LES ESPACES ABSTRAITS ET LES ENSEMBLES ORDONNÉS

Par

Takeshi INAGAKI

Pour étudier le problème de SOUSLIN en se basant sur la théorie des espaces abstraits, j'ai introduit une nouvelle notion dite "O-séparable"[(1)] et, comme on a vu, la condition nécessaire et suffisante pour que la réponse au problème de SOUSLIN soit affirmative est que tout ensemble ordonné linéairement sans sauts et sans lacunes ne soit pas toujours O-séparable[(2)].

Nous ne connaissons pas actuellement la solution définitive du problème de SOUSLIN, et nous nous contenterons donc à montrer dans le chapitre 1 seulement l'existence des espaces abstraits possédant la propriété O-séparable. De plus, nous pourrons voir que les espaces abstraits donnés qui sont O-séparables donneront une réponse négative à un problème proposé par M.G. KUREPA[(3)]. Dans le chapitre 2, nous étudierons d'abord quelques propriétés des espaces abstraits vérifiants le premier axiome de séparabilité (erstes Abzählbarkeitsaxiom) de

---

(1) Un espace est dit O-séparable lorsqu'il satisfait à deux conditions suivantes:

a) Il existe au moins une suite décroissante des ensembles ouverts du type Ω.

b) Toute suite décroissante des ensembles ouverts est du type inférieur à Ω^2.

Comme on sait, dans un espace quasiaccessible la propriété O-séparable est équivalente aux conditions suivantes:

a′) L'espace considéré est non séparable.

b′) Soit $\mathfrak{F} = \{E\}$ une famille des ensembles non séparables de l'espace considéré telle que tous les ensembles sont deux à deux disjoints. Alors il existe une sous-famille $\mathfrak{F}^* = \{E_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ formée d'une infinité dénombrable des ensembles de $\mathfrak{F}$ telle que, pour chaque ensemble E de $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}^*$ et pour tout ensemble ouvert $O(E)$ contenant E, la partie commune $O(E)\cdot(\sum_{n=1}^{\infty} E_n)$ n'est pas vide.

Dans ce cas, on dit que l'ensemble E est de O-accumulation de $\mathfrak{F}^*$ et que la famille $\mathfrak{F}$ est O-séparable. Voir ma Note, Le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits, Ces. Jour., t. 8 (1939), p. 41–43.

(2) Ibid., p. 38–43.

(3) G. KUREPA, Les ensembles ordonnés et ramifiés, Publ. Math. Belgrade, 4 (1935), la note (11) au bas de la page 131.

M. HAUSDORFF, et en les employant nous chercherons quelques propriétés caractéristiques des ensembles ordonnés linéairements sans sauts et sans lacunes.

§ 1. Deux exemples des espaces abstraits O-séparables.

1. Dans son article "Sur l'équivalence de trois propriétés des ensembles abstraits"(1), M. W. SIERPIŃSKI a donné deux exemples des espaces $\mathfrak{L}$ possédant des propriétés particulières, à savoir l'un d'entre eux possède la propriété que tout ensemble non dénombrable de l'espace considéré n'est pas séparable, mais contient toujours au moins un point de condensation et l'autre possède cette propriété que tout ensemble non dénombrable de l'espace considéré est toujours séparable et ne contient aucun point de condensation.

En modifiant la définition de la dérivation de ces espaces donnés par M. SIERPIŃSKI, nous allons maintenant montrer l'existance de l'espace O-séparable. Tout d'abord considérons l'espace R de tous les nombres réels. Comme on sait, l'espace R est parfaitement séparable et il existe donc une famille $\{V\}$ d'une infinité dénombrable des intervalles telle que, quel que soit le point x de R, la famille des intervalles $\{V(x)\}$ auxquels x est contenu soit équivalente à la famille, donnée d'avance, des voisinages de x. Or, prenons une suite transfinie des nombres réels différents du type Ω:

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_\alpha,\ \ldots\ldots\ |\ \Omega,$$

et désignons par R^* l'ensemble de tous les x_α. Nous définirons un espace (R^*, V^*) comme il suit. Pour un point x_α de l'ensemble R^* désignons par $\{V(x_\alpha)\}$ la famille des voisinages dans l'espace (R, V) du point x_α et pour un voisinage $V(x_\alpha)$ définirons un voisinage $V^*(x_\alpha)$ dans l'ensemble R^* du point x_α par le symbole logique:

$$\left[x \in V^*(x_\alpha)\right] \equiv \left[(x \in R^*) \cdot \left\{x \in V(x_\alpha)\right\} \cdot \left\{(x = x_\beta) \rightarrow (\alpha \leq \beta < \Omega)\right\}\right].$$

Ainsi l'ensemble R^* peut être considéré comme un espace (R^*, V^*) et, comme on peut facilement vérifier, il est un espace de M. HAUSDORFF. Nous pouvons vérifier que l'espace (R^*, V^*) possède les propriétés suivantes:

1° L'espace (R^*, V^*) est hyper-condensé en soi.

---

(1) Fund. Math., t. 2 (1921), p. 178-188.

2° Tout ensemble non dénombrable de l'espace considéré est non séparable.

3° L'espace considéré est O-séparable.

En effet, pour démontrer que la propriété 1° est vérifié, prenons un ensemble E non dénombrable de l'espace (R^*, V^*). Si l'on considère l'ensemble E comme celui de l'espace (R, V), il y a dans E au moins un point de condensation de E puisque l'espace (R, V) est parfaitement séparable. Soit x_α un point de condensation dans l'espace (R, V) de E et appartenant à E. Alors pour chaque voisinage $V(x_\alpha)$ de x_α, la partie commune $V(x_\alpha)\cdot E$ est non dénombrable. Donc par la définition, pour chaque voisinage $V^*(x_\alpha)$ dans l'espace (R^*, V^*) la partie commune $V^*(x_\alpha)\cdot E$ est aussi non dénombrable. Il en résulte dans l'espace (R^*, V^*) que le point x_α est de condensation de E.

Ensuite, pour prouver que l'espace (R^*, V^*) jouit de la propriété 2°, considérons un ensemble E non dénombrable. Supposons que, par impossible, il existe un sous-ensemble M dénombrable tel qu'il est partout dense sur E. Tous les points de M peuvent être rangés en une suite infinie

$$x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2},\ \ldots\ldots,\ x_{\alpha_n},\ \ldots,\qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,$$

puisque l'ensemble M est dénombrable. Pour tout n, le nombre ordinal α_n est de seconde classe ou fini, donc il existe un nombre ordinal α_0 de seconde classe supérieur à tout α_n. Or, l'ensemble E étant non dénombrable, il y a dans E un point x_β dont le suffixe β est supérieur à α_0. Par définition même, dans l'espace (R^*, V^*) tous les voisinages $V^*(x_\beta)$ de ce point x_β ne contient aucun point commun avec l'ensemble M, autrement dit, le point x_β n'est pas contenu à la fermeture de M, ce qui contredit à l'hypothèse que l'ensemble M est partout dense dans E.

