DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE HÖHERER ORDNUNG I. ERWEITERTE KOORDINATENTRANSFORMATIONEN UND EXTENSOREN

Von

Akitsugu KAWAGUCHI

INHALT

Einleitung

Das wichtigste und jetzt lebenhafteste Gebiet in der neuen, stürmsch fortschreitenden Differentialgeometrie scheint dem Verfasser die Geometrie in verallgemeinerten Räumen, in denen als geometrisches Element nicht der Punkt sondern das Linienelement, Hyperflächenelement oder ein noch allgemeineres Flächenelement von gewissen Dimensionen betrachtet wird. Diese verallgemeinerten Räume sind nicht nur rein formale Gebilde, sondern haben wirklich wichtige, neue Gedanken gezeigt und sind demgemäss der äusseren Entwicklung der Geometrie gewidmet, d.h. fügen durch produktive Verallgemeinerung neue Flügel dem Gebäude der Geometrie zu. Die Untersuchung dieser Räume hat den Ursprung in einer Arbeit von P. FINSLER(1) und gab in den letzten Jahrzenten Anlass zu einer grossen Reihe von Arbeiten. Trotzdem war noch keine Abgeschlossenheit in diesem Gebiete erreicht und es steht jetzt noch ein grosses Feld für die Untersuchung zur Verfügung.

Zu diesen Räumen gehört der so-genannte FINSLERsche Raum sowie der CARTANsche. Der erste ist jene N-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren Geometrie durch ein Integral von der Form $\int F\left(x^i, \frac{dx^i}{dt}\right)dt$ beherrscht wird, das die Bogenlänge eines Kurvenstückes definiert. Im CARTANschen Raume beherrscht dagegen ein $(N-1)$-faches Integral die Geometrie, das die Oberfläche eines Hyperflächenstückes angibt. Die Theorie des FINSLERschen Raumes, die ursprünglich von P. FINSLER(1) herrührt und nachdem von L. BERWALD(2) und E. CARTAN(3) in einer neuen vollständigen Gestalt wieder begründet worden ist, hat seitdem zahlreiche Forscher(4) beschäftigt und hat dadurch wichtige Fortschritte gemacht. Im FINSLERschen Raume mit Koordinaten x^i $(i = 1, 2, \dots, N)$ ist es zweckmässig, als geometrisches Element das Linienelement anzunehmen, das sich durch ein Paar eines Punktes x^i und eines kontravarianten Vektors p^i bis auf einen gemeinschaftlichen positiven Faktor im Punkt fest bestimmt. Im CARTANschen Raume ist andererseits das orientierte Hyperflächenelement als geometrisches Element zu erwählen, d.h. die Figur, die aus einem Punkt x^i und einem kovarianten Vektor p_i bis auf einen gemeinschaftlichen positiven Faktor im Punkt besteht.

---

(1) P. FINSLER [i]. Die Zahlen in eckiger Klammer beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Abhandlung.

(2) L. BERWALD [i] [ii] [iii] [iv] [vi] [ix] [x] [xii].

(3) E. CARTAN [iii] [iv].

(4) Von den zahlreichen Forschern möchten wir hier nur erwähnen: S. L. SYNGE [i], J. H. TAYLOR [i] [ii], T. HOSOKAWA [i] [ii] [iii] [iv], ST. GOŁAB [i] [ii] [iii] [iv] [v] [vi] [vii], M. S. KNEBELMAN [v], M. HAIMOVICI [i] [ii] [iii] [iv] [v] [vi] [vii] [viii], J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES [i], G. VARGA [i], V. WAGNER [ii], P. DELENS [i] [ii], H. HOMBU [i] [ii] [iii], P. FUNK [ii], S. HOKARI [i], J. M. WEGENER [i]. Über die bis zum Jahre 1933 erschienenen Arbeiten liegt L. BERWALD [ix] vor.

Arbeiten über den CARTANschen Raum gibt es ziemlich wenig und wir können darüber, ausser der ursprünglichen Arbeit von E. CARTAN(1), nur einige Arbeiten von L. BERWALD(2) berichten.

Hier sollten wir unsere Aufmerksamkeit auf die sogenannte Übertragung von W. WIRTINGER(3) richten, in der das geometrische Element ein Doppelvektor, d.h. die Figur, die aus einem kovarianten Vektor w_i mit einem inzidenten kontravarianten Vektor v^i besteht ($w_i v^i = 0$), in einem Punkt ist.

Die oben-erwähnten Räume sind wirklich alle in dem allgemeinen Raume enthalten, der vom Verfasser zuerst eingeführt worden ist(4) und dessen geometrisches Element aus einer Reihe von irgendwelchen nicht notwendig gleichartigen Affinoren teilweise im tangenten N-dimensionalen affinen Raume und teilweise im anderen $\overline{N}$-dimensionalen affinen Raume adjungiert zu einem Punkt besteht. Die Annahme des K-dimensionalen Flächenelementes im N-dimensionalen Raume als geometrisches Element findet man auch bei einigen Arbeiten vom Verfasser(5), wobei $1 \leqq K < N$. Dieser Raum steht in der Mitte zwischen dem FINSLERschen Raume und dem CARTANschen. Für $K=1$ reduziert sich nämlich der Raum zur direkten Verallgemeinerung des FINSLERschen und für $K=N-1$ tritt der CARTANsche als ein besonderer Fall auf. Die Theorie dieses Raumes möge in Beziehung zu derselben des nicht-holonomen Gebildes gebracht werden, die wir G. VRANCEANU(6) und Z. HORÁK(7) verdanken und die sich durch viele Forscher weiterhin entwickelt hat(8).

---

(1) E. CARTAN [1].

(2) L. BERWALD [1] [2].

(3) W. WIRTINGER [i].

(4) A. KAWAGUCHI [3] [4]. Ein noch allgemeinerer Fall ist auch vom Verfasser schon früher betrachtet worden, nämlich ein abstrakter Raum, dessen Element der Inbegriff jener Menge ist, deren Elemente je einer von den vorgegebenen abzählbaren oder nichtabzählbaren Mannigfaltigkeiten adjungiert zu einem Punkt angehören, wobei die Mannigfaltigkeiten mit dem Begriff "Umgebung" behaftet sind. Dieser Raum enthält wirklich alle bis jetzt von vielen Forschern eingeführten Räume als seine besonderen Fälle. Vgl. A. KAWAGUCHI [5] [6] [7].

(5) A. KAWAGUCHI [11] [12] [18].

(6) G. VRANCEANU [i] [ii] [iii] [iv] [v] [vi] [vii].

(7) Z. HORÁK [i] [ii] [iii] [iv] [v] [vi] [vii].

(8) Von den vielen Forschern möchten wir nur die folgenden nennen: E. CARTAN [ii], P. FRANKLIN und C.L.E. MOORE [i], E. BORTOLOTTI [iii] [iv] [vii] [viii], P. HÚLUBEI [i], V. HLAVATÝ [i] [ii] [iv], J. A. SCHOUTEN [i] [ii], J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN [i], GR. C. MOISIL [i], S. L. SYNGE [ii], V. WAGNER [i], K. YANO [i] [ii] [v], E. BOMPIANI [ii], ST. GOŁAB [viii], T. HOSOKAWA [iii], J. L. VANDERSLICE [i], A. MAXIA [i] [ii] [iii] [iv], A. WUNDHEILER [i].

Die Theorie des FINSLERschen sowie CARTANschen Raumes verknüpft sich mit der Variationsrechnung sehr eng. Die Extremalen $x^i = x^i(t)$ bzw. $x^i = x^i(v^1, v^2, \dots, v^{n-1})$ des Variationsproblemes

$$\delta \int F\left(x^i, \frac{dx^i}{dt}\right)dt \quad \text{bzw.} \quad \delta \int_{(n-1)} \Psi\left(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}\right)dv^1 dv^2 \dots dv^{n-1}$$

bei fester Berandung liefern uns diejenigen, welche wir die Bahnen bzw. die minimalen Hyperflächen im FINSLERschen bzw. CARTANschen Raume nennen. Die ersten sind die Verallgemeinerung der geodätischen Linien im RIEMANNschen Raume und definieren sich durch die Gleichungen

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j\left(t, x^i, \frac{dx^i}{dt}\right) = 0, \tag{0.1}$$

während die Funktionen $\Gamma^j\left(t, x^i, \frac{dx^i}{dt}\right)$ in den $\frac{dx^i}{dt}$ positiv homogen von zweiter Ordnung sind. Die anderen geben eine Erweiterung der minimalen Hyperflächen im RIEMANNschen Raume, welche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x^j}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} + \Gamma^j_{\alpha\beta}\left(v^\gamma, x^i, \frac{\partial x^i}{\partial v^\gamma}\right) = 0 \tag{0.2}$$

erklärt sind. Demgemäss hatte dieser Zweig der Geometrie so enge Beziehung zur Variationsrechnung, dass man einen grossen Teil des Zweigs ohne weiteres als analytische Disziplin anzusehen berechtigt ist. In der Tat können wir zahlreiche Beiträge in dieser analytischen Richtung berichten(1).

Die andere wichtige Verknüpfung mit der Analysis zeigen die Differentialgleichungen (0.1) und (0.2), daraus folgt das Problem, das gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungssystem geometrisch zu behandeln, d.h. die Geometrie von Bahnen oder von "*K*-spreads", die durch die Untersuchung der geodätischen Linien angeregt waren und die ursprünglich auf die Schule von Princeton besonderes O.

(1) Vgl. TH. DE DONDER [1], J. GÉHÉNIAU [1], V. PÂQUET [1] [2] [3], A. DUSCHEK [i], L. KOSCHMIEDER [i] [ii] [iii] [iv], E. KÄHLER [i], L. BERWALD [v] [vii] [viii], P. FUNK [i], D. D. KOSAMBI [i] [ii] [iii], A. DUSCHEK und W. MAYER [i] [ii], A. W. TUCKER [i], W. MAYER [i], J. H. TAYLOR [iii], W. WINTERNITZ [i]. Die bis zum Jahre 1930 erschienenen Arbeiten werden in L. KOSCHMIEDER [v] aufgezählt.

VEBLEN, T. Y. THOMAS und J. M. THOMAS(1) zurück gehen soll. Demnächst waren an ihrem weiteren Ausbau L. BERWALD(2), J. DOUGLAS(3), E. BORTOLOTTI(4) usw.(5) beschäftigt.

Die Räume, die den oben-erzählten verschiedenen Geometrien zu Grunde liegen, haben alle als geometrisches Element das Element erster Ordnung, in anderen Worten, die Figur, die aus einem Punkt x^i und den Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha}$ von x^i nach den Parametern $v^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, K; 1 \leqq K \leqq N-1)$ längs einer K-dimensionalen Fläche besteht. Unter diesen Umständen nennen wir diese Räume *von erster Ordnung*, um sie von den Räume höherer Ordnung zu unterscheiden, die sich nachträglich in Hinsicht bringen lassen.

Auf der anderen Seite ergibt sich ein anderes System von Differentialgeometrien, das unter den Begriff von F. KLEIN betreffs der Gruppentheorie entwickelt worden ist. Unter denjenigen finden wir jene Geometrien, in denen die Integralinvariante niedrigster Ordnung der betreffenden Gruppe, die der Bogenlänge eines Kurvenstückes in der euklidischen Geometrie entspricht, ausser den Koordinaten vom Punkt auch deren Ableitungen höherer Ordnung enthält. Die affine sowie projektive Differentialgeometrie macht sich um das Beispiel verdient(6). Wenden wir uns nun der natürlichen Geometrie zu, die anfangs von S. LIE und G. PICK(7) begründet worden ist, dann lehrt sie uns, dass die Integralinvariante niedrigster Ordnung gegenüber irgendeiner endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppe längs einer Kurve im allgemeinen nicht nur vom Punkt sondern auch vom Kurvenelement K-ter Ordnung abhängt und das von der Form sein möge

$$s = \int F(x^i, dx^i, d^2x^i, \ldots, d^Mx^i) \tag{0.3}$$

(1) O. VEBLEN [i] [ii] [iii], O. VEBLEN und T. Y. THOMAS [i], O. VEBLEN und J. M. THOMAS [i] [ii], T. Y. THOMAS [i] [ii], J. M. THOMAS [i].

(2) L. BERWALD [xi].

(3) J. DOUGLAS [1] [i].

(4) E. BORTOLOTTI [1].

(5) L. P. EISENHART und M. S. KNEBELMAN [i], D. D. KOSAMBI [iv] [v] [vi] [vii] [viii], V. SEETHARAMAN [i], H. LEVY [i], J. HAANTJES [i], J. H. C. WHITEHEAD [i] [ii] [iii] [iv], A. DUSCHEK und W. MAYER [i], W. ŚLEBODZIŃSKI [i] [ii], E. CARTAN [i], L. P. EISENHART [i], K. YANO [iii] [iv].

(6) Vgl. W. BLASCHKE [i], G. FUBINI und E. ČECH [i] [ii].

(7) Vgl. G. KOWALEWSKI [i], A. KAWAGUCHI [i] [ii] [iii] [iv].

Diese Tatsache mag die Frage aufwerfen, ob die Geometrie sich unter dem Übertragungsprinzip begründen lassen kann, indem man die Metrik von dem K-dimensionalen Flächenelement M-ter Ordnung abhängig wählt, oder, noch allgemeiner, ob die Theorie des Raumes entwickelt werden könne, während als geometrisches Element des Raumes das K-dimensionale Flächenelement M-ter Ordnung angenommen wird. Zur Beantwortung dieser Frage hat der Verfasser den ersten Schritt(1) getan, indem es ihm gelungen ist, die möglichen Gestalten der Parallelübertragungen, Krümmungstensoren usw. gegenüber der Punkttransformationsgruppe im Raume mit dem Linienelement M-ter Ordnung $(x^i, dx^i, \ldots, d^M x^i)$ als geometrischem Element aufzufinden. Es möge bemerkt werden, dass der neu geschaffene Begriff "*Grundübertragungen*" dabei eine hervorragende Rolle spielt(2).

Trotzdem fand erst 1935 von H. V. CRAIG(3) und J. L. SYNGE(4) die eigentliche Untersuchung über die allgemeine Metrik

$$s = \int F(t, x^i, dx^i, \ldots, d^M x^i) \tag{0.4}$$

statt, wobei sie die sogenannten SYNGEschen Vektoren aus der Funktion F hergeleitet haben, mittels derer sie die kovarianten Ableitungen von einigen Arten auf Grund der Punkttransformationsgruppe gewinnen. Aber ihre Theorie ist nicht *intrinsik*, im Sinne, dass sie unter beliebiger Parametertransformation $\bar{t} = \bar{t}(t)$ nicht invariant ist. Dem Raum, der mit der allgemeinen Metrik (0.4) behaftet ist, haben H. V. CRAIG(3) und J. L. SYNGE(4) den Namen "*der KAWAGUCHIsche Raum*" gegeben. Es ist viel zweckmässiger, den KAWAGUCHIschen Raum mit der den Parameter t ausdrücklich nicht enthaltenden Metrik (0.3) von demselben mit der Metrik (0.4) zu unterscheiden,

---

(1) A. KAWAGUCHI [1] [2] [3] [4]. Noch früher hielt der Verfasser auf der Jahresversammlung der Japanischen Mathematiko-Physikalischen Gesellschaft in April 1927 einen Vortrag über das Thema "Untersuchung der Krümmung des metrischen verallgemeinerten BERWALDschen Raumes, in welchem die Bogenlänge vom Kurvenelemente p-ter Ordnung abhängt". Nach 1931 hat H. V. CRAIG [2] die Metrik von zweiter Ordnung $F(x^i, dx^i, d^2x^i)$ als direkte Verallgemeinerung des Ergebnisses von J. H. TAYLOR [i] über die FINSLERschen Metrik $F(x^i, dx^i)$ untersucht. Vgl. auch H. V. CRAIG [3] [4]. Die Erweiterung dieses Ergebnisses zur höherer Ordnung findet man in der Arbeit von H. HOMBU [1].

(2) Vgl. A. KAWAGUCHI [2].

(3) H. V. CRAIG [5] [6]. Auch vgl. H. V. CRAIG [3] [4].

(4) J. L. SYNGE [1].

und der erste soll *der spezielle KAWAGUCHIsche Raum* heissen(1). Dieser Raum fand in den letzten fünf Jahren viel Beachtung und gab Anlass zu einer grossen Reihe von Arbeiten, wie im folgenden kurz skizziert wird. An diese Untersuchung schloss sich zuerst die bedeutungsvolle Arbeit von E. CARTAN(2) an, welche vom zweidimensionalen speziellen KAWAGUCHIschen Raume zweiter Ordnung unter der Berührungstransformationsgruppe handelte und von H. HOMBU zu demselben höherer Ordnung verallgemeinert wurde(3). Aber die von CARTAN gebrauchte Methode ist leider auf den mehrdimensionalen speziellen KAWAGUCHIschen Raume nicht anwendbar. Mit Hilfe einer anderen, ganz verschiedenen Methode konnte sodann der Verfasser ein Übertragungsschema im N-dimensionalen KAWAGUCHIschen Raume M-ter Ordnung gegenüber der Punkttransformationsgruppe festsetzen(4), in dem als geometrisches Element des zu Grunde gelegten Raumes das Kurvenelement $(2M-1)$-ter Ordnung angenommen ist, d.h. die Übertragungsparameter sind dabei vom Kurvenelement $(2M-1)$-ter Ordnung abhängig. In der letzten Zeit konnte der Verfasser unter der steten Mitwirkung von Herrn Professor H. HOMBU dasselbe derartig verbessern, dass die Übertragungsparameter vom Kurvenelement M-ter Ordnung abhängen(5), indem er einige Ergebnisse über die projektive Theorie eines Systems der Bahnen höherer Ordnung verwendete, die von H. HOMBU(6) selbst begründet worden ist.

Aber diese allgemeine Theorie ist leider in einigen speziellen Fällen nicht anwendbar, z.B. wenn die die Metrik bestimmende Funktion F die höchsten Ableitungen $\frac{d^M x^i}{dt^M}$ linear enthält. Demgemäss soll man dafür entweder die Methode etwas modifizieren oder eine ganz andere Methode gebrauchen. Mit dem letzten Problem

(1) Es mag nicht zutreffend sein, den Namen "der metrische Raum höherer Ordnung" für den KAWAGUCHIschen Raum einzuführen, denn mit diesem Namen dürfen wir nachträglich einen anderen noch viel umfangreicheren Raum passend bezeichnen.

(2) E. CARTAN [2].

(3) H. HOMBU [2] [4] [7].

(4) A. KAWAGUCHI [8] [9] [13] [14] [15]. Vgl. auch H. HOMBU [11] und S. HOKARI [5] [6].

(5) Vgl. H. HOMBU [12]. Die ausführliche Erzählung dieser letzten Theorie möchte der Verfasser später in einigen Abhandlungen unter demselben Titel "Die Differentialgeometrie höherer Ordnung" veröffentlichen.

(6) H. HOMBU [5] [6] [8] [9] [10].

haben sich S. HOKARI[1], T. OHKUBO[2] und M. HAIMOVICI[3] ausser dem Verfasser[4] beschäftigt.

Die Differentialgleichungssysteme (0.1) sowie (0.2) liefern uns das neue Problem, d.h. die Geometrisierung des gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d^{M+1}x^j}{dt^{M+1}} + \Gamma^j\left(t, x^i, \frac{dx^i}{dt}, \ldots, \frac{d^M x^i}{dt^M}\right) = 0 \tag{0.5}$$

oder

$$\frac{\partial^{M+1}x^j}{\partial v^{\alpha_1}\partial v^{\alpha_2}\ldots\partial v^{\alpha_{M+1}}} + \Gamma^j_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{M+1}}\left(v^\beta, x^i, \frac{\partial x^i}{\partial v^\beta}, \ldots, \frac{\partial^M x^i}{\partial v^{\beta_1}\partial v^{\beta_2}\cdots\partial v^{\beta_M}}\right) = 0, \tag{0.6}$$

in anderen Worten, die Geometrie der Bahnen oder "K-spreads" höherer Ordnung zu begründen. Die Geometrie der Bahnen höherer Ordnung wurde zuerst von D. D. KOSAMBI[5] entwickelt und ist sodann von V. SEETHARAMAN[6], S. CHERN[7], E. CARTAN[8], T. OHKUBO[9] und S. HOKARI[10] untersucht worden. H. HOMBU hat über die projektive Theorie des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems gearbeitet, wie schon oben erwähnt. Dagegen ist die Grundlage der Geometrie des partiellen Differentialgleichungssystems erst vom Verfasser und H. HOMBU[11] gegeben.

Den oben erwähnten Theorien liegt stets der Raum zu Grunde, dessen geometrisches Element das K-dimensionale Flächenelement M-ter Ordnung ist, wobei $1 \leq K \leq N-1$ ist. Den Raum möchten wir *den Raum höherer Ordnung* oder noch genauer *den Raum M-ter Ordnung* nennen, und der Raum höherer Ordnung heisst *metrisch*,

(1) S. HOKARI [3] [4] [7] [9].
(2) T. OHKUBO [1].
(3) M. HAIMOVICI [1].
(4) A. KAWAGUCHI [10] [17].
(5) D. D. KOSAMBI [1] [2].
(6) V. SEETHARAMAN [1] [2] [3].
(7) S. CHERN [1].
(8) E. CARTAN [3].
(9) T. OHKUBO [3] [5].
(10) S. HOKARI [8].
(11) A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [1]. Vgl. auch T. OHKUBO [2] und H. HASHIMOTO [1].

wenn seine Geometrie durch ein K-faches Integral beherrscht wird, das den K-dimensionalen Rauminhalt definiert.

Der Raum höherer Ordnung kommt auch nicht nur in der Variationsrechnung sondern auch in der Theorie der Kugelgeometrischen Übertragung von H. HOMBU(1) vor. Ausserdem steht *die Geometrie höherer Ordnung*, d.h. die Geometrie im Raume höherer Ordnung, in enger Beziehung mit dem "sistema assoluto" von G. VITALI(2) sowie mit der "geometrie riemanniane di specie superiore" von E. BOMPIANI(3).

Die Geometrie höherer Ordnung(4), welche die metrische Geometrie höherer Ordnung und die Geometrie des Differentialgleichungssystems höherer Ordnung enthält, wird auch der zu Grunde gelegten Transformationsgruppe nach klassifiziert. Nämlich man darf die Punkttransformationsgruppe, die Berührungstransformationsgruppe oder die erweiterte rheonome Transformationsgruppe(5) in Betracht ziehen.

Das Hauptziel der Reihe von Abhandlungen mit demselben Titel "*Die Differentialgeometrie höherer Ordnung*" ist, die oben erzählten verschiedenen Geometrien höherer Ordnung zu behandeln, und zuerst möchte der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung als Vorbereitung einige Eigenschaften von Extensoren versuchen. Der Begriff von Extensoren, der zuerst von H. V. CRAIG(6) aufgefasst worden ist, ist zur Untersuchung der Geometrie höherer Ordnung sehr zweckmässsig und von einer grossen Bedeutung. Der Extensor ist selbstverständlich ein geometrisches Objekt(7). Wir können den Begriff von Extensoren unschwer auf den Fall von partiellen Ableitungen erweitern und dieselben Ergebnisse wie in der vorliegenden Abhandlung herleiten(8).

In der vorliegenden Abhandlung möchten wir hauptsächlich die Frage erledigen, ob aus einem einzigen Extensor einige andere Extensoren ohne weiteres hergeleitet werden könne, und uns mit

---

(1) H. HOMBU [3].

(2) G. VITALI [i]. Vgl. auch E. BORTOLOTTI [i] [v] [vi].

(3) E. BOMPIANI [i].

(4) Eine Übersicht der Geometrie höherer Ordnung kann man finden in A. KAWAGUCHI [20] [22].

(5) A. KAWAGUCHI [6] und S. HOKARI [1] [2]. Vgl. auch ST. GOŁAB [ix], A. WUNDHEILER [ii] [iii], V. HLAVATÝ [iii], V. HLAVATÝ und ST. GOŁAB [i], E. BORTOLOTTI [ii].

(6) H. V. CRAIG [7] [8]. Vgl. auch A. KAWAGUCHI [16] [19].

(7) Vgl. J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES [1], A. WUNDHEILER [iv], ST. GOŁAB [x].

(8) A. KAWAGUCHI [21].

dem Problem beschäftigen, die Operatoren auszuführen, die diese Extensoren herleiten, wenn sie existieren. Wir möchten in §1 mit der Darstellung der N-dimensionalen Mannigfaltigkeit von Linienelementen bzw. Kurvenelementen höherer Ordnung $K_N^{(M)}$ bzw. $\mathfrak{K}_N^{(M)}$ beginnen. Man soll das Kurvenelement vom Linienelement durchweg streng unterscheiden, nämlich das Kurvenelement ist eine Klasse von allen Linienelementen in einem Punkt, von denen je zwei mittels einer passenden Änderung der Parametrisierung auseinander hervorgehen und somit ist das Kurvenelement von der Parametrisierung auf einer Kurve unabhängig. §2 liefert die erweiterten Transformationen und die Erläuterung einiger nachträglich gebrauchten Identitäten. Sodann definieren wir in §3 die Extensoren und es werden einige Sätze über die Extensoren erster Stufe erwähnt, wobei man einige eigentliche Unterschiede zwischen den Überschiebungen von Extensoren und von gewöhnlichen Tensoren erkennen mag, z.B. es ergeben sich nicht eine sondern viele Arten der Überschiebungen von zwei Extensoren erster Stufe, der eine exkontravariant und der andere exkovariant, während man nur eine einzige Überschiebung zwischen zwei Vektoren hat. Aus einem Extensor erster Stufe können wir drei Arten von Extensoren erster Stufe durch drei Systeme von linearen Operatoren $\mathfrak{S}^H$(§4), $\mathfrak{Z}^H$(§5) und $\mathfrak{Y}^H$(§6) erhalten. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ geben Anlass zu den sogenannten SYNGEschen Vektoren. Diese drei Arten der Operatoren stellen sich als sehr wichtig und fundamental heraus und können derartig modifiziert werden, dass sie nicht nur auf den gewöhnlichen Extensor sondern auch auf den relativen anwendbar sind, womit man einen relativen Skalar einführt. Es handelt sich in §7 um die Produkte und folglich die Vertauschbarkeiten der Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ mittels verhältnismässig umfangreicher Rechnungen. Es mag bemerkenswert sein, den wichtigsten Satz behaupten zu können: *Jeder Skalar, den eine Überschiebung von zwei Extensoren erster Stufe, der eine exkontravariant und der andere exkovariant, erzeugt, ist immer durch die Skalarprodukte $S(H, K)$ der Vektoren, die aus den betreffenden Extensoren eindeutig folgen, und durch die Ableitungen von den $S(H, K)$ darstellbar* (§8). Die in §9 eingeführten Operatoren Δ_K sind besonders wichtig und zweckmässig bei der Untersuchung der intrinsiken Theorie gegenüber den Parametertransformationen, insbesondere im speziellen KAWAGUCHIschen Raume spielen sie eine hervorragende Rolle, wie in einigen nachfolgenden Abhandlungen gezeigt werden möge. Die Frage, ob aus einem Extensor irgendwelchen Extensoren höherer Stufe durch partielle Differentiation nach den Bestimmungszahlen eines Linienelementes hergeleitet werden können, wird in §10 beantwortet und §11 zeigt uns einige Eigenschaften des Extensors höherer Stufe. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ lassen sich sogleich verallgemeinern, derartig, dass sie auf jeden Extensor höherer Stufe anwendbar sind, wie in §12 bewiesen wird. Aber die Verallgemeinerungen der anderen Operatoren $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ sind nicht so leicht und gelingen erst in §14. Von einem Extensor höherer Stufe können wir auch zahlreiche gewöhnliche Tensoren ableiten. Trotzdem kann die analoge Tatsache wie der oben erwähnte Satz leider im allgemeinen nicht geschlossen werden, wenn irgendwelche Funktionen Γ^i_k nicht vorgegeben sind, die bei jeder Koordinatentransformation ebenso wie die affinen Übertragungsparameter sich verändern, was in §13 gezeigt wird. Die Symmetrie sowie die Schiefsymmetrie über einen Extensor höherer Stufe kann auch geschaffen werden (§13). Schliesslich stellen wir in §15 die verschiedenen Beziehungen vor, welche unter den Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ bestehen sollen.

§1. Die N-dimensionale Mannigfaltigkeit von Linienelementen höherer Ordnung $K_N^{(M)}$. Abgekürzte Bezeichnungen und einige Identitäten.

1. Es sei X_N eine N-dimensionale Mannigfaltigkeit, die auf ein System von N Koordinaten x^i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ bezogen ist, und unter einem Punkt verstehen wir ein System von N reellen Werten, welche N Variable x^i annehmen. In jedem Punkt in der Mannigfaltigkeit X_N wird dann jedes System von N Differentialen dx^i der Koordinaten als eine Richtung im Punkt aufgefasst. Führen wir irgendeinen Parameter t ein, der alle reelle Werte annimmt und vorläufig festgelegt ist. Dann wird jede Kurve in X_N mittels N passend gewählter Funktionen $x^i(t)$ dieses Parameters t durch die Gleichungen $x^i = x^i(t)$ fest bestimmt. Einem Werte t_0 von t entspricht dann ein Punkt mit den Koordinaten $x^i(t_0)$ auf der Kurve. Einfachheitshalber und zur Vermeidung schwieriger analytischer Erörterung, setzen wir voraus, dass die Funktionen $x^i(t)$ für alle Werte vom Parameter t in einem den betreffenden Wert t_0 enthaltenden Bereich analytisch regulär und die Werte der Ableitungen dx^i/dt für $t = t_0$ nicht alle verschwindend sind. Jedes System der $2N$ Werte von x^i, dx^i/dt, die längs jeder Kurve angenommen werden, wollen wir in der vorliegenden Abhandlung durchaus *ein Linienelement erster Ordnung* nennen. Jedes

Linienelement erster Ordnung $(x^i, dx^i/dt)$ bestimmt stets eine Richtung[1] im Punkt x^i. Die Richtung hängt aber nur von den Verhältnissen der Werte von dx^i/dt ab und nicht von den Werten von dx^i/dt selbst, d.h. sie bestimmt sich wesentlich durch $2N-1$ Werte, N Werte von x^i und $N-1$ Werte von den Verhältnissen von dx^i/dt. Da ein Linienelement erster Ordnung $(x^i, dx^i/dt)$ dagegen von $2N$ Werten, N Werten von x^i und N Werten von dx^i/dt selbst, abhängig st, muss man zwei Linienelemente erster Ordnung $(x^i, dx^i/dt)$ und $(x^i, dx^i/d\bar{t})$, denen dieselbe Richtung $\frac{dx^i}{dt} = \sigma \frac{dx^i}{d\bar{t}}$ in demselben Punkt x^i entspricht, streng unterscheiden, soweit $\sigma \neq 1$. In anderen Worten, man ordnet jedem Linienelement erster Ordnung nur eine Richtung in einem Punkt zu, dagegen jeder Richtung in einem Punkt unendlich viele Linienelemente erster Ordnung. Diese Tatsache folgt aus der Beliebigkeit der Wahl von Parametrisierung auf jeder Kurve, und jede zwei Linienelemente erster Ordnung mit derselben Richtung in demselben Punkt entsprechen zwei verschiedenen Parametrisierungen auf jeder Kurve, die den Punkt durchläuft und die Richtung im Punkt besitzt. Man darf ein Linienelement erster Ordnung als eine mit einem Mass behaftete Richtung (oder einen Vektor) in einem Punkt ansehen. Wir nennen die Mannigfaltigkeit X_N die *Mannigfaltigkeit erster Ordnung* $K_N^{(1)}$, wenn zu jedem Punkt in X_N jedes System von N nicht sämtlich verschwindenden Werten von dx^i/dt sich adjungiert. Die Mannigfaltigkeit erster Ordnung $K_N^{(1)}$ besteht aus allen Linienelementen erster Ordnung in einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit und deshalb soll sie wesentlich von $2N$ Dimensionen sein.

Es ist wohl zu beachten, dass der FINSLERsche Raum keine Mannigfaltigkeit erster Ordnung $K_N^{(1)}$ ist, da jedes Raumelement im FINSLERschen Raume eine Richtung in einem Punkt in der Mannigfaltigkeit X_N ist.

2. Im allgemeinen nennen wir ein System von $(M+1)N$ Werten von x^i und ihren Ableitungen nach t bis zur M-ten Ordnung, $\frac{dx^i}{dt}$, $\frac{d^2x^i}{dt^2}, \ldots, \frac{d^Mx^i}{dt^M}$, welche in einem Punkt auf einer Kurve $x^i = x^i(t)$

(1) Eine Richtung in einem Punkt wird nachher in Betracht gezogen, der manche Verfasser den Namen "Linienelement" geben. Aber in der vorliegenden Abhandlung wollen wir sie als "*Kurvenelement erster Ordnung*" zitieren, um von dem oben-erwähnten Linienelemente erster Ordnung zu unterscheiden. Vgl. H. HOMBU [9], S. 140.

und längs derselben Kurve berechnet werden, *ein Linienelement M-ter Ordnung,* wobei wir voraussetzen, dass die Werte von dx^i/dt nicht sämtlich gleich Null sind und dass die Funktionen $x^i(t)$ in einem Bereich um den betreffenden Wert t_0 von t analytisch regulär sind, wie oben. Man legt dabei den Parameter t fest vor und lässt vorläufig seine Änderung nicht zu. Der Parameter t spielt somit hier eine wesentliche Rolle und soll nicht durch anderen Parameter ersetzt werden. D.h. im allgemeinen verwandelt sich ein Linienelement M-ter Ordnung bei einer Änderung der Parametrisierung in ein anderes Linienelement M-ter Ordnung.

3. In einem Punkt auf einer Kurve ergeben sich zwei Linienelemente M-ter Ordnung entsprechend zwei verschiedenen Parametrisierungen, und in diesem Falle sagen wir, dass diese zwei Linienelemente dasselbe Kurvenelement M-ter Ordnung besitzen. *Ein Kurvenelement M-ter Ordnung* dürfen wir als eine Klasse von allen Linienelementen M-ter Ordnung in einem Punkt erklären, von denen je zwei mittels einer passenden Änderung der Parametrisierung auseinander hervorgehen, und somit ist das Kurvenelement mit der Kurve intrinsik, d.h. von der Parametrisierung auf der Kurve unabhängig verknüpft. In einer Klasse der Linienelemente M-ter Ordnung, die uns ein Kurvenelement M-ter Ordnung liefert, ergibt sich immer ein Linienelement M-ter Ordnung mit den Bestimmungszahlen

$$x^i, \ \frac{dx^i}{dt}, \ \frac{d^2x^i}{dt^2}, \ \ldots, \ \frac{d^Mx^i}{dt^M}, \tag{1.1}$$

damit man eine von den Koordinaten, z.B. x^N statt des Parameters t annimmt, und das Linienelement ist das ausgezeichnete der Klasse, d.h. die Klasse wird von dem Linienelement eindeutig bestimmt, wenn ein Koordinatensystem fest gelegt ist, wie wir leicht ersehen können. Da

$$\frac{dx^i}{dx^N} = 1, \quad \frac{d^2x^i}{(dx^N)^2} = \cdots = \frac{d^Mx^i}{(dx^N)^M} = 0 \qquad \text{für} \quad i = N$$

sind, bestimmt sich ein Kurvenelement M-ter Ordnung durch ein System von

$$R \equiv N + (N-1)M = N(M+1) - M$$

Werten, und wir können unter dem Linienelemente M-ter Ordnung mit den Werten (1.1) ein Kurvenelement M-ter Ordnung verstehen.

