensembles boreliens qui se trouvent sur l'axe OX et par $\mathfrak{G}$ celle de tous les ensembles ouverts situés sur l'axe OY. Notre généralisation s'exprime comme il suit : l'ensemble $\varDelta(M)$ est toujours un complémentaire analytique, si M appartient à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta\sigma\delta}$.

Nous allons démontrer d'abord un lemme sur les ensembles développables. Soit F une famille de sous-ensembles d'un ensemble K d'éléments quelconques. Un ensemble A sera dit *développable en série alternée d'ensembles d'une famille* F (*décroissants*), si l'on peut poser :

$$A = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + A_\omega - A_{\omega+1} + \cdots + A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} + \cdots$$
$$1 \leq 2\lambda+1 < \gamma < \Omega ,$$

où A_α sont des ensembles de la famille F tels qu'on ait $A_\alpha \supseteq A_\beta$ pour tout α, β, $\alpha < \beta$, Ω désignant le premier des nombres ordinaux de la troisième classe.

Lemme. *Désignons par* Φ *la famille de tous les intervalles de* BAIRE. *Alors tout ensemble* E *du plan* $N \times N$(1) *appartenant à*

(1) N est l'ensemble de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1.

$(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$[1] *(le complémentaire étant pris par rapport à l'espace* $N \times N$*) est développable en série alternée des ensembles de la famille* $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$.

Démonstration. Nous allons voir que l'ensemble E peut être écrit comme il suit :

$$E = E_0 - E_1 + E_2 - E_3 + \cdots + E_{2\lambda} - E_{2\lambda+1} + \cdots, \quad 1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \Omega,$$
$$E_\alpha \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}, \quad E_\alpha \supseteq E_\beta \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta.$$

M. W. Sierpiński[2] a montré que si les ensembles E, E_n^m et H_n^m $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles satisfaisant aux conditions:

$E_n^m \supseteq E_{n+1}^m$ pour m et n naturels, $H_n^m \subseteq H_{n+1}^m$ pour m et n naturels, $\sum_{n=1}^{\infty} H_n^m \supseteq \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{m+1}$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ et $E = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_n^m = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^m$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} (E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \cdots + E_n^n H_n^n) = E.$$

E étant un ensemble de $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma}$, nous pouvons poser d'abord

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_n^m, \quad E_n^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma.$$

Or, le produit d'un nombre fini des ensembles de $\mathfrak{F}_B \times \Phi_\sigma$ appartient aussi à $\mathfrak{F}_B \times \Phi$, et par suite la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$ jouit de la même propriété. Donc, nous pouvons supposer que nous avons toujours

$$E_n^m \supseteq E_{n+1}^m \quad \text{pour } m \text{ et } n \text{ naturels.}$$

D'autre part, comme E appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$, E peut être écrit : $E = \prod_{m=1}^{\infty} H^m$, $H^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. La famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$ étant δ-système, $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ est multiplicative[3]. Donc, nous pouvons supposer que nous avons toujours

(1) F étant une famille d'ensembles quelconques, F_c désigne la famille de tous les ensembles complémentaires à ceux de F.

(2) W. Sierpiński ; Sur les rapports entre les classifications des ensembles de MM. F. Hausdorff et Ch. de la Vallée Poussin, Fund. Math. *t.* XIX (1932), p. 258.

(3) La famille F s'appelle *δ-système,* si tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de F appartient à F. F s'appelle *multiplicative,* si tout produit d'un nombre fini des ensembles de F appartient à F. Si F est multiplicative, F l'est également. Enfin, F s'appelle *anneau,* si elle jouit de la propriété suivante : toute somme et tout produit d'un nombre fini d'ensembles de F appartiennent à F. Voir p. ex. H. Hahn : Reelle Funktionen, Teil I, Leipzig. 1932, p. 10–17.

$$H^m \supseteq H^{m+1}, \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

D'ailleurs, nous pouvons poser encore : $H^m = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^m$, $H_n^m \in (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$. Comme la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta c} = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$ est multiplicative, il est permis de supposer que nous avons toujours $H_n^m \subseteq H_{n+1}^m$, pour m et n naturels. Par conséquent, d'après le théorème de M. W. SIERPIŃSKI, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} (E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \cdots + E_n^n H_n^n) = E .$$

L'inclusion $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_c \subseteq (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$ ou $\mathfrak{F}_B \times \Phi \subseteq (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$ montre que la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ contient $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$ et $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta}$. Cette famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ est un anneau[3] avec $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$. Par suite, l'ensemble $M_n = E_n^1 H_n^1 + E_n^2 H_n^2 + \cdots + E_n^n H_n^n$ appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$.

Or, l'ensemble M_n appartenant à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$, nous pouvons poser :

$$M_n = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M_{p,q}^{(n)}, \quad M_{p,q}^{(n)} = A_{p,q}^{(n)} \times B_{p,q}^{(n)} ;$$

$$CM_n = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} S_{p,q}^{(n)}, \quad S_{p,q}^{(n)} = C_{p,q}^{(n)} \times D_{p,q}^{(n)} ,$$

où $A_{p,q}^{(n)}$, $C_{p,q}^{(n)}$ sont des ensembles boreliens et $B_{p,q}^{(n)}$, $D_{p,q}^{(n)}$ désignent des intervalles de BAIRE. Nous pouvons supposer que $M_{p,q}^{(n)}$, $S_{p,r}^{(n)}$ et les intervalles de BAIRE $B_{p,r}^{(n)}$, $D_{p,q}^{(n)}$ satisfont aux conditions suivantes :

(1°) $M_{p,q}^{(n)} \cdot M_{p,q'}^{(n)} = 0$, $S_{p,q}^{(n)} \cdot S_{p,q}^{(n)} = 0$, pour tout $q \neq q'$.

(2°) Les ordres de $B_{p,q}^{(n)}$ et $D_{p,q}^{(n)}$ sont au moins p.

Posons d'abord

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = M_{1, l_1}^{(n)} \cdot M_{2, l_2}^{(n)} \cdots M_{k, l_k}^{(n)} ,$$

$$T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = S_{1, l_1}^{(n)} \cdot S_{2, l_2}^{(n)} \cdots S_{k, l_k}^{(n)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Ces ensembles satisfont alors aux inclusions :

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \supseteq L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k, l_{k+1}}, \quad T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \supseteq T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k, l_{k+1}}$$

$$(l_{k+1} = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

et pour $l_k \neq l'_k$ on a

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \cdot L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l'_k} = 0 ; \quad T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \cdot T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l'_k} = 0 .$$

Par suite, nous avons

$$M_n = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k} L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} ,$$

$$CM_n = \sum_{\nu \in N} \prod_{k=1}^{\infty} T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_k} T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} ,$$

Comme produit d'un nombre fini des ensembles de la forme $\mathfrak{F}_B \times \Phi$, nous pouvons encore écrire

$$L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = A_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \times B_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} ,$$

$$T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = C_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \times D_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$$

où $A_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ et $C_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ sont des ensembles boreliens, et $B_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$, $D_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ désignent des intervalles de Baire. Il est évident que

(3°) dès que $(l_1, l_2, \ldots, l_k) \neq (l'_1, l'_2, \ldots, l'_k)$, nous avons $L_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \cdot L_{(n)}^{l'_1, l'_2, \ldots, l'_k} = 0$, $T_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} \cdot T_{(n)}^{l'_1, l'_2, \ldots, l'_k} = 0$,

(4°) les ordres de $B_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$, $D_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ sont au moins k. Les ensembles $A_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ et $C_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ étant boreliens, ils peuvent être posés comme il suit:

$$A_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = \sum_{\nu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n);\, n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} ,$$

$$C_{(n)}^{l_1, l_2, \ldots, l_k} = \sum_{\nu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n);\, n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} ,$$

$$\nu = (n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k, \ldots) .$$

où les ensembles $E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n);\, n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k}$, $F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n);\, n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k}$ sont des intervalles de Baire, qui satisfont aux conditions:

(5°) les longueurs des intervalles

$$E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k}, \qquad F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k}$$

sont puls petites que $1/(k+k')$.