Nous allons dès maintenant prouver que l'espace (R^*, V^*) est O-séparable. Selon la propriété 2°, dans l'espace (R^*, V^*) il y a des ensembles non séparables. Soit $\mathfrak{F} = \{E_\alpha\}$ une famille des ensembles non séparables et deux à deux disjoints. Par la propriété 1°, l'ensemble E_α contient des points de condensation de lui-même. Désignons par $E_\alpha^{(c)}$ l'ensemble de tous les points de condensation appartenant à E_α. Pour démontrer que la famille $\mathfrak{F}$ est O-séparable, il suffit à démontrer que la famille $\mathfrak{F}^{(c)} = \{E_\alpha^{(c)}\}$ est O-séparable, puisque $E_\alpha^{(c)} \subseteq E_\alpha$ pour tout α. Considérons la famille $\mathfrak{F}^{(c)} = \{E_\alpha^{(c)}\}$

comme celle de l'espace (R, V). Comme l'espace (R, V) est parfaitement séparable, il existe donc une sous-famille $\mathfrak{F}^*$ formée d'une infinité dénombrable des ensembles de $\mathfrak{F}^{(c)}$ tels que leur somme est partout dense dans la somme de tous les ensembles de $\mathfrak{F}^{(c)}$. Soit $\mathfrak{F}^* = \{E_{\alpha_n}^{(c)}\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots.)$. Prenons un ensemble quelconque $E_\beta^{(c)}$, $\beta \neq \alpha_n$, de la famille $\mathfrak{F}^{(c)} = \{E_\alpha^{(c)}\}$ et soit $p_{\gamma(\beta)}$ un point de $E_\beta^{(c)}$. Or, par l'hypothèse, pour tout voisinage $V(p_{\gamma(\beta)})$ la partie commune $V(p_{\gamma(\beta)}) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha_n}^{(c)}\right)$ n'est pas vide. Nous pouvons donc supposer qu'il existe un ensemble $E_{\alpha_n}^{(c)}$ tel que $V(p_{\gamma(\beta)}) \cdot E_{\alpha_n}^{(c)} \neq 0$. Soit $p_{\gamma(\alpha_n)}$ un point de $E_{\alpha_n}^{(c)}$ appartenant à $V(p_{\gamma(\beta)})$. Il est évident que $p_{\gamma(\alpha_n)} \neq p_{\gamma(\beta)}$ puisque $E_{\alpha_n}^{(c)} \cdot E_\beta^{(c)} = 0$. Il existe donc un voisinage $V(p_{\gamma(\alpha_n)})$ du point $p_{\gamma(\alpha_n)}$ tel que $V(p_{\gamma(\alpha_n)}) \subseteq V(p_{\gamma(\beta)})$. Par l'hypothèse, $p_{\gamma(\alpha_n)}$ est dans l'espace (R^*, V^*) de point de condensation de E_{α_n}, et par conséquent le voisinage $V(p_{\gamma(\alpha_n)})$ contient une infinité non dénombrable des points de E_{α_n}. Alors, le voisinage $V(p_{\gamma(\beta)})$ contient une infinité non dénombrable des points de E_{α_n}. En remarquant que, d'après la définition posée, pour chaque voisinage $V^*(p_{\gamma(\beta)})$ dans l'espace (R^*, V^*) il existe un voisinage $V(p_{\gamma(\beta)})$ dans l'espace (R, V) et le premier coïncide avec l'ensemble de tous les points de R^* contenus à $V(p_{\gamma(\beta)})$ tels que leurs suffices ne sont pas inférieurs à $\gamma(\beta)$, nous pouvons conclure que le point $p_{\gamma(\beta)}$ est dans l'espace (R^*, V^*) le point d'accumulation de $\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha_n}^{(c)}$, c.-à-d. l'ensemble $E_\beta^{(c)}$ est de O-accumulation de la famille $\mathfrak{F}^* = \{E_{\alpha_n}^{(c)}\}$. Il en résulte que la famille $\mathfrak{F}^{(c)} = \{E_\alpha^{(c)}\}$ est O-séparable. C. Q. F. D.

2. Avant de considérer un autre exemple de l'espace abstrait O-séparable, nous considérons un problème proposé par M. G. Kurepa. Il est posé comme suivant[1]: Soit un espace R de la classe v de M. Fréchet et $\{V\}$ une famille quelconque de voisinage déterminant $R(\{V\}$ s'appelle *base cellulaire* de R; *base ponctuelle* de R s'appelle tout sous-ensemble de M partout dense sur $R)$; on convient que tout voisinage contient tout point auquel il est attaché. Alors, p_2R désignera la borne supérieure des puissances des $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ parcourant la classe des sous-familles disjointes de $\{V\}$. On voit que p_2R a une valeur bien déterminée ne dépendant pas du choix particulier de $\{V\}$. Si l'on désigne par p_1R la borne inférieure des puissances des M, M parcourant la famille des sous-ensembles de R partout

(1) G. Kurepa, loc. cit., p. 131.

dense sur R (les quantités p_1R et p_2R sont appellées respectivement *degrée de séparabilité* (FRÉCHET) et *degrée de cellularité* de R), on a ce Problème de la structure cellulaire d'espaces abstraits: *A-t-on, pour tout espace R de la classe v, $p_1R = p_2R$?* Si R est un espace distancié, on peut prouver que $p_1R = p_2R$ et que la borne p_2R est atteinte. Si R est un ensemble ordonné infini, on ne sait pas s'il y en a d'anormaux, c.-à-d. tel que $p_1R > p_2R$.

Or, pour donner une réponse négative à ce problème de M. KUREPA, il suffit à considérer l'espace (R^*, V^*) O-séparable que nous avons déjà défini précédemment. En effet, l'espace (R^*, V^*) appartient d'abord à la classe v de M. FRÉCHET et comme on a vu il est non séparable, autrement dit $p_1R^* = \aleph_1$. De plus, par la propriété 1°, l'espace (R^*, V^*) est hyper-condensé en soi et par conséquent dans l'espace (R^*, V^*) chaque famille des ensembles ouverts deux à deux disjoints est au plus dénombrable, on a donc $p_2R^* = \aleph_0$. Il en résults que $p_1R^* > p_2R^*$. Ce fait donne une réponse négative au problème de M. KUREPA.