4. Adjungieren wir zu jedem Punkt von X_N jedes Wertsystem $\frac{dx^i}{dt}, \frac{d^2x^i}{dt^2}, \ldots, \frac{d^Mx^i}{dt^M}$, so kommt die Mannigfaltigkeit von Dimensionen $(M+1)N$ zustande, die aus allen Linienelementen M-ter Ordnung in X_N besteht. Diese Mannigfaltigkeit heisst die *Mannigfaltigkeit M-ter Ordnung* $K_N^{(M)}$, mit derselben wollen wir uns vorläufig beschäftigen. Ausser der Mannigfaltigkeit $K_N^{(M)}$ ergibt sich eine andere Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_N^{(M)}$, die aus allen Kurvenelementen M-ter Ordnung besteht und die wir später in Betracht ziehen werden. Ihre Dimensionszahl ist nichts anderes als R, da jedes Kurvenelement M-ter Ordnung durch ein System von R Werten eindeutig bestimmt wird.

5. Einfachheitshalber benützen wir die folgenden Bezeichnungen für die Ableitungen von Koordinaten nach dem Parameter t, wie von H. V. Craig[1] eingeführt:

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv x^{(1)i}, \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} \equiv x^{(2)i}, \quad \ldots, \quad \frac{d^Mx^i}{dt^M} \equiv x^{(M)i},$$

oder noch ausführlich

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv x^{(1)i}(t), \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} \equiv x^{(2)i}(t), \quad \ldots, \quad \frac{d^Mx^i}{dt^M} \equiv x^{(M)i}(t),$$

wenn der Parameter t ausdrücklich vorgestellt werden soll. Ausserdem schreiben wir die Ableitungen $\frac{d^\beta F}{dt^\beta}$ einer Funktion $F(t)$ vom Parameter t nach t in der Gestalt

$$F^{(\beta)}(t) \equiv \frac{d^\beta F}{dt^\beta}, \qquad \beta = 0, 1, \ldots, M,$$

wobei man setzt $F^{(0)}(t) = F(t)$. Wenn kein Missverständnis entsteht, lassen wir ferner (t) aus und bezeichnen das mit $F^{(\beta)}$.

Die Bezeichnungen

$$F_{(\alpha)i} \equiv \frac{\partial F}{\partial x^{(\alpha)i}} \equiv \partial F / \partial\left(\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha}\right),$$

noch allgemeiner

$$F_{(\alpha)i}{}^{(\beta)} \equiv \frac{d^\beta}{dt^\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(\alpha)i}}\right) \quad \text{und} \quad F^{(\beta)}{}_{(\alpha)i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)i}}\left(\frac{d^\beta F}{dt^\beta}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)i}} F^{(\beta)}$$

(1) H. V. Craig [5].

werden auch für eine Funktion F von t, x^i, $x^{(1)i}, \ldots, x^{(M)i}$ aufgenommen.

6. Hier wollen wir einige Identitäten vorstellen, die im folgenden vielmals anwendbar sind.

Seien A und B zwei beliebige Funktionen von einem Parameter t, so bestehen

$$\frac{d^\mu}{dt^\mu}(AB) \equiv (AB)^{(\mu)} = \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}A^{(\nu)}B^{(\mu-\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}A^{(\mu-\nu)}B^{(\nu)} \tag{1.2}$$

und

$$A\frac{d^\mu B}{dt^\mu} \equiv AB^{(\mu)} = \sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\mu}{\nu}(A^{(\nu)}B)^{(\mu-\nu)}. \tag{1.3}$$

Die erste Identität ist nichts anderes als die wohlbekannte LEIBNIZsche Formel. Der Beweis dieser Identitäten kann man leicht durch Induktion bezüglich μ bekommen[1].

7. Es bestehen weiter die folgenden Identitäten.

$$\sum_{\nu=\rho}^{\mu}\frac{\nu\,!}{(\nu-\rho)\,!}\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu\,!}{(\mu-\rho)\,!}2^{\mu-\rho} \tag{1.4}$$

oder

$$\sum_{\nu=\rho}^{\mu}\binom{\nu}{\rho}\binom{\mu}{\nu} = \binom{\mu}{\rho}2^{\mu-\rho} \qquad \text{für} \quad \mu \geqq \rho,$$

$$\sum_{\nu=\rho}^{\mu}(-1)^\nu\frac{\nu\,!}{(\nu-\rho)\,!}\binom{\mu}{\nu} = 0 \qquad \text{für} \quad \mu > \rho \tag{1.5}$$

$$= (-1)^\mu\mu\,! \qquad \text{für} \quad \mu = \rho$$

oder

$$\sum_{\nu=\rho}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\nu}{\rho}\binom{\mu}{\nu} = 0 \qquad \text{für} \quad \mu > \rho \tag{1.5$'$}$$

$$= (-1)^\mu \qquad \text{für} \quad \mu = \rho,$$

$$\sum_{\tau=0}^{\rho}\binom{\mu}{\tau}\binom{\lambda}{\rho-\tau}2^{\mu-\tau} = \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\binom{\nu+\lambda}{\rho} = \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\binom{\lambda+\mu-\nu}{\rho}, \tag{1.6}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\mu}{\nu}\binom{\nu+\lambda}{\rho} = (-1)^\mu\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\mu}{\nu}\binom{\lambda+\mu-\nu}{\rho} \tag{1.7}$$

$$= 0 \qquad \text{für} \quad \mu > \rho$$

$$= (-1)^\mu\binom{\lambda}{\rho-\mu} \qquad \text{für} \quad \mu \leqq \rho.$$

---

(1) Vgl. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [1], S. 25.

Beweis. Differenziert man ρ-mal nach y die Identität

$$(1+y)^\mu y^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}y^{\lambda+\nu}$$
$$= (y^{-1}+1)^\mu y^{\lambda+\mu}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}y^{\lambda+\mu-\nu}$$

und setzt $y=1$, so erhalten wir sogleich nach (1.2) die Identität (1.6). Nach Anwendung desselben Verfahrens auf die Identität

$$(1-y)^\mu y^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\mu}{\nu}y^{\lambda+\nu}$$
$$= (y^{-1}-1)^\mu y^{\lambda+\mu}$$
$$= (-1)^\mu\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{\mu}{\nu}y^{\lambda+\mu-\nu}$$

geht die Identität (1.7) hervor. (1.4) bzw. (1.5) ist ein spezieller Fall $\lambda=0$ von (1.6) bzw. (1.7). W. z. b. z.

§2. Erweiterte Transformation für Linienelemente.

8. Wir führen eine Koordinatentransformation $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^i)$ in die Mannigfaltigkeit X_N ein, wobei wir uns auf solche Transformationen beschränken, deren Funktionen $\bar{x}^a(x^i)$ im geeigneten Gebiete eineindeutig und hinreichend oft stetig differenzierbar sind. Somit ist ihre Determinante im Gebiete von Null verschieden. Nach dieser Transformation findet dann eine erweiterte Transformation für Linienelemente z.B. M-ter Ordnung

$$\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^i)\,, \quad \bar{x}^{(1)a} = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}x^{(1)i}\,,$$

$$\bar{x}^{(2)a} = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}x^{(2)i} + \frac{\partial^2\bar{x}^a}{\partial x^i\partial x^j}x^{(1)i}x^{(1)j}\,, \quad \ldots\,, \tag{2.1}$$

$$\bar{x}^{(M)a} = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}x^{(M)i} + M\frac{\partial^2\bar{x}^a}{\partial x^i\partial x^j}x^{(M-1)i}x^{(1)j} + \ldots$$

statt, bei welcher ein Linienelement M-ter Ordnung $(x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(M)i})$ in das Linienelement $(\bar{x}^a, \bar{x}^{(1)a}, \ldots, \bar{x}^{(M)a})$ übergeht. (2.1) wird durch vielmalige Differentiationen von $\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^i)$ nach dem Parameter t gerade erhalten.

Die Transformation (2.1) führt die Mannigfaltigkeit M-ter Ordnung $K_N^{(M)}$ in sich selbst über und alle solche Transformationen bilden eine stetige Gruppe $\mathfrak{G}_M$. Die Gruppe $\mathfrak{G}_M$ ist die grösste von den Gruppen von stetigen Transformationen, welche $K_N^{(M)}$ in sich selbst stetig überführen.

9. Über diese erweiterten Transformationen bestehen die folgenden Sätze[1].

Satz 1. *Es besteht*

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta)a}}{\partial x^i}\right)^{(\beta)} = \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha)}. \tag{2.2}$$

Beweis.

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{d\bar{x}^{(\alpha-1)a}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x^i}\sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^{(\beta)j}}x^{(\beta+1)j}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\frac{\partial^2 \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^i \partial x^{(\beta)j}}x^{(\beta+1)j} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial x^{(\beta)j}}\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^i}\right)x^{(\beta+1)j}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^i}\right)^{(1)}.$$

Daraus folgt die Behauptung durch Wiederholung dieses Verfahrens ohne weiteres.

Satz 2. *In* (2.1) *besteht die Identität für* $\alpha, \beta \geqq \gamma > 0$

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \frac{\alpha!\,(\beta-\gamma)!}{\beta!\,(\alpha-\gamma)!}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\gamma)a}}{\partial x^{(\beta-\gamma)i}} \tag{2.3}$$

und für $\gamma = \beta$

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \binom{\alpha}{\beta}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta)a}}{\partial x^i}\,{}^{(2)}. \tag{2.4}$$

Beweis. Differenzierend die beiden Seiten der Beziehung

$$\bar{x}^{(\alpha+1)a} = \frac{d\bar{x}^{(\alpha)a}}{dt} = \sum_{\gamma=0}^{\alpha}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)j}}x^{(\gamma+1)j}$$

(1) Diese Sätze sind schon in noch verallgemeinerer Form bewiesen. Vgl. A. Kawaguchi und H. Hombu [1], S. 27.

(2) Die Identität (2.4) sowie (2.5) ist schon von H. V. Craig gefunden worden. Vgl. H. V. Craig [5], S. 457.

nach $x^{(\beta)j}$, erhalten wir durch Induktion bezüglich α

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha+1)a}}{\partial x^{(\beta)i}} &= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta-1)i}} + \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}\partial x^{(\gamma)j}} x^{(\gamma+1)j} \\
&= \binom{\alpha}{\beta-1}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta+1)a}}{\partial x^i} + \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{(\gamma)j}}\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}\right) x^{(\gamma+1)j} \\
&= \binom{\alpha}{\beta-1}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta+1)a}}{\partial x^i} + \binom{\alpha}{\beta}\sum_{\gamma=0}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{(\gamma)j}}\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta)a}}{\partial x^{i}}\right) x^{(\gamma+1)j} \\
&= \binom{\alpha}{\beta-1}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta+1)a}}{\partial x^i} + \binom{\alpha}{\beta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta)a}}{\partial x^{i}}\right) \\
&= \left\{\binom{\alpha}{\beta-1} + \binom{\alpha}{\beta}\right\}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta+1)a}}{\partial x^i} \\
&= \binom{\alpha+1}{\beta}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta+1)a}}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

wegen Satz 1. Andererseits ersehen wir leicht im Falle $\alpha = \beta$

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}},$$

da $\bar{x}^{(\alpha)a}$ die Form

$$\bar{x}^{(\alpha)a} = \frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}} x^{(\alpha)i} + \Phi^a(x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(\alpha-1)i})$$

hat, wie gleich aus (2.1) folgt. Daraus bekommen wir die Identität (2.4) für jede nicht negative ganze Zahl α und β, insofern $\alpha \geqq \beta$.

Für jede nicht negative ganze Zahl $\gamma (\leqq \alpha, \beta)$ besteht wegen (2.4)

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\gamma)a}}{\partial x^{(\beta-\gamma)i}} = \binom{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-\beta)a}}{\partial x^{i}}.$$

Somit geht (2.3) durch Vergleichung der letzten Beziehung mit (2.4) hervor. W. z. b. z.

10. Satz 1 und Satz 2 liefern uns sogleich

Satz 3. *Für $\alpha \geqq \beta \geqq 0$ besteht*

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = \binom{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\beta)}. \tag{2.5}$$

Da in (2.1) $\bar{x}^{(\alpha)a}$ von höheren Ableitungen von x^i als α nicht abhängig ist, so ist

$$\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} = 0 \qquad \text{für} \quad \beta > \alpha . \tag{2.6}$$

Nach (2.5) und (2.6) erkennen wir die Gestalt der Matrix $\left(\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}\right)\right)$ der erweiterten Transformation(1), die ist

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(1)} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(2)} & 2\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(1)} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} & & \vdots & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} & 0 \\
\hline
\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(M-1)} & (M-1)\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(M-2)} & \cdots & \cdots & (M-1)\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(1)} & \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \\
\hline
\end{array} \tag{2.7}$$

wobei $(\alpha)a$ und $(\beta)i$ die Werte $(0)1, (0)2, \ldots, (0)N$; $(1)1, (1)2, \ldots, (1)N; \ldots ; (M-1)1, \ldots, (M-1)N$ durchlaufen. Die Determinante der Matrix der erweiterten Transformation hat den Wert $\left|\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right|^M$, der nicht verschwindend ist. Deswegen ergibt sich stets ihre umgekehrte Transformation mit der Matrix $\left(\left(\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}\right)\right)$. Es besteht dann

$$\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)j}} = \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{i}_{j}, \quad \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \frac{\partial \bar{x}^{(\gamma)b}}{\partial x^{(\beta)i}} = \delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{b}_{a}, \tag{2.8}$$

---

(1) Die lineare Transformation mit der Matrix von dieser Form ist von dem Verfasser zuerst betrachtet worden. Vgl. A. KAWAGUCHI [6] und S. HOKARI [1] [2].

wobei wir das Summationszeichen z.B. $\sum_{\alpha=0}^{M-1}\sum_{a=1}^{N}$ in dem Glied $\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)j}}$ auslassen, wie üblich in der Tensor-analysis[1].

§ 3. Extensoren und ihre Überschiebungen.

11. Unter dem Extensor[2] verstehen wir den Tensor in bezug auf die erweiterte reguläre Transformation (2.1). Z.B. die Bestimmungszahlen des exkontra- bzw. exkovarianten Extensors $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ erster Stufe vom Grad[3] G transformieren sich bei der erweiterten regulären Transformation folgendermassen:

$$V^{\alpha a} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} V^{\beta i} \quad \text{bzw.} \quad W_{\alpha a} = \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}, \tag{3.1}$$

$$\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, G; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Ein Beispiel des exkontravarianten Extensors erster Stufe vom Grad M ist durch die Bestimmungszahlen des Linienelementes $(M+1)$-ter Ordnung $x^{(\alpha+1)i}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, M)$ gegeben und dasselbe des exkovarianten Extensors erster Stufe vom Grad M durch die Grössen $F_{(\alpha)i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(\alpha)i}}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, M)$, wobei F eine skalare differenzierbare Funktion mit den Argumenten $t, x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(M)i}$ ist.

Die Bestimmungszahlen des gemischten Extensors $T_{i\cdot\cdot\beta k}^{\cdot\alpha j}$ dritter Stufe, der in bezug auf αi exkontravariant vom Grad G, auf βk exkovariant vom Grad G' und auf i kovariant ist, werden nach der Regel transformiert:

$$T_{a\cdot\cdot\beta c}^{\cdot\alpha b} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)b}}{\partial x^{(\gamma)j}}\frac{\partial x^{(\delta)k}}{\partial \bar{x}^{(\beta)c}} T_{i\cdot\cdot\delta k}^{\cdot\gamma j},$$

$$\alpha, \gamma = 0, 1, \ldots, G; \ \beta, \delta = 0, 1, \ldots, G'.$$

---

(1) Durch diese Abhandlung lassen wir durchweg das Summationszeichen aus, wie in der Tensor-analysis, wenn dieselben *kleinen* Buchstaben als Indizes gerade zweimal d.h. einmal oben und ein anderermal unten erscheinen, soweit nicht anderes gesagt wird. Von den grossen Buchstaben wird dagegen jedes Glied nicht summiert, wenn das Glied das Summationszeichen nicht bekommt.

(2) Der Name "Extensor" ist zuerst von CRAIG eingeführt worden. Vgl. H. V. CRAIG [7].

(3) Statt "Grad" hat der Verfasser früher den Ausdruck "Ordnung" gebraucht. Aber den Ausdruck "Ordnung" wollen wir in der vorliegenden Abhandlung in anderer Bedeutung benützen.

Wie oben gesehen, gibt es in bezug auf jede griechische Indizes eines Extensors immer eine Gradzahl. Für einen Extensor höherer Stufe ergibt sich somit mindestens eine grösste Gradzahl und die grösste Gradzahl nennen wir die Gradzahl des betreffenden Extensors. Z.B. wenn oben $G \geqq G'$ ist, dann heisst der Extensor vom Grad G. Ein Extensor vom Grad Null ist nichts anderes als ein gewöhnlicher Tensor.

12. Im allgemeinen definieren wir den relativen Extensor(1).

Definition. Die $\prod\limits_{\lambda=1}^{A} G_\lambda \prod\limits_{\mu=1}^{B} G'_\mu N^{A+B}$ Grössen

$$T^{\alpha_1 j_1 \alpha_2 j_2 \dots \alpha_A j_A}{}_{\beta_1 k_1 \beta_2 k_2 \dots \beta_B k_B}$$

$$(j_\lambda\,,\ k_\mu = 1, 2, \dots, N\,;\ \alpha_\lambda = 0, 1, \dots, G\,;\ \beta_\mu = 0, 1, \dots, G')$$

werden genannt die Bestimmungszahlen eines relativen gemischten Extensors $(A+B)$-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, der in bezug auf $\alpha_\lambda j_\lambda$ bzw. $\beta_\mu k_\mu$ exkontra- bzw. exkovariant vom Grad G_λ bzw. G'_μ ist, wenn bei jeder regulären erweiterten Transformation die Grössen sich transformieren nach der Regel:

$$\begin{aligned} &\overline{T}^{\alpha_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_A a_A}{}_{\beta_1 b_1 \beta_2 b_2 \dots \beta_B b_B} \\ &\quad = \Delta^{-\mathfrak{k}} T^{\gamma_1 i_1 \gamma_2 i_2 \dots \gamma_A i_A}{}_{\delta_1 j_1 \delta_2 j_2 \dots \delta_B j_B} \prod_{\lambda=1}^{A} \frac{\partial \overline{x}^{(\alpha_\lambda) a_\lambda}}{\partial x^{(\gamma_\lambda) i_\lambda}} \prod_{\mu=1}^{B} \frac{\partial x^{(\delta_\mu) j_\mu}}{\partial \overline{x}^{(\beta_\mu) b_\mu}}\,, \end{aligned}$$

während Δ die Determinante $\left|\dfrac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^i}\right|$ bedeutet. Die grösste Zahl G von G_λ und G'_μ heisst die Gradzahl des Extensors. Wenn die Bestimmungszahlen des Extensors Funktionen von den Argumenten t, x^i, $x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i}$ sind, dann sagen wir, dass die Ordnung des Extensors M ist.

Einfachheitshalber bezeichnet man den relativen Extensor $(A+B)$-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, vom Grad G und von der Ordnung M als den relativen Extensor mit der Charakteristik $(A+B,\ \mathfrak{k},\ G,\ M)$. Ein im Punkt x^i definierter Skalar ist ein relativer Extensor mit der Charakteristik $(0, 0, 0, 0)$ und ein relativer Extensor mit der Charak-

(1) Statt "relativer Tensor" wird von einigen Verfassern den Wort "Affinordichte" benützt. Z.B. J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen, 1935-38.

teristik $(A+B, 0, 0, M)$ ist ein Tensor, der zum Linienelemente M-ter Ordnung adjungiert ist.

13. Für einen kontravarianten Vektor v^i und einen kovarianten Vektor w_i haben wir eine und nur eine Art der Überschiebung d.h. des Skalarproduktes $\rho = v^i w_i$. Es ist bemerkenswert, dass dagegen für einen exkontravarianten Extensor $V^{\alpha i}$ erster Stufe vom Grad G und einen exkovarianten Extensor $W_{\alpha i}$ erster Stufe vom Grad G nicht eine sondern $G+1$ Arten der Überschiebungen vorhanden sind:

$$\rho^{[\Gamma]} = \sum_{\alpha=\Gamma}^{G} \binom{\alpha}{\Gamma} V^{\alpha-\Gamma, i} W_{\alpha i}, \qquad \Gamma = 0, 1, \ldots, G^{(1)}. \tag{3.2}$$

Wenn $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ ein relativer Extensor vom Gewichte $\mathfrak{k}$ bzw. $\mathfrak{k}'$ ist, so sind $\rho^{[\Gamma]}$ relative Skalare vom Gewichte $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$.

Satz 4. *V^i bzw. W_i seien die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten Vektors, dann sind $V^{i(\alpha)}$ bzw. $\binom{G}{\alpha} W_i^{\;(G-\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, G)$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten Extensors erster Stufe vom Grad G.*

Beweis. Aus $V^a = \dfrac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} V^i$ folgt bei einer Koordinatentransformation durch Differentiation nach t wegen (1.2)

$$V^{a(\alpha)} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} V^{i(\beta)} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} V^{i(\beta)}.$$

In analoger Weise erkennen wir aus $W_a = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} W_i$ wegen (1.2)

$$\begin{aligned}
\binom{G}{\alpha} W_a^{\;(G-\alpha)} &= \sum_{\beta=0}^{G-\alpha} \binom{G}{\alpha} \binom{G-\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha-\beta)} W_i^{\;(\beta)} \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{G} \binom{G}{\alpha} \binom{G-\alpha}{G-\gamma} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} W_i^{\;(G-\gamma)} \quad (\beta = G-\gamma \text{ gesetzt}) \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{G} \binom{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} \binom{G}{\gamma} W_i^{\;(G-\gamma)} \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{G} \frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \binom{G}{\gamma} W_i^{\;(G-\gamma)}.
\end{aligned}$$

W. z. b. z.

(1) Vgl. A. Kawaguchi [16].

Die Überschiebungen (3.2) von zwei Extensoren $V^{i(\alpha)}$ und $\binom{G}{\alpha}W_i^{\cdot(G-\alpha)}$ liefern uns

$$\begin{aligned}\rho^{[\Gamma]} &= \sum_{\beta=\Gamma}^{G}\binom{\beta}{\Gamma}V^{i(\beta-\Gamma)}\binom{G}{\beta}W_i^{\cdot(G-\beta)} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\gamma}{\Gamma}V^{i(\gamma)}\binom{G}{\Gamma+\gamma}W_i^{\cdot(G-\Gamma-\gamma)} \qquad (\beta-\Gamma=\gamma \text{ gesetzt}) \\ &= \binom{G}{\Gamma}\sum_{\gamma=0}^{G-\Gamma}\binom{G-\gamma}{\gamma}V^{i(\gamma)}W_i^{\cdot(G-\Gamma-\gamma)} \\ &= \binom{G}{\Gamma}(V^i W_i)^{(G-\Gamma)} \qquad (\text{nach } (1.2))\,,\end{aligned}$$

daraus kann man die Skalareigenschaft von $\rho^{[\Gamma]}$ in diesem speziellen Falle leicht versichern.

In Satz 4 setzen wir an Stelle von V^i die Variationen der Koordinaten dx^i, so erhalten wir sogleich den folgenden Zusatz, da $(dx^i)^{(\alpha)} = dx^{(\alpha)i}$ ist.

Zusatz. *Die Variationen eines Linienelementes M-ter Ordnung* $dx^{(\alpha)i}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, M)$ *sind die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors erster Stufe vom Grad M.*

Diesen Zusatz kann man auch direkt beweisen. Nämlich, da

$$\bar{x}^{(\alpha+1)a} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}x^{(\beta+1)i}$$

ist, sieht man

$$\begin{aligned}d\bar{x}^{(\alpha+1)a} &= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}dx^{(\beta+1)i} + \frac{\partial^2 \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)j}\partial x^{(\beta)i}}dx^{(\gamma)j}x^{(\beta+1)i} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}dx^{(\beta+1)i} + \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)j}}\right)^{(1)}dx^{(\gamma)j} \\ &= \sum_{\beta=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)}dx^{(\beta+1)i} + \sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha+1-\gamma)}dx^{(\gamma)i} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha+1}\left\{\binom{\alpha}{\gamma-1}+\binom{\alpha}{\gamma}\right\}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\gamma+1)}dx^{(\gamma)i} \qquad (\beta+1=\gamma \text{ gesetzt}) \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{\gamma}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\gamma+1)}dx^{(\gamma)i} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha+1)a}}{\partial x^{(\gamma)i}}dx^{(\gamma)i}\,,\end{aligned}$$

deshalb ist die Behauptung des Zusatzes richtig.

14. Um die Skalareigenschaft von $\rho^{[r]}$ in (3.2) zu zeigen, wollen wir zunächst einige Sätze über die Extensoren vorstellen(1).

Satz 5. *Die $N(G+1)$ Grössen $V^{\alpha i}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, G)$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, G, M)$, *dann sind die $N(K+1)$ Grössen $V^{\alpha i}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, K(\leqq G))$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, K, M)$.

Das folgt unmittelbar aus den Beziehungen (2.5) und (2.6).

Satz 6. *Lassen wir die $N(G+1)$ Grössen $W_{\alpha i}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, G)$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ *sein, dann bilden die $N(K+1)$ Grössen $\binom{G-K+\gamma}{\gamma} W_{G-K+\gamma, i}$ oder $\mathfrak{B}_{[G-K]} W_{\gamma i} = \frac{(G-K+\gamma)!}{\gamma!} W_{G-K+\gamma, i}$ $(\gamma = 0, 1, \dots, K(\leqq G))$(2) die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, K, M)$.

Beweis. Der Satz wird aus den Beziehungen (2.5) und (2.6) bewiesen. In der Tat kann man sogleich aus den Transformationsgleichungen des Extensors

$$W_{G-K+\alpha, j} = \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)r}}{\partial x^{(G-K+\alpha)j}} W_{\beta r}$$

wegen der Beziehung (2.6) ersehen, dass man $\beta \geqq G-K+\alpha$ setzen darf. Setzen wir somit $\gamma = \beta-(G-K)$, dann können die Transformationsgleichungen des Extensors folgendermassen umgeschrieben werden:

$$W_{G-K+\alpha, j} = \frac{\partial \bar{x}^{(G-K+\gamma)r}}{\partial x^{(G-K+\alpha)j}} W_{G-K+\gamma, r},$$

---

(1) Diese Sätze über die Extensoren erster Stufe können leicht zu denjenigen über die Extensoren beliebiger Stufe erweitert werden, z.B.

Satz 6'. *Die $N^2(G+1)(G'+1)$ Grössen $U^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, G; \beta = 0, 1, \dots, G')$ seien die Bestimmungszahlen eines relativen Extensors zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, der in bezug auf αi exkontravariant vom Grad G und auf βj exkovariant vom Grad G' ist, dann sind die $N^2(K+1)(K'+1)$ Grössen $\binom{G'-K+\gamma}{\gamma} U^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot G'-K'+\gamma, j}$ $(\alpha = 0, 1, \dots, K; \gamma = 0, 1, \dots, K'; K \leqq G; K' \leqq G')$ die Bestimmungszahlen eines relativen Extensors zweiter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$, der in bezug auf αi exkontravariant vom Grad K und auf γj exkovariant vom Grad K' ist.*

(2) $\binom{G-K+\gamma}{\gamma} W_{G-K+\gamma, j}$ und $\frac{(G-K+\gamma)!}{\gamma!} W_{G-K+\gamma, j}$ sind gleichzeitig je die Bestimmungszahlen eines Extensors, da $\binom{G-K+\gamma}{\gamma} = \frac{(G-K+\gamma)!}{(G-K)!\,\gamma!}$ ist und $G-K$ eine bestimmte von γ unabhängige Zahl ist.

die nach der Beziehung (2.5) in

$$W_{G-K+\alpha,j} = \sum_{\tau=\alpha}^{K} \frac{(G-K+\gamma)\cdots(\gamma+1)}{(G-K+\alpha)\cdots(\alpha+1)} \frac{\partial \bar{x}^{(\tau)r}}{\partial x^{(\alpha)j}} W_{G-K+\tau,r}$$

übergehen. Daraus geht hervor

$$\frac{(G-K+\alpha)!}{(G-K)!\,\alpha!} W_{G-K+\alpha,j} = \sum_{\tau=\alpha}^{K} \frac{\partial \bar{x}^{(\tau)r}}{\partial x^{(\alpha)j}} \frac{(G-K+\gamma)!}{(G-K)!\,\gamma!} W_{G-K+\tau,r},$$

was die Richtigkeit des Satzes besagt.

Wegen Satz 5 und Satz 6 erkennen wir ohne Schwierigkeit, dass die Grössen $\rho^{[r]}$ in (3.2) Skalare sind.

15. **Satz 7.** *Wenn die $N(G-K)$ Bestimmungszahlen $V^{\alpha i}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, G-K-1$) eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ alle gleich Null sind, so formen die $N(K+1)$ Grössen $\binom{G-K+\gamma}{\gamma}^{-1} V^{G-K+\tau,i}$ ($\gamma = 0, 1, \ldots, K$), welche aus den übrigen Bestimmungszahlen des Extensors gebildet werden, die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, K, M)$.*

Beweis. In den Transformationsgleichungen des Extensors

$$V^{\alpha i} = \frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial \bar{x}^{(\beta)r}} V^{\beta r}$$

dürfen wir annehmen, dass $\beta \geqq G-K$ ist, denn die Glieder, in denen die Grössen $V^{\beta r}$ ($\beta = 0, 1, \ldots, G-K-1$) enthalten sind, sind in der rechten Seite wegen der Hypothese des Satzes alle verschwindend. Somit können wir auf Grund der Beziehung (2.6) $\alpha \geqq G-K$ setzen. Setzen wir daher $\gamma = \alpha-(G-K)$ und $\delta = \beta-(G-K)$, dann sind

$$\begin{aligned} V^{G-K+\tau,i} &= \frac{\partial x^{(G-K+\tau)i}}{\partial \bar{x}^{(G-K+\delta)r}} V^{G-K+\delta,r} \\ &= \sum_{\delta=0}^{\tau} \frac{(G-K+\gamma)\cdots(\gamma+1)}{(G-K+\delta)\cdots(\delta+1)} \frac{\partial x^{(\tau)i}}{\partial \bar{x}^{(\delta)r}} V^{G-K+\delta,r}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\gamma!\,(G-K)!}{(G-K+\gamma)!} V^{G-K+\tau,i} = \sum_{\delta=0}^{\tau} \frac{\partial x^{(\tau)i}}{\partial \bar{x}^{(\delta)r}} \frac{\delta!\,(G-K)!}{(G-K+\delta)!} V^{G-K+\delta,r}.$$

Die letzten Beziehungen beweisen die Richtigkeit des Satzes.

Satz 8. *Die $N(G-K)$ Bestimmungszahlen $W_{\alpha i} (\alpha = K+1, \dots, G)$ eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ seien alle gleich Null, dann sind die übrigen $N(K+1)$ Bestimmungszahlen $W_{\alpha i} (\alpha = 0, 1, \dots, K)$ des Extensors die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, K, M)$.*

Der Satz folgt aus der Beziehung (2.6). In der Tat, wir dürfen wegen der Hypothese des Satzes in den Transformationsgleichungen

$$W_{\alpha i} = \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)r}}{\partial x^{(\alpha)i}} W_{\beta r}$$

so ansehen, dass $\beta \leqq K$. Somit erhalten wir von (2.5) und (2.6) auch $\alpha \leqq K$, und die Behauptung des Satzes ist demgemäss richtig.

16. Zusammenfassend Satz 5 und Satz 7 bzw. Satz 6 und Satz 8, lauten die Sätze:

Satz 9. *Wenn die $N(G-K)$ Bestimmungszahlen V $(\alpha = 0, 1, \dots, G-K-1)$ eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ alle gleich Null sind, so bilden die $N(\bar{G}+1)$ Grössen $\binom{G-K+\gamma}{\gamma}^{-1} V^{G-K+\gamma, i} (\gamma = 0, 1, \dots, \bar{G} (\leqq K))$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, \bar{G}, M)$.*

Satz 10. *Die $N(G-K)$ Bestimmungszahlen $W_{\alpha i} (\alpha = K+1, \dots, G)$ eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ seien alle gleich Null, dann sind die $N(\bar{G}+1)$ Grössen $\binom{K-\bar{G}+\gamma}{\gamma} W_{K-\bar{G}+\gamma, i} (\gamma = 0, 1, \dots, \bar{G} (\leqq K))$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, \bar{G}, M)$.*

Satz 9 und Satz 10 liefern uns ohne weiteres

Satz 11. *Es seien $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\beta j}$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ bzw. $(1, \mathfrak{k}', G', M)$ und die $N(G-K)$ bzw. $N(G'-K')$ Bestimmungszahlen $V^{\alpha i} (\alpha = 0, 1, \dots, G-K-1)$ bzw. $W_{\beta j} (\beta = K'+1, \dots, G')$ alle verschwindend, dann ist*

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{aligned} \rho^{[K'-L]}(K, K') &= \sum_{\alpha=K'-L}^{K'} \binom{\alpha}{H} V^{\alpha-H, i} W_{\alpha i} \\ &\qquad\qquad \text{für } G-K \leqq K'-L, \\ \rho^{[G-K]}(K, K') &= \sum_{\alpha=G-K}^{G-K+L} \binom{\alpha}{H'}^{-1} V^{\alpha i} W_{\alpha-H', i} \\ &\qquad\qquad \text{für } G-K \geqq K'-L \end{aligned}$$

ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$, wobei L eine beliebige ganze Zahl mit der Beschränkung $0 < L \leqq \operatorname{Min}(K, K')$ ist, und wir setzen $H = K+K'-G-L$ und $H' = G+L-K-K'$.