(6°) $$E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \supseteq E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'+1}^k},$$

$$F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \supseteq F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'+1}^k}$$

$$(n_{k'+1}^k = 1, 2, 3, \ldots).$$

(7°) pour deux nombres différents ν et $\bar{\nu}$, nous avons toujours

$$\prod_{k'=1}^{\infty} E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \cdot E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); \bar{n}_1^k, \bar{n}_2^k, \ldots, \bar{n}_{k'}^k} = 0,$$

$$\prod_{k'=1}^{\infty} F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \cdot F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); \bar{n}_1^k, \bar{n}_2^k, \ldots, \bar{n}_{k'}^k} = 0.$$

Définissons maintenant deux schèmes de SOUSLIN :

$$G^{(n)}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} = E^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \times B^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)};$$

$$H^{(n)}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} = F^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n); n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{k'}^k} \times D^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)}$$

et posons enfin

$$G^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} = G^{(n)}_{p_1} \cdot G^{(n)}_{p_1, p_2} \cdots G^{(n)}_{p_1, p_2, \ldots, p_L},$$

$$H^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} = H^{(n)}_{p_1} \cdot H^{(n)}_{p_1, p_2} \cdots H^{(n)}_{p_1, p_2, \ldots, p_L},$$

où $p_L (L = 1, 2, 3, \ldots)$ et l_k, $n_{k'}^k$ se correspondent d'une manière que nous avons définie dans § 3[1].

Soit $Z^{(n)}$ l'ensemble des nombres irrationnels $\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_L, \ldots)$ tels que $G^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} \neq 0$, quelque soit L. L'ensemble $\prod_{L=1}^{\infty} G^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L}$ se réduit à un point, que nous pouvons désigner par $g_n(\pi)$. $g_n(\pi)$

(1) Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series I, Vol. VII, 1939. p. 176.

est une fonction continue, qui fait correspondre $Z^{(n)}$ et M_n d'une manière biunivoque. De même, soit $T^{(n)}$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels π tels que $H^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L} \neq 0$ quelque soit L. L'ensemble $\prod_{L=1}^{\infty} H^{(n)*}_{p_1, p_2, \ldots, p_L}$ se réduit à un point que nous pouvons désigner par $h_n(\pi)$. $h_n(\pi)$ est une fonction continue, qui fait correspondre $T^{(n)}$ et CM_n d'une manière biunivoque.

Etant donné un système d'indices $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, appelons *noyau partiel* de M_n et désignons par $M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)}$ l'ensemble-noyau du système de SOUSLIN : $L^{l_1, l_2, \ldots, l_k, m_1, m_2, \ldots, m_{k'}}_{(n)}$, c. à d.

$$M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)} = \sum_{\mu \in N} \prod_{k'=1}^{\infty} L^{l_1, l_2, \ldots, l_k, m_1, m_2, \ldots, m_{k'}}_{(n)}$$

$$\mu = (m_1, m_2, m_3, \ldots) .$$

Il est évident que ces noyaux $M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)}$ appartiennet à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Or, l'ensemble $M_n - M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_n$ est le noyau du système de SOUSLIN $L^{*l_1', l_2', \ldots, l_k'}_n$ défini de la manière suivante :

$$L^{*l_1', l_2', \ldots, l_k'}_{(n)} = L^{l_1', l_2', \ldots, l_k'}_{(n)}$$

$$\text{pour } (l_1', l_2', \ldots, l_k') \neq (l_1, l_2, \ldots, l_k) .$$

$$L^{*l_1', l_2', \ldots, l_k'}_{(n)} = 0 \qquad \text{pour } (l_1', l_2', \ldots, l_k') = (l_1, l_2, \ldots, l_k) .$$

Donc, l'ensemble $M_n - M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)}$ appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Comme CM_n appartient également à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$, et comme cette famille est un anneau, $M^{l_1, l_2, \ldots, l_k}_{(n)}$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$.

Les fonctions $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ possèdent la propriété suivante : lorsque t parcourt la portion de $Z^{(n)}$ ou $T^{(n)}$ contenus dans l'intervalle de BAIRE $\delta_{p_1, p_2, \ldots, p_L}$ $(L = 2m-1)$, les valeurs de $\varphi_n(t)$ ou de $\psi_1(t)$ forment justement l'ensemble

$$\sum_{\mu \in N} \prod_{k'} L^{l_1, l_2, \ldots, l_k, m_1, m_2, \ldots, m_{k'}}_{(n)}$$

ou

$$\sum_{\mu \in N} \prod_{k'} T^{l_1, l_2, \ldots, l_k, m_1, m_2, \ldots, m_{k'}} .$$

Et, ces ensembles appartiennent à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$, Désignons par $U^{(n)}$ l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $1 < t < 2$ congruent à $T^{(n)}$, et par $E^{(n)}$ la somme $Z^{(n)} + U^{(n)}$. Les ensembles $E^{(n)}$ sont topologiquement complet, séparable, o-dimensionnel, et $Z^{(n)}$, $U^{(n)}$ sont fermés et ouverts dans cet ensemble.

Les fonctions $\varphi_n(t)$ et $\psi_n(t)$ nous donnent alors une fonction continue $f_n(t)$ définie sur $E^{(n)}$, qui fait correspondre $E^{(n)}$ et $M_n + CM_n = N \times N$ d'une façon biunivoque. Considérons dans l'espace E_ω de M. FRÉCHET l'ensemble $C = E^{(1)} \times E^{(2)} \times E^{(3)} \times \dots$. Ce produit cartésien C des $E^{(n)}$ est topologiquement complet séparable. Étant donné un point $\tau = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ de C, posons $h_n(\tau) = f_n(t_n)$ et désignons par T l'ensemble de tous les points de C tels qu'on ait

$$h_1(\tau) = h_2(\tau) = h_3(\tau) = \dots$$

Posons $h(\tau) = h_1(\tau)$ pour $\tau \in T$. Comme l'ensemble T est fermé relativement à C, T est lui-même topologiquement complet séparable. La fonction $h(\tau)$ fait correspondre l'ensemble T et l'espace $N \times N$ tout entier d'une façons continue et biunivoque.[1]

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} M_{n+i} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} M_{n+i}$$

et par suite

$$h^{-1}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} h^{-1}(M_{n+i}) = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} h^{-1}(M_{n+i}) .$$

D'autre part, nous avons

$$h^{-1}(M_{n+i}) = T \cdot (S^{(1)} \times S^{(2)} \times \dots \times S^{(n+i-1)} \times N^{(n+i)} \times S^{(n+i-1)} \times \dots)$$

où $S^{(n)}$ désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $0 < t < 2$ et $N^{(n)} = N$ (n étant un entier positif quelconque). Donc $h^{-1}(M_{n+i})$ est un ensemble fermé et ouvert relativement à T pour tout n et i naturels. Par conséquent *l'ensemble $h^{-1}(E)$ est un F_σ et G_δ relativement à l'ensemble T.*

Donc, l'ensemble $h^{-1}(E)$ est développable en série alternée des ensembles fermés relativement à T:

$$h^{-1}(E) = F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots + F_{2\lambda} - F_{2\lambda+1} + \dots ,$$
$$1 \leq 2\lambda + 1 < \gamma < \Omega ,$$

(1) Voir N. LUSIN: Les ensembles analytiques, p. 120 ; C. KURATOWSKI, loc. cit., p. 230.

où les ensembles F_α sont décroissants. La fonction $h(\tau)$ étant biunivoque, nous pouvons poser

$$(1)\quad E = h(F_0)-h(F_1)+h(F_2)-h(F_3)+\cdots+h(F_{2\lambda})-h(F_{2\lambda+1})+\cdots$$