3. Ensuite, pour voir l'indépendance entre des notions de "hyper-condensé en soi" et de "O-séparable", nous voulons donner un exemple d'espace où un ensemble peut jouir de la propriété O-séparable sans posséder la propriété hyper-condensé en soi.

Désignons par (R, V) l'espace de tous les nombres réels. Soient

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\alpha, \ldots\ldots \mid \Omega$$

et

$$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_\alpha, \ldots\ldots \mid \Omega$$

deux suites transfinies des nombres réels distincts, du type Ω. Posons $R^* = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} x_\alpha$, $R^{**} = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} y_\alpha$ et $\bar{R} = R^* + R^{**}$. Nous définirons une famille des voisinages $\bar{V}(p)$ de point p de l'ensemble $\bar{R}$ comme il suit:

Si $p \in R^*$, ou $p = x_\alpha$, un voisinage $\bar{V}(x_\alpha)$, ou $V^*(x_\alpha)$, de x_α est défini par le symbole logique:

$$\Big[q \in V^*(x_\alpha)\Big] \equiv \Big[(q \in R^*) \cdot \{q \in V(x_\alpha)\} \cdot \{(q = x_\beta) \rightarrow (\alpha \leq \beta < \Omega)\}\Big].$$

Si $p \in R^{**}$, ou $p = y_\alpha$, un voisinage $\bar{V}(y_\alpha)$, ou $V^{**}(y_\alpha)$, de y_α est défini par la formule:

$$\Big[q \in V^{**}(y_\alpha)\Big] \equiv \Big[(q \in R^{**}) \cdot \{q \in V(y_\alpha)\} \cdot \{(q = y_\beta) \rightarrow (0 \leq \beta \leq \alpha)\}\Big].$$

Ainsi, nous avons un espace $(\overline{R}, \overline{V})$ de la classe v de M. FRÉCHET. Comme on peut voir, l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$ est réellement celui de M. HAUSDORFF. Or, si l'on considère le sous-espace (R^*, V^*) de l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$, l'espace (R^*, V^*) est O-séparable et hyper-condensé en soi. Aussi, si l'on considère le sous-espace (R^{**}, V^{**}) de l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$, l'espace (R^{**}, V^{**}) possède les propriétés suivantes:

4° Tout ensemble non dénombrable de l'espace (R^{**}, V^{**}) est séparable.

5° Tout ensemble non dénombrable de l'espace considéré ne contient aucun point de condensation de lui-même.

Pour le voir, prenons un ensemble E non dénombrable de R^{**}. Il est clair que l'ensemble E contient un sous-ensemble M dénombrable tel qu'il est dans l'espace (R, V) partout dense sur E. Soit $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}, \dots, y_{\alpha_n}, \dots.$ une suite de tous les points de M. Pour tout n, α_n est un nombre ordinal de seconde classe ou fini, et par suite il existe un nombre ordinal α_0 de seconde classe supérieur à tout α_n. Posons $N = E \cdot \{\sum_{0 \leq \alpha < \alpha_0} y_\alpha\}$. Il est évident que l'ensemble N est dénombrable et dans l'espace (R, V) partout dense sur E, puisque $N \supseteq M$ et M est dans l'espace (R, V) partout dense sur E. Or, pour chaque voisinage $V^{**}(y_\beta)$ dans l'espace (R^{**}, V^{**}) de y_β, il y a un voisinage $V(y_\beta)$ dans l'espace (R, V) tel que $V^{**}(y_\beta) = V(y_\beta) \cdot (\sum_{0 \leq \alpha \leq \beta} y_\alpha)$. Par conséquent, en vertu de la construction de N la partie commune à $V^{**}(y_\beta)$ et à N n'est pas vide. Il en résulte que l'ensemble N est dans l'espace (R^{**}, V^{**}) partout dense sur E, ce qui montre que l'espace (R^{**}, V^{**}) possède la propriété 4°.

Puis, d'après la définition des voisinages de l'espace (R^{**}, V^{**}), chaque voisinage ne contient qu'au plus des points d'une infinité dénombrable, et alors il est clair que l'espace (R^{**}, V^{**}) jouit de la propriété 5°.

Il résulte du fait indiqué plus haut que tout ensemble non dénombrable E de l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$ ou bien est séparable ou bien contient au moins un point de condensation de lui-même, suivant que l'ensemble $E \cdot R^*$ est au plus dénombrable ou non. Il est facile de voir que l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$ est O-séparable. En effet, de l'espace $(\overline{R}, \overline{V})$ prenons une famille $\mathfrak{F} = \{E_\alpha\}$ des ensembles non séparables et deux à deux disjoints. Pour démontrer que la famille $\mathfrak{F}$ est O-séparable, en posant $E_\alpha^* = E_\alpha \cdot R^*$ il est suffisant à prouver que la famille $\mathfrak{F}^* = \{E_\alpha^*\}$ est O-séparable. Cependant, comme on sait, l'espace (R^*, V^*) est O-séparable et par conséquent la famille $\mathfrak{F}$ est O-séparable.

De l'exemple précédent, nous avons le

Théorème 1. *Les propriétés O-séparable et hyper-condensé en soi sont indépendantes.*

En effet, le dernier exemple de l'espace O-séparable donné plus haut montre que l'espace $(\bar{R}, \bar{V})$ n'est pas hyper-condensé en soi, puisque le sous-espace (R^{**}, V^{**}) ne jouit pas de la propriété hyper-condensé en soi. Ensuite, l'espace de tous les nombres réels est hyper-condensé en soi sans être O-séparable. C. Q. F. D.

En outre, le dernier exemple précédent nous suggère le théorème suivant:

Théorème 2. *Dans les espaces R quasiaccessibles et O-séparables, tout ensemble isolé est au plus dénombrable.*

Démonstration. Par impossible, supposons qu'il existe un ensemble isolé E et dont la puissance est non dénombrable. Puisque l'ensemble E est non dénombrable, nous pouvons tirer une suite transfinie des points de E du type Ω^3:

$$p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots \mid \Omega^3.$$

Posons $M_\alpha = \sum_{0 \leq \beta < \alpha} p_\beta$ et $F_\alpha = \bar{M}_\alpha$ où $\bar{M}_\alpha$ désigne la fermeture de M_α. Il est clair que $F_\alpha < F_\beta$ pour $\alpha < \beta$. En vertu de l'hypothèse que l'ensemble E est isolé et que l'espace R est quasiaccessible, il résulte que l'ensemble F_α est fermé et que la partie commune $F_\alpha \cdot (\sum_{\alpha \leq \beta < \Omega^3} p_\beta)$ est vide. En posant $G_\alpha = R - F_\alpha$, nous avons une suite décroissante des ensembles ouverts du type Ω^3:

$$G_0 > G_1 > \cdots > G_\alpha > \ldots \mid \Omega^3.$$

Nous aboutissons donc à une contradiction que l'espace R considéré ne possède pas la propriété O-séparable. C. Q. F. D.