Beweis. Aus Satz 9 und Satz 10 erkennen wir sogleich, dass die Grössen $\binom{G-K+\gamma}{\gamma}^{-1} V^{G-K+\gamma, i}$ bzw. $\binom{K'-L+\gamma}{\gamma} W_{K'-L+\gamma, j}$ $(\gamma = 0, 1, \ldots, L)$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, L, M)$ bzw. $(1, \mathfrak{k}', L, M)$ sind. Somit ist

$$\sigma = \sum_{\gamma=0}^{L} \binom{G-K+\gamma}{\gamma}^{-1} \binom{K'-L+\gamma}{\gamma} V^{G-K+\gamma, i} W_{K'-L+\gamma, i}$$

ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}+\mathfrak{k}'$. Nun setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma + K' - L && \text{für} \quad G-K \leqq K'-L \\ &= \gamma + G - K && \text{für} \quad G-K \geqq K'-L, \end{aligned}$$

dann ergibt eine leichte Berechnung

$$\begin{aligned} \sigma &= \binom{K'-L}{G-K}^{-1} \rho^{[K-L]}(K, K') && \text{für} \quad H \geqq 0 \\ &= \binom{G-K}{K'-L} \rho^{[G-K]}(K, K') && \text{für} \quad H' \geqq 0. \end{aligned}$$

Der Satz ist jetzt bewiesen.

(3.3) ist eine Erweiterung von (3.2). Denn, setzen wir

$$K = K' = G, \quad G - L = \Gamma, \quad \alpha = \beta,$$

dann wird der relative Skalar (3.3)

$$\rho^{[\Gamma]}(G, G) = \sum_{\beta=\Gamma}^{G} \binom{\beta}{\Gamma} V^{\beta-\Gamma, i} W_{\beta i},$$

was nichts anderes als (3.2) ist.

§ 4. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und die Syngeschen Vektoren.

17. Aus einem exkontravarianten oder exkovarianten Extensor erster Stufe können wir die Extensoren erster Stufe vom niederen Grad mittels Differentiation nach dem Parameter t herleiten, ausser denselben in Satz 5 oder Satz 6.

Die Bestimmungszahlen $V^{\alpha i}$ eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ transformieren sich der Regel nach:

$$\bar{V}^{\alpha a} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} V^{\beta i} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} V^{\beta i}$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha)} V^{0i} + \alpha \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-1)} V^{1i} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-2)} V^{2i} + \cdots,$$

in analoger Weise

$$\bar{V}^{\alpha+1, a} = \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha+1)} V^{0i} + (\alpha+1) \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha)} V^{1i} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-1)} V^{2i} + \cdots.$$

Wir differenzieren die beiden Seiten der ersten Gleichung nach t und dann eliminieren wir $\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha+1)}$ aus der erhaltenen mithilfe der letzten Gleichungen. Dann ergibt sich

$$\bar{V}^{\alpha+1,a} - \bar{V}^{\alpha a(1)} = \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha)} (V^{1i} - V^{0i(1)}) + \alpha \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-1)} (V^{2i} - V^{1i(1)}) + \cdots$$

$$= \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} (V^{\beta+1, i} - V^{\beta i(1)})$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} (V^{\beta+1, i} - V^{\beta i(1)}), \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, G-1,$$

was zeigt, dass die Grössen $\mathfrak{S} V^{\alpha i} = V^{\alpha+1, i} - V^{\alpha i(1)}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G-1, M+1)$ sind. Durch nochmalige Wiederholung dieses Verfahrens erhalten wir einen exkontravarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G-2, M+2)$:

$$\mathfrak{S}^2 V^{\alpha i} = V^{\alpha+2, i} - 2 V^{\alpha+1, i(1)} + V^{\alpha i(2)}.$$

Im allgemeinen behaupten wir

Satz 12. *$V^{\alpha i}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, G)$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann definieren die Grössen*

$$(4.1) \qquad \mathfrak{S}^H V^{\beta i} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} V^{\beta+\lambda, i(H-\lambda)}, \qquad \beta = 0, 1, \ldots, G-H$$

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ einen exkontravarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+H)$.

Beweis. Da $V^{\beta+\lambda, a} = \dfrac{\partial \bar{x}^{(\beta+\lambda)a}}{\partial x^{(\tau)i}} V^{\tau i}$, ändert sich bei der erweiterten Transformation

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^H V^{\beta a} &= \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\beta+\lambda)a}}{\partial x^{(\tau)i}} V^{\tau i} \right)^{(H-\lambda)} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{H-\lambda} \binom{H-\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\beta+\lambda)a}}{\partial x^{(\tau)i}} \right)^{(\mu)} V^{\tau i (H-\lambda-\mu)} \\
&= \sum_{\mu=0}^{H} \sum_{\lambda=0}^{H-\mu} \sum_{\tau=0}^{\beta+\lambda} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\mu} \binom{H-\mu}{\lambda} \binom{\beta+\lambda}{\gamma} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}} \right)^{(\beta-\tau+\lambda+\mu)} V^{\tau i (H-\lambda-\mu)} \\
&= \sum_{\mu=0}^{H} \sum_{\nu=\mu}^{H} \sum_{\tau=0}^{\beta+\nu-\mu} (-1)^{H-\nu+\mu} \binom{H}{\mu} \binom{H-\mu}{\nu-\mu} \binom{\beta+\nu-\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}} \right)^{(\beta-\tau+\nu)} V^{\tau i (H-\nu)}
\end{aligned}
$$

$(\lambda + \mu = \nu$ gesetzt)

$$
= \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} \sum_{\tau=0}^{\beta+\nu} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\mu} \binom{\nu}{\mu} \binom{\beta+\nu-\mu}{\gamma} \right\} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}} \right)^{(\beta-\tau+\nu)} V^{\tau i (H-\nu)}.
$$

Wegen (1.7) erkennen wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\mu} \binom{\nu}{\mu} \binom{\beta+\nu-\mu}{\gamma} &= 0 && \text{für } \gamma < \nu \\
&= \binom{\beta}{\gamma-\nu} && \text{für } \gamma \geqq \nu .
\end{aligned}
$$

Somit setzen wir $\gamma - \nu = \delta \, (\geqq 0)$, dann bekommt man

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^H V^{\beta a} &= \sum_{\nu=0}^{H} \sum_{\delta=0}^{\beta} \binom{\beta}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}} \right)^{(\beta-\delta)} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} V^{\delta+\nu, i (H-\nu)} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)a}}{\partial x^{(\delta)i}} \mathfrak{S}^H V^{\delta i}, \qquad \delta = 0, 1, \ldots, G-H,
\end{aligned}
$$

und V^{ai} sind dabei H-mal nach t differenziert. Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Dieser Satz kann auch durch Induktion bezüglich H bewiesen werden. Es mag interessant sein, einige speziellen aber wichtigen Fälle dieser Extensoren vorzustellen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^0 V^{\beta i} &= V^{\beta i}, \\
\mathfrak{S} V^{\beta i} &= V^{\beta+1, i} - V^{\beta i(1)}, \\
\mathfrak{S}^2 V^{\beta i} &= V^{\beta+2, i} - 2 V^{\beta+1, i(1)} + V^{\beta i(2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Für $V^{\beta i} = x^{(\beta+1)i}$ verschwinden alle $\mathfrak{S}^H V^{\beta i}$ $(H = 1, 2, \ldots, G)$ identisch.

Nach Satz 5 erhalten wir

Zusatz. *$V^{\beta i}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik* $(1, 0, G, M)$, *dann sind die Grössen*

$$
\mathfrak{S}^H V^{0i} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} V^{\lambda i(H-\lambda)} \tag{4.2}
$$

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ *die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen kontravarianten Vektors von der Ordnung* $M+H$.

18. Für den exkovarianten Extensor erster Stufe gilt ein analoger Satz. In der Tat, $W_{\alpha i}$ seien die Bestimmungszahlen des exkovarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann sind

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha a} = \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} &= \sum_{\beta=\alpha}^{G} \binom{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\beta-\alpha)} W_{\beta i} \\
&= \binom{G}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha)} W_{Gi} + \binom{G-1}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha-1)} W_{G-1, i} + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
W_{\alpha+1, a} = \binom{G}{\alpha+1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha-1)} W_{Gi} + \binom{G-1}{\alpha+1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha-2)} W_{G-1, i} + \cdots.
$$

Somit erhält man

$$
\begin{aligned}
&(G-\alpha) W_{\alpha a} - (\alpha+1) W_{\alpha+1, a}{}^{(1)} \\
&\quad = \binom{G-1}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(G-\alpha-1)} (W_{G-1, i} - G W_{Gi}{}^{(1)}) + \cdots \\
&\quad = \sum_{\beta=\alpha}^{G-1} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \left\{ (G-\beta) W_{\beta i} - (\beta+1) W_{\beta+1, i}{}^{(1)} \right\}, \\
&\qquad\qquad \alpha = 0, 1, \ldots, G-1,
\end{aligned}
$$

daraus sind die Grössen

$$
\mathfrak{S} W_{\alpha i} = (G-\alpha) W_{\alpha i} - (\alpha+1) W_{\alpha+1, i}{}^{(1)}
$$

die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors erster Stufe vom Grad $G-1$ und seine Ordnung ist um eins höher als diejenige von $W_{\alpha i}$, da $W_{\alpha i}$ einmal nach t differenziert wird. Wiederholung dieses Verfahrens führt zu

Satz 13. *Die Grössen*

$$\mathfrak{S}^H W_{\alpha i} = H! \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\alpha} \binom{G-\alpha-\nu}{G-H-\alpha} W_{\alpha+\nu,\,i}^{\cdot\,\cdot\,(\nu)}, \tag{4.3}$$

$$\alpha = 0, 1, \ldots, G-H$$

bilden für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+H)$, *wenn $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik* $(1, 0, G, M)$ *sind.*

Beweis. Bei einer erweiterten Transformation verändert sich $\mathfrak{S}^H W_{\alpha i}$ folgendermassen nach (1.7):

$$\mathfrak{S}^H W_{\alpha a} = H! \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\alpha} \binom{G-\alpha-\nu}{G-H-\alpha} \left(\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha+\nu)a}} W_{\beta i} \right)^{(\nu)}$$

$$= H! \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\alpha} \binom{G-\alpha-\nu}{G-H-\alpha} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu}$$

$$\times \sum_{\beta=\alpha+\nu}^{G} \binom{\beta}{\alpha+\nu} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \right)^{(\beta-\alpha-\nu+\mu)} W_{\beta i}^{\cdot\,\cdot\,(\nu-\mu)},$$

$$= H! \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\alpha} \binom{G-\alpha-\nu}{G-H-\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda}$$

$$\times \sum_{\beta=\alpha+\nu}^{G} \binom{\beta}{\alpha+\nu} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \right)^{(\beta-\alpha-\lambda)} W_{\beta i}^{\cdot\,\cdot\,(\lambda)}$$

$$(\nu-\mu = \lambda \text{ gesetzt})$$

$$= H! \sum_{\lambda=0}^{H} \sum_{\nu=\lambda}^{H} (-1)^\nu \binom{\alpha+\nu}{\alpha} \binom{G-\alpha-\nu}{G-H-\alpha} \binom{\nu}{\lambda}$$

$$\times \sum_{\gamma=\alpha+\nu-\lambda}^{G-\lambda} \binom{\gamma+\lambda}{\alpha+\nu} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \right)^{(\gamma-\alpha)} W_{\gamma+\lambda,\,i}^{\cdot\,\cdot\,(\lambda)}.$$

$$(\beta = \gamma+\lambda \text{ gesetzt})$$

$$= H! \sum_{\lambda=0}^{H} \sum_{\gamma=0}^{G-H} (-1)^{\lambda} \binom{\gamma+\lambda}{\gamma} \binom{G-\gamma-\lambda}{G-H-\gamma}$$

$$\times \left\{ \sum_{\mu=0}^{H-\lambda} (-1)^{H-\mu-\lambda} \binom{H-\lambda}{\mu} \binom{G-H-\alpha+\mu}{G-\gamma-\lambda} \binom{G-H-\alpha}{\gamma-\alpha}^{-1} \right\}$$

$$\times \binom{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \right)^{(\gamma-\alpha)} W_{\gamma+\lambda,\dot{i}}{}^{\dot{}\,(\lambda)} \qquad (H-\nu = \mu \text{ gesetzt})$$

$$= H! \sum_{\lambda=0}^{H} \sum_{\gamma=0}^{G-H} (-1)^{\lambda} \binom{\gamma+\lambda}{\gamma} \binom{G-\gamma-\lambda}{G-H-\gamma} \left\{ \binom{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \right)^{(\gamma-\alpha)} \right\} W_{\gamma+\lambda,\dot{i}}{}^{\dot{}\,(\lambda)}$$

$$= \frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \mathfrak{S}^H W_{\gamma i}. \qquad \text{W. z. b. z.}$$

Aus diesem Satze folgt sogleich wegen Satz 6

Zusatz. *Die Grössen*

$$\mathfrak{S}^H W_{G-H,i} = H! \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{\nu} \binom{G-H+\nu}{G-H} W_{G-\dot{H}+\nu,\dot{i}}{}^{(\nu)} \tag{4.4}$$

$$= (-1)^K \sum_{\mu=K}^{G} (-1)^{\mu} H! \binom{\mu}{K} W_{\mu\dot{i}}{}^{\dot{}\,(\mu-K)},$$

wobei $K = G-H$ und $\mu = G-H+\nu$ gesetzt sind, sind für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ (oder $K = 0, 1, \ldots, G$) die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen kovarianten Vektors von der Ordnung $M+H$, wenn $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ sind[1].

Es ist bemerkenswert, dass im speziellen Falle $W_{\alpha i} = F_{(\alpha)i}$ diese Vektoren sich zu den sogenannten SYNGEschen Vektoren $\overset{K}{E}_i$ reduzieren[2], d.h.

$$\mathfrak{S}^{M-K} F_{(K)i} = (-1)^K (M-K)!\, \overset{K}{E}_i, \tag{4.5}$$

wobei F eine skalare Funktion von den Argumenten $t, x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(M)i}$ ist.

---

(1) Dieser Zusatz ist von H. V. CRAIG nach einer langwierigen Berechnung direkt bewiesen worden. Vgl. H. V. CRAIG [5], S. 773.

(2) Diese Vektoren sind von SYNGE nach Anwendung der Variationsrechnung mittels einer sehr schönen Methode abgeleitet worden. Vgl. J. L. SYNGE [1], S. 684.

Für $K=0$ ist der Vektor $\mathfrak{S}^M F_{(0)i}$ nichts anderes als der sogenannte EULERsche Vektor und für $K=M$ erhalten wir den Vektor $\mathfrak{S}^0 F_{(M)i} = F_{(M)i}$.

19. Über die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ besteht der folgende Satz, wie leicht verifiziert werden kann.

Satz 14. *Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ sind vertauschbar, linear und assoziativ, d.h. für jede zwei nicht negative ganze Zahlen H, H' ergeben sich stets*

$$\mathfrak{S}^H \mathfrak{S}^{H'} V^{\alpha i} = \mathfrak{S}^{H'} \mathfrak{S}^H V^{\alpha i} = \mathfrak{S}^{H+H'} V^{\alpha i},$$

$$\mathfrak{S}^H (V^{\alpha i} + \overline{V}^{\alpha i}) = \mathfrak{S}^H V^{\alpha i} + \mathfrak{S}^H \overline{V}^{\alpha i},$$

$$\mathfrak{S}^H \mathfrak{S}^{H'} W_{\alpha i} = \mathfrak{S}^{H'} \mathfrak{S}^H W_{\alpha i} = \mathfrak{S}^{H+H'} W_{\alpha i},$$

$$\mathfrak{S}^H (W_{\alpha i} + \overline{W}_{\alpha i}) = \mathfrak{S}^H W_{\alpha i} + \mathfrak{S}^H \overline{W}_{\alpha i},$$

während $H+H' \leqq G$ und $V^{\alpha i}$ und $\overline{V}^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ und $\overline{W}_{\alpha i}$ beliebige exkontra- bzw. exkovariante Extensoren mit der Charakteristik (1, 0, *G, M) sind.*

20. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ können durch kleine Modifizierung derartig erweitert werden, dass sie auch auf den relativen Extensor erster Stufe anwendbar sind. Nämlich seien $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ und sei f ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung M, d.h. eine Funktion von den Argumenten $t, x^i, x^{(1)i}, \ldots, x^{(M)i}$, dann geben $f^{-1} V^{\alpha i}$ bzw. $f^{-1} W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$. Lassen wir somit auf den Extensor $f^{-1} V^{\alpha i}$ bzw. $f^{-1} W_{\alpha i}$ den Operatoren $\mathfrak{S}^H$ wirken, dann ergibt sich für $H = 0, 1, \ldots$ wegen Satz 12 und Satz 13

$$\mathfrak{S}^0 (f^{-1} V^{\alpha i}) = f^{-1} V^{\alpha i},$$

$$\mathfrak{S}\,(f^{-1} V^{\alpha i}) = f^{-1} V^{\alpha+1,\,i} - (f^{-1} V^{\alpha i})^{(1)} = f^{-1} \left\{ \mathfrak{S} V^{\alpha i} + f^{(1)} \mathfrak{S}^0 (f^{-1} V^{\alpha i}) \right\},$$

$$\mathfrak{S}^2 (f^{-1} V^{\alpha i}) = f^{-1} \left\{ \mathfrak{S}^2 V^{\alpha i} + 2 f^{(1)} \mathfrak{S} (f^{-1} V^{\alpha i}) - f^{(2)} \mathfrak{S}^0 (f^{-1} V^{\alpha i}) \right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathfrak{S}^0 (f^{-1} W_{\alpha i}) = f^{-1} W_{\alpha i},$$

$$\mathfrak{S}(f^{-1}W_{\alpha i}) = (G-\alpha)f^{-1}W_{\alpha i}-(\alpha+1)(f^{-1}W_{\alpha+1,i})^{(1)}$$
$$= f^{-1}\left\{\mathfrak{S}W_{\alpha i}+(\alpha+1)f^{(1)}\mathfrak{S}^0(f^{-1}W_{\alpha+1,i})\right\},$$

$$\mathfrak{S}^2(f^{-1}W_{\alpha i}) = f^{-1}\left\{\mathfrak{S}^2 W_{\alpha i}+2(\alpha+1)f^{(1)}\mathfrak{S}(f^{-1}W_{\alpha+1,i})\right.$$
$$\left.-(\alpha+1)(\alpha+2)f^{(2)}\mathfrak{S}^0(f^{-1}W_{\alpha+2,i})\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

Somit lautet

Satz 15. *Die Grössen, die durch die Rekursionsformeln*

$$\mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i} = f\mathfrak{S}^H(f^{-1}V^{\alpha i}) \tag{4.6}$$
$$= \mathfrak{S}^H V^{\alpha i}-\sum_{\lambda=0}^{H-1}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}f^{-1}f^{(H-\lambda)}\mathfrak{S}^{*\lambda}V^{\alpha i}$$

bzw.

$$\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha i} = f\mathfrak{S}^H(f^{-1}W_{\alpha i}) \tag{4.7}$$
$$= \mathfrak{S}^H W_{\alpha i}-\sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^{\lambda}\binom{H}{\lambda}\frac{(\alpha+\lambda)!}{\alpha!}f^{-1}f^{(\lambda)}\mathfrak{S}^{*H-\lambda}W_{\alpha+\lambda,i}$$

bestimmt sind, sind für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, G$ *je die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, G-H, M+H)$, *wenn* $V^{\alpha i}$ *bzw.* $W_{\alpha i}$ *die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ *sind und wenn* f *ein relativer Skalar vom Gewichte* $\mathfrak{k}$ *und von der Ordnung* M *ist.*

Beweis. Zuerst ersehen wir wegen Satz 12 und Satz 13, dass

$$\mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i} = f\mathfrak{S}^H(f^{-1}V^{\alpha i}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha i} = f\mathfrak{S}^H(f^{-1}W_{\alpha i})$$

je einen relativen Extensor mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G-H, M+H)$ definieren. Durch Induktion bezüglich H lehrt dann Satz 12

$$\mathfrak{S}^{*H+1}V^{\alpha i} = f\mathfrak{S}^{H+1}(f^{-1}V^{\alpha i})$$
$$= f\left\{\mathfrak{S}^H(f^{-1}V^{\alpha+1,i})-\left(\mathfrak{S}^H(f^{-1}V^{\alpha i})\right)^{(1)}\right\}$$
$$= \mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha+1,i}-(\mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i})^{(1)}+\mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i}f^{-1}f^{(1)}$$

$$= \mathfrak{S}^H V^{\alpha+1,i} - (\mathfrak{S}^H V^{\alpha i})^{(1)}$$

$$-\sum_{\lambda=0}^{H-1}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda} f^{(H-\lambda)}\left\{\mathfrak{S}^\lambda(f^{-1}V^{\alpha+1,i}) - \left(\mathfrak{S}^\lambda(f^{-1}V^{\alpha i})\right)^{(1)}\right\}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H-1}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda} f^{-1}f^{(H-\lambda+1)}\mathfrak{S}^{*\lambda}V^{\alpha i} + \mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i}f^{-1}f^{(1)}$$

$$= \mathfrak{S}^{H+1}V^{\alpha i} - \sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^{H-\lambda+1}\binom{H}{\lambda-1} f^{(H-\lambda+1)}\mathfrak{S}^\lambda(f^{-1}V^{\alpha i})$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H-1}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda} f^{-1}f^{(H-\lambda+1)}\mathfrak{S}^{*\lambda}V^{\alpha i} + \mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i}f^{-1}f^{(1)}$$

$$= \mathfrak{S}^{H+1}V^{\alpha i} - \sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H+1-\lambda}\binom{H+1}{\lambda} f^{(H+1-\lambda)}\mathfrak{S}^{*\lambda}V^{\alpha i}$$

und nach Satz 13 folgt

$$\mathfrak{S}^{*H+1}W_{\alpha i} = f\mathfrak{S}^{H+1}(f^{-1}W_{\alpha i})$$

$$= f\left\{(G-H-\alpha)\mathfrak{S}^H(f^{-1}W_{\alpha i}) - (\alpha+1)\left(\mathfrak{S}^H(f^{-1}W_{\alpha+1,i})\right)^{(1)}\right\}$$

$$= (G-H-\alpha)\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha i} - (\alpha+1)(\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha+1,i})^{(1)}$$

$$+ (\alpha+1)\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha+1,i}f^{-1}f^{(1)}$$

$$= (G-H-\alpha)\mathfrak{S}^H W_{\alpha i} - (\alpha+1)(\mathfrak{S}^H W_{\alpha+1,i})^{(1)}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^\lambda\binom{H}{\lambda} f^{(\lambda)}\left\{(G-H-\alpha)\frac{(\alpha+\lambda)!}{\alpha!}\mathfrak{S}^{H-\lambda}(f^{-1}W_{\alpha+\lambda,i})\right.$$

$$\left.-(\alpha+1)\frac{(\alpha+\lambda+1)!}{(\alpha+1)!}\left(\mathfrak{S}^{H-\lambda}(f^{-1}W_{\alpha+1+\lambda,i})\right)^{(1)}\right\}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^\lambda\binom{H}{\lambda}\frac{(\alpha+\lambda+1)!}{\alpha!}f^{-1}f^{(\lambda+1)}\mathfrak{S}^{*H-\lambda}W_{\alpha+\lambda+1,i}$$

$$+ (\alpha+1)\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha+1,i}f^{-1}f^{(1)}$$

$$= \mathfrak{S}^{H+1}W_{\alpha i} - \sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^\lambda\binom{H}{\lambda}\frac{(\alpha+\lambda)!}{\alpha!}f^{-1}f^{(\lambda)}\mathfrak{S}^{*H-\lambda+1}W_{\alpha+\lambda,i}$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{H+1}(-1)^{\lambda-1}\binom{H}{\lambda-1}\frac{(\alpha+\lambda)!}{\alpha!}f^{-1}f^{(\lambda)}\mathfrak{S}^{*H-\lambda+1}W_{\alpha+\lambda+1,i}$$

$$= \mathfrak{S}^{H+1}W_{\alpha i} - \sum_{\lambda=1}^{H+1}(-1)^\lambda\binom{H+1}{\lambda}\frac{(\alpha+\lambda)!}{\alpha!}f^{-1}f^{(\lambda)}\mathfrak{S}^{*H+1-\lambda}W_{\alpha+\lambda,i}\,.$$

Es ist jetzt klar, dass die Gewichte der Extensoren $\mathfrak{S}^{*H}V^{\alpha i}$ und $\mathfrak{S}^{*H}W_{\alpha i}$ beide $\mathfrak{k}$ sind, und dass beider Ordnung $M+H$ ist. W. z. b. z.

Aus Satz 5 und Satz 6 kann man den folgenden Zusatz sofort herleiten.

Zusatz. *$\mathfrak{S}^{*H}V^{0i}$ bzw. $\mathfrak{S}^{*H}W_{G-H,\,i}$ sind die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten relativen Vektors vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung $M+H$.*

21. Da bei einer erweiterten Transformation

$$(\alpha+1)f_{(\alpha+1)a} = \Delta^{-\mathfrak{k}}(\alpha+1)\frac{\partial x^{(\beta+1)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha+1)a}}f_{(\beta+1)i} \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$= \Delta^{-\mathfrak{k}}\sum_{\beta=0}^{M-1}\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}(\beta+1)f_{(\beta+1)i}$$

ist, ersehen wir, dass $f_{\alpha i} \equiv (\alpha+1)f_{(\alpha+1)i}$ einen exkovarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, M-1, M)$ definieren. Wegen des letzten Zusatzes können wir deswegen behaupten

Satz 16. *f sei ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung M, dann sind die Grössen*

$$(4.8) \quad \mathfrak{S}^{*H}f_{(K)i} = (-1)^{K-1}H!\sum_{\mu=K-1}^{M-1}(-1)^{\mu}\binom{\mu}{K-1}(\mu+1)f_{(\mu+1)i}{}^{;(\mu-K+1)}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{H}(-1)^{\lambda}\frac{H!}{(H-\lambda)!}\binom{K-1+\lambda}{\lambda}f^{-1}f^{(\lambda)}\mathfrak{S}^{*H-\lambda}f_{(K+\lambda)i}$$

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, M-1$ die Bestimmungszahlen eines kovarianten relativen Vektors vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung $M+H$, wobei $K = M-H$.

Diese relativen Vektoren $\mathfrak{S}^{*H}f_{(K)i}$ sind wesentlich nichts anderes als die verallgemeinerten relativen SYNGEschen Vektoren $\overset{M-H}{\mathfrak{E}_i}$, die von S. HOKARI[1] zuerst gefunden worden sind, d.h.

$$\mathfrak{S}^{*H}f_{(K)i} = (-1)^K K\cdot H!\ \overset{K}{\mathfrak{E}_i}.$$

Denn diese relativen Vektoren $\mathfrak{S}^{*H}f_{(K)i}$ werden in die Gestalt umgeschrieben:

---

(1) Vgl. S. HOKARI [4].

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^{*H} f_{(K)i} &= (-1)^K K \cdot H! \sum_{\lambda=K}^{M} (-1)^\lambda \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)i}{}^{;(\lambda-K)} \\ &\quad - H! \sum_{\lambda=1}^{H} (-1)^\lambda \frac{1}{(H-\lambda)!} \binom{K-1+\lambda}{\lambda} f^{-1} f^{(\lambda)} \mathfrak{S}^{*H-\lambda} f_{(K+\lambda)i} \\ &= (-1)^K K \cdot H! \left\{ \sum_{\lambda=K}^{M} (-1)^\lambda \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)i}{}^{;(\lambda-K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\lambda=1}^{H} \binom{K+\lambda}{\lambda} \frac{(-1)^{K+\lambda}}{(H-\lambda)!\,(K+\lambda)!} f^{-1} f^{(\lambda)} \mathfrak{S}^{*H-\lambda} f_{(K+\lambda)i} \right\} \\ &= (-1)^K K \cdot H! \left\{ \sum_{\lambda=K}^{M} (-1)^\lambda \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)i}{}^{;(\lambda-K)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu=K+1}^{M} \binom{\nu}{K} \frac{(-1)^\nu}{(M-\nu)!\,\nu!} f^{-1} f^{(\nu-K)} \mathfrak{S}^{*H-\nu} f_{(\nu)i} \right\}.\end{aligned}$$

§ 5. Die Operatoren $\mathfrak{Z}^H$.

22. Nun behaupten wir

Satz 17. *Wenn $V^{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik* $(1, 0, G, M)$ *sind, dann definieren die Grössen*

$$\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{H\lambda} (1-2^H)^{\alpha-\lambda} V^{\lambda i(\alpha-\lambda)}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, G \tag{5.1}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \dots$ einen exkontravarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M+G)$.

Beweis. Wir wollen zunächst den Satz für $H = 1$ beweisen. Bei einer Koordinatentransformation gehen die Bestimmungszahlen $\mathfrak{Z} V^{\alpha i}$ über in

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z} V^{\alpha a} &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^\lambda \left(\frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\gamma)i}} V^{\gamma i} \right)^{(\alpha-\lambda)} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\alpha-\lambda} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\lambda}{\gamma} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} 2^\lambda \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(\lambda-\gamma+\mu)} V^{\gamma i(\alpha-\lambda-\mu)} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} \sum_{\nu=\lambda}^{\alpha} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\lambda}{\gamma} \binom{\alpha-\lambda}{\nu-\lambda} 2^\lambda \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(\nu-\gamma)} V^{\gamma i(\alpha-\nu)}\end{aligned} \tag{5.2}$$

($\lambda + \mu = \nu$ gesetzt)

$$= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} \sum_{\rho=\alpha+\gamma-\lambda}^{\gamma} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\lambda}{\gamma} \binom{\alpha-\lambda}{\rho-\gamma} 2^{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\rho)} V^{\gamma i(\rho-\gamma)}$$

$(\alpha+\gamma-\nu = \rho$ gesetzt).

Es ist hierbei

$$\sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} \sum_{\rho=\alpha+\gamma-\lambda}^{\gamma} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \left(\sum_{\rho=0}^{\lambda} \sum_{\gamma=0}^{\rho} + \sum_{\rho=\lambda}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} - \sum_{\rho=\alpha-\lambda}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\rho+\lambda-\alpha} \right)$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\alpha} \sum_{\lambda=\rho}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\rho} + \sum_{\rho=0}^{\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\rho} \sum_{\gamma=0}^{\lambda} - \sum_{\rho=0}^{\alpha} \sum_{\lambda=\alpha-\rho}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\rho+\lambda-\alpha}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\alpha} \left(\sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\lambda=\rho}^{\alpha} + \sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\lambda=\gamma}^{\rho} - \sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\lambda=\alpha-\rho+\gamma}^{\alpha} \right)$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\lambda=\gamma}^{\alpha-\rho+\gamma}$$

und $\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\gamma}\binom{\alpha-\lambda}{\rho-\gamma} = \binom{\alpha}{\rho}\binom{\rho}{\gamma}\binom{\alpha-\rho}{\lambda-\gamma}$, so wird (5.2)

$$\mathfrak{Z} V^{\alpha a} = \sum_{\rho=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\rho)} \sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\lambda=\gamma}^{\alpha-\rho+\gamma} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\rho}{\gamma} \binom{\alpha-\rho}{\lambda-\gamma} 2^{\lambda} V^{\gamma i(\rho-\gamma)}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\rho)} \sum_{\gamma=0}^{\rho} \sum_{\sigma=0}^{\alpha-\rho} (-1)^{\alpha-\gamma-\sigma} \binom{\rho}{\gamma} \binom{\alpha-\rho}{\sigma} 2^{\sigma+\gamma} V^{\gamma i(\rho-\gamma)}.$$

Wegen der Identität

$$(y-1)^{\alpha-\rho} = (-1)^{\alpha-\rho} \sum_{\sigma=0}^{\alpha-\rho} (-1)^{\sigma} \binom{\alpha-\rho}{\sigma} y^{\sigma},$$

schliessen wir leicht

$$1 = (-1)^{\alpha-\rho} \sum_{\sigma=0}^{\alpha-\rho} (-1)^{\sigma} \binom{\alpha-\rho}{\sigma} 2^{\sigma},$$

setzend $y = 2$. Deshalb tritt ein

$$\mathfrak{Z} V^{\alpha a} = \sum_{\rho=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\rho)} \sum_{\gamma=0}^{\rho} (-1)^{\rho-\gamma} \binom{\rho}{\gamma} 2^{\gamma} V^{\gamma i(\rho-\gamma)}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\rho)i}} \mathfrak{Z} V^{\rho i}.$$

$\mathfrak{Z} V^{Gi}$ mag die höchsten Ableitungen von x^{j} d.h. $x^{(M+G')j}$ enthalten, so ist die Ordnung des Extensors $M+G$. Jetzt ersieht man deswegen die Richtigkeit des Satzes für $H=1$. Nächstens setze man die

Richtigkeit des Satzes für einen bestimmten Wert H voraus, so müssen die Grössen $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i}$ nach Obigem bekanntlich auch einen ex-kontravarianten Extensor bestimmen. Andererseits gehen die Grössen $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i}$ über in

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda}(\mathfrak{Z}^H V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda)}\\ &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha}\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^{\alpha-\lambda}2^{\lambda+H\mu}(1-2^H)^{\lambda-\mu}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}V^{\mu i(\alpha-\mu)}\\ &= \sum_{\mu=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha}2^{H\mu}(1-2^H)^{-\mu}\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha}(-1)^{\lambda}2^{\lambda}(1-2^H)^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}V^{\mu i(\alpha-\mu)}.\end{aligned}$$

Es folgt aber aus der Identität $(1-y)^{\alpha} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha}(-1)^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}y^{\lambda}$ durch μ-malige Differentiation nach y

$$(-1)^{\mu}\binom{\alpha}{\mu}(1-y)^{\alpha-\mu}y^{\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^{\alpha}(-1)^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}y^{\lambda},$$

deshalb bekommt man

$$(-1)^{\mu}\binom{\alpha}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\alpha-\mu}2^{\mu}(1-2^H)^{\mu} = \sum_{\lambda=\mu}^{\alpha}(-1)^{\lambda}2^{\lambda}(1-2^H)^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu},$$

setzend $y = 2(1-2^H)$. So ist

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} = \sum_{\mu=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\mu}2^{(H+1)\mu}(2^{H+1}-1)^{\alpha-\mu}\binom{\alpha}{\mu}V^{\mu i(\alpha-\mu)},$$

was nichts anderes als $\mathfrak{Z}^{H+1}V^{\alpha i}$ ist. Jetzt ist die Extensoreigenschaft von $\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i}$ durch Induktion bezüglich H bewiesen. Die höchsten Ableitungen von x^j, welche in $\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i}$ enthaltend sind, sind offenbar $x^{(M+\alpha)j}$, so ist die Ordnung des Extensors $\mathfrak{Z}^H V^{\alpha i}$ $M+H$. Somit haben wir jetzt den Satz bewiesen.