Considérons maintenant l'ensemble $N\times N-h(F_\alpha)=h(T-F_\alpha)$. L'ensemble $T-F_\alpha$ est ouvert relativement à T. Donc $T-F_\alpha$ est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles de la forme:

$$\begin{aligned} T\Big(\delta_{l_1^1,\, l_2^1,\, \ldots,\, l_k^1}\times\delta_{l_1^2,\, l_2^2,\, \ldots,\, l_k^2}\times\cdots\times\delta_{l_1^m,\, l_2^m,\, \ldots,\, l_k^m} & \\ \times S^{(m+1)}\times S^{(m+2)}\times\cdots\Big) & \\ = T\Big(\delta_{l_1^1,\, l_2^1,\, \ldots,\, l_k^1}\cdot E^{(1)}\times\delta_{l_1^2,\, l_2^2,\, \ldots,\, l_k^2}\cdot E^{(2)}\times\cdots & \\ \times\delta_{l_1^m,\, l_2^m,\, \ldots,\, l_k^m}\cdot E^{(m)}\times S^{(m+1)}\times S^{(m+2)}\times\cdots\Big) & \end{aligned}$$

où $\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ sont ou bien des intervalles de Baire, ou bien leure congruents contenus dans l'intervalle $1<t<2$. Or, cet ensemble coïncide avec

$$\begin{aligned} T\Big(\delta_{l_1^1,\, l_2^1,\, \ldots,\, l_k^1}\cdot E^{(1)}\times S^{(2)}\times S^{(3)}\times\cdots\Big)\cdot\Big(S^{(1)}\times\delta_{l_1^2,\, l_2^2,\, \ldots,\, l_k^2}E^{(2)}\times S^{(3)}\cdots\Big) & \\ \cdots\Big(S^{(1)}\times S^{(2)}\times\cdots\times S^{(m-1)}\times\delta_{l_1^m,\, l_2^m,\, \ldots,\, l_k^m}\cdot E^{(m)}\times S^{(m+1)}\times\cdots\Big). & \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} h\Big\{T\Big(S^{(1)}\times S^{(2)}\times\cdots\times S^{(i-1)}\times\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}\cdot E^{(i)}\times S^{(i+1)}\times\cdots\Big) & \\ = f_i\Big(\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}\cdot E^{(i)}\Big)\Big\}, \qquad i=1, 2, 3, \ldots, m. & \end{aligned}$$

En effet, pour tout point t_i de $\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}\cdot E^{(i)}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$, il existe une suite de nombres irrationnels $t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots$ telle que $f_i(t_i)=f_1(t_1)=f_2(t_2)=\ldots$. Par suite,

$$\begin{aligned} h\Big\{T\Big(S^{(1)}\times S^{(2)}\times\cdots\times S^{(i-1)}\times\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}\cdot E^{(i)}\times S^{(i+1)}\times\cdots\Big)\Big\} & \\ \supseteq f_i\Big(\delta_{l_1^i,\, l_2^i,\, \ldots,\, l_k^i}\cdot E^{(i)}\Big) & \end{aligned}$$

d'où s'ensuit immédiatement l'identité de ces deux ensembles.

Enfin, l'égalité

$$f_i\left(\delta_{l_1^i, l_2^i, \ldots, l_k^i} \cdot E^{(i)}\right) = \varphi_i\left(\delta_{l_1^i, l_2^i, \ldots, l_k^i} \cdot Z^{(i)}\right) + \psi_i\left(\delta_{l_1^i, l_2^i, \ldots, l_k^i} U^{(i)}\right)$$

montre que cet ensemble appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. Comme $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$ est multiplicative, l'ensemble

$$h\Big\{T\Big(\delta_{l_1^1, l_2^1, \ldots, l_k^1} \times \delta_{l_1^2, l_2^2, \ldots, l_k^2} \times \cdots \times \delta_{l_1^m, l_2^m, \ldots, l_k^m} \\ \times S^{(m+1)} \times S^{(m+2)} \times \cdots\Big)$$

lui appartient également. Par conséquent, $h(T-F_\alpha)$ est un ensemble de $\left\{(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}\right\}_\sigma = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$. Il s'ensuit que $h(F_\alpha)$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$. Ainsi, la série alternée (1) donne un développement que nous avons désiré.

Le lemme établi nous permet de généraliser le Théorème 7 comme il suit:

Théorème 8 (de sections F_σ). *Soit M un ensemble plan qui appartient à la famille $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G})_{c\delta\sigma\delta}$. Alors, l'ensemble $\Delta(M)$ (Voir la définition du Théorème 6, ou le commencement de ce paragraphe) est un complémentaire analytique.*

Démonstration. Rangeons, tout d'abord, tous les nombres rationnels en une suite simple: $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les points (x, y) de M, tels que la droite parallèle à l'axe OY, passant par le point (x, y), coupe M en un ensemble F_σ non vide. Nous avons vu[1] que $\mathfrak{M}$ est un complémentaire analytique. La partie commune à la droite $y = r_n$ (parallèle à l'axe OX) et à l'ensemble $\mathfrak{M}$ est donc un complémentaire analytique. Désignons par A_n la projection de cet ensemble sur l'axe OX. Nous avons alors l'identité :

$$\Delta(M) = \Delta\left\{M \cdot (OX \times N)\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Ceci montre que nous pouvons supposer, sans réstreindre la généralité, que M est situé dans le plan $N \times N$ et appartient à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G}')_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{G}')_{\sigma\delta\sigma c}$ où $\mathfrak{G}'$ désigne la famille de tous les ensembles ouverts par rapport à N. Comme nous avons

(1) Corollaire du théorème 5. Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analytiques, I, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series, I, Vol. VII, 1939, p. 161-189.

$(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{S}')_\sigma = (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_\sigma$, M peut être supposé appartenant à la fois à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma}$ et à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$ (le complémentaire étant pris par rapport à $N \times N$).

M étant un ensemble de $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta\sigma} \cdot (\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma\delta}$, il est développable en série alternée dénombrable (transfinie) d'ensembles $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{\sigma\delta}$.

$$(2) \qquad M = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} + \cdots, \quad 1 \leq 2\lambda+1 < \gamma < \Omega$$

À tout point x de la projection de M sur l'axe OX, correspondent des nombres ordinaux α tels que la projection de $A_{2\alpha} - A_{2\alpha+1}$ sur l'axe OX contienne le point x. Soit $\alpha_0 = \alpha(x)$ le premier de ces nombres. Or, l'ensemble $CA_{2\lambda+1}$ appartenant à $(\mathfrak{F}_B \times \Phi)_{c\delta\sigma}$, nous pouvons poser :

$$CA_{2\lambda+1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\lambda,n}; \quad A_{2\lambda} - A_{2\lambda+1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\lambda,n}, \quad B_{\lambda,n} = A_{2\lambda} \cdot F_{\lambda,n}$$

où $F_{\lambda,n}$ appartient à $(\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{S})_{c\delta}$, et par suite $B_{\lambda,n} \in (\mathfrak{F}_B \times \mathfrak{S})_{\sigma\delta}$.