D'après les théorèmes 1 et 2, nous savons que les trois propriétés séparable, O-séparable et hyper-condensé en soi sont mutuellement indépendantes, mais elles ont une nature commune telle que, dans les espaces jouissant d'une quelconque de ces trois propriétés, tout ensemble isolé est au plus dénombrable. Nous citons ici un théorème concernant à cette nature commune:

Théorème 3. *Dans l'espace accessible, les quatre propriétés ci-dessous sont équivalentes.*

(1) *Tout ensemble isolé est au plus dénombrable.*

(2) *Tout ensemble non dénombrable ou bien est séparable ou bien contient au moins un point de condensation.*

(3) *Tout ensemble non dénombrable ou bien est séparable ou bien contient un noyau dense en soi non vide.*

(4) *Tout ensemble clairsemé est séparable.*

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2). Cette implication a été démontrée par nous dans un autre travail[1].

(2) $\rightarrow$ (3). Soit E un ensemble non séparable. D'après l'hypothèse et un théorème connu[2], il existe une suite des points de E du type Ω:

$$p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, \ldots \mid \Omega$$

telle que, pour tout α, p_α n'appartient pas à la fermeture de l'ensemble $\sum_{0 \leq \beta < \alpha} p_\beta$. Si l'on pose $M = \sum_{0 \leq \alpha < \Omega} p_\alpha$, il est aisé de voir que tout sous-ensemble non dénombrable de M est toujours non séparable. Alors, par l'hypothèse posée l'ensemble M possède au moins un point de condensation. Désignons par N tous les points de condensation de M appartenant à M. Je vais prouver que l'ensemble N est dense en soi. En effet, p étant un point quelconque de N; pour tout voisinage $V(p)$ de p, la partie commune $V(p) \cdot M$ est non dénombrable, et, par suite, $V(p) \cdot (M-p)$ l'est aussi. En vertu de la propriété de M, $V(p) \cdot (M-p)$ n'est pas séparable, et, par conséquent, d'après l'hypothèse, l'ensemble $V(p) \cdot (M-p)$ contient au moins un point de condensation, en d'autre termes $V(p) \cdot (N-p)$ n'est pas vide. Il en résulte que l'ensemble N est dense en soi. M étant un sous-ensemble de E, l'ensemble E contient donc un noyau dense en soi non vide.

(3) $\rightarrow$ (4). Soit E un ensemble clairsemé. Par définition, E ne contient aucun ensemble dense en soi non vide. Alors, selon l'hypothèse l'ensemble E est séparable.

(4) $\rightarrow$ (1). Supposons qu'il existe un ensemble E isolé non dénombrable. Alors, il est clair que E est clairsemé et non séparable. Ce fait est contraire à la supposition (4). C. Q. F. D.

---

(1) Voir les théorèmes 3 et 5 de ma Note, Le problème de SOUSLIN et les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. I, t. 7 (1939), p. 195-197.

(2) Ibid., p. 194-195, le théorème 2.

On sait que, dans les espaces accessibles denses en soi, tout ensemble clairsemé est non dense. Par suite, sous le rapport du fait qui sera énoncé dans n^0 7 de cette Note, il sera intéressant à chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble non dense soit séparable.

4. Dans un espace quasiaccessible (R, V) nous allons considérer une décomposition d'un ensemble ouvert. Pour ce but, nous définirons d'abord une terminologie. Soit G un ensemble ouvert de l'espace (R, V). Prenons un point p de G et désignons par $\{V(p)\}$ la famille des voisinages de p. L'ensemble G est ouvert, alors il existe des voisinages $\{V(p)\}$ contenus à G. Pour tout tel voisinage $V(p)$, posons $C_G(p) = \sum_{V(p) \subseteq G} V(p)$ et nous l'appelons *le composant en le point* p de G ou simplement *composant en point.* Pour chaque point p de G, le composant en p $C_G(p)$ se détermine uniquement. Désignons par $\{C_G(p)\}$ la famille de tous les composants en points. Soient $C_G(p)$ et $C_G(q)$ deux composants en points appartenant à la famille et nous dirons que les composants sont mutuellement *enchaînés,* s'il existe des composants en points des nombres finis $C_G(p_1)$, $C_G(p_2)$, $\ldots$, $C_G(p_n)$ et si dans la suite des composants en points $C_G(p)$, $C_G(p_1)$, $C_G(p_2)$, $\ldots$, $C_G(p_n)$, $C_G(q)$ les deux composants en points voisins ont au moins un point commun. Pour abréger, désignons par $C_G(p) \sim C_G(q)$ le fait que les composants en points $C_G(p)$ et $C_G(q)$ sont mutuellement enchaînés. Comme on peut sans peine voir, la relation $\sim$ est symétrique et transitive. Nous pouvons donc classifier tous les composants de la famille $\{C_G(p)\}$ de sorte que deux composants en points appartiennent à la même classe s'ils sont mutuellement enchaînés. Et désignons par $\{C(G)\}$ la famille des ensembles qui sont les sommes des composants en points appartenant aux mêmes classes. Les ensembles $C(G)$ ainsi définis sont dits *composants* de l'ensemble G. Soient G et g deux ensembles ouverts tels que $g \subseteq G$. Comme on peut aisément vérifier, si $C(G)$ et $C(g)$ sont respectivement les composants de G et g, on a $C(g) \subseteq C(G)$ ou $C(g) \cdot C(G) = 0$. Ceci étant posé, nous considérons un espace R quasiaccessible et O-séparable. L'espace R est O-séparable, alors il y a une suite décroissante des ensembles ouverts du type Ω:

$$(1) \qquad G_1 > G_2 > \cdots > G_\alpha > \ldots \mid \Omega .$$

Décomposons tous les ensembles G_α en ses composants. L'espace R étant O-séparable, les composants de l'ensemble G_α sont au plus dénombrables. Nous pouvons donc désigner par $\{C_n(G_\alpha)\}$ ($n = 1, 2, \ldots.$) tous les composants de G_α. Considérons tous les composants de tous les G_α et désignons par $\mathfrak{F} = \{C_n(G_\alpha)\}$ la famille formée des composants de $\{C_n(G_\alpha)\}$, $0 \leq \alpha < \Omega$, $n = 1, 2, \ldots,$ tels qu'ils sont différents comme des ensembles les uns les autres. Pour deux composants $C_n(G_\alpha)$ et $C_{n'}(G_{\alpha'})$, $\alpha < \alpha'$, de la famille, si $C_n(G_\alpha) \supset C_{n'}(G_{\alpha'})$ nous l'écrivons par $C_n(G_\alpha) \prec C_{n'}(G_{\alpha'})$, et dans ce cas nous dirons qu'ils sont comparables et que $C_n(G_\alpha)$ précède $C_{n'}(G_{\alpha'})$ ou $C_{n'}(G_{\alpha'})$ suit $C_n(G_\alpha)$. Si $C_n(G_\alpha)$ et $C_{n'}(G_{\alpha'})$ sont disjoints, nous dirons qu'ils sont incomparables. Ainsi, par rapport à la relation $\prec$, la famille $\mathfrak{F}$ peut être considéré un ensemble partiellement ordonné, c.-à.-d. la famille est un tableau ramifié de M. Kurepa. Il est évident que la famille $\mathfrak{F}$ ne contient qu'au plus une infinité dénombrable des composants deux à deux incomparables, puisque l'espace R est supposé O-séparable. Nous aurons ainsi un problème important suivant: *Dans un espace accessible et O-séparable, peut on choisir une suite (1) telle que le tableau ramifié $\mathfrak{F}$ correspondant à la suite (1) est anormal*[1] *et du rang Ω*[1]*?*

§ 2. Les ensembles ordonnés.

5. Nous considérons quelques propriétés concernant le premier axiome de séparabilité (erstes Abzählbarkeitsaxiom) de M. Hausdorff. Or, comme on sait, dans les espaces quasiaccessibles, si un ensemble E est séparable la fermeture de E est aussi séparable. Voici un théorème qui se rattache à la proposition inverse de celle-ci:

Théorème 4. *Dans l'espace quasiaccessible (R, V) vérifiant le premier axiome de séparabilité, si pour un ensemble E la fermeture $\overline{E}$ est séparable, alors l'ensemble E lui-même l'est aussi.*

Démonstration. Étant supposé que l'espace (R, V) considéré est quasiaccessible et vérifie le premier axiome de séparabilité, nous pouvons supposer que, pour chaque point p de R il existe une famille des voisinages $\{V_n(p)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ et dont chaque ensemble $V_n(p)$ est ouvert. Or, par l'hypothèse, pour $\overline{E}$ il y a un ensemble A au plus dénombrable tel que $A \subseteq \overline{E}$ et $\overline{A} = \overline{E}$. Posons $A_1 = A \cdot E$ et $A_2 = A \cdot (\overline{E} - E)$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots.$ une suite de tous les points de A_2, ce qui est possible puisque A est au plus dénombra-

(1) G. Kurepa, loc. cit., p. 105 et p. 74.

ble. Prenons un point a_k et son voisinage quelconque $V_n(a_k)$. Par l'hypothèse, a_k étant le point de $\bar{E}-E$, il existe donc un point $p_{n,k}$ de E appartenant à $V_n(a_k)$. Si l'on pose $A_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}$ et $B = A_1 + A_3$, on a $B \subseteq E$. Nous dirons que B est partout dense dans E. En effet, soit p un point de $E-B$. Étant supposé que A est partout dense dans $\bar{E}$, pour chaque vosinage $V_n(p)$ de p, $V_n(p)$ contient au moins un point de A, soit $q \in A \cdot V_n(p)$. Si q est un point de A_1, il est évident que $V_n(p) \cdot B \neq 0$. Si q n'appartenant pas à A_1, autrement dit si $q \in A_2$, il y a un point a_k qui coïncide avec q, et comme l'espace (R, V) est quasiaccessible, il existe donc un voisinage $V_m(a_k)$ contenu dans le voisinage $V_n(p)$. Si l'on considère le point $p_{m,k}$ de B, le point $p_{m,k}$ est contenu évidemment à $V_n(p)$, c.-à-d. la partie commune $V_n(p) \cdot B$ n'est pas vide. Il vient donc $p \in \bar{B}$. Ainsi, nous aboutissons au résultat que nous avions en vue. C. Q. F. D.

Dans le théorème 4, l'espace considéré jouit de la propriété qu'il est quasiaccessible et vérifie le premier axiome de séparabilité. Nous allons voir que ces conditions sont indispensables. Tout d'abord nous définirons un espace v sans être quasiaccessible, contenant de tous les nombres réels et vérifiant le premier axiome de séparabilité par des conventions suivantes:

1. La famille des voisinages de x, si x est un nombre rationnel, coïncide avec celle des voisinages de x dans l'espace des nombres réels.

2. Soient x un nombre irrationnel et $x = [x] + 0 \cdot a_1 a_2 \ldots . a_n \ldots .$ son dévelopement en fraction décimals, où $[x]$ signifie le plus grand nombre entier ne surpassant pas x. En employant les nombres rationnels $x_n = 0 \cdot a_1 a_2 \ldots . a_n$, nous définirons les voisinages $V_n(x)$ de x tels que $V_n(x) = x + \sum_{m \geq n}^{\infty} x_m$, $(n = 1, 2, \ldots .)$.

L'espace ainsi défini est séparable, puisque l'ensemble de tous les nombres rationnels est partout dense dans l'espace considéré. De plus, nous pouvons démontrer que l'ensemble de tous les nombres irrationnels n'est pas séparable et que sa fermeture coïncide avec l'espace considéré et ce dernier est séparable.

Ensuite, nous donnerons un espace quasiaccessible ne vérifiant pas le premier axiome de séparabilité, danslequel il existe un ensemble non séparable, mais sa fermeture est séparable. Soit x_0, x_1, $\ldots$, x_α, $\ldots .$ $(\alpha < \Omega)$ une suite transfinie des nombres réels différents du type Ω. Nous définirons un espace quasiaccessible contenant tous les nombres x_α et ne vérifiant pas le premier axiome de séparabilité comme suivant :

1. La famille des voisinages de x_0 est formée des ensembles $V_\alpha(x_0) = x_0 + x_\alpha$ où $1 \leq \alpha < \Omega$.