Bemerkung. Führen wir $x^{(\alpha+1)i}$ für $V^{\alpha i}$ in Satz 17 ein, dann ist

$$\mathfrak{Z}^H x^{(\alpha+1)i} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}(1-2^H)^{\alpha-\lambda}2^{\lambda H}x^{(\alpha+1)i} = x^{(\alpha+1)i},$$

d.h. $\mathfrak{Z}^H x^{(\alpha+1)i}$ ist nichts anderes als $x^{(\alpha+1)i}$. (5.1) wird in die folgende Form umgeschrieben:

$$\text{(5.1 a)} \qquad \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} = \sum_{\rho=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\rho}2^{\rho H}\sum_{\lambda=0}^{\rho}(-1)^{\rho-\lambda}\binom{\rho}{\lambda}V^{\lambda i(\alpha-\lambda)}.$$

23. Satz 18. *$W_{\alpha i}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik* (1, 0, G, M), *dann sind*

$$\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{G-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} W_{\alpha+H+\nu,\, i}{}^{(\nu)}, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, G-H \tag{5.3}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, G$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik (1, 0, $G-H$, $M+G-H$).

Beweis. Es wird leicht erwiesen für $H = 1$ die Rekursionsformeln

$$\mathfrak{Z} W_{\alpha-1,i} = W_{\alpha i} - (\mathfrak{Z} W_{\alpha i})^{(1)}. \tag{5.4}$$

Voraussetzend

$$\mathfrak{Z} W_{\alpha a} = \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \mathfrak{Z} W_{\gamma i}, \tag{5.5}$$

bekommt man durch Induktion bezüglich α

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} W_{\alpha-1,a} &= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} - \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} (\mathfrak{Z} W_{\gamma i})^{(1)} - \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \left(\frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}\right)^{(1)} \mathfrak{Z} W_{\gamma i} \\
&= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} - \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \frac{\partial x^{(\gamma)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} (W_{\gamma i} - \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i}) - \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \binom{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha+1)} \mathfrak{Z} W_{\gamma i} \\
&= \frac{\partial x^{(G)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{Gi} + \sum_{\gamma=\alpha}^{G-1} \binom{\gamma}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i} \\
&\qquad - \sum_{\gamma=\alpha+1}^{G} \binom{\gamma-1}{\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i} \\
&= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \mathfrak{Z} W_{\alpha-1,i} + \sum_{\gamma=\alpha+1}^{G} \left\{ \binom{\gamma}{\alpha} - \binom{\gamma-1}{\alpha} \right\} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i} \\
&= \sum_{\gamma=\alpha}^{G} \binom{\gamma-1}{\alpha-1} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\gamma-\alpha)} \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i} \\
&= \frac{\partial x^{(\gamma-1)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}} \mathfrak{Z} W_{\gamma-1,i}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{Z} W_{G-1,i} = W_{Gi}$, ist es selbstverständlich klar, dass (5.5) für $\alpha = G-1$ besteht. Deswegen sind $\mathfrak{Z} W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors vom Grad $G-1$. Zunächst wollen wir den Satz für einen beliebigen Wert von H durch Induktion bezüglich H beweisen. Darum setzen wir voraus, dass $\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i}$ einen exkovarianten Extensor vom Grad $G-H$ aufbauen, und ersetzen statt $W_{\alpha i}$ in $\mathfrak{Z} W_{\alpha i}$ die entsprechenden Bestimmungszahlen des Extensors $\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} &= \sum_{\nu=0}^{G-H-\alpha-1} (-1)^\nu (\mathfrak{Z}^H W_{\alpha+1+\nu,\, i})^{(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{G-(H+1)-\alpha} (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{G-H-\alpha-1-\nu} (-1)^\mu \binom{\mu+H-1}{H-1} W_{\alpha+1+\nu+H+\mu,\, i}{}^{(\nu+\mu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{G-(H+1)-\alpha} \sum_{\lambda=\nu}^{G-(H+1)-\alpha} (-1)^\lambda \binom{\lambda-\nu+H-1}{H-1} W_{\alpha+(H+1)+\lambda,\, i}{}^{(\lambda)} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{G-(H+1)-\alpha} (-1)^\lambda \left\{ \sum_{\nu=0}^{\lambda} \binom{\lambda-\nu+H-1}{H-1} \right\} W_{\alpha+(H+1)+\lambda,\, i}{}^{(\lambda)} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{G-(H+1)-\alpha} (-1)^\lambda \binom{H+\lambda}{H} W_{\alpha+(H+1)+\lambda,\, i}{}^{(\lambda)} = \mathfrak{Z}^{H+1} W_{\alpha i}\,,
\end{aligned}$$

die nach dem vorhergehenden Beweise die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors vom Grad $G-H-1$ sein müssen. Die Ordnung des Extensors (5.3) ist bekanntlich $M+G-H$, weil $\mathfrak{Z}^H W_{0i}$ als höchste Ableitungen $x^{(M+G-H)j}$ enthält. W. z. b. z.

An Stelle von $W_{\beta i}$ in (5.3) setze man $f_{(\beta)i}$, wobei f ein Skalar von der Ordnung M andeutet, dann ergibt sich

Zusatz. *f sei ein Skalar von der Ordnung M, dann sind*

$$\mathfrak{Z}^H f_{(\alpha)i} = \sum_{\beta=H+\alpha}^{M} (-1)^{\beta-H-\alpha} \binom{\beta-\alpha-1}{H-1} f_{(\beta)i}{}^{(\beta-H-\alpha)}\,, \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, M-H \tag{5.6}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, M$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik $(1, 0, H, 2M-H)$(1).

24. Es ist eine notwendige Bedingung für Invarianz der Form der Funktion f bis auf einen Faktor $d\bar{t}/dt$ bei jeder Transformation des Parameters t, dass

$$\mathfrak{Z} f_{(\alpha)i} x^{(\alpha+1)i} = f, \qquad \mathfrak{Z}^H f_{(\alpha)i} x^{(\alpha+1)i} = 0 \qquad (H \geqq 2) \tag{5.7}$$

erfüllt sind(2).

---

(1) Für $H=1$ hat H. V. CRAIG diesen Zusatz bewiesen. Vgl. H. V. CRAIG [7], S. 771 und J. L. SYNGE [1], S. 683.

(2) Vgl. A. KNESER, Lehrbuch der Variationsrechnung (1900), S. 195.

Bemerkung. Von (5.3) kann man die analogen Rekursionsformeln wie (5.4) herleiten:

$$\text{(5.8)}\quad \begin{aligned} &\mathfrak{Z}^H W_{\alpha-1,i} + (\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i})^{(1)} = \mathfrak{Z}^{H-1} W_{\alpha i}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, G-H, \\ &\mathfrak{Z}^H W_{G-H,i} = \mathfrak{Z}^{H-1} W_{G-H+1,i}. \end{aligned}$$

Der Beweis ist aber hier ausgelassen, da er nicht so schwer ist.

25. Der Beweis von Satz 17 und Satz 18 liefert uns ohne weiteres

Satz 19. *Die Operatoren $\mathfrak{Z}^H$ sind vertauschbar, linear und assoziativ.*

26. In analoger Weise wie Satz 15 schliessen wir

Satz 20. *$V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ seien die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ und f sei ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung M, dann sind die Grössen*

$$\text{(5.9)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{Z}^{*H} V^{\alpha i} &= f\mathfrak{Z}^H(f^{-1} V^{\alpha i}) \\ &= \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} (1-2^H)^\rho f^{-1} f^{(\rho)} \mathfrak{Z}^{*H} V^{\alpha-\rho,i}, \\ &\qquad \alpha = 0, 1, \ldots, G' (\leqq G) \end{aligned}$$

bzw.

$$\text{(5.10)}\quad \begin{aligned} \mathfrak{Z}^{*H} W_{\alpha i} &= f\mathfrak{Z}^H(f^{-1} W_{\alpha i}) \\ &= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{G-H-\alpha} (-1)^\rho \binom{H-1+\rho}{H-1} f^{-1} f^{(\rho)} \mathfrak{Z}^{*H+\rho} W_{\;\;i}, \\ &\qquad \alpha = 0, 1, \ldots, G-H \end{aligned}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, G$ je die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G', M+G')$ bzw. $(1, \mathfrak{k}, G-H, M+G-H)$.

Beweis. Da $f^{-1}V^{\alpha i}$ bzw. $f^{-1}W_{\alpha i}$ einen exkontra- bzw. exkovarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ bilden, so sind $f\mathfrak{Z}^H(f^{-1}V^{\alpha i})$ bzw. $f\mathfrak{Z}^H(f^{-1}W_{\alpha i})$ auch die Bestimmungszahlen eines Extensors mit dem Gewichte $\mathfrak{k}$. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}^{*H} V^{\alpha i} &= f\sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda H} (1-2^H)^{\alpha-\lambda} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda)} \\ &= \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} + f\sum_{\lambda=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda H} (1-2^H)^{\alpha-\lambda} \sum_{\mu=1}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} (f^{-1})^{(\mu)} V^{\lambda i(\alpha-\lambda-\mu)} \end{aligned}$$

$$= \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} - f \sum_{\lambda=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda H} (1-2^H)^{\alpha-\lambda}$$

$$\times \sum_{\rho=1}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda-\rho)}$$

$$= \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} (1-2^H)^\rho f^{-1} f^{(\rho)}$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\alpha-\rho} \binom{\alpha-\rho}{\lambda} 2^{\lambda H} (1-2^H)^{\alpha-\rho-\lambda} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\rho-\lambda)} f$$

$$= \mathfrak{Z}^H V^{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{\rho} (1-2^H)^\rho f^{-1} f^{(\rho)} \mathfrak{Z}^{*H} V^{\alpha-\rho, i},$$

weil

$$\sum_{\mu=1}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} (f^{-1})^{(\mu)} V^{\lambda i(\alpha-\lambda-\mu)}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} (f^{-1})^{(\mu)} \sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda-\mu} \binom{\alpha-\lambda-\mu}{\nu} f^{(\nu)} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda-\mu-\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\alpha-\lambda} \sum_{\rho=\mu}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} \binom{\alpha-\lambda-\mu}{\rho-\mu} f^{(\rho-\mu)} (f^{-1})^{(\mu)} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda-\rho)}$$

$$= \sum_{\rho=1}^{\alpha-\lambda} \sum_{\mu=1}^{\rho} \binom{\alpha-\lambda}{\rho} \binom{\rho}{\mu} f^{(\rho-\mu)} (f^{-1})^{(\mu)} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda-\rho)}$$

$$= -\sum_{\rho=1}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)} (f^{-1} V^{\lambda i})^{(\alpha-\lambda-\rho)}.$$

In analoger Weise bekommt man

$$\mathfrak{Z}^{*H} W_{\alpha i} = f \sum_{\nu=0}^{G-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} (f^{-1} W_{\alpha+H+\nu, i})^{(\nu)}$$

$$= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} + f \sum_{\nu=1}^{G-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (f^{-1})^{(\mu)} W_{\alpha+H+\nu, i}^{(\nu-\mu)}$$

$$= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} - f \sum_{\nu=1}^{G-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1}$$

$$\times \sum_{\rho=1}^{\nu} \binom{\nu}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)} (f^{-1} W_{\alpha+H+\nu, i})^{(\nu-\rho)}$$

$$= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{G-H-\alpha} f^{-1} f^{(\rho)}$$

$$\times \sum_{\nu=\rho}^{G-H-\alpha} (-1)^\nu \binom{H-1+\nu}{H-1} \binom{\nu}{\rho} (f^{-1} W_{\alpha+H+\nu, i})^{(\nu-\rho)} f$$

$$= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{G-H-\alpha} (-1)^\rho \binom{H-1+\rho}{H-1} f^{-1} f^{(\rho)}$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{G-(H+\rho)-\alpha} (-1)^\lambda \binom{H+\rho-1+\lambda}{H+\rho-1} (f^{-1} W_{\alpha+H+\rho+\lambda,\, i})^{(\lambda)} f$$

$$= \mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{G-H-\alpha} (-1)^\rho \binom{H-1+\rho}{H-1} f^{-1} f^{(\rho)} \mathfrak{Z}^{*H+\rho} W_{\alpha i}.$$

Jetzt ist der Satz bewiesen.

§ 6. Die Operatoren $\mathfrak{Y}^H$.

27. Im obigen haben wir zwei Arten von linearen Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^H$ eingeführt. Ausser den zwei Arten von Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^H$ ergibt sich noch eine andere Art von linearen Operatoren $\mathfrak{Y}^H$, die auch auf jeden Extensor erster Stufe anwendbar sind und die durch die folgenden zwei Sätze vorgestellt werden.

Satz 21. *Die Grössen*

$$(6.1)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{Y} V^{\alpha i} = \alpha V^{\alpha-1,\, i(1)} + (G^* - \alpha + 1) V^{\alpha i} \quad \text{für} \quad \alpha = 1, 2, \dots, G^*, \\ &\mathfrak{Y} V^{0i} = (G^*+1) V^{0i}, \qquad \mathfrak{Y} V^{G^*+1,\, i} = (G^*+1) V^{G\; i(1)} \end{aligned}$$

definieren einen exkontravarianten Extensor mit der Charakteristik (1, 0, G^*+1, $M+1$), *während* $V^{\alpha i}$ *die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik* (1, 0, G, M) *sind, wobei* $G^* \leqq G$; *im allgemeinen sind*

$$(6.2)\quad \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} = H! \sum_{\nu=0}^{H} \binom{\alpha}{\nu} \binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} V^{\alpha-\nu,\, i(\nu)}$$

$$\text{für} \quad \alpha = H, H+1, \dots, G^*$$

$$= H! \sum_{\nu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\nu} \binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} V^{\alpha-\nu,\, i(\nu)}$$

$$\text{für} \quad \alpha = 0, 1, \dots, H$$

$$= H! \sum_{\nu=\alpha-G^*}^{H} \binom{\alpha}{\nu} \binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} V^{\alpha-\nu,\, i(\nu)}$$

$$\text{für} \quad \alpha = G^*, G^*+1, \dots, G^*+H$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \dots, G^*$ *die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors mit der Charakteristik* (1, 0, G^*+H, $M+H$).

Beweis. Da bei einer erweiterten Transformation $V^{\alpha a} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} V^{\beta i}$, folgt, setzend $V^{-1,i} = V^{G^*+1,i} = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y} V^{\alpha a} &= \alpha\left(\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}}{\partial x^{(\beta-1)i}} V^{\beta-1,i}\right)^{(1)} + (G^*-\alpha+1)\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} V^{\beta i} \\
&= \alpha \sum_{\beta=1}^{\alpha} \binom{\alpha-1}{\beta-1}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta+1)} V^{\beta-1,i} \\
&\quad + \sum_{\beta=0}^{\alpha}\left\{\alpha\binom{\alpha-1}{\beta-1}V^{\beta-1,i(1)} + (G^*-\alpha+1)\binom{\alpha}{\beta}V^{\beta i}\right\}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} \\
&= \sum_{\beta=0}^{\alpha-1}\left\{\alpha\binom{\alpha-1}{\beta} + (\beta-\alpha)\binom{\alpha}{\beta}\right\}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} V^{\beta i} \\
&\quad + \sum_{\beta=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)}\left\{\beta V^{\beta-1,i(1)} + (G^*-\beta+1)V^{\beta i}\right\} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \mathfrak{Y} V^{\beta i}.
\end{aligned}$$

Deswegen sind (6.1) die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors, dessen Grad G^*+1 und Ordnung $M+1$ ist. Nun beweisen wir den Satz durch Induktion bezüglich H. Darum ersetze man $\mathfrak{Y}^H V^{\alpha i}$ an Stelle von $V^{\alpha i}$ in (6.1), dann sind

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} &= H!\,\Bigg\{\alpha\sum_{\nu=0}^{H}\binom{\alpha-1}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha-1}{H-\nu}V^{\alpha-\nu-1,i(\nu+1)} \\
&\qquad + (G^*+H-\alpha+1)\sum_{\nu=0}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu}V^{\alpha-\nu,i(\nu)}\Bigg\} \\
&= H!\,\Bigg\{\sum_{\nu=1}^{H+1}\alpha\binom{\alpha-1}{\nu-1}\binom{G^*+H-\alpha+1}{H-\nu+1} \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{H}(G^*+H-\alpha+1)\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu}\Bigg\}V^{\alpha-\nu,i(\nu)} \\
&= (H+1)!\sum_{\nu=0}^{H+1}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha+1}{H-\nu+1}V^{\alpha-\nu,i(\nu)} \\
&= \mathfrak{Y}^{H+1}V^{\alpha i}
\end{aligned}$$

die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors, wobei wir unter $V^{-\beta,i}$ und $V^{G^*+\beta,i}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, H+1)$ immer Null verstehen. Die Ordnung sowie der Grad von $\mathfrak{Y}^{H+1}V^{\alpha i}$ sind beide um eins höher als dieselben von $\mathfrak{D}^H V^{\alpha i}$, wie man leicht nach dem Verfahren ersieht. Somit ist jetzt der Satz bewiesen.

Bemerkung. Im speziellen Falle $V^{\alpha i} = x^{(\alpha+1)i}$, reduziert sich $\mathfrak{D}^H x^{(\alpha+1)i}$ zu $x^{(\alpha+1)i}$ bis auf einen Zahlfaktor, da

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} = \binom{G^*+H}{H} \qquad \text{für } G^* \geqq \alpha \geqq H, \\
(6.3)\qquad &\sum_{\nu=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} = \binom{G^*+H}{H} \qquad \text{für } \alpha \leqq H, \\
&\sum_{\nu=\alpha-G^*}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G^*+H-\alpha}{H-\nu} = \binom{G^*+H}{H} \qquad \text{für } G^* \leqq \alpha.
\end{aligned}$$

Diese letzten Beziehungen erhält man sogleich aus der Identität $y^{G^*+H} = y^\alpha y^{G^*+H-\alpha}$ durch H-malige Differentiation nach y und dann durch Setzung $y = 1$.

28. Satz 22. *Wenn $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors mit der Charakteristik* (1, 0, G, M) *sind, dann bestimmen die Grössen*

$$\begin{aligned}
(6.4)\qquad \mathfrak{D}^H W_{\alpha i} &= \sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu} W_{\alpha-\nu,\, i}^{\ \cdot\ \ \cdot\ (H-\nu)} \qquad \textit{für } \alpha = H, H+1, \ldots, G \\
&= \sum_{\nu=0}^{\alpha}\binom{H}{\nu} W_{\alpha-\nu,\, i}^{\ \cdot\ \ \cdot\ (H-\nu)} \qquad \textit{für } \alpha = 0, 1, \ldots, H \\
&= \sum_{\nu=\alpha-G}^{H}\binom{H}{\nu} W_{\alpha-\nu,\, i}^{\ \cdot\ \ \cdot\ (H-\nu)} \\
&\qquad\qquad \textit{für } \alpha = G, G+1, \ldots, G+H
\end{aligned}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots, G$ einen exkovarianten Extensor mit der Charakteristik (1, 0, $G+H$, $M+H$).

Beweis. Wir zeigen zuerst die Richtigkeit des Satzes für $H = 1$. Aus $W_{\alpha a} = \dfrac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} W_{\alpha a} &= W_{\alpha a}^{\cdot\ \cdot\ (1)} + W_{\alpha-1,\, a} = \left(\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}\right)^{(1)} + \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}} W_{\beta i} \\
&= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}^{\cdot\ \cdot\ (1)} + \sum_{\beta=\alpha}^{G}\left\{\binom{\beta}{\alpha}+\binom{\beta}{\alpha-1}\right\}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\beta-\alpha+1)} W_{\beta i} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} W_{\alpha-1,\, i} \\
&= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}^{\cdot\ \cdot\ (1)} + \sum_{\beta=\alpha-1}^{G}\binom{\beta+1}{\alpha}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\beta-\alpha+1)} W_{\beta i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}^{\cdot\,\cdot\,(1)} + \sum_{\beta=\alpha}^{G+1} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta-1,\,i}$$

$$= \sum_{\beta=\alpha}^{G+1} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} (W_{\beta i}^{\cdot\,\cdot\,(1)} + W_{\beta-1,\,i}) = \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \mathfrak{Y} W_{\beta i}\,,$$

setzend $W_{-1,\,i} = W_{G+1,\,i} = 0$. Das zeigt, dass $\mathfrak{Y} W_{\alpha i}$ einen exkovarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G+1, M+1)$ bilden. Voraussetzend die Richtigkeit des Satzes für H, geht auf ganz dieselbe Weise wie oben hervor

$$\mathfrak{Y}^{H+1} W_{\alpha a} = (\mathfrak{Y}^H W_{\alpha a})^{(1)} + \mathfrak{Y}^H W_{\alpha-1,\,a}$$

$$= \left(\frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \mathfrak{Y}^H W_{\beta i}\right)^{(1)} + \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha-1)a}} \mathfrak{Y}^H W_{\beta i}$$

$$= \sum_{\beta=\alpha}^{G+H+1} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \left\{ (\mathfrak{Y}^H W_{\beta i})^{(1)} + \mathfrak{Y}^H W_{\beta-1,\,i} \right\}$$

$$= \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \mathfrak{Y}^{H+1} W_{\beta i}\,.$$

Der Grad sowie die Ordnung des Extensors $\mathfrak{Y}^{H+1} W_{\alpha i}$ sind beide um eins höher als dieselben des Extensors $\mathfrak{Y}^H W_{\alpha i}$. Jetzt ist der Satz durch Induktion bezüglich H bewiesen.

Bemerkung. Für $W_{\alpha i} = F_{(\alpha)i}$, wird (6.4)

$$\mathfrak{Y}^H F_{(\alpha)i} = F^{(H)}_{\cdot\,(\alpha)i}\,, \tag{6.5}$$

da $F^{(H)}_{\cdot\,(\alpha)i} = \sum_{\nu=0}^{H} \binom{H}{\nu} F_{(\alpha-\nu)i}^{\cdot\,\cdot\,(H-\nu)}$ ist.

Nach dem Beweise von Satz 21 und Satz 22 kann man ohne weiteres behaupten

Satz 23. *Die Operatoren $\mathfrak{Y}^H$ sind vertauschbar, linear und assoziativ.*

29. Für einen relativen Extensor gilt

Satz 24. *Sind $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G, M)$ und f ein relativer Skalar vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und von der Ordnung M, so bilden die Grössen*

$$(6.6)\qquad \mathfrak{Y}^{*H}V^{\alpha i} = f\mathfrak{Y}^H(f^{-1}V^{\alpha i}) = \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{H}\binom{\alpha}{\rho}\rho\,!\binom{H}{\rho}f^{-1}f^{(\rho)}\mathfrak{Y}^{*H-\rho}V^{\alpha-\rho,\, i}$$

bzw.

$$(6.7)\qquad \mathfrak{Y}^{*H}W_{\alpha i} = f\mathfrak{Y}^H(f^{-1}W_{\alpha i}) = \mathfrak{Y}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{H}\binom{H}{\rho}f^{-1}f^{(\rho)}\mathfrak{Y}^{*H-\rho}W_{\alpha i}$$

für jeden Wert von $H=1, 2, \dots, G$ *je einen exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensor mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{k}, G+H, M+H)$.

Beweis. Es ist offenbar genug aus demselben Grunde wie im Beweise von Satz 20, die Gleichungen (6.6) und (6.7) zu beweisen. Wir dürfen hier sowie auch im folgenden stets auf die Berechnung hin, ohne Schaden an der Richtigkeit, setzen

$$(6.8)\qquad \begin{aligned} &\binom{\alpha}{\beta} = 0 &&\text{für}\quad 0 \leqq \alpha < \beta \quad \text{oder}\quad \beta < 0,\\ &V^{\alpha i} = W_{\alpha i} = 0 &&\text{für}\quad \alpha < 0 \quad\ \ \text{oder}\quad \alpha > G. \end{aligned}$$

Die Benützung dieser Bezeichnung wird uns das Schreiben langer Ausdrücke bei der Berechnung ersparen. In der Tat wird (6.2) dann in einem Ausdrucke von der Gestalt dargestellt:

$$(6.2\text{a})\qquad \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} = H\,!\sum_{\nu=0}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G+H-\alpha}{H-\nu}V^{\alpha-\nu,\, i(\nu)}.$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}^{*H}V^{\alpha i} &= H\,!\sum_{\nu=0}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G+H-\alpha}{H-\nu}(f^{-1}V^{\alpha-\nu,\, i})^{(\nu)}f\\ &= \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} + H\,!\sum_{\nu=1}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G+H-\alpha}{H-\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}V^{\alpha-\nu,\, i(\nu-\mu)}f\\ &= \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} - H\,!\sum_{\nu=1}^{H}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G+H-\alpha}{H-\nu}\sum_{\rho=1}^{\nu}\binom{\nu}{\rho}f^{-1}f^{(\rho)}(f^{-1}V^{\alpha-\nu,\, i})^{(\nu-\rho)}f\\ &= \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} - H\,!\sum_{\rho=1}^{H}\binom{\alpha}{\rho}f^{-1}f^{(\rho)}\\ &\qquad\times\sum_{\nu=\rho}^{H}\binom{\alpha-\rho}{\nu-\rho}\binom{G+H-\alpha}{H-\nu}(f^{-1}V^{\alpha-\nu,\, i})^{(\nu-\rho)}f \end{aligned}$$

$$= \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} - H!\sum_{\rho=1}^{H}\binom{\alpha}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)}$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{H-\rho}\binom{\alpha-\rho}{\lambda}\binom{G+H-\alpha}{H-\rho-\lambda}(f^{-1}V^{\alpha-\rho-\lambda, i})^{(\lambda)} f$$

$$= \mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} - H!\sum_{\rho=1}^{H}\binom{\alpha}{\rho}\rho!\binom{H}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)}\mathfrak{Y}^{*H-\rho}V^{\alpha-\rho, i},$$

da

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}V^{\alpha-\nu, i(\nu-\mu)}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}\sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu}\binom{\nu-\mu}{\lambda} f^{(\lambda)}(f^{-1}V^{\alpha-\nu, i})^{(\nu-\mu-\lambda)}$$
$$= \sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}\sum_{\rho=\mu}^{\nu}\binom{\nu-\mu}{\rho-\mu} f^{(\rho-\mu)}(f^{-1}V^{\alpha-\nu, i})^{(\nu-\rho)}$$
$$= \sum_{\rho=1}^{\nu}\binom{\nu}{\rho}\left\{\sum_{\mu=1}^{\rho}\binom{\rho}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)} f^{(\rho-\mu)}\right\}(f^{-1}V^{\alpha-\nu, i})^{(\nu-\rho)}$$
$$= -\sum_{\rho=1}^{\nu}\binom{\nu}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)}(f^{-1}V^{\alpha-\nu, i})^{(\nu-\rho)}.$$

In derselben Weise geht hervor

$$\mathfrak{Y}^{*H} W_{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu}\sum_{\mu=0}^{H-\nu}\binom{H-\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}$$
$$\times \sum_{\lambda=0}^{H-\nu-\mu}\binom{H-\nu-\mu}{\lambda} f^{(\lambda)}(f^{-1}W_{\alpha-\nu, i})^{(H-\nu-\mu-\lambda)} f$$
$$= \mathfrak{Y}^H W_{\alpha i} + \sum_{\nu=0}^{H-1}\binom{H}{\nu}\sum_{\mu=1}^{H-\nu}\binom{H-\nu}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)}$$
$$\times \sum_{\rho=\mu}^{H-\nu}\binom{H-\nu-\mu}{\rho-\mu} f^{(\rho-\mu)}(f^{-1}W_{\alpha-\nu, i})^{(H-\nu-\rho)} f$$
$$= \mathfrak{Y}^H W_{\alpha i} + \sum_{\nu=0}^{H-1}\binom{H}{\nu}\sum_{\rho=1}^{H-\nu}\binom{H-\nu}{\rho}$$
$$\times \sum_{\mu=1}^{\rho}\binom{\rho}{\mu}(f^{-1})^{(\mu)} f^{(\rho-\mu)}(f^{-1}W_{\alpha-\nu, i})^{(H-\nu-\rho)} f$$
$$= \mathfrak{Y}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{H}\binom{H}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)}\sum_{\nu=0}^{H-\rho}\binom{H-\rho}{\nu}(f^{-1}W_{\alpha-\nu, i})^{(H-\rho-\nu)} f$$
$$= \mathfrak{Y}^H W_{\alpha i} - \sum_{\rho=1}^{H}\binom{H}{\rho} f^{-1} f^{(\rho)}\mathfrak{Y}^{*H-\rho} W_{\alpha i}.$$

§ 7. Die Produktoperatoren von $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^K$ und $\mathfrak{Y}^L$.

30. Wir haben in den vorigen Kapiteln drei Arten von linearen Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^K$ und $\mathfrak{Y}^L$ definiert, die alle auf jeden Extensor erster Stufe anwendbar sind. Dazu liefert uns irgendein Produkt von je zwei Operatoren dieser drei Arten einen neuen Operator, z.B.

$$\mathfrak{S}^H\mathfrak{Z}^K V^{\alpha i} = \sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}(\mathfrak{Z}^K V^{\alpha+\lambda,\, i})^{(H-\lambda)}.$$

Dieser neu erhaltene Operator, Produktoperator, kann aber von der Reihenfolge der Faktoroperatoren abhängig sein. Satz 14, Satz 19 und Satz 23 haben uns schon gezeigt, dass, wenn die beiden Faktoroperatoren derselben Art angehören, die Multiplikation kommutativ ist, d.h. die Faktoroperatoren miteinander vertauschbar sind. Über die Multiplikationen der Operatoren verschiedener Art können wir die folgenden zwei Sätze beweisen.

Satz 25. *Für einen exkontravarianten Extensor erster Stufe ist der Operator $\mathfrak{Y}^L$ mit den Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^K$ vertauschbar, d.h.*

$$\mathfrak{Y}^L\mathfrak{S}^H V^{\alpha i} = \mathfrak{S}^H\mathfrak{Y}^L V^{\alpha i}, \quad \mathfrak{Y}^L\mathfrak{Z}^K V^{\alpha i} = \mathfrak{Z}^K\mathfrak{Y}^L V^{\alpha i}, \tag{7.1}$$

aber die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^K$ sind miteinander nicht vertauschbar, sondern die folgende Beziehung für die Produktoperatoren besteht:

$$\mathfrak{S}^H\mathfrak{Z}^K V^{\alpha i} = 2^{HK}\mathfrak{Z}^K\mathfrak{S}^H V^{\alpha i}. \tag{7.2}$$

Beweis. Hier wollen wir den Beweis abkürzen, indem die Festsetzung (6.8) aufgenommen wird.

(i) Aus den Definitionen der Operatoren (4.1) und (6.2) geht erstens hervor

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}^L\mathfrak{S}^H V^{\alpha i} &= L!\sum_{\nu=0}^{L}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G-H+L-\alpha}{L-\nu}\\ &\qquad\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}V^{\alpha-\nu+\lambda,\, i(H-\lambda)}\right\}^{(\nu)}\\ &= L!\sum_{\lambda=0}^{H}\sum_{\mu=\lambda}^{\lambda-L}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda-\mu}\binom{G-H+L-\alpha}{L-\lambda+\mu}V^{\alpha+\mu,\, i(H-\mu)}\\ &\qquad\qquad (\mu=\lambda-\nu \text{ gesetzt})\end{aligned}$$

$$= L!\sum_{\mu=-L}^{H}\left\{\sum_{\lambda=\mu}^{\mu+L}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda-\mu}\binom{G-H+L-\alpha}{L-\lambda+\mu}\right\}V^{\alpha+\mu,\, i(H-\mu)}, \tag{7.3}$$

da $\mathfrak{S}^H V^{\alpha i}$ ein Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+H)$ ist, während $V^{\alpha i}$ ein Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ ist. Die Charakteristik des Extensors $\mathfrak{Y}^L \mathfrak{S}^H V^{\alpha i}$ ist dann $(1, 0, G-H+L, M+H+L)$. Zweitens haben wir

$$\mathfrak{S}^H \mathfrak{Y}^L V^{\alpha i} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda}$$

$$\times \left\{ L! \sum_{\nu=0}^{L} \binom{\alpha+\lambda}{\nu} \binom{G+L-\alpha-\lambda}{L-\nu} V^{\alpha+\lambda-\nu,\, i(\nu)} \right\}^{(H-\lambda)}$$

$$= L! \sum_{\lambda=0}^{H} \sum_{\mu=\lambda}^{\lambda-L} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\mu} \binom{G+L-\alpha-\lambda}{L-\lambda+\mu} V^{\alpha+\mu,\, i(H-\mu)} \cdot$$

$$(\mu = \lambda - \nu \text{ gesetzt})$$

$$(7.4) \qquad = L! \sum_{\mu=-L}^{H} \left\{ \sum_{\lambda=\mu}^{\mu+L} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\mu} \binom{G+L-\alpha-\lambda}{L-\lambda+\mu} \right\} V^{\alpha+\mu,\, i(H-\mu)}.$$

Nun wollen wir beweisen, dass die in den zusammenfassenden Klammern von (7.3) und (7.4) stehenden Ausdrücke einander gleich sind. Dann folgt die erste Beziehung von (7.1). Zum Beweise differenziert man die Identität

$$(x-y)^H x^\alpha y^{G+L-H-\alpha} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} x^{\lambda+\alpha} y^{G+L-\lambda-\alpha}$$

$(\alpha+\mu)$-mal nach x und $(G-\alpha-\mu)$-mal nach y, dann erhält man

$$\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha+\mu} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha}{\alpha+\mu-\lambda}$$

$$\times \sum_{\rho=0}^{G-\alpha-\mu} (-1)^\rho \binom{H-\lambda}{\rho} \binom{G+L-H-\alpha}{G-\alpha-\mu-\rho} x^{\lambda-\mu} (x-y)^{H-\lambda-\rho} y^{L-H+\mu+\rho}$$

$$= \sum_{\lambda=\mu}^{L+\mu} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\mu} \binom{G+L-\lambda-\alpha}{G-\alpha-\mu} x^{\lambda-\mu} y^{L-\lambda+\mu}\,.$$

Daher ist klar, setzend $x = y = 1$,

$$\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha+\mu} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha}{\lambda-\mu} \binom{G+L-H-\alpha}{L+\mu-\lambda}$$

$$= \sum_{\lambda=\mu}^{L+\mu} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \binom{\alpha+\lambda}{\alpha+\mu} \binom{G+L-\lambda-\alpha}{G-\alpha-\mu}.$$

Zum Schluss kann man das Summationszeichen $\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha+\mu}$ auf der linken Seite der letzten Gleichung vermöge der Festsetzung (6.8) mit $\sum_{\lambda=\mu}^{L+\mu}$ ersetzen, da die in der Summe $\sum\limits_{\lambda=\mu}^{\alpha+\mu}$ stehenden Glieder für solchen Wert von λ immer gleich Null sind, dass entweder $L+\mu<\lambda\leqq\alpha+\mu$ oder $L+\mu\geqq\lambda>\alpha+\mu$. Jetzt ist die Beziehung bewiesen.