Si la section de M engendrée par $(x, 0)$ est un F_σ, la section de $B_{\alpha_0, n}$ $(\alpha_0 = \alpha(x))$ engendrée par $(x, 0)$ l'est également. En effet, nous avons d'abord

$$(x \times OY) \cdot M = (x \times OY)\,(A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1} + A_{2\alpha_0+2} - A_{2\alpha_0+3} + \cdots)$$

et d'autre part A_α étant décroissants,

$$(3) \qquad (x \times OY) \cdot M \cdot CA_{2\alpha_0+1} = (x \times OY) \cdot (A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1})$$

Or, $(x \times OY) \cdot M$ est un F_σ d'après l'hypothèse, et d'autre part $(x \times OY)\; CA_{2\alpha_0+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x \times OY) F_{\alpha_0, n}$ est un F_σ également. Donc, le membre droit de (3) est un F_σ. Par suite, $(x \times OY) B_{\alpha_0, n} = (x \times OY)(A_{2\alpha_0} - A_{2\alpha_0+1}) F_{\alpha_0, n}$ est un F_σ. D'ailleurs, il existe au moins un indice n, tel que $(x \times OY) B_{\alpha_0, n}$ soit non vide. Cela revient à dire que $\Delta(M)$ est contenu dans $\sum_{1 \leq 2\lambda+1 < \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(B_{\lambda,n})$, d'où l'égalité

$$(4) \qquad \Delta(M) = \Pi(M) \cdot \Big\{ \sum_{1 \leq 2\lambda+1 < \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta(B_{\lambda,n}) \Big\}.$$

Or, d'après le Théorème 5 et le Théorème 6, les ensembles $\Pi(M)$ et $\Delta(B_{\alpha,n})$ sont des complémentaires analytiques. Ainsi, la formule (4) montre bien que $\Delta(M)$ est un complémentaire analytique.

c. q. f. d.

§ 7. Les ensembles atomiques des cribles.

Un ensemble plan C sera dit *crible plan* (d'après M. N. LUSIN), s'il est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles boreliens situés sur les droites parallèles à l'axe OX (le plan étant OXY). Nous supposons de plus (ce qui n'altérera pas la généralité) que ces droites passent les points rationnels $(0, y)$. Étant donné un point $(x, 0)$ de l'axe OX, nous appellerons "section" de C engendrée par $(x, 0)$, la partie commune de C et de la droite parallèle à l'axe OY, passant par le point $(x, 0)$. α étant un type d'ordre dénombrable, nous désignerons par ε_α la somme de tous les points $(x, 0)$ qui engendrent les sections de C du type d'ordre α suivant la direction positive de l'axe OY. À chaque ensemble Φ des types d'ordre dénombrables correspond alors un ensemble-somme $E(\Phi)$ de tous les ensembles ε_α, la sommation s'étendant à tous les α de Φ.

On sait qu'en particulier si Φ se constitue de tous les nombres ordinaux α de première et de seconde classe: $0 \leq \alpha < \Omega$, l'ensemble $E(\Phi)$ est un complémentaire analytique, et les ensembles $\varepsilon_\alpha (0 \leq \alpha < \Omega)$ sont des ensembles boreliens,—résultats dûs à M. N. LUSIN.

M. C. KURATOWSKI[1] a étudié systématiquement les ensembles $E(\Phi)$ (en se bornant au crible de M. H. LEBESGUE), et a donné une des leurs classifications.[2] Comme l'ensemble ε_α (α étant un type d'ordre dénombrable arbitraire) n'est pas divisible dès que le crible soit fixé, nous l'appelerons *ensemble atomique.* M. C. KURATOWSKI a démontré[3] que tout ensemble atomique est analytique, et a posé un problème: si cet ensemble n'est pas nécessairement borelien? Tout de suite après, M. S. HARTMAN a repris ces études, et a montré[4] que l'ensemble atomique ε_α est toujours borelien pour tout α tel que $m(\alpha) \leq \aleph_0$, en désignant par $m(\alpha)$ la puissance de l'ensemble de toutes les transformations biunivoques et semblables[1] d'un ensemble ordonné du type α en lui-même. M. S. HARTMAN a remarqué d'ailleurs que cette condition: $m(\alpha) \leq \aleph_0$ n'est pas nécessaire pour

(1) C. KURATOWSKI: Sur la géometrisation des types d'ordre dénombrable. Fund. Math. t. XXVIII. p. 167-185.

(2) ibid. pp. 169.

(3) ibid. p. 173.

(4) S. HARTMAN: Zur Geometrisierung der abzählbaren Ordnungstypen, Fund-Math. t. XXIX. p. 209-214.

(5) Une transformation biunivoque et semblable est celle qui fait correspondre les éléments de deux ensembles biunivoquement et qui conserve les relations d'ordre.

que l'ensemble ε_α soit borelien[1], et il a laissé ouvert la question: quelle est la condition exacte pour que ε_α soit borelien? ou bien, n'est-il pas toujours borelien? Or, nous allons montrer que l'ensemble ε_α est toujours borelien.

Théorème 9. *Pour tout type d'ordre dénombrable α, l'ensemble atomique est toujours borelien.*

Démonstration. La méthode de M. N. LUSIN pour montrer que les constituantes $\varepsilon_\alpha (0 \leq \alpha < \Omega)$ des complémentaires analytiques sont boreliens est basée sur le principe d'induction transfinie[2]. Tandis que celle de MM. C. KURATOWSKI et S. HARTMAN fait appel au théorème de projection. Notre méthode n'est qu'une précision de celle de ces deux mathématiciens varsoviens.

Soit α le type d'ordre dénombrable donné. Rangeons tous les nombres rationnels en une suite déterminée:

$$(1) \qquad r(1),\ r(2),\ r(3),\ \ldots,\ r(n),\ \ldots .$$

On sait bien qu'il existe un ensemble E des nombres rationnels ayant le type α. Les nombres de E forment une suite partielle de (1) qu'on peut désigner par

$$(2) \qquad r(n_1),\ r(n_2),\ r(n_3),\ \ldots,\ r(n_k),\ \ldots ;$$
$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots .$$

Nous disons que deux indices k_1 et k_2 sont congruents s'il existe une transformation biunivoque et semblable de E sur lui-même, qui fait correspondre le nombre $r(n_{k_1})$ à $r(n_{k_2})$, et nous le désignons par $k_1 \sim k_2$. Nous pouvons dire immédiatement que 1) $k \sim k$; 2) si $k_1 \sim k_2$, alors $k_2 \sim k_1$; 3) si $k_1 \sim k_2$, $k_2 \sim k_3$, alors $k_1 \sim k_3$. Donc, les indices (2) se groupent en classes déterminées des indices congruents. Deux classes différentes n'ont aucun indice commun.

Nous disons encore qu'étant donné un nombre fini d'indices

$$(3) \qquad k_1^0,\ k_2^0,\ k_3^0,\ \ldots,\ k_m^0,$$

deux indices k' et k'' sont *congruents relativement aux systèmes* (3), s'il existe une transformation biunivoque et semblable de E en lui-

(1) Il suffit de considérer le cas où α est le type η de l'ensemble de tous les nombres rationnels.

(2) N. LUSIN: Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris, 1930, p. 188.

même qui fait correspondre le point $r(n_{k'})$ à $r(n_{k''})$ et laisse les points $r(n_{k_i^0})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ invariables.

Considérons maintenant l'espace $OXYZ$ à trois dimensions, dont l'axe OX se constitue de l'intervalle N: $0 < x < 1$ formé de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1. Nous allons construire, avec M. N. LUSIN(1), une suite de fonctions $z = f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ définies et continues sur N, et dont les images $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ jouissent de deux propriétés suivantes:

1°) si $r(n_i) < r(n_j)$, $i \neq j$ la courbe L_i est entièrement au-dessous de la courbe L_j.

2°) Quelque soit un ensemble e formé de points rationnels et semblable à l'ensemble E, il existe un point irrationnel x_0 tel que les points-intersections des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ et de la droite $z = x_0$ forment précisément l'ensemble e.