2. Le voisinage de x_α $(1 \leq \alpha < \Omega)$ est $V(x_\alpha) = x_\alpha + x_0$.

Comme on peut sans peine prouver, dans l'espace ainsi défini, l'ensemble $\sum_{1\leq\alpha<\Omega} x_\alpha$ n'est pas séparable, mais sa fermeture est séparable.

Du dernier exemple, nous pouvons introduire une remarque concernant le premier axiome de séparabilité. Dans un autre travail[1], nous avons fréquemment usé le fait que, dans les espaces v satisfaisant au premier axiome de séparabilité, la somme des ensembles fermés croissants du type Ω, $F_1 < F_2 < \cdots < F_\alpha < \cdots$, $\alpha < \Omega$, est aussi fermée. Mais, ce fait n'est pas nécessairement vrai dans un espace ne vérifiant pas le premier axiome de séparabilité. En effet, dans le dernier exemple posons $F_\alpha = \sum_{1\leq\beta<\alpha} x_\beta$, $1 \leq \alpha < \Omega$. On peut voir que, les F_α sont fermés et monotones croissants. Si l'on pose $F_\Omega = \sum_{1\leq\alpha<\Omega} F_\alpha$, F_Ω n'est pas fermé puisque le point x_0 est d'accumulation de F_Ω et n'appartient pas à F_Ω.

Nous voulons cesser seulement cela l'étudier concernant le premier axiome de séparabilité et considérons quelques propriétés des espaces ordonnés linéairements sans sauts et sans lacunes.

6. Pour avancer le raisonnement, nous devons donner une remarque nécessaire. Si l'espace de SOUSLIN n'est pas nécessairement séparable, on peut dire qu'il existe un espace de SOUSLIN qui est O-séparable. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons pour le moment qu'il existe un espace de SOUSLIN non séparable. Désignons par $\tilde{S}$ l'espace ainsi supposé. Comme j'ai indiqué, dans l'espace ainsi supposé il y a un intervalle I tel que tout sous-intervalle de I est toujours non séparable.[2] Par conséquent, sans perdre la généralité du raisonnement nous pouvons supposer que tout intervalle de $\tilde{S}$ n'est pas séparable. Ces préliminaires étant posés, en employant le théorème 4 nous allons chercher quelques propriétés de $\tilde{S}$.

Théorème 5. *Dans l'espace $\tilde{S}$, la famille des ensembles séparables coïncide avec celle des ensembles non denses.*

---

(1) Voir ma Note, Le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. I, t. 8 (1939), p. 36.

(2) Voir ma Note, Le problème de SOUSLIN et les espaces abstraits, Ces. Jour., sér. I, t. 7 (1939), p. 200-201.

Démonstration. Étant E un ensemble séparable de $\tilde{S}$, il est clair que sa fermeture $\bar{E}$ est aussi séparable. Si l'on suppose que, par contre, $\bar{E}$ contient un intervalle non vide, l'intervalle est séparable puisque $\bar{E}$ est séparable, ce qui est contraire à la supposition que l'espace $\tilde{S}$ ne contient aucun intervalle séparable. Par conséquent, $\bar{E}$ ne contient aucun intervalle, et alors $\bar{E}$ est non dense. Il en résulte que l'ensemble E est non dense.

Réciproquement, supposons que E est un ensemble non dense. La fermeture $\bar{E}$ est alors non dense et fermé. Posons $G = \tilde{S} - \bar{E}$. En vertu des propriétés des espaces de SOUSLIN, l'ensemble ouvert G se compose d'une infinité des intervalles au plus dénombrables n'empiétant pas les uns sur les autres, soit $G = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. G est ouvert, alors il est évident que $\bar{E}$ contient l'ensemble dénombrable $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ et que ce dernier est partout dense dans $\bar{E}$, puisque $\bar{E}$ est non dense. D'autre part, l'espace $\tilde{S}$ est accessible vérifiant le premier axiome de séparabilité, selon le théorème 4 E est séparable. C. Q. F. D.

Corollaire. Dans l'espace $\tilde{S}$, tout ensemble de première catégorie est non dense.

En effet, soit E un ensemble de première catégorie. Alors E est une somme d'une infinité dénombrable des ensembles non denses. Or, d'après le théorème 5 un ensemble non dense est séparable, et un ensemble d'une somme d'une infinité dénombrable des ensembles séparables est aussi séparable. Par conséquent l'ensembl E est séparable et du théorème 5 E est non dense. C. Q. F. D.

Pour démontrer la proposition réciproque du théorème 5, désignons par R un espace ordonné linéairement sans sauts et sans lacunes. Alors on a le

Théorème 6. *Dans l'espace R, si la famille des ensembles séparables coïncide avec celle des ensembles non denses, l'espace R est réellement l'espace $\tilde{S}$.*

Démonstration. Chaque intervalle de R n'est pas séparable, puisque l'intervalle n'est pas non dense. Ensuite, dans l'espace R la famille des intervalles deux à deux disjoints est au plus dénombrable. En effet, supposons que, par impossible, il existe une famille $\{I_\alpha\}$ des intervalles non dénombrables deux à deux disjoints. Posons $E = R - \sum_\alpha I_\alpha$ et désignons par $I(E)$ l'ensemble de tous les points intérieurs à E. Considérons un ensemble M défini par $M=\{E-I(E)\}+\sum_{\alpha} p_\alpha$ où p_α est un point de I_α. Comme on peut aisément vérifier, M est non dense et chaque p_α est de point isolé de M. M est donc non dense et non séparable, ce qui contredit à l'hypothèse posée.

C. Q. F. D.

7. Désignons par $\{\mathfrak{S}\}_R$ et $\{\mathfrak{N}\}_R$ respectivement la famille des ensembles séparables et celle des ensembles non denses dans un espace R ordonné linéairement danslequel toute coupure est toujours continue. Dans cette convention, nous avons les quatre cas possibles suivants :

1. $\{\mathfrak{S}\}_R < \{\mathfrak{N}\}_R$.
2. $\{\mathfrak{S}\}_R = \{\mathfrak{N}\}_R$.
3. $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{N}\}_R$.
4. Le cas en dehors des trois cas précédents.