(ii) Analog bekommen wir nach (5.1) und (6.2) den Extensor

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}^L\mathfrak{Z}^K V^{\alpha i} &= L!\sum_{\nu=0}^{L}\binom{\alpha}{\nu}\binom{G+L-\alpha}{L-\nu}\\ &\qquad\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{\alpha-\nu}\binom{\alpha-\nu}{\lambda}2^{\lambda K}(1-2^K)^{\alpha-\nu-\lambda}V^{\lambda i(\alpha-\nu-\lambda)}\right\}^{(\nu)}\\ &= L!\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda K}(1-2^K)^{\alpha-\lambda}\\ &\qquad\times\left\{\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\alpha}{L-\nu}(1-2^K)^{-\nu}\right\}V^{\lambda i(\alpha-\lambda)},\end{aligned}\tag{7.5}$$

dessen Charakteristik $(1, 0, G+L, M+G+L)$ ist, wenn $V^{\alpha i}$ der Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ ist. Vertauschend die Reihenfolge der Operatoren, tritt ein

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}^K\mathfrak{Y}^L V^{\alpha i} &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda K}(1-2^K)^{\alpha-\lambda}\left\{L!\sum_{\nu=0}^{L}\binom{\lambda}{\nu}\binom{G+L-\lambda}{L-\nu}V^{\lambda-\nu,\, i(\nu)}\right\}^{(\alpha-\lambda)}\\ &= L!\sum_{\nu=0}^{L}\sum_{\mu=0}^{\alpha-\nu}\binom{\alpha}{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}\binom{G+L-\mu-\nu}{L-\nu}\\ &\qquad\times 2^{(\mu+\nu)K}(1-2^K)^{\alpha-\mu-\nu}V^{\mu i(\alpha-\mu)}\qquad(\mu=\lambda-\nu \text{ gesetzt})\\ &= L!\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda K}(1-2^K)^{\alpha-\lambda}\\ &\qquad\times\left\{\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\lambda-\nu}{G-\lambda}2^{\nu K}(1-2^K)^{-\nu}\right\}V^{\lambda i(\alpha-\lambda)}\\ &\qquad\qquad(\mu=\lambda \text{ gesetzt}).\end{aligned}\tag{7.6}$$

$(G-\lambda)$-malige Differentiation nach x führt uns aus der Identität

$$x^{G+L-\alpha}(1+x)^{\alpha-\lambda}=\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}x^{G+L-\lambda-\nu}$$

zur Beziehung

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu=0}^{G-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\mu}\binom{G+L-\alpha}{G-\lambda-\mu}(1+x)^{\alpha-\lambda-\mu}x^{L-\alpha+\lambda+\mu}\\ &\qquad=\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\lambda-\nu}{G-\lambda}x^{L-\nu},\end{aligned}$$

somit ergibt sich, setzend $x = 2^{-K}(1-2^K)$,

$$\sum_{\mu=0}^{G-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\mu}\binom{G+L-\alpha}{L+\lambda+\mu-\alpha}(1-2^K)^{\lambda+\mu-\alpha} \tag{7.7}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\lambda-\nu}{G-\lambda}2^{\nu K}(1-2^K)^{-\nu}.$$

Das Summationszeichen $\sum\limits_{\mu=0}^{G-\lambda}$ auf der linken Seite der letzten Gleichung kann mit $\sum\limits_{\mu=0}^{\alpha-\lambda}$ ersetzt werden, da die in der Summe stehenden Glieder für solchen Wert von μ wegen der Festsetzung (6.8) immer verschwinden sollen, dass entweder $G-\lambda<\mu\leqq\alpha-\lambda$ oder $\alpha-\lambda<\mu\leqq G-\lambda$. Daher leiten wir aus (7.7)

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\alpha}{L-\nu}(1-2^K)^{-\nu}=\sum_{\nu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\nu}\binom{G+L-\lambda-\nu}{G-\lambda}2^{\nu K}(1-2^K)^{-\nu}$$

her, indem auf der linken Seite $\nu=\alpha-\lambda-\mu$ gesetzt wird. Die letzte Gleichung zeigt, dass die in den zusammenfassenden Klammern von (7.5) und (7.6) stehenden Ausdrücke einander gleich sind. Daraus folgt die zweite Beziehung von (7.1).

(iii) Auf dieselbe Weise wie (i) und (ii) folgt erstens aus (4.1) und (5.1) der Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G-H, M+G)$

$$\mathfrak{Z}^K\mathfrak{S}^H V^{\alpha i}=\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}2^{K\lambda}(1-2^K)^{\alpha-\lambda}\left\{\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}V^{\lambda+\nu,\,i(H-\nu)}\right\}^{(\alpha-\lambda)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{H}\sum_{\mu=\nu}^{\alpha+\nu}(-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}\binom{\alpha}{\mu-\nu}2^{K(\mu-\nu)}(1-2^K)^{\alpha-\mu+\nu}V^{\mu i(H+\alpha-\mu)}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\alpha+H}2^{K(\mu-H)}\left\{\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^{H-\nu}\binom{\alpha}{\mu-\nu}\binom{H}{\nu}\right. \tag{7.8}$$

$$\left.\times\, 2^{K(H-\nu)}(1-2^K)^{\alpha-\mu+\nu}\right\}V^{\mu i(H+\alpha-\mu)},$$

indem $\lambda+\nu=\mu$ gesetzt wird. Zweitens erhält man

$$\mathfrak{S}^H\mathfrak{Z}^K V^{\alpha i}=\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}$$

$$\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{\alpha+\nu}\binom{\alpha+\nu}{\lambda}2^{K\lambda}(1-2^K)^{\alpha+\nu-\lambda}V^{\lambda i(\alpha+\nu-\lambda)}\right\}^{(H-\nu)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{H}\sum_{\lambda=0}^{\alpha+\nu}(-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}\binom{\alpha+\nu}{\lambda}2^{K\lambda}(1-2^K)^{\alpha+\nu-\lambda}V^{\lambda i(H+\alpha-\lambda)}$$

$$(7.9)\qquad =\sum_{\mu=0}^{\alpha+H} 2^{K\mu}\left\{\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}\binom{\alpha+\nu}{\mu}(1-2^K)^{\alpha+\nu-\mu}\right\}V^{\mu i(H+\alpha-\mu)},$$

indem wir statt λ den Buchstaben μ schreiben. Andererseits gibt uns die Identität

$$(1-x)^H x^\alpha = \sum_{\nu=0}^{H}(-1)^\nu\binom{H}{\nu}x^{\alpha+\nu}$$

auf ganz dieselbe Weise wie (ii) durch μ-malige Differentiation nach x und dann durch Setzung von $x=1-2^K$ die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^\nu\binom{H}{\nu}\binom{\alpha}{\mu-\nu}2^{K(H-\nu)}(1-2^K)^{\alpha-\mu+\nu}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^\nu\binom{H}{\nu}\binom{\alpha+\nu}{\mu}(1-2^K)^{\alpha+\nu-\mu},$$

deshalb sind die in den zusammenfassenden Klammern von (7.8) und (7.9) stehenden Ausdrücke einander gleich. Somit ist (7.2) jetzt bewiesen.

31. Satz 26. *Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^K$ und $\mathfrak{Y}^L$ für einen exkovarianten Extensor erster Stufe sind miteinander stets vertauschbar, d.h.*

$$(7.10)\qquad \begin{gathered}\mathfrak{S}^H\mathfrak{Z}^K W_{\alpha i} = \mathfrak{Z}^K\mathfrak{S}^H W_{\alpha i}, \quad \mathfrak{Z}^K\mathfrak{Y}^L W_{\alpha i} = \mathfrak{Y}^L\mathfrak{Z}^K W_{\alpha i},\\ \mathfrak{Y}^L\mathfrak{S}^H W_{\alpha i} = \mathfrak{S}^H\mathfrak{Y}^L W_{\alpha i}.\end{gathered}$$

Beweis. Die Methode des Beweises ist analog wie dieselbe in Satz 25.

(i) Zur Vorbereitung differenzieren wir die Identität

$$(x+1)^{P-\lambda}(x+y)^{\alpha+K+\lambda}y^{-(\alpha+1)}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha+\nu}{\nu}x^\nu(x+1)^{P-\lambda}(x+y)^{K-1+\lambda-\nu}\ (1),$$

d.h.

$$\sum_{\nu=0}^{\alpha+K+\lambda}\binom{\alpha+K+\lambda}{\nu}(x+1)^{P-\lambda}x^\nu y^{K+\lambda-\nu-1}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\sum_{\rho=0}^{K-1+\lambda-\nu}\binom{K+\lambda-\nu-1}{\rho}x^\nu(x+1)^{P-\lambda+\rho}(y-1)^{K-1+\lambda-\nu-\rho}$$

---

(1) Aus der Beziehung

$$y^{-(\alpha+1)} = \{(x+y)-x\}^{-(\alpha+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha+\nu}{\nu}x^\nu(x+y)^{-(\alpha+\nu+1)}$$

folgt diese Identität unmittelbar.

H-mal nach x und $(K-1)$-mal nach y, und setzen dann $x=0$ und $y=1$, so ergibt sich die Beziehung

$$\sum_{\mu=0}^{H}\binom{\alpha+K+\lambda}{\mu}\binom{P-\lambda}{H-\mu}\binom{K+\lambda-\mu-1}{K-1} \tag{7.11}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\lambda}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\binom{P-\nu}{H-\nu}\binom{K+\lambda-\nu-1}{K-1}.$$

Wegen der Definitionen der Operatoren (4.3) und (5.3) erhält man den Extensor

$$\mathfrak{S}^H\mathfrak{Z}^K W_{\alpha i} = H!\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^\nu\binom{\alpha+\nu}{\nu}\binom{G-\alpha-\nu-K}{H-\nu}$$
$$\times\left\{\sum_{\mu=0}^{G-K-\alpha-\nu}(-1)^\mu\binom{K-1+\mu}{K-1}W_{\alpha+\nu+K+\mu,\dot{i}}{}^{(\mu)}\right\}^{(\nu)}$$
$$=H!\sum_{\nu=0}^{H}\sum_{\lambda=\nu}^{G-K-\alpha}(-1)^\lambda\binom{\alpha+\nu}{\nu}\binom{K+\lambda-\nu-1}{K-1}$$
$$\times\binom{G-\alpha-\nu-K}{H-\nu}W_{\alpha+\dot{K}+\lambda,\dot{i}}{}^{(\lambda)}$$
$$=H!\sum_{\lambda=0}^{G-K-\alpha}(-1)^\lambda \tag{7.12}$$
$$\times\left\{\sum_{\nu=0}^{\lambda}\binom{\alpha+\nu}{\nu}\binom{K+\lambda-\nu-1}{K-1}\binom{G-\alpha-\nu-K}{H-\nu}\right\}W_{\alpha+\dot{K}+\lambda,\dot{i}}{}^{(\lambda)},$$

setzend $\mu+\nu=\lambda$. Dieser Extensor besitzt die Charakteristik $(1, 0, G-H-K, M+G-K)$. Andererseits gibt die Vertauschung der Reihenfolge der Operatoren

$$\mathfrak{Z}^K\mathfrak{S}^H W_{\alpha i} = H!\sum_{\nu=0}^{G-H-K-\alpha}(-1)^\nu\binom{K-1+\nu}{K-1}$$
$$\times\left\{\sum_{\mu=0}^{H}(-1)^\mu\binom{\alpha+K+\nu+\mu}{\mu}\binom{G-\alpha-K-\mu-\nu}{H-\mu}W_{\alpha+\dot{K}+\mu+\nu,\dot{i}}{}^{(\mu)}\right\}^{(\nu)}$$
$$=H!\sum_{\mu=0}^{H}\sum_{\lambda=\nu}^{G-H-K-\alpha+\mu}(-1)^\lambda\binom{K-1+\lambda-\mu}{K-1}$$
$$\times\binom{\alpha+K+\lambda}{\mu}\binom{G-\alpha-K-\lambda}{H-\mu}W_{\alpha+\dot{K}+\lambda,\dot{i}}{}^{(\lambda)}$$
$$=H!\sum_{\lambda=0}^{G-K-\alpha}(-1)^\lambda\left\{\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\alpha+K+\lambda}{\mu}\right. \tag{7.13}$$
$$\left.\times\binom{K-1+\lambda-\mu}{K-1}\binom{G-\alpha-K-\lambda}{H-\mu}\right\}W_{\alpha+\dot{K}+\lambda,\dot{i}}{}^{(\lambda)}.$$

Wegen (7.11) ist der in den zusammenfassenden Klammern von (7.12) stehende Ausdruck dem entsprechenden Ausdrucke von (7.13) gleich, d.h. die erste Beziehung (7.10) geht hervor.

(ii) Die zweite Beziehung von (7.10) kann man leicht herleiten. In der Tat bekommt man wegen $W_{G+\varepsilon, i} = 0\, (\varepsilon > 0)$ aus den Definitionen der Operatoren (5.3) und (6.4) den Extensor

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Y}^L \mathfrak{Z}^K W_{\alpha i} &= \sum_{\mu=0}^{L} \binom{L}{\mu} \left\{ \sum_{\nu=0}^{G-K-\alpha+\mu} (-1)^\nu \binom{K-1+\nu}{K-1} W_{\alpha-\mu+K+\nu,\, i}{}^{(\nu)} \right\}^{(L-\mu)} \\
&= \sum_{\mu=0}^{L} \sum_{\nu=0}^{G-K-\alpha+L} (-1)^\nu \binom{L}{\mu} \binom{K-1+\nu}{K-1} W_{\alpha+K+\nu-\mu,\, i}{}^{(\nu+L-\mu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{G-K-\alpha+L} (-1)^\nu \binom{K-1+\nu}{K-1} \left\{ \sum_{\mu=0}^{L} \binom{L}{\mu} W_{\alpha+K+\nu-\mu,\, i}{}^{(L-\mu)} \right\}^{(\nu)} \\
&= \mathfrak{Z}^K \mathfrak{Y}^L W_{\alpha i} \,.
\end{aligned}
$$

Dieser Extensor besitzt die Charakteristik $(1, 0, G-K+L, M+G-K+L)$.

(iii) Um die dritte Beziehung von (7.10) zu beweisen, differenzieren wir zuerst die Identität

$$
(x-y)^L x^{\alpha+\lambda} y^{G-\alpha-\lambda} = \sum_{\nu=0}^{L} (-1)^\nu \binom{L}{\nu} x^{\alpha+\lambda+L-\nu} y^{G-\alpha-\lambda+\nu}
$$

$(L+\lambda)$-mal nach x und $(H-\lambda)$-mal nach y, und danach setzen wir $x = y = 1$, so bekommt man

$$
\begin{aligned}
(7.14) \qquad & \sum_{\mu=0}^{L} (-1)^\mu \binom{\alpha+\lambda}{\lambda+\mu} \binom{L}{\mu} \binom{G-\alpha-\lambda}{H-\lambda-\mu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{L} (-1)^\nu \binom{L}{\nu} \binom{\alpha+\lambda+L-\nu}{L+\lambda} \binom{G-\alpha-\lambda+\nu}{H-\lambda} \,.
\end{aligned}
$$

Nach $(L+\lambda)$-maliger Differentiation nach x und $(H-\lambda)$-maliger nach y geht dazu aus der Identität

$$
(x-y)^L x^{-(\alpha+1)} y^{-(G+L-\alpha-H+1)} = \sum_{\nu=0}^{L} (-1)^\nu \binom{L}{\nu} x^{-(\alpha-\nu+1)} y^{-(G-\alpha+\nu-H+1)}
$$

die Beziehung

$$\text{(7.15)} \quad \sum_{\mu=0}^{L}(-1)^{\mu}\binom{L}{\mu}\binom{a+\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\binom{G+L-a-\lambda-\mu}{H-\lambda-\mu}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{L}(-1)^{\nu}\binom{L}{\nu}\binom{a-\nu+L+\lambda}{L+\lambda}\binom{G-a+\nu-\lambda}{H-\lambda}$$

hervor, setzend $x=y=1$. Die rechte Seite von (7.14) ist nichts anderes als diejenige von (7.15), somit ist

$$\text{(7.16)} \quad \sum_{\mu=0}^{L}(-1)^{\mu}\binom{a+\lambda}{\lambda+\mu}\binom{L}{\mu}\binom{G-a-\lambda}{H-\lambda-\mu}$$
$$=\sum_{\mu=0}^{L}(-1)^{\mu}\binom{L}{\mu}\binom{a+\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\binom{G+L-a-\lambda-\mu}{H-\lambda-\mu}.$$

Andererseits geben (6.4) und (4.3) den Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, \dot{G}+L-H, M+L+H)$

$$\mathfrak{Y}^L\mathfrak{S}^H W_{ai}=\sum_{\mu=0}^{L}\binom{L}{\mu}$$
$$\times\left\{H!\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^{\nu}\binom{a-\mu+\nu}{\nu}\binom{G-a+\mu-\nu}{H-\nu}W_{a-\mu\dot{+}\nu,\, i}{}^{(\nu)}\right\}^{(L-\mu)}$$
$$=H!\sum_{\mu=0}^{L}\binom{L}{\mu}\sum_{\lambda=-\mu}^{H-\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\binom{a+\lambda}{\lambda+\mu}\binom{G-a-\lambda}{H-\lambda-\mu}W_{a\dot{+}\lambda,\, i}{}^{(L+\lambda)}$$
$$(\nu-\mu=\lambda \text{ gesetzt})$$
$$=H!\sum_{\lambda=-L}^{H}(-1)^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=0}^{L}(-1)^{\mu}\binom{L}{\mu}\binom{a+\lambda}{\lambda+\mu}\binom{G-a-\lambda}{H-\lambda-\mu}\right\}W_{a\dot{+}\lambda,\, i}{}^{(L+\lambda)}.$$

$$\mathfrak{S}^H\mathfrak{Y}^L W_{ai}=H!\sum_{\nu=0}^{H}(-1)^{\nu}\binom{a+\nu}{a}\binom{G-a-\nu+L}{H-\nu}$$
$$\times\left\{\sum_{\mu=0}^{L}\binom{L}{\mu}W_{a+\dot{\nu}-\mu,\, i}{}^{(L-\mu)}\right\}^{(\nu)}$$
$$=H!\sum_{\mu=0}^{L}\binom{L}{\mu}\sum_{\lambda=-\mu}^{H-\mu}(-1)^{\lambda+\mu}\binom{a+\lambda+\mu}{a}$$
$$\times\binom{G+L-a-\lambda-\mu}{H-\lambda-\mu}W_{a\dot{+}\lambda,\, i}{}^{(L+\lambda)} \qquad (\nu-\mu=\lambda \text{ gesetzt})$$
$$=H!\sum_{\lambda=-L}^{H}(-1)^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=0}^{L}(-1)^{\mu}\binom{L}{\mu}\binom{a+\lambda+\mu}{\lambda+\mu}\right.$$
$$\left.\times\binom{G+L-a-\lambda-\mu}{H-\lambda-\mu}\right\}W_{a\dot{+}\lambda,\, i}{}^{(L+\lambda)}.$$

Deswegen zeigt (7.16) die Richtigkeit der Beziehung $\mathfrak{Y}^L\mathfrak{S}^H W_{\alpha i} = \mathfrak{S}^H\mathfrak{Y}^L W_{\alpha i}$. Jetzt sind wir mit dem Beweise völlig fertig.

Bemerkung 1. Satz 26 kann uns die auf die Ableitung eines Skalars F angewandten Operatoren $\mathfrak{S}^H F^{(L)}_{\cdot(\alpha)i}$ und $\mathfrak{Z}^K F^{(L)}_{\cdot(\alpha)i}$ in die auf F selbst angewandten umschreiben lassen, in der Tat hat man nach (6.5) wegen Satz 26

$$\text{(7.17)} \qquad \mathfrak{S}^H F^{(L)}_{\cdot(\alpha)i} = \mathfrak{Y}^L \mathfrak{S} F_{(\alpha)i} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z} F^{(L)}_{\cdot(\alpha)i} = \mathfrak{Y}^L \mathfrak{Z} F_{(\alpha)i}\,.$$

Bemerkung 2. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^K$ und $\mathfrak{Y}^L$ für einen exkovarianten Extensor erster Stufe mit ihren Produktoperatoren zusammen bilden eine ABELsche Gruppe, wie Satz 26 uns unmittelbar zeigt.

§ 8. Ausdrückbarkeit der Überschiebungen von Extensoren durch die von Vektoren.

32. Zunächst wollen wir die Frage erledigen, ob die Skalare $\rho^{[r]}$ in (3.2), die durch Überschiebungen von zwei Extensoren $V^{\alpha i}$, $W_{\alpha i}$, der eine exkontravariant und der andere exkovariant, erhalten werden, durch die Skalarprodukten der aus den Extensoren abgeleiteten Vektoren völlig ausdrückbar sind?

Aus einem exkontravarianten Extensor $V^{\alpha i}$ mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$ können wir $G+1$ kontravariante Vektoren $\overset{H}{V}{}^i$, $H = 0, 1, \ldots, G$ mittels Satz 12 herleiten:

$$\text{(4.1a)} \qquad \overset{H}{V}{}^i \equiv \mathfrak{S}^H V^{0i} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda} V^{\lambda i(H-\lambda)}\,.$$

Umgekehrt kann man die Bestimmungszahlen des Extensors $V^{\alpha i}$ durch diese Vektoren und ihre Ableitungen nach dem Parameter t darstellen, d.h.

$$\text{(8.1)} \qquad V^{\alpha i} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}\overset{\lambda}{V}{}^{i(\alpha-\lambda)}\,.$$

Beweis. Ersetze man $\overset{\lambda}{V}{}^i$ auf der rechten Seite von (8.1) mit (4.1a), dann ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}\overset{\lambda}{V}{}^{i(\alpha-\lambda)} = \sum_{\lambda=0}\binom{\alpha}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\mu}\binom{\lambda}{\mu}V^{\mu i(\alpha-\mu)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\alpha}\left\{\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha}(-1)^{\lambda-\mu}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\right\}V^{\mu i(\alpha-\mu)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\alpha} \delta_\mu^\alpha V^{\mu i(\alpha-\mu)} = V^{\alpha i},$$

da nach (1.5)' $\sum_{\lambda=\mu}^{\alpha}(-1)^{\lambda-\mu}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu} = \delta_\mu^\alpha$ ist. W. z. b. z.

33. Die analoge Formel für den exkovarianten Extensor $W_{\alpha i}$ hat man in derselben Weise. (4.4) liefert uns nämlich $G+1$ kovariante Vektoren

$$\text{(4.4a)} \qquad \overset{H}{W}_i \equiv \frac{1}{H!}\mathfrak{S}^H W_{G-H,\,i} = \sum_{\nu=0}^{H}(-1)^\nu\binom{G-H+\nu}{G-H} W_{G-H+\nu,\,i}{}^{;(\nu)}, \qquad H = 0, 1, \ldots, G$$

für jeden exkovarianten Extensor $W_{\alpha i}$ mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$. An Stelle von (8.1) steht dann

$$\text{(8.2)} \qquad W_{\alpha i} = \sum_{\mu=0}^{G-\alpha}\binom{\alpha+\mu}{\mu}\overset{G-\alpha-\mu}{W}{}_i{}^{;(\mu)}.$$

Beweis. Die rechte Seite von (8.2) wird gemäss (4.4a)

$$\sum_{\mu=0}^{G-\alpha}\binom{\alpha+\mu}{\mu}\overset{G-\alpha-\mu}{W}{}_i{}^{;(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{G-\alpha}\sum_{\nu=0}^{G-\alpha-\mu}(-1)^\nu\binom{\alpha+\mu}{\mu}\binom{\alpha+\mu+\nu}{\nu}W_{\alpha+\mu+\nu,\,i}{}^{;(\mu+\nu)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{G-\alpha}\sum_{\lambda=\mu}^{G-\alpha}(-1)^{\lambda-\mu}\binom{\alpha+\mu}{\mu}\binom{\alpha+\lambda}{\lambda-\mu}W_{\alpha+\lambda,\,i}{}^{;(\lambda)}$$

$(\mu+\nu = \lambda$ gesetzt)

$$= \sum_{\lambda=0}^{G-\alpha}\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\mu}\binom{\alpha+\mu}{\alpha}\binom{\alpha+\lambda}{\lambda-\mu}W_{\alpha+\lambda,\,i}{}^{;(\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{G-\alpha}\left\{\sum_{\nu=0}^{\lambda}(-1)^\nu\binom{\alpha+\lambda-\nu}{\alpha}\binom{\alpha+\lambda}{\nu}\right\}W_{\alpha+\lambda,\,i}{}^{;(\lambda)}$$

$(\lambda-\mu = \nu$ gesetzt)

$$= \sum_{\lambda=0}^{G-\alpha}\delta_0^\lambda W_{\alpha+\lambda,\,i}{}^{;(\lambda)} = W_{\alpha i},$$

da nach (1.7) $\sum_{\nu=0}^{\lambda}(-1)^\nu\binom{\alpha+\lambda-\nu}{\alpha}\binom{\alpha+\lambda}{\nu} = \delta_0^\lambda$ ist. W. z. b. z.

34. Nun können wir den folgenden wichtigsten Satz beweisen:

Satz 27. *Jeder Skalar $\rho^{[\Gamma]}$, welchen eine Überschiebung von zwei Extensoren erster Stufe $V^{\alpha i}$ und $W_{\alpha i}$, der eine exkontravariant und der andere exkovariant, hervorbringt, ist immer durch die Skalarpro-*

dukte $S(H, K)$ der Vektoren $\overset{H}{V}{}^i$ und $\overset{K}{W}_i$, die wegen der Extensoren $V^{\alpha i}$ und $W_{\alpha i}$ völlig fest bestimmt werden, und durch die Ableitungen von $S(H, K)$ darstellbar:

$$\rho^{[\Gamma]} \equiv \sum_{\lambda=0}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\lambda}{\lambda}V^{\lambda i}W_{\Gamma+\lambda,i} \tag{8.3}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\lambda}{\lambda}\sum_{\tau=\lambda}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\tau}{\tau-\lambda}S(\lambda, G-\Gamma-\tau)^{(\tau-\lambda)}.$$

Beweis. Berücksichtigend (8.1) und (8.2), kann man $\rho^{[\Gamma]}$ folgendermassen umschreiben:

$$\rho^{[\Gamma]} = \sum_{\lambda=0}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\lambda}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\overset{\mu}{V}{}^{i(\lambda-\mu)}\sum_{\nu=0}^{G-\Gamma-\lambda}\binom{\Gamma+\lambda+\nu}{\nu}\overset{G-\Gamma-\lambda-\nu}{W}{}_{i}^{\,;(\nu)}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{G-\Gamma}\sum_{\lambda=\mu}^{G-\Gamma}\sum_{\kappa=\lambda}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\lambda}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\binom{\Gamma+\kappa}{\kappa-\lambda}\overset{\mu}{V}{}^{i(\lambda-\mu)}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i}^{\,;(\kappa-\lambda)}$$
$$(\kappa = \lambda+\nu \text{ gesetzt})$$
$$= \sum_{\mu=0}^{G-\Gamma}\sum_{\kappa=\mu}^{G-\Gamma}\sum_{\lambda=\mu}^{\kappa}\binom{\Gamma+\lambda}{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\binom{\Gamma+\kappa}{\kappa-\lambda}\overset{\mu}{V}{}^{i(\lambda-\mu)}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i}^{\,;(\kappa-\lambda)}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{G-\Gamma}\sum_{\kappa=\mu}^{G-\Gamma}\sum_{\rho=0}^{\kappa-\mu}\binom{\Gamma+\rho+\mu}{\rho+\mu}\binom{\Gamma+\kappa}{\kappa-\rho-\mu}\binom{\rho+\mu}{\mu}\overset{\mu}{V}{}^{i(\rho)}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i}^{\,;(\kappa-\rho-\mu)}$$
$$(\rho = \lambda-\mu \text{ gesetzt})$$
$$= \sum_{\mu=0}^{G-\Gamma}\sum_{\kappa=\mu}^{G-\Gamma}\frac{(\Gamma+\kappa)!}{\Gamma!\,\mu!\,(\kappa-\mu)!}\left\{\sum_{\rho=0}^{\kappa-\mu}\binom{\kappa-\mu}{\rho}\overset{\mu}{V}{}^{i(\rho)}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i}^{\,;(\kappa-\rho-\mu)}\right\}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{G-\Gamma}\sum_{\kappa=\mu}^{G-\Gamma}\binom{\Gamma+\mu}{\mu}\binom{\Gamma+\kappa}{\kappa-\mu}S(\mu, G-\Gamma-\kappa)^{(\kappa-\mu)},$$

da wir nach (1.2) haben

$$\sum_{\rho=0}^{\kappa-\mu}\binom{\kappa-\mu}{\rho}\overset{\mu}{V}{}^{i(\rho)}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i}^{\,;(\kappa-\rho-\mu)} = (\overset{\mu}{V}{}^{i}\overset{G-\Gamma-\kappa}{W}{}_{i})^{(\kappa-\mu)} = S(\mu, G-\Gamma-\kappa)^{(\kappa-\mu)}.$$

W. z. b. z.

Der letzte Satz weist auf eine wichtige Tatsache hin. Nämlich man braucht nicht die Extensoren in Betracht zu ziehen, sondern braucht nur die gewöhnlichen Vektoren zu benützen, insofern nur solche Skalare allein in Frage kommen, die aus endlich vielen Extensoren erster Stufe aufzubauen sind[1]. Diese Tatsache ist uns sehr

(1) Über die Formen der Skalare, die aus einer endlichen Zahl von Extensoren erster Stufe aufzubauen sind, siehe die Arbeit: A. KAWAGUCHI [19].

bequem, denn wir sind in Behandlung von gewöhnlichen Vektoren viel erfahrener als in derselben von Extensoren.

§ 9. Die Operatoren Δ_K.

35. f sei eine von t und dem Linienelemente M-ter Ordnung abhängige Funktion. Dann betrachten wir die Operatoren Δ_K für f, welche sich definieren durch

$$\Delta_K f = \sum_{\lambda=K}^{M} \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)j} x^{(\lambda-K+1)j}, \qquad K = 1, 2, \ldots, M. \tag{9.1}$$

Da nach Satz 5 und Satz 6 $x^{(\alpha+1)j}$ bzw. $\binom{K+\alpha}{\alpha} f_{(K+\alpha)j}$ $(\alpha=0, 1, \ldots, M-K)$ einen exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensor vom Grad $M-K$ in bezug auf αj bilden, ersehen wir, dass $\Delta_K f$ ein relativer Tensor derselben Art wie f ist, wenn f ein beliebiger relativer Tensor ist. Noch allgemeiner können wir behaupten

Satz 28. *$\Delta_K f$ ist für $K > H$ ein relativer Extensor derselben Art wie f, wenn f ein relativer Extensor vom Grad H ist.*

Weiter setzen wir wegen der Bequemlichkeit der Schreibweise

$$\Delta_0 f = \sum_{\lambda=0}^{M} f_{(\lambda)i} x^{(\lambda+1)i}, \tag{9.2}$$

dann ist selbstverständlich $\Delta_0 f = f^{(1)}$, wenn f den Parameter t ausdrücklich nicht enthält. Somit ist $\Delta_0 f$ ein Skalar, wenn f einer ist. Aber $\Delta_0 f$ ist kein Tensor, selbst wenn f ein Tensor ist.

36. Wegen der Beziehungen

$$\begin{aligned} \Delta_H f_{(0)k} &= (\Delta_H f)_{(0)k}, \\ \Delta_H f_{(\alpha)k} &= (\Delta_H f)_{(\alpha)k} - \binom{H+\alpha-1}{H} f_{(H+\alpha-1)k} \qquad (\alpha \geqq 1), \end{aligned} \tag{9.3}$$

die man leicht verifizieren kann, erhalten wir

$$\begin{aligned} [\Delta_H \Delta_K] f &\equiv \Delta_H \Delta_K f - \Delta_K \Delta_H f \\ &= \sum_{\lambda=K}^{M} \binom{\lambda}{K} f_{(\lambda)j} \Delta_H x^{(K-\lambda+1)j} - \sum_{\lambda=H}^{M} \binom{\lambda}{H} f_{(\lambda)j} \Delta_K x^{(H-\lambda+1)j}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

daraus folgt

$$[\Delta_H \Delta_K] f = \frac{(H-K) \cdot (H+K-1)!}{H!\, K!} \Delta_{H+K-1} f, \qquad H, K \geqq 1. \tag{9.5}$$

Die Formeln (9.4), die von H. HOMBU[1] gefunden worden sind, gelten wegen (9.3) auch für $H, K \geqq 0$, wenn wir $0\,! = 1$ und

$$\Delta_H f^{(1)} = \sum_{\lambda=H}^{M+1} \binom{\lambda}{H} f^{(1)}_{\cdot(\lambda)i} x^{(\lambda-H+1)i}$$

setzen, da

$$(9.6)\qquad \begin{aligned} [\Delta_H \Delta_0] f &= \Delta_H f^{(1)} - (\Delta_H f)^{(1)} = \Delta_{H-1} f\,,^{(2)} \\ [\Delta_0 \Delta_0] f &= \Delta_0 f^{(1)} - (\Delta_0 f)^{(1)} = 0\,. \end{aligned}$$

37. In analoger Weise erhalten wir wegen Satz 13 die Operatoren

$$(9.7)\qquad \overset{H}{\Delta}_K f = H\,! \sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^\nu \binom{\lambda+\nu}{\lambda} \binom{M-\lambda-\nu}{M-H-\lambda} f_{(\lambda+\nu)i}^{\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\nu)},$$

$$H = 0, 1, \ldots, M;\; K = 1, 2, \ldots, M-H,$$

die nicht auf den Tensor sondern nur auf den Skalar f anwendbar sind und $\overset{H}{\Delta}_K f$ ist ein Skalar für jeden Wert von H und K. Für $H = 0$ reduziert $\overset{H}{\Delta}_K$ sich zu Δ_K. Wir bestätigen aber

$$(9.8)\qquad \overset{H}{\Delta}_K f = H\,! \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^\lambda \binom{K+\lambda}{\lambda} \binom{M-K-\lambda}{M-H-K} (\Delta_{K+\lambda} f)^{(\lambda)}\,.$$

D.h. man kann die Operatoren $\overset{H}{\Delta}_K$ durch Differentiationen nach t und Summationen mit konstanten Koeffizienten aus den Operatoren Δ_K erhalten. Jetzt wollen wir (9.8) beweisen. Unter Anwendung von (1.3) lautet

$$\begin{aligned} \overset{H}{\Delta}_K f &= H\,! \sum_{\lambda=K}^{M-H} \sum_{\nu=0}^{H} \sum_{\alpha=0}^{\nu} (-1)^{\nu+\alpha} \binom{\lambda}{K} \binom{\lambda+\nu}{\lambda} \binom{\nu}{\alpha} \binom{M-\lambda-\nu}{M-H-\lambda} \\ &\qquad\qquad \times \left(x^{(\lambda-K+\alpha+1)i} f_{(\lambda+\nu)i}\right)^{(\nu-\alpha)} \\ &= H\,! \sum_{\lambda=K}^{M-H} \sum_{\alpha=0}^{H} \sum_{\mu=0}^{H-\alpha} (-1)^\mu \binom{\mu+\alpha}{\alpha} \binom{\lambda}{K} \binom{\lambda+\mu+\alpha}{\lambda} \binom{M-\lambda-\mu-\alpha}{M-H-\lambda} \\ &\qquad\qquad \times \left(x^{(\lambda-K+\alpha+1)i} f_{(\lambda+\mu+\alpha)i}\right)^{(\mu)} \\ &= H\,! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^\mu \sum_{\alpha=0}^{H-\mu} \sum_{\lambda=K}^{M-H} \binom{\mu+\alpha}{\alpha} \binom{\lambda}{K} \binom{\lambda+\mu+\alpha}{\lambda} \binom{M-\lambda-\mu-\alpha}{M-H-\lambda} \\ &\qquad\qquad \times \left(x^{(\lambda-K+\alpha+1)i} f_{(\lambda+\mu+\alpha)i}\right)^{(\mu)} \end{aligned}$$

---

(1) Vgl. H. HOMBU [10], S. 45.