La fonction $z = f_1(x)$ dont l'image est la première courbe L_1 sera définie de la manière suivante: $f_1(x) = r(m_1)$ pour tout x de $\delta_{m_1}(m_1 = 1, 2, 3, \ldots)$. Supposons que nous ayons déja défini les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ définies et continues sur l'ensemble N tout entier. Nous supposons que la fonction $f_i (i = 1, 2, \ldots, k-1)$ est constante dans les intervalles de BAIRE d'ordre i et ne possède que des valeurs rationnelles, et que les courbes $L_i (i = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$ qui sont images des fonctions f_i jouissent de la propriété suivante: la position mutuelle des courbes $L_1, L_2 \ldots, L_{k-1}$ est la même que celles des points rationnels $r(n_1), r(n_2), \ldots, r(n_{k-1})$, supposés d'être situés sur l'axe OZ. Pour définir la fonction f_k, dont l'image est la courbe L_k, considérons la suite des intervalles de BAIRE d'ordre k: $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, 1$, $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, 2$, $\ldots$, $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}, m_k, \ldots$. Or, tous les nombres rationnels situés dans la même position par rapport aux $f_1(\delta m_1)$, $f_2(\delta m_1, m_2)$, $\ldots$, $f_{k-1}(\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k-1})$(2) que le point $r(n_k)$ par rapport aux points $r(n_1), r(n_2), \ldots, r(n_{k-1})$ forment une suite partielle de (1), qu'on peut désigner par $r'_1, r'_2, \ldots, r'_{m_k}, \ldots$ $(m_k = 1, 2, 3, \ldots)$, en les numérotant d'après les ordres des termes qui se trouvent dans la suite (1). Nous poserons $f_k(x) = r'_{m_k}$ pour tout x de $\delta m_1, m_2, \ldots, m_k$. La fonction f_k est ainsi complètement définie et continue dans N puisqu'elle est constante dans les inter-

(1) La construction des courbes $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ a été donné par M. N. LUSIN. Voir N. LUSIN loc. cit. p. 211.

(2) $f_i(\delta m_1, m_2, \ldots, m_i)$ désigne la valeur de la fonction $f_i(x)$ pour $x \in \delta m_1, m_2, \ldots, m_i$ que nous avons supposée constante.

valles de BAIRE d'ordre k. La position mutuelle des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k$, est la même que celle des points $r(n_1), r(n_2), \dots, r(n_k)$. Étant donné un ensemble e formé des points rationnels, semblable à l'ensemble E, nous désignons par $M(e)$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels x_0, tel que les points-intersections des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ et de la droite $z = x_0$ forment précisément l'ensemble e. Comme M. N. LUSIN l'a montré, l'ensemble $M(e)$ n'est pas vide. En effet, il existe une transformation biunivoque et semblable de E en e. Désignons par $\zeta(k)$ le nombre de e qui correspond à $r(n_k)$ de E. Il existe alors un et un seul intervalle de BAIRE $\delta m_1, m_2, \dots, m_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, tel que $f_k(\delta m_1, m_2, \dots, m_k) = \zeta(k)$. Le point irrationnel $(m_1, m_2, \dots, m_k, \dots)$ appartient à $M(e)$.

S'il existe deux points x_0 et x_0' tels que les sections de la réunion des courbes $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$ qu'on désignera par S, engendrées par le point x_0 et x_0' donnent un ensemble précisément identique à e, nous avons deux correspondances biunivoques et semblables entre E et e. Supposons le point $\zeta(k)$ de e correspond à $r(n_k)$ et à $r(n_{k'})$ par ces correspondances. En faisant correspondre l'indice k à k', nous obtenons une transformation biunivoque et semblable de E en lui-même.

Inversement, s'il existe une correspondance biunivoque et semblable de E en lui-même, nous avons deux points différents de $M(e)$.

Maintenant, passons à la construction d'une suite des surfaces situées dans l'espace $OXYZ$, que nous appellerons *ensemble de similitude*. Il dépend du crible donné. Soit C le crible donné que nous supposons situé dans le plan OYZ. C est formé d'une somme d'une infinité dénombrable des ensembles boreliens qui sont situés sur les droites parallèles à l'axe OY dont les hauteurs sont des nombres rationnels. Nous désignons ces ensembles boreliens par

$$(4) \qquad \sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \dots, \ \sigma_n, \ \dots.$$

dont les hauteurs peuvent être supposées égales respectivement à $r(1), r(2), \dots, r(n), \dots$ (σ_n peut être un ensemble vide).

Notre ensemble de similitude se compose d'une infinité dénombrable des surfaces qu'on désignera par

$$(5) \qquad F_1, \ F_1^*, \ F_2, \ F_2^*, \ \dots, \ F_n, \ F_n^*, \ \dots.$$

Voici leur construction :

Désignons par R l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace $OXYZ$ dont les coordonnées z sont rationnelles (x désignant les nombres irrationnels entre 0 et 1, tandis que y sont des nombres réels).

1°) Premier procédé. La surface F_1 est définie par $F_1 = L_1 \times OY$. Désignons l'ensemble $S \times OY$ par G_0 et supprimons tous les points (x, y, z) de $G_0 - F_1$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$, $k > 1$, $y \in OY$, $z = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions: 1) $k \sim 1$; 2) il existe un indice m_1' tel que $z = f_1(\delta_{m_1'}) = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$ et que $m_1' < m_1$. Désignons le reste par G_1.

2°) Deuxième procédé. Considérons ensuite l'ensemble $OX \times \sigma_1$ dans l'espace $OXYZ$. Cet ensemble sera des points communs avec G_1(1). La section de cette partie commune avec la droite $y = y_0$, $z \doteq r(1)$ telle que le point (y_0, z) appartient à σ_1 ne dépend pas de y_0. Cette section (ou la projection de cette partie commune sur le plan OXZ) se compose d'une infinité dénombrable des intervalles de Baire dans la droite $z = r(1)$ située dans le plan OXZ, qui constituent des segments des courbes considérées plus haut. Dans chaque intervalle d'ordre 1: δm_1, supprimons tous les intervalles ainsi obtenus: $\delta m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$, $k > 1$, s'ils possèdent un intervalle également ainsi obtenu d'ordre inférieur k' qui est congruent à k par rapport à 1. Désignons le reste par $T_1(1)$, et posons $F_1^* = T_1(1) \times$ (Proj de σ_1).

3°) Troisième procédé. Désignons par G_2 l'ensemble exprimé par $\{R - (OX \times \sigma_1)\} G_1 + F_1^*$. Définissons d'abord la surface F_2 par $F_2 = G_2 \cdot (L_2 \times OY)$. Supprimons ensuite tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_2 - F_2$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \ldots, m_k$, $k > 2$, $y \in$ la projection de σ_1 (sur l'axe OY), $z = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$ et satisfaisant aux conditions: 1) il existe un indice k' $(k' > 2)$ tel que $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k'}$ est un intervalle de l'ensemble T_1; 2) $k \sim 2$, par rapport à 1 et k'; 3) il existe un indice m_2' tel que $z = f_2(\delta m_1, m_2') = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$ et que $m_2' < m_2$.

Supprimons enfin tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_2 - F_2$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \ldots, m_k$, $k > 2$, y n'appartiennent pas à la projection de σ_1 (sur l'axe OY), et satisfaisant aux conditions: 1) $k \sim 2$ $(k > 2)$ par rapport à 1; 2) il existe un indice m_2' tel que

(1) Nous supposons que σ_1 n'est pas vide. Si σ_1 est vide, nous pouvons omettre le deuxième procédé. Dans ce cas, la surface F_1^* est vide.

$z = f_2(\delta m_1, m_2') = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$ et que $m_2' < m_2$. Désignons le reste par G_3.

Supposons que nous ayons défini les surfaces F_{n-1}, F_{n-1}^* et les ensembles G_{2n-3}.