Des théorèmes 5 et 6, il s'ensuit que le problème de SOUSLIN est équivalent au problème s'il existe un espace ordonné linéairement sans sauts et sans lacunes danslequel le cas 2 a lieu. Quant au dernier cas, si l'on a deux espaces tels qu'ils vérifient respectivement les cas 1 et 3, nous pouvons avoir un espace danslequel le cas 4 se trouve. Il est clair que le cas 3 a lieu dans l'espace de tous les nombres réels. Réciproquement, comme on peut voir, la question à savoir si l'espace danslequel le cas 3 se produit est semblable à l'espace des nombres réels est équivalent au problème de SOUSLIN. Par conséquent il sera intéressant de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace satisfaisant au cas 3 soit semblable à l'espace des nombres réels. Or, nous allons dès maintenant chercher les cas 1 et 3. Tout d'abord nous donnons ici un exemple d'espace R où le cas 1 a lieu. Soit E un ensemble des nombres réels et désignera par $b.s.(E)$ la borne supérieure de E. Dans cette convention, considérons la famille $\mathfrak{F}$ de toutes suites bien ordonnées des nombres réels $(x_1, x_2, \ldots, x_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha}$, $(\alpha<\Omega)$, telles que $b.s.(\sum_{1\leq\beta<\xi} x_\beta)<x_\xi$ pour tout $\xi<\alpha$. Nous définirons une relation de l'ordre entre les éléments de $\mathfrak{F}$ comme il suit : Soient e^1 et e^2 deux éléments différents de $\mathfrak{F}$ et

$$e^i=(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\xi^i, \ldots)_{\xi<\alpha^i}, \qquad (i=1, 2).$$

1° Si $\alpha^1=\alpha^2$, il est évident qu'il existe un nombre ordinal $\alpha(<\alpha^1)$ tel que

$$x^1_\xi = x^2_\xi \quad \text{pour tout} \quad \xi < \alpha \quad \text{et} \quad x^1_\alpha \neq x^2_\alpha .$$

Dans ce cas, nous écrivons $e^1 \succ e^2$ ou $e^1 \prec e^2$, suivant que le cas $x^1_\alpha > x^2_\alpha$ ou $x^1_\alpha < x^2_\alpha$ se trouve. Nous conviendrons que $e^1 \succ e^2$ veut dire $e^2 \prec e^1$.

2° Si $\alpha^1 < \alpha^2$, il y a deux cas possibles suivants:

Premier cas. Il existe un nombre ordinal α inférieur à α^1 tel que

$$x^1_\xi = x^2_\xi \quad \text{pour tout} \quad \xi < \alpha \quad \text{et} \quad x^1_\alpha \neq x^2_\alpha .$$

Dans ce cas, nous conviendrons que $e^1 \succ e^2$ ou $e^1 \prec e^2$ suivant que $x^1_\alpha > x^2_\alpha$ ou $x^1_\alpha < x^2_\alpha$.

Deuxième cas, où $x^1_\xi = x^2_\xi$ pour tout nombre ordinal $\xi < \alpha^1$. Nous définirons que $e^1 \prec e^2$.

On peut sans peine vérifier que $\prec$ est une relation de l'ordre linéaire et que la famille $\mathfrak{F}$ ainsi définiée est dense en soi, à savoir pour deux éléments e^1, $e^2 (e^1 \prec e^2)$ différents de $\mathfrak{F}$ il y a un élément e^3 de $\mathfrak{F}$ tel que $e^1 \prec e^3 \prec e^2$. Dans un intervalle de la famille $\mathfrak{F}$ il y a une infinité non dénombrable des intervalles deux à deux disjoints. En effet, prenons deux éléments $e^1 \prec e^2$ de $\mathfrak{F}$. Soient $e^1 = (x^1_1, x^1_2, \ldots, x^1_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha^1}$ et $e^2 = (x^2_1, x^2_2, \ldots, x^2_\xi, \ldots)_{\xi<\alpha^2}$. Il y a deux cas à distinguer:

Premier cas où il existe un nombre ordinal α tel que $\alpha < \alpha^1$, $\alpha < \alpha^2$ et

$$x^1_\xi = x^2_\xi \quad \text{pour tout} \quad \xi < \alpha \quad \text{et} \quad x^1_\alpha < x^2_\alpha .$$

Dans ce cas, tous les intervalles des formes $\Big((x^1_1, \ldots, x^1_\xi, \ldots, x_\alpha)_{\xi<\alpha}, (x^1_1, \ldots, x^1_\xi, \ldots, x_\alpha, x_{\alpha+1})_{\xi<\alpha}\Big)$, où $x^1_\alpha < x_\alpha < x^2_\alpha$ et $x_\alpha < x_{\alpha+1}$, sont évidemment contenus dans l'intervalle (e^1, e^2) et deux à deux disjoints.

Deuxième cas où $\alpha^1 < \alpha^2$ et $x^1_\xi = x^2_\xi$ pour tout $\xi < \alpha^1$. Dans ce cas, d'après la définition d'élément e^2, il vient $b.s.\Big(\sum_{1\le\beta<\alpha^1} x^2_\beta\Big) < x^2_{\alpha^1}$. Si l'on considère tous les intervalles des formes

$$\Big((x^1_1, x^1_2, \ldots, x^1_\xi, \ldots, x_{\alpha^1})_{\xi<\alpha^1}, (x^2_1, x^2_2, \ldots, x^2_\xi, \ldots, x_{\alpha^1}, x_{\alpha^1+1})_{\xi<\alpha^1}\Big),$$

où $b.s.\Big(\sum_{1\le\beta<\alpha^1} x^1_\beta\Big) < x_{\alpha^1} < x^2_{\alpha^1}$ et $x_{\alpha^1} < x_{\alpha^1+1}$, ces intervalles sont contenus dans l'intervalle (e^1, e^2) et qui sont évidemment deux à deux disjoints.

Du fait montré plus haut, nous avons la conclusion suivante: Nous désignerons par R l'espace obtenu de la famille $\mathfrak{F}$ en suivant la même considération que celle qui a été employée par R. DEDEKIND pour introduire les nombres irrationnels en partant des nombres rationnels. Alors l'espace R est ordonné linéairement et ne possède aucun saut et aucune lacune, et de plus chaque intervalle de R n'est pas toujours séparable. Nous pouvons donc conclure que $\{\mathfrak{S}\}_R < \{\mathfrak{R}\}_R$, selon le même raisonnement que celui dans la démonstration du théorème 6.

Sans démontrer nous remarquons ici que dans l'espace R toute suite monotone des éléments sont au plus dénombrable et que l'espace R est donc condensé en soi sans être hyper-condensé en soi.