(2) Über Beweis siehe H. HOMBU [10], S. 61. Diese Beziehungen gelten auch, selbst wenn f den Parameter t ausdrücklich enthält, wie wir wegen $\Delta_0 f = f^{(1)} - \frac{\partial f}{\partial t}$ und $\Delta_H \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_H f)$ unmittelbar verifizieren können.

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu} \sum_{\alpha=0}^{H-\mu} \sum_{\nu=K+\mu+\alpha}^{M-H+\mu+\alpha} \binom{\mu+\alpha}{\alpha}\binom{\nu-\mu-\alpha}{K}\binom{\nu}{\nu-\mu-\alpha} \times \binom{M-\nu}{M-H-\nu+\mu+\alpha}(x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)}$$

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu} \sum_{\alpha=0}^{H-\mu} \sum_{\nu=K+\mu+\alpha}^{M} \binom{\mu+\alpha}{\alpha}\binom{\nu-\mu-\alpha}{K}\binom{\nu}{\nu-\mu-\alpha} \times \binom{M-\nu}{M-H-\nu+\mu+\alpha}(x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)}$$

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu} \Bigg\{ \sum_{\nu=K+\mu}^{K+H} \frac{\nu!}{K!\,\mu!\,(\nu-\mu-K)!} \times \left(\sum_{\alpha=0}^{\nu-\mu-K}\binom{\nu-\mu-K}{\alpha}\binom{M-\nu}{H-\mu-\alpha}\right)(x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)}$$

$$+ \sum_{\nu=K+H+1}^{M} \frac{\nu!}{K!\,\mu!\,(\nu-\mu-K)!}\left(\sum_{\alpha=0}^{H-\mu}\binom{\nu-\mu-K}{\alpha}\binom{M-\nu}{H-\mu-\alpha}\right) \times (x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)} \Bigg\}$$

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu} \sum_{\nu=K+\mu}^{M} \frac{\nu!}{K!\,\mu!\,(\nu-\mu-K)!}\binom{M-\mu-K}{H-\mu} \times (x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)}$$

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu}\binom{K+\mu}{\mu} \sum_{\nu=K+\mu}^{M}\binom{\nu}{K+\mu}\binom{M-\mu-K}{M-H-K}(x^{(\nu-\mu-K+1)i} f_{(\nu)i})^{(\mu)}$$

$$= H! \sum_{\mu=0}^{H} (-1)^{\mu}\binom{K+\mu}{\mu}\binom{M-\mu-K}{M-H-K}(\Delta_{K+\mu} f)^{(\mu)} .$$

38. Zusatz von Satz 18 liefert uns die anderen Operatoren

$$\overset{H}{\Delta}{}^{*}_{K} f = \sum_{\lambda=K}^{M-H}\binom{\lambda}{K} x^{(\lambda-K+1)i} \sum_{\nu=0}^{M-H-\alpha} (-1)^{\nu}\binom{H-1+\nu}{H-1} f_{(\lambda+H+\nu)i}{}^{(\nu)}, \tag{9.9}$$

die auch nur auf den Skalar f anwendbar sind und $\overset{H}{\Delta}{}^{*}_{K} f$ ist ein Skalar für jeden Wert von H und K. Diese Operatoren $\overset{H}{\Delta}{}^{*}_{K}$ werden auch durch Differentiationen nach t und Summationen mit konstanten Koeffizienten aus den Operatoren Δ_K gebildet, in der Tat,

$$\overset{H}{\Delta}{}^{*}_{K} f = \sum_{\nu=0}^{M-H-K} (-1)^{\nu}\binom{H-1+\nu}{H-1}(\Delta_{K+H+\nu} f)^{(\nu)} . \tag{9.10}$$

Um (9.10) zu beweisen, fasst man (5.8) ins Auge, dann ist

$$\sum_{\lambda=K}^{M-H+1}\binom{\lambda}{K}x^{(\lambda-K+1)i}\mathfrak{Z}^{H-1}f_{(\lambda)i}=\sum_{\lambda=K}^{M-H}\binom{\lambda}{K}x^{(\lambda-K+1)i}\{\mathfrak{Z}^Hf_{(\lambda-1)i}+(\mathfrak{Z}^Hf_{(\lambda)i})^{(1)}\}$$
$$+\binom{M-H+1}{K}x^{(M-H-K+2)i}\mathfrak{Z}^Hf_{(M-H)i}$$
$$=\sum_{\alpha=K-1}^{M-H}\binom{\alpha+1}{K}x^{(\alpha-K+2)i}\mathfrak{Z}^Hf_{(\alpha)i}+(\overset{H}{\varDelta}{}^*_Kf)^{(1)}-\sum_{\lambda=K}^{M-H}\binom{\lambda}{K}x^{(\lambda-K+2)i}\mathfrak{Z}^Hf_{(\lambda)i}$$
$$=\sum_{\alpha=K-1}^{M-H}\binom{\alpha}{K-1}x^{(\alpha-K+2)i}\mathfrak{Z}^Hf_{(\alpha)i}+(\overset{H}{\varDelta}{}^*_Kf)^{(1)}\,.$$

Somit ist

$$\overset{H-1}{\varDelta}{}^*_Kf=\overset{H}{\varDelta}{}^*_{K-1}f+(\overset{H}{\varDelta}{}^*_Kf)^{(1)}\,. \tag{9.11}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass (9.10) für $H-1$ besteht, wenn sie für H gültig ist. (9.10) ist aber sicher richtig für $H=M-1$ und $M-2$, wie es sich von selbst versteht. Jetzt ist (9.10) durch Induktion bezüglich H völlig bewiesen.

39. Nach (6.5) erhalten wir noch weiter die Operatoren

$$\overset{H}{\varDelta}{}^0_Kf=\sum_{\lambda=K}^{M-H}\binom{\lambda}{K}x^{(\lambda-K+1)i}\mathfrak{Y}^Hf_{(\lambda)i} \tag{9.12}$$
$$=\sum_{\lambda=K}^{M-H}\binom{\lambda}{K}x^{(\lambda-K+1)i}\sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu}f_{(\lambda-\nu)i}{}^{(H-\nu)}\,,$$

die auch nur auf den Skalar f anwendbar sind und $\overset{H}{\varDelta}{}^0_Kf$ ist ein Skalar für jeden Wert von H und K. Diese Operatoren $\overset{H}{\varDelta}{}^0_Kf$, die nach (6.5) $\varDelta_Kf^{(H)}$ gleich sind, werden auch aus den Operatoren $\varDelta_K$ gebildet:

$$\overset{H}{\varDelta}{}^0_Kf=\sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu}(\varDelta_{K-\nu}f)^{(H-\nu)}\,. \tag{9.13}$$

Beweis. Erstens betrachten wir den Fall $H=1$, dann ist nach (9.6)

$$\varDelta_Kf^{(1)}=\varDelta_{K-1}f+(\varDelta_Kf)^{(1)}\,.$$

Also ist (9.13) tatsächlich gültig für $H=1$. Voraussetzend die Richtigkeit von (9.13) für H, ergibt sich wegen (9.6)

$$\overset{H+1}{\varDelta}{}^0_Kf\equiv\varDelta_Kf^{(H+1)}=\varDelta_{K-1}f^{(H)}+(\varDelta_Kf^{(H)})^{(1)}$$
$$=\sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu}(\varDelta_{K-1-\nu}f)^{(H-\nu)}+\sum_{\nu=0}^{H}\binom{H}{\nu}(\varDelta_{K-\nu}f)^{(H-\nu+1)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{H+1}\left\{\binom{H}{\nu-1}+\binom{H}{\nu}\right\}(\Delta_{K-\nu}f)^{(H+1-\nu)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{H+1}\binom{H+1}{\nu}(\Delta_{K-\nu}f)^{(H-1-\nu)}\,.$$

Also ist (9.13) durch Induktion bezüglich H bewiesen.

§ 10. Herleitung von Extensoren höherer Stufe aus einem Extensor durch partielle Differentiationen.

40. Im vorigen haben wir gezeigt, dass die Grössen $F_{(\alpha)i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors bilden, wenn F eine skalare differenzierbare Funktion von den Argumenten t, x^i, $x^{(1)i}$, $\ldots$, $x^{(M)i}$ ist. Wir bestätigen jetzt die analogen Sätze über Extensoren und gewöhnliche Tensoren.

Satz 29. *Wenn $V^{\alpha i}$ bzw. $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* $(1, \mathfrak{f}, H, M)$ *sind, wobei $H<M$ ist, dann bilden die Grössen* $\dfrac{(\gamma+H+1)!}{\gamma!}V^{\alpha i}_{\cdot\cdot(\gamma+H+1)j}$ *bzw.* $\dfrac{(\gamma+H+1)!}{\gamma!}W_{\alpha i(\gamma+H+1)j}$ $(\alpha=0, 1, \ldots, H;$ $\gamma=0, 1, \ldots, M-H-1)$ *oder noch allgemeiner* $\dfrac{(M-K+\beta)!}{\beta!}V^{\alpha i}_{\cdot\cdot(M-K+\beta)j}$ *bzw.* $\dfrac{(M-K+\beta)!}{\beta!}W_{\alpha i(M-K+\beta)j}$ $(\alpha=0, 1, \ldots, H;$ $\beta=0, 1, \ldots, K)$ *für jeden Wert von $K=0, 1, \ldots, M-H-1$ die Bestimmungszahlen eines relativen Extensors zweiter Stufe und vom Gewichte $\mathfrak{f}$, welcher exkontra- bzw. exkovariant vom Grad H bezüglich αi und exkovariant vom Grad $M-H-1$ oder K bezüglich γj oder βj ist.*

Beweis. Bei einer erweiterten Transformation folgt aus $V^{\alpha a}=\Delta^{-\mathfrak{f}}\dfrac{\partial\bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}V^{\beta i}$

$$V^{\alpha a}_{\cdot\cdot(\gamma+H+1)b}=\Delta^{-\mathfrak{f}}\left(\frac{\partial\bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}\frac{\partial x^{(\delta)j}}{\partial\bar{x}^{(\gamma+H+1)b}}V^{\beta i}_{\cdot\cdot(\delta)j}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\delta)j}\partial x^{(\beta)i}}\frac{\partial x^{(\delta)j}}{\partial\bar{x}^{(\gamma+H+1)b}}V^{\beta i}\right). \tag{10.1}$$

Für $\delta>H$ ist

$$\frac{\partial^2\bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\delta)j}\partial x^{(\beta)i}}=\binom{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{(\delta)j}}\left(\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)}=0\,,$$

da $0 \leqq \alpha, \beta \leqq H$ folglich $\alpha - \beta \leqq H < \delta$ ist. Und man weiss $\dfrac{\partial x^{(\delta)}}{\partial \bar{x}^{(\gamma+H+1)b}}$ $= 0$ für $\delta \leqq H$, somit verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite von (10.1) immer und wir schliessen damit durch Ersetzung von $\delta = \varepsilon + H + 1$ nach Satz 2

$$\frac{(\gamma+H+1)\,!}{\gamma\,!} V^{\alpha a}_{\cdot\cdot(\gamma+H+1)b} = \varDelta^{-t} \sum_{\varepsilon=\gamma}^{M-H-1} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}} \frac{\partial x^{(\varepsilon)j}}{\partial \bar{x}^{(\gamma)b}} \frac{(\varepsilon+H+1)\,!}{\varepsilon\,!} V^{\beta i}_{\cdot\cdot(\varepsilon+H+1)j},$$

d.h. $\dfrac{(\gamma+H+1)\,!}{\gamma\,!} V^{\alpha i}_{\cdot\cdot(\gamma+H+1)j}$ sind die Bestimmungszahlen des im Satze genannten Extensors zweiter Stufe. In analoger Weise erkennen wir für den exkovarianten relativen Extensor $W_{\alpha i}$ aus $W_{\alpha a} = \dfrac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}$

$$W_{\alpha a(\gamma+H+1)b} = \varDelta^{-t} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \frac{\partial x^{(\delta)j}}{\partial \bar{x}^{(\gamma+H+1)b}} W_{\beta i(\delta)j} + \varDelta^{-t} \frac{\partial^2 x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\gamma+H+1)b} \partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i}.$$

Da $\beta - \alpha \leqq H$ ist, soll das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung für alle Werte von γ gleich Null sein, deswegen ist durch Ersetzung von $\delta = \varepsilon + H + 1$

$$\frac{(\gamma+H+1)\,!}{\gamma\,!} W_{\alpha a(\gamma+H+1)b} = \varDelta^{-t} \sum_{\varepsilon=\gamma}^{M-H-1} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} \frac{\partial x^{(\varepsilon)j}}{\partial \bar{x}^{(\gamma)b}} \frac{(\varepsilon+H+1)\,!}{\varepsilon\,!} W_{\beta i(\varepsilon+H+1)j}.$$

Das zeigt die Richtigkeit der Behauptung des Satzes. Zum Schluss zeigt Satz 6′ uns, dass

$$\frac{(M-H-1-K+\gamma)!}{\gamma\,!} \frac{(M-H-1-K+H+1+\gamma)\,!}{(M-H-1-K+\gamma)\,!} V^{\alpha i}_{\cdot\cdot(M-H-1-K+H+1+\gamma)j}$$
$$= \frac{(M-K+\gamma)\,!}{\gamma\,!} V^{\alpha i}_{\cdot\cdot(M-K+\gamma)j}$$

bzw. analog $\dfrac{(M-K+\gamma)\,!}{\gamma\,!} W_{\alpha i(M-K+\gamma)j}$ für jeden Wert von $K = 0, 1, \ldots,$ $M-H-1$ die Bestimmungszahlen eines Extensors zweiter Stufe sind, welcher exkontra- bzw. exkovariant vom Grad H bezüglich α und exkovariant vom Grad K bezüglich γ ist. W. z. b. z.

Ein spezieller Fall $H = 0$ dieses Satzes liefert uns den sehr wichtigen

Satz. 30. *Die Grössen* $\dfrac{(M-K+\beta)\,!}{\beta\,!} V^{i}_{\cdot(M-K+\beta)j}$ *bzw.* $\dfrac{(M-K+\beta)!}{\beta\,!}$ $\times\, W_{i(M-K+\beta)j}$ *bauen einen relativen Extensor zweiter Stufe auf, der kontra-*

bzw. kovariant erster Stufe und exkovariant vom Grad K ist, wenn V^i bzw. W_i die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten relativen Vektors sind.

41. Zusammenfassend Satz 4 und Satz 30, erreichen wir ohne Schwierigkeit

Satz 31. *Seien V^i bzw. W_i die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten relativen Vektors und X^i dieselben eines anderen kontravarianten Vektors, dann sind*

$$\overset{K}{D}{}^{i}_{\cdot j}(V)X^j = \sum_{\beta=0}^{K}\binom{M-K+\beta}{\beta}V^{i}_{\cdot(M-K+\beta)j}X^{j(\beta)} \tag{10.2}$$

$$= \sum_{\gamma=M-K}^{M}\binom{\gamma}{M-K}V^{i}_{\cdot(\gamma)j}X^{j(\gamma-M+K)}$$

bzw.

$$\overset{K}{D}_{ij}(W)X^j = \sum_{\gamma=M-K}^{M}\binom{\gamma}{M-K}W_{i(\gamma)j}X^{j(\gamma-M+K)} \tag{10.3}$$

für jeden Wert von $K=0, 1, \ldots, M-1$ die Bestimmungszahlen eines kontra- bzw. kovarianten relativen Vektors[1].

Dieser Satz, der vom Verfasser früher schon bewiesen worden ist[2], ist besonders nützlich und schenkt uns viele wichtige Ergebnisse, z.B. bei der Anwendung auf die Geometrie der verallgemeinerten Bahnen

$$T^i \equiv x^{(M)i} + H^i(t, x^j, x^{(1)j}, \ldots, x^{(M-1)j}) = 0$$

gibt der Satz uns den Vektor

$$\overset{K}{D}{}^{i}_{\cdot j}(T)X^j = \binom{M}{M-K}X^{i(K)} + \sum_{\alpha=M-K}^{M-1}\binom{\alpha}{M-K}H^{i}_{\cdot(\alpha)j}X^{j(\alpha-M+K)}$$

oder, dividierend durch $\binom{M}{M-K}$,

$$\overset{K}{\Delta}{}^{i}_{\cdot j}(T)X^j = X^{i(K)} + \binom{M}{M-K}^{-1}\sum_{\alpha=M-K}^{M-1}\binom{\alpha}{M-K}H^{i}_{\cdot(\alpha)j}X^{j(\alpha-M+K)}.$$

Der letzte Operator reduziert sich für $K=1$ zu

$$\overset{1}{\Delta}{}^{i}_{\cdot j}(T)X^j = \frac{dX^i}{dt} + \frac{1}{M}H^{i}_{\cdot(M-1)j}X^j,$$

(1) Dieser Satz kann noch verallgemeinert werden. Siehe A. Kawaguchi und H. Hombu [1], S. 27.

(2) Vgl. A. Kawaguchi [8].

das von D. D. KOSAMBI schon eingeführt worden ist[1]. Andere Anwendungen wird man nachher vielmals finden.

42. Satz 29 wird sofort verallgemeinert und wir schliessen

Satz 32. *$V\vdots\vdots$ seien die Bestimmungszahlen eines beliebigen Extensors mit der Charakteristik $(\Gamma, \mathfrak{k}, H, M)$, dann sind die Grössen $\dfrac{(M-K+\beta)!}{\beta!} V\vdots\vdots_{(M-K+\beta)j}$ $(\beta = 0, 1, \ldots, K)$ für jeden Wert von $K = 0, 1, \ldots, M-H-1$ die Bestimmungszahlen eines Extensors mit der Charakteristik $(\Gamma+1, \mathfrak{k}, \mathrm{Max}\,(H, K), M)$, welcher dem ursprünglichen Extensor $V\vdots\vdots$ bezüglich aller Indizes ähnlich und exkovariant vom Grad K bezüglich neuer Indizes βj ist.*

Aus diesem Satze bekommen wir eine kovariante Differentiation eines Vektors X^i nach Satz 4.

Satz 33. *$V\vdots\vdots$ seien die Bestimmungszahlen eines Tensors, die von dem Linienelemente M-ter Ordnung abhängen, und X^i dieselben eines kontravarianten Vektors, dann sind*

$$\overset{K}{D}\vdots\vdots_j(V)X^j = \sum_{\gamma=M-K}^{M} \binom{\gamma}{M-K} V\vdots\vdots_{(\gamma)j} X^{j(\gamma-M+K)} \tag{10.4}$$

die Bestimmungszahlen eines Tensors von derselben Art wie $V\vdots\vdots$ für jeden Wert von $K = 0, 1, \ldots, M$.

Setzen wir dx^i an Stelle von X^i in Satz 33, dann tritt der folgende Satz wegen des Zusatzes von Satz 4 ein, der noch in allgemeinerer Gestalt schon bewiesen ist[2]:

Satz 34. *Ist $V\vdots\vdots$ ein Tensor, der von dem Linienelemente M-ter Ordnung abhängt, so transformieren sich unter jeder erweiterten Transformation die PFAFFschen Ausdrücke*

$$\overset{K}{\mathfrak{D}}\vdots\vdots(V) \equiv \sum_{\gamma=M-K}^{M} \binom{\gamma}{M-K} V\vdots\vdots_{(\gamma)j}\, dx^{(\gamma-M+K)j} \tag{10.5}$$

in derselben Weise wie $V\vdots\vdots$.

43. Wir fügen einen Satz noch hinzu, der schon bekannt ist[3]:

Satz 35. *Wenn die PFAFFschen Ausdrücke*

$$\mathfrak{P}\vdots\vdots \equiv P\vdots\vdots_{\alpha i}\, dx^{(\alpha)i}$$

(1) Vgl. D. D. KOSAMBI [1].
(2) Vgl. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [1], S. 28.
(3) Vgl. A. KAWAGUCHI und H. HOMBU [1], S. 30.

in den Veränderlichen $x^i\, x^{(1)i}, \dots, x^{(M)i}$ *sich unter der Koordinatentransformation wie ein relativer Tensor verändern, dann transformieren*

$$(10.6)\qquad \overset{H}{D}{}^{\cdots}_{\cdot\cdot\cdot i}(\mathfrak{P})X^i \equiv \sum_{\lambda=0}^{H}\binom{M-H+\lambda}{\lambda}\Big\{P^{\cdots}_{\cdot\cdot\cdot M-H+\lambda,\, i}\,\bar{d}(X^{i(\lambda)}) + P^{\cdots}_{\cdot\cdot\cdot \mu i(M-H+\lambda)j}\,X^{j(\lambda)}dx^{(\mu)i}\Big\}$$

sich für jeden Wert von $H = 0, 1, \dots, M-1$ *genau so wie* $\mathfrak{P}^{\cdots}_{\cdot\cdot\cdot}$, *wobei* X^i *einen kontravarianten Vektor angeben.*

Zusatz. *Wenn die* PFAFF*schen Ausdrücke*

$$\mathfrak{P}^i = dx^{(M)i} + P^{i}_{\cdot\alpha j}dx^{(\alpha)j} \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, M-1)$$

sich unter der Koordinatentransformation wie ein relativer Vektor verändern, dann geben uns

$$(10.7)\qquad \overset{0}{D}{}^{i}_{\cdot j}(\mathfrak{P})X^j = M(dX^i + P^{i}_{\cdot\alpha j(M)k}X^k dx^{(\alpha)j})$$

eine kovariante Differentiation für einen Vektor X^i.

§11. Einige Sätze über Extensoren höherer Stufe.

44. Es sei $V^{\alpha i}$ bzw. $W^{\beta j}$ irgendein exkontravarianter Extensor erster Stufe, dessen Grad G_1 bzw. G_2 ist, dann definiert $V^{\alpha i}W^{\beta j}$ einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad G_1 in bezug auf α und G_2 auf β. Satz 5 lehrt uns hierbei, dass die Grössen $V^{\alpha i}W^{\beta j}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, K_1$; $\beta = 0, 1, \dots, K_2$) einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad K_1 bzw. K_2 in bezug auf α bzw. β bilden. Andererseits transformieren sich die Bestimmungszahlen $T^{\alpha i\beta j}$ jedes exkontravarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad G_1 bzw. G_2 in bezug auf α bzw. β bei jeder Koordinatentransformation gerade ebenso wie $V^{\alpha i}W^{\beta j}$. Somit müssen die Grössen $T^{\alpha i\beta j}$ ($\alpha = 0, 1, \dots, K_1$; $\beta = 0, 1, \dots, K_2$) die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad K_1 bzw. K_2 in bezug auf α bzw. β bauen.

Analog definieren nach Satz 6 die Grössen $\binom{G_1-K_1+\alpha}{\alpha}\binom{G_2-K_2+\beta}{\beta} \times T_{G_1-K_1+\alpha,\, i,\; G_2-K_2+\beta,\, j}$ ($\alpha=0, 1, \dots, K_1$; $\beta=0, 1, \dots, K_2$) einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad K_1 bzw. K_2 in bezug auf α bzw. β, wenn die Grössen $T_{\alpha i\beta j}$ die Bestimmungszahlen eines beliebigen exkovarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad G_1 bzw. G_2 in bezug auf α bzw. β sind.

Verallgemeinernd diesen Gedankengang, können wir schliessen

Satz 36. *Die Grössen* $T^{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ *seien die Bestimmungszahlen eines Extensors* $(r+s)$*-ter Stufe mit* r *exkontra- und* s *exkovarianten Indizes, dessen Grad beziehungsweise* G_p *oder* G'_q *in bezug auf* α_p *oder* β_q *ist. Dann bestimmen die Grössen*

$$(11.1)\quad \left(\prod_{q=1}^{s}(G_q-K_q)\,!\right)^{-1}\mathfrak{B}^{[0]}_{[G_q-K_q]}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$
$$=\prod_{q=1}^{s}\binom{G_q-K_q+\beta_q}{\beta_q}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{G_1-K_1+\beta_1,\, j_1,\, \ldots,\, G_s-K_s+\beta_s,\, j_s}$$
$$(\alpha_p=0,1,\ldots,K_p\,;\ \beta_q=0,1,\ldots,K'_q)$$

auch einen Extensor derselben Art[1]*, dessen Grad beziehungsweise* K_p *oder* K'_q *in bezug auf* α_p *oder* β_q *ist.*

45. Auf ganz dieselbe Weise liefern Satz 7 und Satz 8 ohne Schwierigkeit

Satz 37. *Die Grössen* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ *seien die Bestimmungszahlen eines Extensors* $(r+s)$*-ter Stufe mit* r *exkontra- und* s *exkovarianten Indizes, dessen Grad beziehungsweise* G_p *oder* G'_q *in bezug auf* α_p *oder* β_q *ist. Wenn für jedes* p *oder* q *die Bestimmungszahlen* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ *für* $\alpha_p=0,1,\ldots,G_p-K_p-1$ *oder* $\beta_q=K'_q+1,\ldots,G'_q$ *alle verschwindend sind, dann definieren die Grössen*

$$(11.2)\quad \prod_{p=1}^{r}\binom{G_p-K_p+\alpha_p}{\alpha_p}^{-1}T^{G_1-K_1+\alpha_1,\, i_1,\, \ldots,\, G_r-K_r+\alpha_r,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$
$$(\alpha_p=0,1,\ldots,K_p\,;\ \beta_q=0,1,\ldots,K'_q)$$

einen Extensor derselben Art, dessen Grad beziehungsweise K_p *oder* K'_q *in bezug auf* α_p *oder* β_q *ist.*

Wegen des letzten Satzes kann man unmittelbar behaupten

Satz 38. *Es seien zwei Extensoren derselben Art*

$$T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} \quad \text{und} \quad \overline{T}^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}\,,$$

---

(1) Zwei Extensoren heissen von derselben Art, wenn sie beide von derselben Stufe sind und auch gleiche Zahlen von exkontra- und exkovarianten Indizes besitzen.

deren Grade (G_p, G'_q) *in bezug auf jede entsprechenden Indizes immer gleich sind, und für jedes p oder q stets*

$$T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\cdot\cdot\;\cdots\cdots\;\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \overline{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\cdot\cdot\;\cdots\cdots\;\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$$

für $\alpha_p = 0, 1, \dots, G_p - K_p - 1$ *oder* $\beta_q = K'_q + 1, K'_q + 2, \dots, G'_q$,

dann formen die Grössen

$$(11.3) \quad \prod_{p=1}^{r} \binom{G_p - K_p + \alpha_p}{\alpha_p}^{-1} \Big\{ T^{G_1 - K_1 + \alpha_1,\, i_1,\, \dots,\, G_r - K_r + \alpha_r,\, i_r}_{\cdot\quad\cdot\;\cdots\quad\cdot\quad\cdot\;\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} - \overline{T}^{G_1 - K_1 + \alpha_1,\, i_1,\, \dots,\, G_r - K_r + \alpha_r,\, i_r}_{\cdot\quad\cdot\;\cdots\quad\cdot\quad\cdot\;\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} \Big\}$$

einen Extensor derselben Art vom Grad K_p *oder* K'_q *in bezug auf die Indizes* α_p *oder* β_q *beziehungsweise.*

Insbesondere braucht man vielmals

Zusatz 1. *Von den Bestimmungszahlen von zwei exkontravarianten (bzw. gemischten) Extensoren* $T^{\alpha i \beta j}$ *und* $\overline{T}^{\alpha i \beta j}$ (*bzw.* $T_{\alpha i}{}^{\cdot\cdot\beta j}$ *und* $\overline{T}_{\alpha i}{}^{\cdot\cdot\beta j}$) *zweiter Stufe von denselben Graden* G_1 *und* G_2 *seien die entsprechenden für* $\beta = 0, 1, \dots, G_2 - K - 1$ *alle gleich, dann bilden die Grössen*

$$(11.4) \quad \binom{G_2 - K + \beta}{\beta}^{-1} \Big\{ T^{\alpha i,\, G_2 - K + \beta,\, j} - \overline{T}^{\alpha i,\, G_2 - K + \beta,\, j} \Big\}$$

$$\left(bzw.\ \binom{G_2 - K + \beta}{\beta}^{-1} \Big\{ T_{\alpha i}{}^{\cdot\cdot\, G_2 - K + \beta,\, j} - \overline{T}_{\alpha i}{}^{\cdot\cdot\, G_2 - K + \beta,\, j} \Big\}\right)$$

$$(\alpha = 0, 1, \dots, G_1;\ \beta = 0, 1, \dots, K)$$

einen Extensor derselben Art vom Grad G_1 *bzw.* K *in bezug auf* α *bzw.* β.

Zusatz 2. *Wenn die Bestimmungszahlen von zwei exkovarianten (bzw. gemischten) Extensoren* $T_{\alpha i \beta j}$ *und* $\overline{T}_{\alpha i \beta j}$ (*bzw.* $T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$ *und* $\overline{T}^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$) *zweiter Stufe von denselben Graden* G_1 *und* G_2 *für* $\beta = K+1, K+2, \dots, G_2$ *alle gleich sind, so formen die Grössen* $T_{\alpha i \beta j} - \overline{T}_{\alpha i \beta j}$ (*bzw.* $T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j} - \overline{T}^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$) *einen Extensor derselben Art vom Grad* G_1 *bzw.* K *in bezug auf* α *bzw.* β.

46. Wir betrachten nun z.B. einen exkontravarianten Extensor $T^{\alpha i \beta j}$ zweiter Stufe vom Grad G_1 bzw. G_2 in bezug auf α bzw. β. Bei jeder Koordinatentransformation transformieren sich die Bestimmungszahlen des Extensors so, dass

$$(11.5) \quad T^{\alpha a \beta b} = \frac{\partial \overline{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \overline{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda i \mu j},$$

daraus folgt

$$(11.6)\quad T^{\alpha+1,\, a\beta b} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha+1)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda i \mu j}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha+1}{\lambda+1} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\lambda)} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda+1,\, i\mu j} + \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha+1)} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{0i\mu j}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda+1,\, i\mu j} + \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\lambda+1)} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda i \mu j}.$$

Andererseits erhält man, differenzierend die beiden Seiten von (11.5) nach t

$$(11.7)\quad T^{\alpha a \beta b(1)} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda i \mu j(1)}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\lambda+1)} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} T^{\lambda i \mu j}$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{\beta} \binom{\beta}{\mu} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right)^{(b-\mu+1)} T^{\lambda i \mu j}.$$

Subtrahierend (11.7) von (11.6) und nach einigen Rechnungen, bekommt man

$$(11.8)\quad T^{\alpha+1,\, a\beta b} - T^{\alpha a \beta b(1)} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}} (T^{\lambda+1,\, i\mu j} - T^{\lambda i \mu j(1)})$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\beta} \binom{\beta}{\mu} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right)^{(\beta-\mu+1)} T^{\lambda i \mu j}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \left\{ \frac{\partial \bar{x}^{(\beta+1)b}}{\partial x^{(\mu+1)j}} (T^{\lambda+1,\, i\mu j} - T^{\lambda i \mu j(1)}) - \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right)^{(\beta+1)} T^{\lambda i 0 j} \right\}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{\mu+1} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right)^{(\beta-\mu)} (T^{\lambda i,\, \mu+1,\, j} + T^{\lambda+1,\, i\mu j} - T^{\lambda i \mu j(1)}),$$

das sich gestaltet:

$$(11.9)\quad {}^{*}T^{\alpha a,\, \beta+1,\, b} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta+1)b}}{\partial x^{(\mu)j}} {}^{*}T^{\lambda i \mu j}$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\beta-1} \binom{\beta}{\mu+1} \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}} \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right)^{(\beta-\mu)} ({}^{*}T^{\lambda i,\, \mu+1,\, j} + T^{\lambda i,\, \mu+1,\, j}),$$

setzend

$$
(11.10) \qquad \begin{aligned} {}^*T^{\alpha i,\,\beta+1,\,j} &= T^{\alpha+1,\,i\beta j} - T^{\alpha i\beta j(1)} \qquad (\beta = 0,\, 1,\, \ldots,\, G_2), \\ {}^*T^{\alpha i0j} &= -T^{\alpha i0j}\,. \end{aligned}
$$

Die Transformationsgleichungen (11.9) zeigt uns die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Satz 39. *Die Grössen* ${}^*T^{\alpha i\beta j}$ *in (11.10) für einen Extensor* $T^{\alpha i\beta j}$ *zweiter Stufe vom Grad* G_1 *bzw.* G_2 *in bezug auf* α *bzw.* β *formen einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad* G_1-1 *bzw.* G_2+1 *in bezug auf* α *bzw.* β, *wenn und nur wenn*

$$
(11.11) \qquad {}^*T^{\alpha i,\,\beta+1,\,j} + T^{\alpha i,\,\beta+1,\,j} = 0
$$

für $\alpha = 0,\, 1,\, \ldots,\, G_1-1$ *und* $\beta = 0,\, 1,\, \ldots,\, G_2-1$ *bestehen*[1].