4°) $2n-1$-ième procédé. Désignons par G_{2n-2} l'ensemble exprimé par $\{R-(OX \times \sigma_{n-1})\} \cdot G_{2n-3} + F_{n-1}^*$. Définissons d'abord la surface F_n par $F_n = G_{2n-2}(L_n \times OY)$. Considérons ensuite les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$. À la coordonnée y, correspond une suite finie d'indices :

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots, \nu_l \ (\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots < \nu_l),$$

l'ensemble de tous les indices ν_m tels que le point $(z = r(\nu_m), y)$ du plan OYZ appartient à l'ensemble σ_{ν_m} et que $\nu_m < n$. Désignons par $E_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$, $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_l$, l'ensemble de tous les nombres y auxquels correspond la suite $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_l$. Désignons encore par $E_n(0)$ le complémentaire (par rapport à l'axe OY) de la somme des projections de $\sigma_\nu (= 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ (sur l'axe OY). Comme tout système $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_l$ est un sous-ensemble de l'ensemble des entiers positifs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, pour tout nombre n, il n'existe qu'un nombre limité des ensembles $E_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$ (il ne peut en effet surpasser le nombre 2^{n-1}). D'ailleurs, il est évident que les ensembles $E_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$ et $E_n(0)$ sont toujours boreliens.

Supprimons tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \ldots, m_k$, $k > n$, $y \in E_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$, $z = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions : 1) il existe des indices $k_1', k_2', k_3', \ldots, k_l'$ tel que $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k_m'}$ est un intervalle de $T_{\nu_m}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ défini dans le $2\nu_m$-ième procédé, $m = 1, 2, \ldots, l$; 2) $k \sim n$ par rapport à $1, 2, 3, \ldots, n-1$ et $k_1', k_2', \ldots, k_l'$; 3) il existe un indice m_n' tel que $z = f_n(\delta m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n') = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n, \ldots, m_k)$ et que $m_n' < m_n$.

Supprimons enfin tous les points (x, y, z) de l'ensemble $G_{2n-2} - F_n$ tels que $x \in \delta m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(k > n)$, $y \in E_n(0)$, $z = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_k)$, et satisfaisant aux conditions : 1) $n \sim k$ par rapport à $1, 2, 3, \ldots, n-1$; 2) il existe un indice m_n' tel que $z = f_n(\delta m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n') = f_k(\delta m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n, \ldots, m_k)$ et que $m_n' < m_n$.

Désignons le reste par G_{2n-1}.

5°) 2n-ième procédé. Considérons l'ensemble $G_{2n-1}(OX\times\sigma_n)$(1). Cet ensemble se partage en un nombre limité des ensembles suivant que y appartienne à $E_{n+1}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$, $\nu_l = n$. La projection de cet ensemble sur le plan OXZ se compose d'une infinité dénombrable des intervalles de BAIRE dans la droite $z = r(n)$ située dans le plan OXZ. Supprimons dans chaque intervalle $\delta m_1, m_2, \ldots, m_n$ tous les intervalles $\delta m_1, m_2, \ldots, m_k$ $(k > n)$, satisfaisant aux conditions: 1) il existe des indices $k'_1, k'_2, k'_3, \ldots, k'_{l-1}$ tel que $\delta m_1, m_2, \ldots, m_{k'_m}$ soit un intervalle de $T_{\nu_m}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$, $m = 1, 2, \ldots, l-1$, supposés déjà définis; 2) il existe un indice k' inférieur à k, qui est congruent à k par rapport à $1, 2, 3, \ldots, n$ et $k'_1, k'_2, k'_3, \ldots, k'_{l-1}$. Désignons le reste par $T_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)$, et posons

$$F_n^* = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{l-1}} T_n(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l)\times E_{n+1}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l), \quad \nu_l = n.$$

Continuons ainsi de suite.

Désignons par γ l'ensemble de similitude ainsi défini, et par γ' l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace dont les coordonnées z sont rationnelles et qui n'appartiennent pas à γ, et soit Θ_1 la projection de $\gamma'(OX\times C)$ sur le plan OXY. Désignons par C' l'ensemble de tous les points (x, z) du plan OXZ, complémentaire au crible C, et soit Θ_2 la projection de l'ensemble $\gamma\cdot(OX\times C')$ sur le plan OXY. Désignons enfin par Θ le complémentaire de la somme $\Theta_1+\Theta_2$ par rapport au plan OXY. L'ensemble Θ jouit alors de la propriété suivante: pour qu'un point (x_0, y_0) appartienne à Θ, il faut et il suffit que la section de γ engendrée par le point (x_0, y_0) soit identique à la section de C engendrée par le point y_0 (dans le plan OYZ). En effet, pour que le point (x_0, y_0) n'appartienne pas à Θ_1, il faut et il suffit que tous les points de la section de C engendrée par le point y_0 soient contenues dans celle de γ engendrée par le point (x_0, y_0) (lorsqu'on considère les projections de ces sections sur l'axe OZ). D'autre part, pour que (x_0, y_0) n'appartienne pas à Θ_2, il faut et il suffit que la section de γ engendrée par le point (x_0, y_0) soit contenue dans la section de C engendrée par le point y_0.

Désignons d'autre part par S' l'ensemble de tous les points (x, z) du plan OXZ dont les coordonées z sont rationnelles et qui n'appartiennent pas à S. Soient Φ_1 la projection de l'ensemble $(S'\times OY)\cdot$

(1) Nous supposons que σ_n n'est pas vide. Si σ_n est vide, nous pouvons omettre le $2n$-ième procédé. Dans ce cas, la surface F_n^* est un ensemble vide.

$(OX \times C)$ sur le plan OXY, et Φ_2 la projection de $(S \times OY) \cdot (OX \times C')$ sur le plan OXY. Désignons enfin par Φ le complémentaire (par rapport au plan OXY) de la somme $\Phi_1 + \Phi_2$. *La projection de Φ sur l'axe OY coïncide avec l'ensemble ε_α, et pour tout point y_0 de ε_α, si l'on désigne par e la section de C engendrée par le point y_0, l'intersection Φ de avec la droite $y = y_0$ coïncide avec l'ensemble $M(e)$ (quand on le projète sur l'axe OX).* En effet, pour que le point (x_0, y_0) appartienne à $C\Phi_1$ il faut et il suffit que tous les points de la section e de C engendrée par le point y_0 soient contenus dans celle de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) (lorsqu'on considère les projections sur l'axe OZ). D'autre part, pour que le point (x_0, y_0) appartienne à $C\Phi_2$, il faut et il suffit que la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) soit une partie de la section de C engendrée par le point y_0. Par suite, d'abord la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0) de Φ coïncide avec la section de C engendrée par le point y_0.

Or, la section de $S \times OY$ étant toujours semblable à l'ensemble E, y_0 appartiendra à ε_α. Deuxièmement, si la section de $S \times OY$ engendrée par le point (x_0, y_0), coïncide avec la section de C engendrée par y_0, (x_0, y_0) appartient à Φ. Et d'autre part, si y_0 appartient à ε_α, il existe un point x_0 de l'ensemble $M(e)$, en désignant par e la section de C engendrée par le point y_0. Donc il existe un point (x_0, y_0) de Φ. Ainsi, la projection de Φ sur l'axe OY et l'ensemble ε_α coïncident complètement.

Maintenant, considérons la partie commune à Θ et à Φ. Nous allons voir d'abord que *la projection de l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$ sur l'axe OY coïncide avec celle de Φ (c. à d. avec l'ensemble ε_α).* Soit, en effet, y_0 un point qnelconque de ε_α, La section e de C engendrée par le point y_0 est une suite partielle déterminée de (1) qu'on peut désigner par

$$(6) \quad r(m_1),\ r(m_2),\ \ldots,\ r(m_\nu),\ \ldots; \quad m_1 < m_2 < \cdots < m_\nu < \cdots.$$

(Nous pouvons supposer que l'indice ν parcourt tous les nombres naturels). Il existe alors une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6).

Soit l_1 le plus petit des m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation binnivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2) (une telle transformation existe toujours puisque y_0 appartient à ε_α. Soit deuxièmement l_2 le plus petit des m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_2)$ de (2). Soit troisièmement l_3 le plus petit des m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à à $r(n_3)$ de (2). Continuons ainsi de suite jusqu'à l_{m_1}.