Ensuite, nous allons étudier le cas où $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{R}\}_R$. L'espace de tous les nombres réels vérifie décidément la relation $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{R}\}_R$. Mais, il vient sur le tapis que quelle condition est nécessaire et suffisante pour qu'un espace danslequel la relation $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{R}\}_R$ est vérifiée soit séparable. A propos de cette question, nous pourrons donner une réponse. Tout d'abord, comme on sait, l'espace R satisfaisant à la relation $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{R}\}_R$ jouit évidemment de cette propriété que, dans l'espace chaque famille des intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable. Alors l'espace R vérifie aussi le premier axiome de séparabilité. De là nous pouvons supposer que, dans l'espace R il y a un système complet des voisinages danslequel chaque élément de R possède au plus dénombrable des voisinages. Désignons par $\{V_n(p)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots.)$ les voisinages de p. Nous en pouvons supposer sans perdre la généralité du raisonnement que $V_1(p) > V_2(p) > \cdots > V_n(p) > \cdots$. Pour abréger $V_n(p)$ est dit de rang n. Cela étant posé, nous introduissons une terminologie. Soit

$$(1) \qquad V_{n_1}(p_1) > V_{n_2}(p_2) > \cdots > V_{n_k}(p_k) > \cdots$$

une suite décroissante des voisinages des éléments $\{p_k\}$ tels que $V_{n_k}(p_k)$ sont au moins de rang k. Si pour toute suite (1) la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} V_{n_k}(p_k)$ est au plus un élément de R, nous dirons que le système complet des voisinages de R est *uniforme*. Dans cette convention, nous avons le

Théorème 7. *Pour que l'espace R ordonné linéairement sans sauts et sans lacunes danslequel la relation $\{\mathfrak{S}\}_R > \{\mathfrak{R}\}_R$ est vérifiée*

soit semblable à l'espace de tous les nombres réels, il faut et il suffit que le système complet des voisinages de R soit uniforme.

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. Nous allons donc démontrer que la condition est suffisante. Pour ce but, il est suffisant à montrer que l'espace R est séparable. Tout d'abord prenons un ensemble dénombrable $\{p_{n_1}\}$, $(n_1 = 1, 2, 3, \dots)$, des éléments et une famille $\{V_{n_1}(p_{n_1})\}$ des voisinages, qui sont au moins de rang 1, tels que $V_{n_1}(p_{n_1}) \cdot V_{n'_1}(p_{n'_1}) = 0$ pour $n_1 \neq n'_1$ et dont la somme $\sum_{n_1=1}^{\infty} V_{n_1}(p_{n_1})$ est partout dense dans l'espace R. Posons $E_1 = R - \sum_{n_1=1}^{\infty} V_{n_1}(p_{n_1})$. On peut dire que l'ensemble E_1 fermé et séparable, puisque l'ensemble dénombrable formé des éléments frontières des voisinages $\{V_{n_1}(p_{n_1})\}$ est dense dans E_1. Puis prenons un ensemble dénombrable $\{p_{n_1, n_2}\}$, $(n_2 = 1, 2, \dots)$, des éléments contenus dans les voisinages $V_{n_1}(p_{n_1})$ et une famille $\{V_{n_1, n_2}(p_{n_1, n_2})\}$, ou V_{n_1, n_2}, des voisinages, qui sont au moins de rang 2, tels que $V_{n_1, n_2} \subset V_{n_1}$ et $V_{n_1, n_2} \cdot V_{n_1, n'_2} = 0$ pour $n_2 \neq n'_2$, et dont la somme $\sum_{n_2=1}^{\infty} V_{n_1, n_2}$ est partout dense dans V_{n_1}. Posons $E_2 = R - \sum_{n_1, n_2} V_{n_1, n_2}$. L'ensemble E_2 est fermé et séparable, puisque l'ensemble dénombrable formé de tous les éléments frontières des voisinages $\{V_{n_1}\}$ et $\{V_{n_1, n_2}\}$ est partout dense dans E_2. En général, par l'induction, pour tout nombre naturel k nous pouvons définir un ensemble dénombrable $\{p_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$, $(n_k = 1, 2, 3, \dots)$, des éléments situés dans les voisinages $V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}(p_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}})$, ou $V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}$, déjà définis et une famille $\{V_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ des voisinages, qui sont au moins de rang k, tels que $V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k} \subset V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}$ et $V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k} \cdot V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n'_k} = 0$ pour $n_k \neq n'_k$, et dont la somme $\sum_{n_k=1}^{\infty} V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k}$ est partout dense dans $V_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}}$. Posons $E_k = R - \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} V_{n_1, n_1, \dots, n_k}$. Alors l'ensemble E_k est fermé et séparable, puisque l'ensemble dénombrable formé de tous les éléments frontières des voisinages $\{V_{n_1}\}$, $\{V_{n_1, n_2}\}$, ..., $\{V_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est partout dense dans E_k. Désignons par E l'ensemble formé de tous les éléments frontières des voisinages $\{V_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, 3, \dots)$. Il est clair que la puissance de E est dénombrable. Nous démontrons que l'ensemble E est partout dense dans R. En effet, par impossible, supposons qu'il existe un élément p n'appartenant pas à $\overline{E}$. Alors il existe un voisinage $V(p)$ tel que $\bar{E}\cdot V(p)=0$. Selon le fait que $\bar{E}\supseteq \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, on peut voir qu'il existe une suite des voisinages $\{V_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ tels que

$$V_{n_1}(p_{n_1}) > V_{n_1, n_2}(p_{n_1, n_2}) > \cdots\cdot$$
$$> V_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(p_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) > \cdots\cdot > V(p)$$

où $V_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est au moins de rang k. Donc on a

$$\prod_{k=1}^{\infty} V_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supseteq V(p).$$

Nous aboutissons donc à une contradiction que le système complet des voisinages de R n'est pas uniforme. C. Q. F. D.

En terminant, nous ajoutons sans prouver une remarque: J'ai démontré dans un autre article que si le problème de SOUSLIN a la réponse négative, alors il y a un espace abstrait vérifiant la condition de SIERPIŃSKI affirmativement(1). Mais, sans aucune hypothèse, nous pouvons obtenir un espace abstrait vérifiant la condition de SIERPIŃSKI, en employant le raisonnement donné par M. KUREPA(2) et la relation de l'ordre donné par le principe de premier différent.

(1) Fund., Math., t. 1 (1920), p. 223. Voir ma Note, Le problème de SOUSLIN et les espaces abstraits, Ces. Jour., t. 7 (1939), p. 192 et p. 200–201.

(2) G. KUREPA, Ensembles linéaires et classe de tableaux ramifiés, Publ. Math. Belgrade, tomes 6-7 (1938), p. 143-156.