47. Die letzten Gleichungen (11.11) liefern vermöge (11.10)

$$
(11.12) \qquad T^{\alpha i,\,\beta+1,\,j} = T^{\alpha i\beta j(1)} - T^{\alpha+1,\,i\beta j}\,,
$$

die wir als die Rekursionsformeln für $T^{\alpha i,\,\beta+1,\,j}$ bezüglich β ansehen dürfen, dann ergeben sich nach (11.12) die Beziehungen

$$
(11.13) \qquad T^{\alpha i\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{\beta} (-1)^{\beta-\lambda} \binom{\beta}{\lambda} T^{\alpha+\beta-\lambda,\,i0j(\lambda)}\,.
$$

Somit kann man ohne weiteres behaupten

Satz 40. *Es seien* $T^{\alpha ij}$ *die Bestimmungszahlen eines Extensors, der in bezug auf* αi *exkontravariant vom Grad* G *und auf* j *kontravariant ist. Dann formen die Grössen*

$$
(11.14) \qquad T^{\alpha i\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{\beta} (-1)^{\lambda} \binom{\beta}{\lambda} T^{\alpha+\lambda,\,ij(\beta-\lambda)}
$$

einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad $G-G'$ *bzw.* G' *in bezug auf* α *bzw.* β, *wobei* G' *eine beliebige positive ganze Zahl sein kann.*

48. Satz 39 und Satz 40 werden ohne Schwierigkeit folgendermassen verallgemeinert:

Satz 41. *Wenn ein exkontravarianter Extensor* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \beta j}$

---

(1) Diese Beziehungen bleiben bei jeder Koordinatentransformation unverändert, da ${}^*T^{\alpha i\beta j} - T^{\alpha i\beta j}$ die Bestimmungszahlen eines Extensors sein sollen, wie wir nachher wegen Satz 51 ersehen werden. Vgl. (12. 1a).

$(m+1)$-ter Stufe vom Grad G_p bzw. G' in bezug auf α_p bzw. β gegeben ist, so bilden die Grössen

$$
\begin{aligned}
&{}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \beta j} = T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m,\, \beta-1,\, j\,(1)} \\
(11.15) \qquad &\qquad - \sum_{p=1}^{m} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_{p-1} i_{p-1},\, \alpha_p+1,\, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \cdots \alpha_m i_m,\, \beta-1,\, j} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{für} \quad \beta = 1, 2, \ldots, G'+1, \\
&{}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m 0 j} = T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m 0 j}
\end{aligned}
$$

einen Extensor derselben Art vom Grad G_p-1 bzw. $G'+1$ in bezug auf α_p bzw. β, wenn und nur wenn die Relationen

$$
(11.16) \qquad {}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m,\, \beta+1,\, j} = T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m,\, \beta+1,\, j}
$$

für $\alpha_p = 0, 1, \ldots, G_p-1$ und $\beta = 0, 1, \ldots, G'$ immer bestehen.

Satz 42. *$T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m j}$ seien die Bestimmungszahlen eines Extensors, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p und auf j kontravariant ist, dann formen die Grössen*

$$
\begin{aligned}
(11.17) \qquad T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \beta j} &= \sum_{\lambda=0}^{\beta} (-1)^{\lambda} \binom{\beta}{\lambda} \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \frac{\lambda!}{\lambda_1!\, \lambda_2! \ldots \lambda_m!} \\
&\quad \times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \alpha_2+\lambda_2,\, i_2,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m j (\beta-\lambda)}
\end{aligned}
$$

einen exkontravarianten Extensor $(m+1)$-ter Stufe vom Grad G_p-G' bzw. G' in bezug auf α_p bzw. β, wobei wir einfachheitshalber setzen:

$$
\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} = \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda} \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda-\lambda_1} \sum_{\lambda_3=0}^{\lambda-\lambda_1-\lambda_2} \cdots \sum_{\lambda_{m-1}=0}^{\lambda-\lambda_1-\cdots-\lambda_{m-2}}, \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=\lambda, \quad 0! = 1,
$$

und G' eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Es ist nicht so schwer den letzten Satz zu beweisen, in der Tat können wir nach einigen Rechnungen verifizieren, dass (11.17) die Beziehungen (11.16) erfüllen.

Bemerkung. Die Ordnung des Extensors $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \beta j}$ ist $M+G'$, wenn diejenige des Extensors $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m j}$ M ist.

49. Analog erhalten wir die folgenden Sätze für einen exkovarianten Extensor.

Satz 43. *Die Grössen*

$$
(11.18)\qquad
\begin{aligned}
{}^{*}T_{\alpha i\beta j} &= \frac{1}{G'-\beta+1}\left\{(\alpha+1)T_{\alpha+1,\,i\beta j}^{\cdot\,\cdot\cdot\cdot(1)}-(G-\alpha)T_{\alpha i\beta j}\right\} && \textit{für}\quad \beta = 0, 1, \ldots, G'\\
&= \frac{\alpha+1}{G'+1}T_{\alpha+1,\,iG'j} && \textit{für}\quad \beta = G'+1
\end{aligned}
$$

für einen exkovarianten Extensor $T_{\alpha i\beta j}$ *zweiter Stufe vom Grad* G *bzw.* G' *in bezug auf* α *bzw.* β *formen einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad* $G-1$ *bzw.* $G'+1$ *in bezug auf* α *bzw.* β, *wenn und nur wenn*

$$
(11.19)\qquad {}^{*}T_{\alpha i\beta j} = \frac{\alpha+1}{\beta}T_{\alpha+1,\,i,\,\beta-1,\,j}
$$

für $\alpha = 0, 1, \ldots, G-1$ *und* $\beta = 1, 2, \ldots, G'$ *bestehen.*

Beweis. Aus den Transformationsgleichungen des Extensors

$$
(11.20)\qquad T_{\alpha i\beta j} = \frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\,T_{\lambda a\mu b}\,,
$$

ergibt sich, durch Differenzierung nach dem Parameter t, wegen (2.5)

$$
\begin{aligned}
&(\alpha+1)T_{\alpha+1,\,i\beta j}^{\cdot\,\cdot\cdot\cdot(1)}\\
&= (\alpha+1)\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda+1)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\,T_{\lambda+1,\,a\mu b}^{\cdot\,\cdot\cdot\cdot(1)}\\
&\qquad + (\alpha+1)\left\{\sum_{\lambda=\alpha+1}^{G}\binom{\lambda}{\alpha+1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\lambda-\alpha)}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\sum_{\mu=\beta}^{G'}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}}\binom{\mu}{\beta}\left(\frac{\partial\bar{x}^{b}}{\partial x^{j}}\right)^{(\mu-\beta+1)}\right\}T_{\lambda a\mu b}\\
&= \sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\lambda+1)T_{\lambda+1,\,a\mu b}^{\cdot\,\cdot\cdot\cdot(1)} + \sum_{\lambda=\alpha}^{G}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\lambda-\alpha)T_{\lambda a\mu b}\\
&\qquad + \sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\sum_{\mu=\beta+1}^{G'+1}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\binom{\mu-1}{\beta}\left(\frac{\partial\bar{x}^{b}}{\partial x^{j}}\right)^{(\mu-\beta)}(\lambda+1)T_{\lambda+1,\,a,\,\mu-1,\,b}\\
&= \sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\left\{(\lambda+1)T_{\lambda+1,\,a\mu b}^{\cdot\,\cdot\cdot\cdot(1)}-(G-\lambda)T_{\lambda a\mu b}\right\}\\
&\qquad + \sum_{\lambda=\alpha}^{G}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(G-\alpha)T_{\lambda a\mu b}\\
&\qquad + \sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\sum_{\mu=\beta+1}^{G'+1}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\,\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\lambda+1)\frac{\mu-\beta}{\mu}T_{\lambda+1,\,a,\,\mu-1,\,b}\,.
\end{aligned}
$$

Deshalb erhält man nach (11.18), (11.19) und (11.20)

$$
\begin{aligned}
{}^*T_{\alpha i\beta j} &= \frac{1}{G'-\beta+1}\left\{\sum_{\mu=\beta}^{G'} \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(G'-\mu+1)^*T_{\lambda a\mu b}\right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\mu=\beta+1}^{G'+1} \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\mu-\beta)^*T_{\lambda a\mu b}\right\} \\
&= \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}} {}^*T_{\lambda a\mu b}. \qquad \text{W. z. b. z.}
\end{aligned}
$$

Ausgehend von (11.19) oder

$$
(11.21) \quad (\alpha+1)\,T_{\alpha+1,\,i,\,\beta-1,\,j} = \frac{\beta}{G'-\beta+1}\left\{(\alpha+1)T_{\alpha+1,\,i\beta j}^{\;\dot{}\;\dot{}\;\;(1)} - (G-\alpha)T_{\alpha i\beta j}\right\}
$$

als die Rekursionsformeln für $T_{\alpha i\beta j}$ bezüglich β und setzend $T_{\alpha ij}$ an Stelle von $T_{\alpha iG'j}$, bekommt man

Satz 44. *Es seien $T_{\alpha ij}$ die Bestimmungszahlen eines Extensors, der in bezug auf αi exkovariant vom Grad G und auf j kovariant ist. Dann formen die Grössen*

$$
(11.22) \qquad T_{\alpha i\beta j} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta}(-1)^\lambda\binom{\alpha+G'-\lambda}{\alpha+\beta} \times\binom{G-G'-\alpha+\lambda}{\lambda}T_{\alpha+G'-\lambda,\,ij}^{\;\dot{}\;\dot{}\;\;(G'-\beta-\lambda)}
$$

einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad $G-G'$ bzw. G' in bezug auf α bzw. β, wobei G' eine beliebige positive ganze Zahl sein kann.

Beweis. Setzen wir die Grössen (11.22) in die rechte Seite von (11.21) ein, wobei G in (11.21) durch $G-G'$ ersetzt sein soll, dann wird die rechte Seite von (11.21)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta}{G'-\beta+1}\left\{(\alpha+1)\binom{\alpha+\beta+1}{\alpha+1}\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta}(-1)^\lambda\binom{\alpha+1+G'-\lambda}{\alpha+\beta+1}\right. \\
&\qquad\qquad \times\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda}T_{\alpha+1+G'-\lambda,\,ij}^{\;\dot{}\;\dot{}\;\;(G'-\lambda+1-\beta)} \\
&\qquad -(G-G'-\alpha)\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta}(-1)^\lambda\binom{\alpha+G'-\lambda}{\alpha+\beta} \\
&\qquad\qquad \left.\times\binom{G-\alpha-G'+\lambda}{\lambda}T_{\alpha+G'-\lambda,\,ij}^{\;\dot{}\;\dot{}\;\;(G'-\beta-\lambda)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\beta}{G'-\beta+1}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta+1}(-1)^{\lambda}\Big\{(\alpha+\beta+1)\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta+1}$$

$$\times\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda}+(G-G'-\alpha)\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta}$$

$$\times\binom{G-\alpha-G'+\lambda-1}{\lambda-1}\Big\}T_{\alpha+G'-\lambda+1,\, ij\cdots(G'-\beta-\lambda+1)}$$

$$= (\alpha+1)\binom{\alpha+\beta}{\alpha+1}\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta+1}(-1)^{\lambda}\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta}$$

$$\times\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda}T_{\alpha+G'-\lambda+1,\, ij\cdots(G'-\beta-\lambda+1)}$$

$$= (\alpha+1)T_{\alpha+1,\, i,\, \beta-1,\, j},$$

da

$$(\alpha+\beta+1)\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta+1}\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda}$$

$$+(G-G'-\alpha)\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta}\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda-1}$$

$$=\frac{(\alpha+G'-\lambda+1)!\,(G-G'-\alpha+\lambda+1)!}{\lambda!\,(\alpha+\beta)!\,(G'-\beta-\lambda)!\,(G-G'-\alpha-1)!}$$

$$+\frac{(\alpha+G'-\lambda+1)!\,(G-G'-\alpha+\lambda-1)!}{(\lambda-1)!\,(\alpha+\beta)!\,(G'-\beta-\lambda+1)!\,(G-G'-\alpha-1)!}$$

$$=\frac{(\alpha+G'-\lambda+1)!}{\lambda!\,(\alpha+\beta)!}\,\frac{(G-G'-\alpha+\lambda-1)!}{(G'-\beta-\lambda+1)!\,(G-G'-\alpha-1)!}(\lambda+G'-\beta-\lambda+1)$$

$$=\binom{\alpha+G'-\lambda+1}{\alpha+\beta}\binom{G-G'-\alpha+\lambda-1}{\lambda}(G'-\beta+1)\,.$$

D.h. die Grössen (11.22) erfüllen die Beziehungen (11.21). Andererseits können wir die Invarianzeigenschaft der Beziehungen (11.21) für jede Koordinatentransformation ersehen(1), daraus erkennen wir ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung des Satzes.

50. Entsprechend Satz 41 und Satz 42, bestehen die folgenden Sätze als die Verallgemeinerungen von Satz 43 und Satz 44:

Satz 45. *Wenn ein exkovarianter Extensor* $T_{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m\beta j}$ $(m+1)$-*ter Stufe vom Grad* G_p *bzw.* G' *in bezug auf* α_p *bzw.* β *gegeben ist, so bilden die Grössen*

(1) Der Beweis der Invarianzeigenschaft der Beziehungen (11.21) für jede Koordinatentransformation folgt nach Satz 51 unmittelbar.

$$(11.23)\quad {}^*T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \beta j} = \frac{1}{G'-\beta+1}\prod_{p=1}^{m}(a_p+1)\Big\{T_{\alpha_1+1,\, \dot{i}_1,\, \dot{\ldots},\, \alpha_m+1,\, \dot{i}_m \beta j}^{(1)}$$

$$-\sum_{q=1}^{m}\frac{G_q-a_q}{a_q+1}T_{\alpha_1+1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_{q-1}+1,\, i_{q-1}\alpha_q i_q,\, \alpha_{q+1}+1,\, i_{q+1},\, \ldots,\, \alpha_m+1,\, i_m \beta j}\Big\}$$

$$\textit{für}\quad \beta = 0, 1, \ldots, G'$$

$$= \frac{1}{G'+1}\prod_{p=1}^{m}(a_p+1)T_{\alpha_1+1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+1,\, i_m G' j} \qquad \textit{für}\quad \beta = G'+1$$

einen Extensor derselben Art vom Grad G_p-1 bzw. $G'+1$ in bezug auf a_p bzw. β, wenn und nur wenn die Relationen

$$(11.24)\quad {}^*T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \beta j} = \frac{1}{\beta}\prod_{p=1}^{m}(a_p+1)T_{\alpha_1+1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+1,\, i_m,\, \beta-1,\, j}$$

für $a_p = 0, 1, \ldots, G_p-1$ und $\beta = 1, 2, \ldots, G'$ immer bestehen.

Der Beweis dieses Satzes ist zu demselben von Satz 43 ganz analog.

Satz 46. *$T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m j}$ seien die Bestimmungszahlen eines Extensors, der beziehungsweise in bezug auf $a_p i_p$ exkovariant vom Grad G_p und auf j kovariant ist, dann formen die Grössen*

$$(11.25)\quad T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \beta j} = \sum_{\lambda=0}^{G'-\beta}\frac{(-1)^{\lambda}}{\beta\,!\,(G'-\beta-\lambda)\,!}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\prod_{p=1}^{m}\left\{\binom{G_p-G'-a_p+\lambda_p}{\lambda_p}\frac{(a_p+G'-\lambda_p)\,!}{a_p\,!}\right\}$$

$$\times\, T_{\alpha_1+G'-\lambda_1,\, \dot{i}_1,\, \dot{\ldots},\, \alpha_m+G'-\lambda_m,\, \dot{i}_m j}^{(G'-\beta-\lambda)}$$

einen exkovarianten Extensor $(m+1)$-ter Stufe vom Grad G_p-G' bzw. G' in bezug auf a_p bzw. β, wobei G' eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Beweis. Erstens wollen wir ersehen, ob die Grössen (11.25) die Beziehungen (11.24) erfüllen oder nicht? Wegen (11.23) ergibt sich nach einiger Rechnung, setzend G_q-G' an Stelle von G_q,

$${}^*T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \beta j}$$

$$= \frac{1}{G'-\beta+1}\prod_{p=1}^{m}(a_p+1)\Big[\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta}\frac{(-1)^{\lambda}}{\beta\,!\,(G'-\beta-\lambda)\,!}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \binom{G_p - G' - a_p + \lambda_p - 1}{\lambda_p} \frac{(a_p + G' - \lambda_p + 1)!}{(a_p+1)!} \right\}$$

$$\times T_{\alpha_1+1+\dot{G}'-\lambda_1,\, \dot{i}_1,\, \dots,\, \alpha_m+1+\dot{G}'-\lambda_m,\, \dot{i}_m j}^{\;\;(G'-\beta-\lambda+1)}$$

$$-\sum_{q=1}^{m} \frac{G_q - G' - a_q}{a_q+1} \sum_{\mu=0}^{G'-\beta} \frac{(-1)^{\mu}}{\beta!\,(G'-\beta-\mu)!} \frac{a_q+1}{G_q - G' - a_q}$$

$$\times \sum_{(\mu_p)}^{\mu} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \binom{G_p - G' - a_p + \mu_p - 1}{\mu_p} \frac{(a_p + G' - \mu_p + 1)!}{(a_p+1)!} \right\} \frac{G_q - G' - a_q + \mu_q}{a_q + G' - \mu_q + 1}$$

$$\left. \times T_{\alpha_1'+1,\, \dot{i}_1,\, \dots,\, \alpha_{q-1}'+1,\, \dot{i}_{q-1}\, \alpha_q'\, \dot{i}_q\, \alpha_{q+1}'+1,\, \dot{i}_{q+1},\, \dots,\, \alpha_m'+1,\, \dot{i}_m j}^{\;\;(G'-\beta-\mu)} \right]$$

(wobei $a_r' \equiv a_r + G' - \mu_r$)

$$= \frac{1}{G'-\beta+1} \prod_{p'=1}^{m} (a_{p'}+1) \frac{1}{\beta!} \left[\sum_{\lambda=0}^{G'-\beta} \frac{(-1)^{\lambda}}{(G'-\beta-\lambda)!} \right.$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \binom{G_p - G' - a_p + \lambda_p - 1}{\lambda_p} \frac{(a_p + G' - \lambda_p + 1)!}{(a_p+1)!} \right\}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{G'-\beta+1} \frac{(-1)^{\lambda}}{(G'-\beta-\lambda+1)!} \sum_{q=1}^{m} \lambda_q \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}{}^{[q]} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \binom{G_p - G' - a_p + \lambda_p - 1}{\lambda_p} \right.$$

$$\left. \times \frac{(a_p + G' - \lambda_p + 1)!}{(a_p+1)!} \right\} T_{\alpha_1+\dot{G}'-\lambda_1+1,\, \dot{i}_1,\, \dots,\, \alpha_m+\dot{G}'-\lambda_m+1,\, \dot{i}_m j}^{\;\;(G'-\beta-\lambda+1)} \Bigg],$$

ndem wir $\mu_q = \lambda_q - 1$, $\mu_p = \lambda_p \ (p \neq q)$ und $\mu = \lambda - 1$ ansetzen, wobei

$$\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}{}^{[q]} \equiv \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda-1} \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda-\lambda_1-1} \cdots \sum_{\lambda_q=1}^{\lambda-\lambda_1-\dots-\lambda_{q-1}} \sum_{\lambda_{q+1}=0}^{\lambda-\lambda_1-\dots-\lambda_q} \cdots \sum_{\lambda_{m-1}=0}^{\lambda-\lambda_1-\dots-\lambda_{m-2}}$$

ist. Denn es ist

$$\sum_{q=1}^{m} \lambda_q \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}{}^{[q]} = \sum_{q=1}^{m} \lambda_q \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} = \lambda \sum_{(\lambda_p)}.$$

Somit erhält man

$$^{*}T_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \beta j} = \frac{1}{G'-\beta+1} \prod_{q=1}^{m} (a_q+1) \sum_{\lambda=0}^{G'-\beta+1} \frac{(-1)^{\lambda}}{\beta!\,(G'-\beta-\lambda+1)!}$$

$$\times \left\{ (G'-\beta-\lambda+1) + \lambda \right\} \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \binom{G_p - G' - a_p + \lambda_p - 1}{\lambda_p} \right.$$

$$\times \frac{(a_p+G'-\lambda_p+1)\,!}{(a_p+1)\,!}\Big\}T_{\alpha_1+G'-\lambda_1+1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_m+G'-\lambda_m+1,\, i_m j}^{\cdot\; \cdot \;\cdots\; \cdot\;\; \cdot\, (G'-\beta-\lambda+1)}$$

$$= \frac{1}{\beta}\prod_{p=1}^{m}(a_p+1)\,T_{\alpha_1+1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_m+1,\, i_m,\, \beta-1,\, j}\cdot .$$

D.h. die Grössen (11.25) erfüllen wirklich die Beziehungen (11.24). Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

51. Die analoge Beweismethode liefert uns die folgenden allgemeinsten Sätze für die gemischten Extensoren:

Satz 47. *Wenn ein gemischter Extensor* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$ *$(m+m'+1)$-ter Stufe, der in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p, auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad $\overline{G}_q$ bzw. auf γk exkontravariant vom Grad G' ist, gegeben ist, so bilden die Grössen*

$$\text{(11.26)}\qquad {}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\Big\{T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma-1,\, k(1)}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1+1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}}$$

$$-\sum_{p=1}^{m} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_{p-1} i_{p-1},\, \alpha_p+1,\, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma-1,\, k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1+1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}}$$

$$-\sum_{q=1}^{m'} \frac{\overline{G}_q-\beta_q}{\beta_q+1}$$

$$\times\, T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma-1,\, k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1+1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_{q-1}+1,\, j_{q-1}\beta_q j_q,\, \beta_{q+1}+1,\, j_{q+1},\, \dots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}}\Big\}$$

für $\gamma = 1, 2, \dots, G'+1,$

$${}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, 0k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\,T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, 0k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1+1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}}$$

einen Extensor derselben Art vom Grad G_p-1, $\overline{G}_q-1$ bzw. $G'+1$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ, wenn

$$\text{(11.27)}\qquad {}^*T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma+1,\, k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\,T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \cdot \cdots \cdot\, \gamma+1,\, k}_{\cdot \cdots \cdot\; \beta_1+1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}}$$

für $\alpha_p = 0, 1, \dots, G_p-1;$ $\beta_q = 0, 1, \dots, \overline{G}_q-1;$ $\gamma = 0, 1, \dots, G'$ *immer bestehen.*

Für $m=0$ und $m'=1$ erhält man den Extensor

$$(11.28)\qquad \begin{aligned} {}^*T_{\beta j}^{\cdot\cdot\,\gamma k} &= (\beta+1)T_{\beta+1,j}^{\cdot\cdot\,\gamma-1,k(1)} - (\overline{G}-\beta)T_{\beta j}^{\cdot\cdot\,\gamma-1,k}, \\ {}^*T_{\beta j}^{\cdot\cdot\,0k} &= (\beta+1)T_{\beta+1,j}^{\cdot\cdot\,0k}, \end{aligned}$$

wenn

$$(11.29)\qquad {}^*T_{\beta j}^{\cdot\cdot\,\gamma+1,k} = (\beta+1)T_{\beta+1,j}^{\cdot\cdot\,\gamma+1,k}$$

für $\beta=0,1,\ldots,\overline{G}-1$ und $\gamma=0,1,\ldots,G'$ sind.

Satz 48. *Wenn ein gemischter Extensor* $T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}$ *$(m+m'+1)$-ter Stufe, der in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p, auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad $\overline{G}_q$ bzw. auf γk exkovariant vom Grad G' ist, gegeben ist, so bilden die Grössen*

$$(11.30)\qquad {}^*T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}$$

$$= \frac{1}{G'-\gamma+1}\prod_{r=1}^{m'}(\beta_r+1)\Big\{T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1+1,j_1,\ldots,\beta_{m'}+1,j_{m'}\gamma k}{}^{(1)}$$

$$-\sum_{p=1}^{m} T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_{p-1}i_{p-1},\alpha_p+1,i_p\alpha_{p+1}i_{p+1}\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1+1,j_1,\ldots,\beta_{m'}+1,j_{m'}\gamma k}$$

$$-\sum_{q=1}^{m'}\frac{\overline{G}_q-\beta_q}{\beta_q+1}$$

$$\times\, T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1+1,j_1,\ldots,\beta_{q-1}+1,j_{q-1}\beta_q j_q,\beta_{q+1}+1,j_{q+1},\ldots,\beta_{m'}+1,j_{m'}\gamma k}$$

$$\text{für}\quad \gamma=0,1,\ldots,G'$$

$$=\frac{1}{G'+1}\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\,T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1+1,j_1,\ldots,\beta_{m'}+1,j_{m'}G'k}$$

$$\text{für}\quad \gamma=G'+1$$

einen Extensor derselben Art vom Grad G_p-1, $\overline{G}_q-1$ bzw. $G'+1$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ, wenn

$$(11.31)\qquad {}^*T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\,T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}_{\cdots\cdots\,\beta_1+1,j_1,\ldots,\beta_{m'}+1,j_{m'},\gamma-1,k}$$

für $\alpha_p=0,1,\ldots,G_p-1$; $\beta_q=0,1,\ldots,\overline{G}_q-1$; $\gamma=0,1,\ldots,G'$ immer bestehen.

Für $m=1$ und $m'=0$ gibt dieser Satz den Extensor

$$
(11.32)\qquad \begin{aligned}
{}^*T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\gamma k} &= \frac{1}{G'-\gamma+1}\left\{T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\gamma k}{}^{(1)} - T^{\alpha+1,i}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\gamma k}\right\} \qquad \text{für}\quad \gamma=0,1,\ldots,G',\\
{}^*T^{\alpha i}_{\cdot\cdot G'+1,k} &= \frac{1}{G'+1}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot G'k},
\end{aligned}
$$

wenn

$$
(11.33)\qquad {}^*T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\gamma k} = \frac{1}{\gamma}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\gamma-1,k}
$$

für $\alpha=0,1,\ldots,G-1$ und $\gamma=0,1,\ldots,G'$ immer bestehen.

Satz 49. *$T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m\cdot\cdots\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot\cdots\cdot\cdot\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}}$ seien die Bestimmungszahlen eines Extensors, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p, auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad $\overline{G}_q$ und auf k kontravariant ist, dann formen die Grössen*

$$
\begin{aligned}
(11.34)\qquad & T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m\cdot\cdots\cdot\cdot\gamma k}_{\cdot\cdot\cdots\cdot\cdot\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}}\\
&= \sum_{\rho=0}^{\gamma}(-1)^{\rho}\binom{\gamma}{\rho}\rho!\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p=1}^{m}\lambda_p!\Big)^{-1}\\
&\times\prod_{r=1}^{m'}\left\{(G'-\mu_r)!\binom{\overline{G}_r-G'-\beta_r+\mu_r}{\mu_r}\binom{\beta_r+G'-\mu_r}{\beta_r}\right\}\\
&\times T^{\alpha_1+\lambda_1,\,i_1,\,\ldots,\,\alpha_m+\lambda_m,\,i_m\cdot\;\cdot\;\cdots\;\cdot\;\cdot\,k(\gamma-\rho)}_{\cdot\;\cdot\;\cdots\;\cdot\;\beta_1+G'-\mu_1,\,j_1,\,\ldots,\,\beta_{m'}+G'-\mu_{m'},\,j_{m'}}
\end{aligned}
$$

einen gemischten Extensor $(m+m'+1)$-ter Stufe vom Grad G_p-G', $\overline{G}_q-G'$ bzw. G' in bezug auf α_p, β_q bzw. γ, wobei G' eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Satz 50. *$T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m}_{\cdot\cdot\cdots\cdot\cdot\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}k}$ seien die Bestimmungszahlen eines Extensors, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p, auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad $\overline{G}_q$ und auf k kovariant ist, dann formen die Grössen*

$$
\begin{aligned}
(11.35)\qquad & T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m}_{\cdot\cdot\cdots\cdot\cdot\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}\gamma k}\\
&= \sum_{\rho=0}^{G'-\gamma}\frac{(-1)^{\rho}}{\gamma!\,(G'-\gamma-\rho)!}\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p=1}^{m}\lambda_p!\Big)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\times \prod_{r=1}^{m'} \left\{ (G'-\mu_r)! \binom{\overline{G}_r - G' - \beta_r + \mu_r}{\mu_r} \binom{\beta_r + G' - \mu_r}{\beta_r} \right\}$$

$$\times\, T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m \cdot \cdot \cdots \cdot \cdot (G'-\gamma-\rho)}_{\cdot \cdot \cdots \cdot\, \beta_1+G'-\mu_1,\, j_1, \ldots,\, \beta_{m'}+G'-\mu_{m'},\, j_{m'} k}$$

einen gemischten Extensor $(m+m'+1)$*-ter Stufe vom Grad* $G_p - G'$, $\overline{G}_q - G'$ *bzw.* G' *in bezug auf* α_p, β_q *bzw.* γ, *wobei* G' *eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.*

Setzend $m = 0, 1$ und $m' = 0, 1$, können wir nach den beiden letzten Sätzen aus dem Extensor $T_{\beta j}^{\cdot\cdot k}$, $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot k}$, $T^{\alpha i \cdot\cdot k}_{\cdot\cdot \beta j}$ bzw. $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot \beta jk}$ den Extensor

$$\text{(11.34a)} \quad T_{\beta j}^{\cdot\cdot \gamma k} = \sum_{\rho=0}^{\gamma} (-1)^\rho \binom{\gamma}{\rho} \rho!\, (G'-\rho)! \times \binom{\overline{G} - G' - \beta + \rho}{\rho} \binom{\beta + G' - \rho}{\beta} T_{\beta+G'-\rho,\, j}^{\cdot\cdot k(\gamma-\rho)},$$

$$\text{(11.35a)} \quad T^{\alpha i}_{\cdot\cdot \gamma k} = \sum_{\rho=0}^{G'-\gamma} \frac{(-1)^\rho \rho!}{\gamma!\,(G'-\gamma-\rho)!} T^{\alpha+\rho,\, i \cdot (G'-\gamma-\rho)}_{\cdot\cdot k},$$

$$\text{(11.34b)} \quad T^{\alpha i \cdot\cdot \gamma k}_{\cdot\cdot \beta j} = \sum_{\rho=0}^{\gamma} (-1)^\rho \binom{\gamma}{\rho} \rho! \sum_{\lambda=0}^{\rho} \lambda!\, (G'-\rho+\lambda)! \times \binom{\overline{G} - G' - \beta + \rho - \lambda}{\rho - \lambda} \binom{\beta + G' - \rho + \lambda}{\beta} T^{\alpha+\lambda,\, i \cdot\cdot k(\gamma-\rho)}_{\cdot\cdot \beta+G'-\rho+\lambda,\, j}$$

bzw.

$$\text{(11.35b)} \quad T^{\alpha i}_{\cdot\cdot \beta j \gamma k} = \sum_{\rho=0}^{G'-\gamma} \frac{(-1)^\rho}{\gamma!\,(G'-\gamma-\rho)!} \sum_{\lambda=0}^{\rho} \lambda! (G'-\rho+\lambda)! \times \binom{\overline{G} - G' - \beta + \rho - \lambda}{\rho - \lambda} \binom{\beta + G' - \rho + \lambda}{\beta} T^{\alpha+\lambda,\, i \cdot\cdot (G'-\gamma-\rho)}_{\cdot\cdot \beta+G'-\rho+\lambda,\, jk}$$

erhalten.

§12. Die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ für Extensoren höherer Stufe.

52. Nun wollen wir fortfahren, die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ in Satz 12 und Satz 13 solchermassen zu verallgemeinern, dass sie auf einen Extensor höherer Stufe angewendet werden können. Darum betrachten wir zunächst einen Extensor zweiter Stufe, dann lautet

Satz 51. *Es sei* $T^{\alpha i \beta j}$, $T_{\alpha i \beta j}$ *bzw.* $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot \beta j}$ *ein exkontravarianter, exkovarianter bzw. gemischter Extensor zweiter Stufe von den Graden* G *und* G' *in bezug auf* α *und* β, *dann definieren die Grössen*

$$(12.1)\qquad \mathfrak{S}^H T^{\alpha i\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j(H-\lambda)},$$

$$(12.2)\qquad \mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+H-\lambda+\mu)!}{\alpha!}\,\frac{(\beta+H-\mu)!}{\beta!}$$
$$\times\binom{G-\alpha-H+\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta-H+\mu}{\mu}$$
$$\times\, T_{\alpha+\dot{H}-\lambda+\mu,\, \dot{i},\, \beta+\dot{H}-\mu,\, \dot{j}}{}^{(H-\lambda)}$$

bzw.

$$(12.3)\qquad \mathfrak{S}^H T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+H-\mu)!}{\beta!\,(\lambda-\mu)!}$$
$$\times\binom{G'-\beta-H+\mu}{\mu}T^{\alpha+\lambda-\mu,\, i}{}_{\cdot\ \cdot\, \beta+\dot{H}-\mu,\, \dot{j}}{}^{(H-\lambda)}$$

für $\alpha=0, 1, \ldots, G-H$ und $\beta=0, 1, \ldots, G'-H$ einen Extensor derselben Art von den Graden $G-H$ und $G'-H$ in bezug auf α und β. Die Ordnung des erhaltenen Extensors soll im allgemeinen $M+H$ sein, während diejenige des vorgegebenen Extensors M ist. H ist hierbei eine positive ganze Zahl unter Beschränkung $H \leqq G, G'$.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Richtigkeit des Satzes im Falle $H=1$ und beweisen dann den Satz für jeden Wert von H durch Induktion bezüglich H.

(i) Nach (11.6) und (11.7) erkennt man sogleich

$$T^{\alpha+1,\, a\beta b}+T^{\alpha a,\, \beta+1,\, b}-T^{\alpha a\beta b(1)} = \frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\lambda)i}}\,\frac{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}{\partial x^{(\mu)j}}(T^{\lambda+1,\, i\mu j}+T^{\lambda i,\, \mu+1,\, j}-T^{\lambda i\mu j(1)}),$$

daraus folgt, dass für $\alpha=0, 1, \ldots, G-1$ und $\beta=0, 1, \ldots, G'-1$

$$(12.1\,\mathrm{a})\qquad \mathfrak{S}T^{\alpha i\beta j} = T^{\alpha+1,\, i\beta j}+T^{\alpha i,\, \beta+1,\, j}-T^{\alpha i\beta j(1)}$$

die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad $G-1$ bzw. $G'-1$ in bezug auf α bzw. β sein müssen. Die Ordnung dieses Extensors ist bekanntlich um eins höherer als dieselben des vorgegebenen Extensors.