Soit maintenant p_1 le plus petit des indices n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_1})$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1})$ de (2), et en même temps $r(m_1)$ de (6) à $r(n_k)$ de (2). Soit ensuite l_{m_1+1} le plus petit des indices m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_1})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1})$ et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_{m_1+1})$ de (2)(1). Soit l_{m_1+2} le plus petit des indices m_ν, satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_1})$, $r(l_{m_1+1})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1})$, $r(n_{m_1+1})$, et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_{m_1+2})$ de (2). Continuons ainsi de suite jusqu'à l_{m_2}. Soit p_2 le plus petit des indices n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_2})$ et $r(m_1)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1})$ et $r(p_1)$ de (2), et en même temps $r(m_2)$ de (6) a $r(n_k)$ de (2). Soit ensuite l_{m_2+1} le plus petit des indices m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoqne et semblable entre les suites (2) et (6) qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_2})$ et $r(m_1)$, $r(m_2)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_2})$ et $r(p_1)$, $r(p_2)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_{m_2+1})$ de (2). Continuons ainsi de suite.

Nons pouvons donc déterminer une suite d'indices

$$(7) \qquad l_1, \ l_2, \ l_3, \ \ldots, \ l_k, \ \ldots .$$

de telle sorte que, pour tout nombre entier positif k, il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6),

(1) Il faut remarquer que la condition que la transformation fait correspondre $r(m_1)$ de (6) à $r(p_1)$ de (2) est superflue dans le cas où p_1 se trouve parmi n_1, n_2, $\ldots$, n_{m_1}.

qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_k)$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_k)$ de (2). Donc la position mutuelle des nombres rationnels $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_2)$, ..., $r(l_k)$ est précisément égale à celle de $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_k)$. Considérons la transformation définie par la correspondance:

(8) $r(n_k)$ de la suite (2) correspond à $r(l_k)$ de la suite (6), $k = 1, 2, 3, \dots$.

Cette transformation est biunivoque et semblable, puisque, comme nous avons vu pluts haut, la transformation partielle entre $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_k)$ et $r(l_1)$, $r(l_2)$, ..., $r(l_k)$ est biunivoque et semblable pour tout k, $k = 1, 2, 3, \dots$. Considérons d'autre part l'intervalle de Baire d'ordre $1 : \delta_{l_1}$. Nous avons alors $f_1(\delta_{l_1}) = r(l_1)$. Comme $r(l_2)$ est situé dans la même position par rapport à $r(l_1)$ que le nombre $r(n_2)$ par rapport au nombre $r(n_1)$, il existe sûrement un intervalle unique d'ordre $2 : \delta_{l_1, l'_2}$ tel que $r(l_2) = f_2(\delta_{l_1, l'_2})$. En général, supposons que nous ayons déterminé les nombres l'_2, l'_3, ..., l'_{k-1} de sorte que $r(l_2) = f_2(\delta_{l_1, l'_2})$, $r(l_3) = f_3(\delta_{l_1, l'_2, l'_3})$, ..., $r(l_{k-1}) = f_{k-1}(\delta_{l_1, l'_2, \dots, l'_{k-1}})$. Comme $r(l_k)$ est situé dans la même position par rapport à $r(l_1) = f_1(\delta_{l_1})$, $r(l_2) = f_2(\delta_{l_1, l'_2})$, ..., $r(l_{k-1}) = f_{k-1}(\delta_{l_1, l'_2, \dots, l'_{1k-1}})$ que le nombre $r(n_k)$ par rapport aux nombres $r(n_1)$, $r(n_2)$, ..., $r(n_{k-1})$, il existe sûrement un intervalle unique d'ordre k tel que $r(l_k) = f_k(\delta_{l_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_k})$.

Ainsi, nous obtenons un point irrationnel déterminé

(9) $$x_0 = (l_1, l'_2, l'_3, l'_4, \dots, l'_k, \dots)$$

tel que $r(l_k) = f_k(\delta_{l_1, l'_2, l'_3, \dots, l'_k})$. La section de l'ensemble S engendrée par le point $(x_0, 0)$ dans le plan OXZ est précisément l'ensemble de tous les nombres rationnels $r(l_k)$. Or, cet ensemble est présicément e. En effet, il est clair que $r(l_k)$ appartient à e quel que soit k, $k = 1, 2, 3, \dots$. D'autre part, pour tout nombre $r(m_\nu)$, il existe un indice k, tel que $r(l_k) = r(m_\nu)$. Pour cela, il nous suffit de considérer l'indice p_ν qui se trouve parmi n_k. À p_k correspond un indice l_k, tel que $r(l_k) = r(m_\nu)$. Donc, l'ensemble de tous les $r(l_k)$ coïncide avec la suite (6). Donc le point (x_0, y_0) appartient à l'ensemble Φ.

Nous démontrons maintenant que le point (x_0, y_0) appartient encore à l'ensemble Θ. D'abord, le point $(x_0, y_0, f_1(\delta_{l_1}))$ appartient évidemment à F_1. La section de γ engendrée par (x_0, y_0) est disjointe des surfaces F_1^*, F_2^*, $\ldots$, $F_{m_1-1}^*$. Le point $(x_0, y_0, f_2(\delta_{l_1}, l_2'))$ est situé sur la surface F_2. En effet, comme l_1 est le plus petit indice des m_ν, tel que $r(m_\nu)$ de (6) correspond à $r(n_1)$ de (2) par une transformation biunivoque et semblable entre E et e, aucun $\delta_{m_1'}(m_1' < l_1)$ ne contient le point de $M(e)$. Donc, les points $(x_0, f_k(\delta_{l_1}, l_2', \ldots, l_k'))$, $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ appartiennent aux parties des courbes $L_k (k = 2, 3, 4, \ldots)$, qui ne sont pas supprimées par le premier procédé (voir p. 15). En particulier, le point $(x_0, y_0, f_2(\delta_{l_1}, l_2'))$ appartient donc à la surface F_2. Comme l_2 est le plus petit des indices m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre E et e, qui fait correspondre $r(l_1)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_1)$ de (2), et, comme la suite des nombres rationnels r_1', r_2', $\ldots$, r_n', $\ldots$ de la page 13 est rangée dans le même ordre que la suite (1), d'après la définition de la courbe L_2, aucun $\delta_{l_1, m_2'}(m_2' < l_2)$ ne contient le point de $M(e)$. Donc, les points $(x_0, y_0, f_k(l_1, l_2', \ldots, l_k'))$ $(k = 3, 4, 5, \ldots)$ appartiennent aux parties des courbes $L_k (k = 3, 4, 5, \ldots)$, qui ne sont pas supprimées par le troisième procédé. En particulier, le point $(x_0, y_0, f_3(\delta_{l_1}, l_2', l_3'))$ appartient à la surface F_3. Continuons ainsi de suite jusqu'à $r(l_{m_1}) = f_{m_1}(\delta_{l_1}, l_2', \ldots, l_{m_1}')$. Le point $(x_0, y_0, f_{m_1}(\delta_{l_1}, l_2', \ldots, l_{m_1}'))$ est situé sur la surface F_{m_1}. Ensuite, considérons le point $(x_0, y_0, r(m_1))$. Comme p_1 est l'indice le plus petit des n_k satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_1})$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1})$, et en même temps $r(m_1)$ de (6) à $r(n_k)$ de (2). Donc le point $(x_0, y_0, f_{p_1}(\delta_{l_1}, l_2', \ldots, l_{p_1}'))$ n'est pas supprimé par $2m_1$-ième procédé. De plus, comme l_{m_1} est le plus petit des indices m_ν satisfaisant à la condition: il existe une transformation biunivoque et semblable entre les suites (2) et (6), qui fait correspondre $r(l_1)$, $r(l_2)$, $\ldots$, $r(l_{m_1-1})$ de (6) à $r(n_1)$, $r(n_2)$, $\ldots$, $r(n_{m_1-1})$ de (2), et en même temps $r(m_\nu)$ de (6) à $r(n_{m_1})$ de (2). Donc, les points $(x_0, y_0, f_k(\delta_{l_1}, l_2', l_3', \ldots, l_k'))$, $k = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots$ ne sont pas supprimés pas le $2m_1 - 1$ procédé. En particulier, le point $(x_0, y_0, f_{p_1}(\delta_{l_1}, l_2', \ldots, l_{p_1}'))$ (pour le cas où $p_1 \geq m_1 + 1$) n'est pas supprimé par le procédé de ce numéro. La section de l'ensemble γ engendrée par le point (x_0, y_0) est disjointe des surfaces $F^*_{m_1+1}$, $F^*_{m_1+2}$, ..., $F^*_{m_2-1}$. Le point $(x_0, y_0, f_{m_1+1}(\delta_{l_1}, l'_2, \ldots, l'_{m_1+1}))$ est situé sur la surface F_{m_1+1}.

Passons maintenant au point $(x_0, y_0, f_{m_1+2}(\delta_{l_1}, l'_2, \ldots, l'_{m_1+2}))$, et continuons ainsi de suite. Pour tout nombre entier positif k, le points $(x_0, y_0, f_k(\delta_{l_1}, l'_2, l'_3, \ldots, l'_k))$ se trouvent dans l'ensemble γ. Cela montre que le point (x_0, y_0) n'appartient pas à Θ_1. Comme d'autre part, l'ensemble γ est une partie de $S \times OY$, l'ensemble Θ_2 est une partie de Φ_2. Nous avons déjà vu que (x_0, y_0) appartient à Φ. Il n'appartient donc pas à Φ_2, à plus forte raison, ni à Θ_2. Donc, il appartient à Θ. Ainsi, nous avons vu que le point (x_0, y_0) appartient à $\Theta \cdot \Phi$. Par conséquent, la projection de $\Theta \cdot \Phi$ sur l'axe OY coïncide avec l'ensemble ε_α.

Nous allons montrer maintenant que l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$ satisfait encore à la condition suivante: *il possède au plus un point sur chaque droite parallèle à l'axe OX située sur le plan OXY*.

En effet, supposons que deux points (x_0, y_0) et (x'_0, y_0) $(x_0 \neq x'_0)$ appartienne à $\Theta \cdot \Phi$. Nous pouvons supposer que x_0 est le nombre irrationnel que nous avons considéré plus haut:

$$x_0 = (l_1, l'_2, l'_3, \ldots, l'_k, \ldots).$$

Posons d'autre part,

$$x'_0 = (l''_1, l''_2, l''_3, \ldots, l''_k, \ldots).$$

Comme ces deux points appartiennent à Φ, il existe deux transformations, soient τ_1 et τ_2, biunivoques et semblables entre les suites (2) et (6), définies par les points-intersections de la somme des courbes: $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_k, \ldots$.

En faisant correspondre le nombre rationnel $r(n_k)$ à $r(n_{k'})$ tel que $\tau_1(r(n_k)) = \tau_2(r(n_{k'}))$, nous avons une transformation de E sur lui-même, soit τ, qui est biunivoque et semblable.

Dans cette correspondance, examinons les nombres rationnels

$$(10) \qquad r(n_1), r(n_2), r(n_3), \ldots, r(n_{m_1}), r(p_1), r(n_{m_1+1}), \ldots,$$
$$r(n_{m_2}), r(p_2), r(n_{m_2+1}), \ldots,$$

et soit n_{k_0} ou p_{ν_0} le premier de ces nombres (dans l'ordre de cette série), qui satisfont à l'inégalité: $r(n_k) \neq r(n_{k'})$. Un tel n_{k_0} ou p_{ν_0} existe toujours, puisque la correspondance considérée n'est pas l'identité (cela résulte de l'inégalité $x_0 \neq x_0'$). Distinguons deux cas possibles.

Premier cas où n_{k_0} est le premier. Dans ce cas, nous avons d'après la définition $\tau_1(r(n_{k_0})) = \tau_2(r(n'_{k_0}))$ et $r(n_{k_0}) \neq r(n'_{k_0})$. D'ailleurs, pour tout numéro précédent dans la suite (10), on a

$$\tau_1(r(n_k)) = \tau_2(r(n_k)) = r(l_k)\,,\quad \tau_1(p_\nu) = \tau_2(p_\nu) = r(m_\nu)\,.$$

Donc, d'après la définition de τ_1, le numéro de $\tau_1(r(n_{k_0}))$ dans la suite (6) est plus petit que celui de $\tau_2(r(n_{k_0}))$. Par conséquent, le point $(x_0', y_0, f_{k_0}(\delta_{l_1''}, l_2'', \dots, l_{k_0}''))$ est supprimé par le $2k_0+1$-ième procédé. Donc, le point (x_0', y_0) ne peut être situé dans Θ.

Deuxième cas où p_{ν_0} est le premier. Dans ce cas, ce numéro $r(p_{k_0})$ n'est égale à aucun $r(n_k)$ qui précède $r(p_{\nu_0})$ dans la suite (10). Supposons qu'à ce $r(p_{\nu_0})$ correspond $r(n_k)$ par la transformation τ du plus haut. On a alors $\tau_1(r(p_{\nu_0})) = \tau_2(r(n_k)) = r(m_{\nu_0})$. Or, d'après la définition de p_{ν_0}, on a l'inégalité $p_{\nu_0} < n_k$. Et le point $(x_0', y_0, f_k(\delta_{l_1''}, l_2'', \dots, l_k''))$ est supprimé par le $2\nu_0$-ième procédé. Donc, le point (x_0', y_0) ne peut être situé dans l'ensemble Θ. Ainsi, dans tous les cas, nous sommes amenés à une contradiction. Toute droite dans le plan OXY, parallèle à l'axe OX, coupe par conséquent l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$ en un point au plus. M. N. LUSIN dit qu'un ensemble plan Φ est *uniformisé au moyen de l'ensemble* $H(\subseteq \Phi)$, si toute parallèle à l'axe OX qui rencontre Φ, rencontre H en un et un seul point(1). Nous avons donc démontré que l'ensemble Φ est uniformisé par l'ensemble $\Theta \cdot \Phi$.

Enfin, nous allons démontrer que $\Theta \cdot H$ *est un ensemble borelien.* Pour cela, remarquons d'abord que six ensembles S, S', C, C', γ et γ' sont boreliens. Par suite, quatre ensembles $(S \times OY) \cdot (OX \times C')$, $(S' \times OY) \cdot (OX \times C)$, $\gamma \cdot (OX \times C')$ et $\gamma' \cdot (OX \times C)$ sont des ensembles boreliens. De plus, les points de ces ensembles ont les coordonnées z rationnelles. Ils ne contiennent donc que des points situés sur une infinité dénombrable des plans parallèles au plan OXY. Les

(1) N. LUSIN, Sur le problème de M. JACQUES HADAMARD d'uniformisation des ensembles, Mathematica vol. IV (1930). p. 59.

ensembles Φ_1, Φ_2, Θ_1 et Θ_2 sont par suite boreliens. De là, s'ensuit que les ensembles Φ et Θ, comme complémentaires de $\Phi_1+\Phi_2$ et de $\Theta_1+\Phi_2$, sont boreliens. Ainsi, la partie commune $\Theta\cdot\Phi$ est borelienne.

L'ensemble ε_α coïncide, par conséquent, avec la projection, uniforme d'un ensemble borelien $\Theta\cdot\Phi$ sur l'axe OY. D'après un théorème classique de M. N. LUSIN[1], l'ensemble atomique ε_α est toujours un ensemble borelien. c. q. f. d.

---

(1) Voir p. ex. C. KURATOWSKI, Topologie I, p. 251.