Unter Voraussetzung der Richtigkeit des Satzes für eine positive ganze Zahl H, ergibt sich, wie man gerade oben bewiesen hat, ein exkontravarianter Extensor $\mathfrak{S}\,(\mathfrak{S}^H T^{\alpha i\beta j})$ zweiter Stufe vom Grad $(G-H)-1$ bzw. $(G'-H)-1$ in bezug auf α bzw. β und von der Ordnung $(M+H)+1$, indem man $\mathfrak{S}^H T^{\alpha i\beta j}$ statt $T^{\alpha i\beta j}$ annimmt. Es ist aber andererseits

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha i \beta j}) = \mathfrak{S}^H T^{\alpha+1,\, i\beta j} + \mathfrak{S}^H T^{\alpha i,\, \beta+1,\, j} - (\mathfrak{S}^H T^{\alpha i \beta j})^{(1)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T^{\alpha+1+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H-\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu+1,\, j (H-\lambda)}$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H-\lambda+1)},$$

setzend $\lambda-1$ an Stelle von λ in den ersten und zweiten Gliedern und weiter $\mu-1$ statt μ in dem ersten Glied,

$$= \sum_{\lambda=1}^{H+1} (-1)^{H+1-\lambda} \binom{H}{\lambda-1} \sum_{\mu=1}^{\lambda} \binom{\lambda-1}{\mu-1} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H+1-\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{H+1} (-1)^{H+1-\lambda} \binom{H}{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} \binom{\lambda-1}{\mu} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H+1-\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H+1-\lambda} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H+1-\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{H+1} (-1)^{H+1-\lambda} \left\{ \binom{H}{\lambda-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} + \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} \right\} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H+1-\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{H+1} (-1)^{H+1-\lambda} \binom{H+1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T^{\alpha+\mu,\, i,\, \beta+\lambda-\mu,\, j (H+1-\lambda)},$$

was nichts anderes als $\mathfrak{S}^{H+1} T^{\alpha i \beta j}$ ist.

(ii) Aus der Transformationsgleichung geht durch Differenzierung nach dem Parameter t hervor

$$(\alpha+1)(\beta+1) T_{\alpha+1,\, i,\, \beta+1,\, j}^{\cdot\;\;\cdot\;\;\;\cdot\;\;\;\cdot\,(1)}$$

$$= (\alpha+1)(\beta+1) \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda+1)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}} T_{\lambda+1,\, a,\, \mu+1,\, b}^{\cdot\;\;\cdot\;\;\;\cdot\;\;\;\cdot\,(1)}$$

$$+ (\alpha+1)(\beta+1) \left\{ \sum_{\lambda=\alpha+1}^{G} \binom{\lambda}{\alpha+1} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(\lambda-\alpha)} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}} T_{\lambda a,\, \mu+1,\, b} \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=\beta+1}^{G'} \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda+1)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}} \binom{\mu}{\beta+1} \left(\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j} \right)^{(\mu-\beta)} T_{\lambda+1,\, a\mu b} \right\}$$

$$= \sum_{\lambda=\alpha}^{G-1} \sum_{\mu=\beta}^{G'-1} \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}} (\lambda+1)(\mu+1) T_{\lambda+1,\, a,\, \mu+1,\, b}^{\cdot\;\;\cdot\;\;\;\cdot\;\;\;\cdot\,(1)}$$

$$+ \sum_{\lambda=\alpha}^{G} \sum_{\mu=\beta}^{G'-1} \frac{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}} \frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}} (\mu+1)(\lambda-\alpha) T_{\lambda a,\, \mu+1,\, b}$$

$$+\sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\sum_{\mu=\beta}^{G'}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\lambda+1)(\mu-\beta)T_{\lambda+1,\,a\mu b}$$

$$=\sum_{\lambda=\alpha}^{G-1}\sum_{\mu=\beta}^{G'-1}\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\Big\{(\lambda+1)(\mu+1)T_{\dot{\lambda+1},\,\dot{a},\,\dot{\mu+1},\,\dot{b}}{}^{(1)}$$

$$-(G-\lambda)(\mu+1)T_{\lambda a,\,\mu+1,\,b}-(\lambda+1)(G'-\mu)T_{\lambda+1,\,a\mu b}\Big\}$$

$$+(G-\alpha)(\beta+1)\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}}T_{\lambda a,\,\mu+1,\,b}$$

$$+(\alpha+1)(G'-\beta)\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda+1)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}T_{\lambda+1,\,a\mu b}\,,$$

da

$$(\alpha+1)\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda+1)a}}{\partial x^{(\alpha+1)i}}=(\alpha+1)\binom{\lambda+1}{\alpha+1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\lambda-\alpha)}$$

$$=(\lambda+1)\binom{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\partial\bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\lambda-\alpha)}=(\lambda+1)\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}$$

ist. Daraus ersieht man

$$\text{(12.2 a)}\qquad \mathfrak{S}T_{\alpha i\beta j}=(\alpha+1)(G'-\beta)T_{\alpha+1,\,i\beta j}+(G-\alpha)(\beta+1)T_{\alpha i,\,\beta+1,\,j}$$

$$-(\alpha+1)(\beta+1)T_{\dot{\alpha+1},\,\dot{i},\,\dot{\beta+1},\,\dot{j}}{}^{(1)}$$

$$=\frac{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}{\partial x^{(\alpha)i}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\mathfrak{S}T_{\lambda a\mu b}\,,$$

d.h. $\mathfrak{S}T_{\alpha i\beta j}$ sind die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad $G-1$ bzw. $G'-1$ in bezug auf α bzw. β und von der Ordnung $M+1$. Somit ist der Satz im Falle $H=1$ richtig. Um den Satz im allgemeinen Falle zu beweisen, benützt man die Induktion bezüglich H. D.h. es muss $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j})$ ein exkovarianter Extensor zweiter Stufe von den Graden $G-H-1$ und $G'-H-1$ sein, während $\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j}$ einer von den Graden $G-H$ und $G'-H$ ist, wie man gerade oben bewiesen hat. Andererseits ist $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j})$ nichts anderes als $\mathfrak{S}^{H+1}T_{\alpha i\beta j}$. Berücksichtigend, dass die Grade des Extensors $\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j}$ $G-H$ und $G'-H$ sind, ergibt sich in der Tat nach (12.2) und (12.2a)

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j})=(\alpha+1)(G'-H-\beta)\mathfrak{S}^H T_{\alpha+1,\,i\beta j}$$

$$+(G-H-\alpha)(\beta+1)\mathfrak{S}^H T_{\alpha i,\,\beta+1,\,j}-(\alpha+1)(\beta+1)(\mathfrak{S}^H T_{\alpha+1,\,i,\,\beta+1,\,j})^{(1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha+1)(G'-H-\beta)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+1+H-\lambda+\mu)!}{(\alpha+1)!} \\
&\quad\times\frac{(\beta+H-\mu)!}{\beta!}\binom{G-\alpha-H-1+\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta-H+\mu}{\mu} \\
&\quad\times T_{\alpha+H+\dot{1}-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+\dot{H}-\mu,\,\dot{j}}^{(H-\lambda)}+(G-H-\alpha)(\beta+1)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda} \\
&\quad\times\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+H-\lambda+\mu)!}{\alpha!}\,\frac{(\beta+1+H-\mu)!}{(\beta+1)!}\binom{G-\alpha-H+\lambda-\mu}{\lambda-\mu} \\
&\quad\times\binom{G'-\beta-1-H+\mu}{\mu}T_{\alpha+\dot{H}-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+\dot{H}+1-\mu,\,\dot{j}}^{(H-\lambda)} \\
&-(\alpha+1)(\beta+1)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+1+H-\lambda+\mu)!}{(\alpha+1)!} \\
&\quad\times\frac{(\beta+1+H-\mu)!}{(\beta+1)!}\binom{G-\alpha-1-H+\lambda-\mu}{\lambda-\mu} \\
&\quad\times\binom{G'-\beta-1-H+\mu}{\mu}T_{\alpha+1+\dot{H}-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+1+\dot{H}-\mu,\,\dot{j}}^{(H-\lambda+1)}\,.
\end{aligned}
$$

Setzend $\lambda-1$ anstatt λ in den ersten zwei Gliedern auf der letzten rechten Seite und auch $\mu-1$ anstatt μ im ersten Glied, folgt

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T_{\alpha i\beta j}) &= \sum_{\lambda=1}^{H+1}(-1)^{H+1-\lambda}\binom{H}{\lambda-1}(\lambda-1)!\Big\{(\alpha+1)(G'-H-\beta) \\
&\quad\times\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{(\alpha+H+1-\lambda+\mu)!}{(\alpha+1)!}\,\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{\beta!}\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu} \\
&\quad\times\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu-1}+(G-H-\alpha)(\beta+1)\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}\frac{(\alpha+H+1-\lambda+\mu)!}{\alpha!} \\
&\quad\times\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{(\beta+1)!}\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu-1}\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}\Big\} \\
&\quad\times T_{\alpha+H+\dot{1}-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+\dot{H}+1-\mu,\,\dot{j}}^{(H+1-\lambda)}+(\alpha+1)(\beta+1)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H+1-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda! \\
&\quad\times\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+H+1-\lambda+\mu)!}{(\alpha+1)!}\,\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{(\beta+1)!}\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu} \\
&\quad\times\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}T_{\alpha+H+\dot{1}-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+\dot{H}+1-\mu,\,\dot{j}}^{(H+1-\lambda)}\,,
\end{aligned}
$$

wegen der Beziehung

$$(G'-H-\beta)\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu-1}$$

$$+(G-H-\alpha)\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu-1}\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}$$

$$=\lambda\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu},$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^{H}T_{\alpha i\beta j})=\sum_{\lambda=1}^{H+1}(-1)^{H+1-\lambda}\left\{\binom{H}{\lambda-1}+\binom{H}{\lambda}\right\}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha+H+1-\lambda+\mu)!}{\alpha!}$$

$$\times\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{\beta!}\binom{G-\alpha-(H+1)+\lambda-\mu}{\lambda-\mu}$$

$$\times\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}T_{\alpha+H+1-\lambda+\mu,\,\dot{i},\,\beta+H+1-\mu,\,\dot{j}}{}^{(H+1-\lambda)}$$

$$=\mathfrak{S}^{H+1}T_{\alpha i\beta j},$$

weil $\binom{H}{\lambda-1}+\binom{H}{\lambda}=\binom{H+1}{\lambda}$. Jetzt ist (12.2) völlig bewiesen.

(iii) Die Beweismethode ist ganz analog wie in (ii). Wegen der Transformationsgleichung lautet

$$(\beta+1)T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,\dot{j}}{}^{(1)}=(\beta+1)\left\{\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,\dot{b}}{}^{(1)}\right.$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{a}}\right)^{(\alpha-\lambda+1)}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}$$

$$\left.+\sum_{\mu=\beta}^{G'}\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}\binom{\mu+1}{\beta+1}\left(\frac{\partial\bar{x}^{b}}{\partial x^{j}}\right)^{(\mu-\beta+1)}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}\right\}$$

$$=\sum_{\mu=\beta}^{G'-1}\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\mu+1)T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,\dot{b}}{}^{(1)}$$

$$+\sum_{\mu=\beta}^{G'-1}\sum_{\lambda=0}^{\alpha}\left\{\binom{\alpha+1}{\lambda}-\binom{\alpha}{\lambda-1}\right\}\left(\frac{\partial x^{i}}{\partial\bar{x}^{a}}\right)^{(\alpha-\lambda+1)}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}(\mu+1)T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}$$

$$+\sum_{\mu=\beta}^{G'-1}\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}(\mu-\beta+1)\binom{\mu+1}{\beta}\left(\frac{\partial\bar{x}^{b}}{\partial x^{j}}\right)^{(\mu-\beta+1)}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}\,.$$

Setzend $\lambda+1$ anstatt λ im zweiten Glied und auch μ anstatt $\mu+1$ im' letzten Glied auf der letzten rechten Seite, erhält man

$$(\beta+1)T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,\dot{j}}{}^{(1)}=\sum_{\mu=\beta}^{G'-1}\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial\bar{x}^{(\lambda)a}}\frac{\partial\bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\left\{(\mu+1)T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,\dot{b}}{}^{(1)}-(\mu+1)T^{\lambda+1,a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}\right.$$

$$-(G'-\mu)T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu b}\Big\}+(\beta+1)\sum_{\lambda=-1}^{\alpha}\frac{\partial x^{(\alpha+1)i}}{\partial \bar{x}^{(\lambda+1)a}}\,\frac{\partial \bar{x}^{(\mu+1)b}}{\partial x^{(\beta+1)j}}T^{\lambda+1,a}{}_{\cdot\cdot\mu+1,b}$$

$$+(G'-\beta)\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}\,\frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu b}\,.$$

Somit erkennen wir leicht unter Berücksichtigung auf (12.3) sowie die Transformationsgleichung des Extensors $T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$

$$\mathfrak{S}T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}=\frac{\partial x^{(\alpha)i}}{\partial \bar{x}^{(\lambda)a}}\,\frac{\partial \bar{x}^{(\mu)b}}{\partial x^{(\beta)j}}\mathfrak{S}T^{\lambda a}{}_{\cdot\cdot\mu b}\,,$$

wobei

$$\text{(12.3 a)}\quad \mathfrak{S}T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}=(\beta+1)T^{\alpha+1,i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,j}+(G'-\beta)T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}-(\beta+1)T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,j}{}^{(1)}\,.$$

Nun verwendet man die Induktion bezüglich H zum Beweise des allgemeinen Falles (12.3) Unter Voraussetzung, dass $\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}$ ein gemischter Extensor zweiter Stufe von den Graden $G-H$ und $G'-H$ ist, muss $\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j})$ auch ein solcher von den Graden $G-H-1$ und $G'-H-1$ sein, wie man oben bewiesen hat. Andererseits erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j})\\
&\quad=(\beta+1)\mathfrak{S}^H T^{\alpha+1,i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,j}+(G'-H-\beta)\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j}-(\beta+1)\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta+1,j}{}^{(1)}\\
&\quad=(\beta+1)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+1+H-\mu)!}{(\beta+1)!\,(\lambda-\mu)!}\\
&\qquad\times\binom{G'-\beta-1-H+\mu}{\mu}T^{\alpha+1+\lambda-\mu,i}{}_{\cdot\cdot\beta+1+H-\mu,j}{}^{(H-\lambda)}\\
&\qquad+(G'-H-\beta)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+H-\mu)!}{\beta!\,(\lambda-\mu)!}\\
&\qquad\times\binom{G'-\beta-H+\mu}{\mu}T^{\alpha+\lambda-\mu,i}{}_{\cdot\cdot\beta+H-\mu,j}{}^{(H-\lambda)}\\
&\qquad-(\beta+1)\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+1+H-\mu)!}{(\beta+1)!\,(\lambda-\mu)!}\\
&\qquad\times\binom{G'-\beta-1-H+\mu}{\mu}T^{\alpha+\lambda-\mu,i}{}_{\cdot\cdot\beta+1+H-\mu,j}{}^{(H-\lambda+1)}\,.
\end{aligned}$$

Setzen wir $\lambda-1$ an Stelle von λ in den ersten und zweiten Gliedern der letzten rechten Seite und auch $\mu-1$ an Stelle von μ im zweiten Glied ein, dann ist

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\beta j})=\sum_{\lambda=1}^{H+1}(-1)^{H+1-\lambda}\binom{H}{\lambda-1}(\lambda-1)!\Big\{\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{\beta!\,(\lambda-\mu-1)!}$$

$$\times\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}+\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+H-\mu+1)!}{\beta!(\lambda-\mu)!}\binom{G'-\beta-H-1+\mu}{\mu}_{\mu}\Big\}$$

$$\times T^{\alpha+\lambda-\mu,\, i}{}_{\cdot\,\cdot\,\beta+H+1-\mu,\, j}{}^{(H+1-\lambda)}+\sum_{\lambda=0}^{H}(-1)^{H+1-\lambda}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{\beta!(\lambda-\mu)!}$$

$$\times\binom{G'-\beta-(H+1)-\mu}{\mu}T^{\alpha+\lambda-\mu,\, i}{}_{\cdot\,\cdot\,\beta+H+1-\mu,\, j}{}^{(H+1-\lambda)}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{H+1}(-1)^{H+1-\lambda}\left\{\binom{H}{\lambda-1}+\binom{H}{\lambda}\right\}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\beta+H+1-\mu)!}{\beta!(\lambda-\mu)!}$$

$$\times\binom{G'-\beta-(H+1)+\mu}{\mu}T^{\alpha+\lambda-\mu,\, i}{}_{\cdot\,\cdot\,\beta+H+1-\mu,\, j}{}^{(H+1-\lambda)}$$

$$=\mathfrak{S}^{H+1}T^{\alpha i}{}_{\cdot\,\cdot\,\beta j}\,.$$

Der Beweis von Satz 51 ist nun völlig beendet.

53. Satz 51 kann man in der folgenden Form verallgemeinern, die mittels eines analogen Verfahrens bewiesen werden kann.

Satz 52. $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m}{}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'} j_{m'}}$ *seien die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors $(m+m')$-ter Stufe, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p und auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad G'_q ist, dann sind die Grössen*

$$\text{(12.4)}\quad \mathfrak{S}^{H}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m}{}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}}=\sum_{\rho=0}^{H}(-1)^{H-\rho}\binom{H}{\rho}\rho\,!$$

$$\times\sum_{(\lambda p)}^{\lambda}\sum_{(\mu q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p=1}^{m}\lambda_p!\Big)^{-1}\prod_{q=1}^{m'}\left\{\frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!}\binom{G'_q-\beta_q-H+\mu_q}{\mu_q}\right\}$$

$$\times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\,\ldots,\,\alpha_m+\lambda_m,\, i_m}{}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\,\ldots,\,\beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'}}{}^{(H-\rho)}$$

für jeden Wert von $H=0, 1, \ldots, \bar{H}$ die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors derselben Art vom Grad G_p-H bzw. G'_q-H in bezug auf α_p bzw. β_q, wobei $\bar{H}=$ Min (G_p, G'_q).

Beweis. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass (12.4) für $H=1$, d.h.

$$\text{(12.4 a)}\quad \mathfrak{S}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_m i_m}{}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1 j_1\cdots\beta_{m'}j_{m'}}$$

$$=\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\left\{\sum_{p=1}^{m}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_{p-1}i_{p-1},\,\alpha_p+1,\, i_p\,\alpha_{p+1}i_{p+1}\cdots\alpha_m i_m}{}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\beta_1+1,\, j_1,\,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\, j_{m'}}\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{m'}\frac{G'_r-\beta_r}{\beta_r+1}T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1+1,j_1,\dots,\beta_{r-1}+1,j_{r-1}\beta_r j_r,\beta_{r+1}+1,j_{r+1},\dots,\beta_{m'}+1,j_{m'}}$$

$$\left.-T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ (1)}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\right\}$$

einen gemischten Extensor derselben Art vom Grad G_p-1 bzw. G'_q-1 in bezug auf α_p bzw. β_q mit dem vorgegebenen Extensor $T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1 j_1\dots\beta_{m'}j_{m'}}$ gibt. Der Beweis lässt sich nach einem analogen Verfahren wie der von Satz 51 ausführen. So geben wir ihn hier nicht ausführlich, und als nächstes wollen wir deshalb den Satz für jeden Wert von H mittels der Induktion nach H beweisen. Unter Voraussetzung der Richtigkeit des Satzes für H, hat man bereits oben erkennen, dass die folgenden Grössen einen gemischten Extensor vom Grad $(G_p-H)-1$ bzw. $(G'_q-H)-1$ in bezug auf α_p bzw. β_q bilden:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1 j_1\dots\beta_{m'}j_{m'}})$$

$$=\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\Big\{-\mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ (1)}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_{p-1}i_{p-1},\,\alpha_p+1,\,i_p\alpha_{p+1}i_{p+1}\dots\alpha_m i_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\beta_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}$$

$$+\sum_{r=1}^{m'}\frac{G'_r-H-\beta_r}{\beta_r+1}$$

$$\left.\times\,\mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1\dots\alpha_m i_m}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta_{r-1}+1,\,j_{r-1}\beta_r j_r,\,\beta_{r+1}+1,\,j_{r+1},\,\dots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\right\}$$

$$=\prod_{q'=1}^{m'}(\beta_{q'}+1)\Big[\sum_{\rho=0}^{H}(-1)^{H-\rho+1}\binom{H}{\rho}\rho!\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p=1}^{m}\lambda_p!\Big)^{-1}$$

$$\times\prod_{q=1}^{m'}\left\{\frac{(\beta'_q+1)!}{(\beta_q+1)!}\binom{G'_q-\beta'_q-1}{\mu_q}\right\}T^{\alpha'_1 i_1\dots\alpha'_m i_m\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ ,\ \cdot\ \cdot\ (H-\rho+1)}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\beta'_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta'_{m'}+1,\,j_{m'}}$$

$$+\sum_{\rho=0}^{H}(-1)^{H-\rho}\binom{H}{\rho}\rho!\left\{\sum_{p=1}^{m}\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p'=1}^{m}\lambda_{p'}!\Big)^{-1}\prod_{q=1}^{m'}\left\{\frac{(\beta'_q+1)!}{(\beta_q+1)!}\binom{G'_q-\beta'_q-1}{\mu_q}\right\}\right.$$

$$\times\,T^{\alpha'_1 i_1\dots\alpha'_{p-1}i_{p-1},\,\alpha'_p+1,\,i_p\alpha'_{p+1}i_{p+1}\dots\alpha'_m i_m\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ ,\ \cdot\ \cdot\ (H-\rho)}_{\cdot\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\beta'_1+1,\,j_1,\,\dots,\,\beta'_{m'}+1,\,j_{m'}}$$

$$+\sum_{r=1}^{m'}\frac{G'_r-H-\beta_r}{\beta_r+1}\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big(\prod_{p'=1}^{m}\lambda_{p'}!\Big)^{-1}$$

$$\times \prod_{q \neq r}^{1, m'} \left\{ \frac{(\beta'_q+1)\,!}{(\beta_q+1)\,!} \binom{G'_q-\beta'_q-1}{\mu_q} \right\} \frac{\beta'_r\,!}{\beta_r\,!} \binom{G'_r-\beta'_r}{\mu_r}$$

$$\times \left. T^{\alpha'_1 i_1 \cdots \alpha'_m i_m}_{\cdot\ \cdot \cdots \cdot\ \cdot\ \beta'_1+1,\, j_1, \ldots,\, \beta'_{r-1}+1,\, j_{r-1} \beta'_r j_r,\, \beta'_{r+1}+1,\, j_{r+1}, \ldots,\, \beta'_{m'}+1,\, j_{m'}} {}^{(H-\rho)} \right\} \Bigg]$$

$$(\text{wobei } \alpha'_r \equiv \alpha_r + \lambda_r\,,\ \beta'_s \equiv \beta_s + H - \mu_s)\,.$$

Setzend $\rho-1$ anstatt ρ im zweiten Glied in den eckigen Klammern [ ] und λ_p-1 bzw. μ_r-1 anstatt λ_p bzw. μ_r im ersten bzw. zweiten Glied in den geschweiften Klammern { }, liefert die letzte Beziehung

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m}_{\cdot\ \cdot \cdots \cdot\ \cdot\ \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}) = \sum_{\rho=0}^{H} (-1)^{H-\rho+1} \binom{H}{\rho} \rho\,!$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p\,! \right)^{-1} \left\{ \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+H+1-\mu_q)!}{\beta_q\,!} \binom{G'_q-\beta_q-(H+1)+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}_{\cdot\ \ \cdot \cdots \ \ \cdot\ \ \beta_1+H+1-\mu_1,\, j_1, \ldots,\, \beta_{m'}+H+1-\mu_{m'},\, j_{m'}} {}^{(H+1-\rho)}$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{H+1} (-1)^{H+1-\rho} \binom{H}{\rho-1} (\rho-1)\,! \left\{ \sum_{p=1}^{m} \lambda_p + \sum_{r=1}^{m'} \mu_r \right\}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left(\prod_{p'=1}^{m} \lambda_{p'}\,! \right)^{-1} \left\{ \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+H+1-\mu_q)\,!}{\beta_q\,!} \binom{G'_q-\beta_q-(H+1)+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}_{\cdot\ \ \cdot \cdots \ \ \cdot\ \ \beta_1+H+1-\mu_1,\, j_1, \ldots,\, \beta_{m'}+H+1-\mu_{m'},\, j_{m'}} {}^{(H+1-\rho)}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{H+1} (-1)^{H+1-\rho} \left\{ \binom{H}{\rho} + \binom{H}{\rho-1} \right\} \rho! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left(\prod_{p'=1}^{m} \lambda_{p'}! \right)^{-1}$$

$$\times \prod_{q=1}^{m'} \left\{ \frac{(\beta_q+H+1-\mu_q)\,!}{\beta_q\,!} \binom{G'_q-\beta_q-(H+1)+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}_{\cdot\ \ \cdot \cdots \ \ \cdot\ \ \beta_1+H+1-\mu_1,\, j_1, \ldots,\, \beta_{m'}+H+1-\mu_{m'},\, j_{m'}} {}^{(H+1-\rho)}$$

$$= \mathfrak{S}^{H+1} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m}_{\cdot\ \cdot \cdots \cdot\ \cdot\ \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}\,,$$

da $\sum_{p=1}^{m} \lambda_p + \sum_{r=1}^{m'} \mu_r = \rho$ und $\binom{H}{\rho} + \binom{H}{\rho-1} = \binom{H+1}{\rho}$. W. z. b. z.

Zusatz 1. *Wenn* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m}$ *die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors m-ter Stufe vom Grad* G_p *in bezug auf* α_p $(p = 1, 2, \ldots, m)$ *sind, dann definieren die Grössen*

$$(12.5)\qquad \mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \Big(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big)^{-1} \times T^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m (H-\lambda)}$$

einen Extensor derselben Art vom Grad $G_p - H$ in bezug auf α_p, wobei $0 \leqq H \leqq \mathrm{Min}\,(G_p)$.

Zusatz 2. *Die Grössen*

$$(12.6)\qquad \mathfrak{S}^H T_{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \prod_{p=1}^{m} \left\{ \frac{(\alpha_p + H - \lambda_p)!}{\alpha_p!} \times \binom{G_p - \alpha_p - H + \lambda_p}{\lambda_p} \right\} T^{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ (H-\lambda)}_{\alpha_1 + H - \lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m + H - \lambda_m,\, i_m}$$

sind die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors m-ter Stufe vom Grad $G_p - H$ in bezug auf α_p, während $T_{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m}$ dieselben eines Extensors derselben Art vom Grad G_p in bezug auf α_p sind, wobei $0 \leqq H \leqq \mathrm{Min}\,(G_p)$.

Es ist klar, dass Satz 14 für unsere Operatoren $\mathfrak{S}^H$ auch erhalten bleibt. D.h. die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ sind kommutativ, linear und assoziativ.

54. Aus Satz 52 folgt sogleich

Satz 53. $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m}_{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$ *seien die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors $(m+m')$-ter Stufe, der beziehungsweise in bezug auf $\alpha_p i_p$ exkontravariant vom Grad G_p und auf $\beta_q j_q$ exkovariant vom Grad G'_q ist, dann sind die Grössen*

(12.7)

$$\mathfrak{S}^H T^{0 k_1 \cdots 0 k_{\overline{m}} \alpha_{\overline{m}+1} i_{\overline{m}+1} \cdots \alpha_m i_m}_{\cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ G'_1 - H_1,\, l_1,\, \ldots,\, G'_{\overline{m}'} - H_{\overline{m}'},\, l_{\overline{m}'} \beta_{\overline{m}'+1} j_{\overline{m}'+1} \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{H} (-1)^{H-\rho} \binom{H}{\rho} \rho! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \Big(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big)^{-1} \prod_{q=1}^{\overline{m}'} \frac{\overline{G}'_q!}{(G'_q - H)!} \prod_{q=\overline{m}'+1}^{m'} \left\{ \frac{\beta'_q!}{\beta_q!} \binom{G'_q - \beta'_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times T^{\lambda_1 k_1 \cdots \lambda_{\overline{m}} k_{\overline{m}} \alpha'_{\overline{m}+1} i_{\overline{m}+1} \cdots \alpha'_m i_m\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ (H-\rho)}_{\cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \overline{G}'_1 l_1 \cdots \overline{G}'_{\overline{m}'} l_{\overline{m}'} \beta'_{\overline{m}'+1} j_{\overline{m}'+1} \cdots \beta'_{m'} j_{m'}}$$

(wobei $\alpha'_u \equiv \alpha_u + \lambda_u$, $\beta'_v \equiv \beta_v + H - \mu_v$, $\overline{G}'_s \equiv G'_s - \mu_s$)

für jeden Wert von $H = 0, 1, \ldots, \overline{H}$ die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors $(m+m')$-ter Stufe mit den kontra- bzw. kovarianten

Indizes k_r *bzw.* $l_s (r=1, \dots, \overline{m}; \ s=1, \dots, \overline{m}')$, *wobei* $m \geqq \overline{m}$, $m' \geqq \overline{m}'$, $\overline{H} = \operatorname{Min}(G_p, G'_q)$.

Auf ähnliche Weise bekommen wir nach (12.5) bzw. (12.6) den exkontra- bzw. exkovarianten Extensor m-ter Stufe

$$(12.8)\quad \mathfrak{S}^H T^{0k_1 \dots 0k_{\overline{m}} \alpha_{\overline{m}+1} i_{\overline{m}+1} \dots \alpha_m i_m} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \Big(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big)^{-1}$$
$$\times T^{\lambda_1 k_1 \dots \lambda_{\overline{m}} k_{\overline{m}},\ \alpha_{\overline{m}+1} + \lambda_{\overline{m}+1},\ i_{\overline{m}+1}, \dots,\ \alpha_m + \lambda_m,\ i_m (H-\lambda)}$$

bzw.

$$(12.9)\quad \mathfrak{S}^H T_{G_1 - H_1, l_1, \dots, G_{\overline{m}} - H_{\overline{m}}, l_{\overline{m}} \beta_{\overline{m}+1} j_{\overline{m}+1} \dots \beta_m j_m}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_q)}^{\lambda} \prod_{q=1}^{\overline{m}} \frac{(G_q - \lambda_q)!}{(G_q - H)!} \prod_{q=\overline{m}+1}^{m} \left\{ \frac{(\beta_q + H - \lambda_q)!}{\beta_q!} \binom{G_q - \beta_q - H + \lambda_q}{\lambda_q} \right\}$$
$$\times T_{\dot{G}_1 - \lambda_1, \dot{l}_1, \dots, \dot{G}_{\overline{m}} - \lambda_{\overline{m}}, \dot{l}_{\overline{m}}, \dot{\beta}_{\overline{m}+1} + H - \lambda_{\overline{m}+1}, \dot{j}_{\overline{m}+1}, \dots, \dot{\beta}_m + H - \lambda_m, \dot{j}_m}^{(H-\lambda)},$$

der $\overline{m}$ kontra- bzw. kovariante Indizes besitzt und aus (12.7) durch Setzung $m' = 0$ bzw. $m = 0$ sogleich hergeleitet wird.

Zusatz 1. *Die Grössen*

$$(12.7\text{a})\quad \mathfrak{S}^H T^{0 i_1 \dots 0 i_m}{}_{G'_1 - H, j_1, \dots, G'_{m'} - H, j_{m'}}$$
$$= \sum_{\rho=0}^{H} (-1)^{H-\rho} \binom{H}{\rho} \rho! \sum_{(\lambda_q)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \Big(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big)^{-1}$$
$$\times \prod_{q=1}^{m'} \frac{(G'_q - \mu_q)!}{(G'_q - H)!} T^{\lambda_1 i_1 \dots \lambda_m i_m}{}_{\dot{G}'_1 - \mu_1, \dot{j}_1, \dots, \dot{G}'_{m'} - \mu_{m'}, \dot{j}_{m'}}^{(H-\rho)}$$

bilden einen gemischten Tensor $(m+m')$*-ter Stufe mit den kontra- bzw. kovarianten Indizes* i_p *bzw.* j_q.

Zusatz 2. *Wenn* $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m}$ *bzw.* $T_{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m}$ *die Bestimmungszahlen eines exkontra- bzw. exkovarianten Extensors m-ter Stufe vom Grad* G_p *in bezug auf* α_p *sind, definieren die Grössen*

$$(12.8\text{a})\quad \mathfrak{S}^H T^{0 i_1 \dots 0 i_m} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \Big(\prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big)^{-1} T^{\lambda_1 i_1 \dots \lambda_m i_m (H-\lambda)}$$

bzw.

$$(12.9\text{a})\quad \mathfrak{S}^H T_{G_1 - H, j_1, \dots, G_m - H, j_m} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \prod_{p=1}^{m} \frac{(G_p - \lambda_p)!}{(G_p - H)!}$$
$$\times T_{\dot{G}_1 - \lambda_1, \dot{j}_1, \dots, \dot{G}_m - \lambda_m, \dot{j}_m}^{(H-\lambda)}$$

einen kontra- bzw. kovarianten Tensor m-ter Stufe.

55. Betrachten wir einen gemischten Extensor $(m+m'+1)$-ter Stufe $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$ und setzen $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$, der in bezug auf die Indizes k kontravariant ist, an Stelle von $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$ in (11.34) ein, dann ergibt sich ein Extensor mit einer kontravarianten Indizes k für $\gamma = 0$:

$$\text{(12.10 a)} \qquad \check{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q + G')!}{\beta_q !} T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 + G', j_1, \dots, \beta_{m'} + G', j_{m'}},$$

wobei $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$ in (11.34) mit $\check{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$ bezeichnet wird, um vom vorgegebenen Extensor zu unterscheiden. Deswegen zeigen Satz 37 und Satz 49 uns die Extensoreigenschaft von

$$\text{(12.11 a)} \qquad \mathfrak{A} T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \frac{1}{\gamma+1} \left\{ \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m, \gamma+1, k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} - \check{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m, \gamma+1, k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} \right\},$$

welcher vom Grad $G_p - G'$, $\bar{G}_q - G'$ bzw. $G' - 1$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ sein soll. Dabei setzen wir einfachheitshalber

$$\text{(12.12)} \qquad \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q + G')!}{\beta_q !} T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 + G', j_1, \dots, \beta_{m'} + G', j_{m'}},$$

der auch ein gemischter Extensor und in bezug auf β_q vom Grad $\bar{G}_q - G'$ ist. Nochmal setzen wir $\gamma = 0$ in (12.11a), so folgt

$$\mathfrak{A} T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} - \check{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}.$$

Andererseits bekommt man aus (11.34)

$$\check{T}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} \qquad (1)$$

$$- \sum_{p=1}^{m} \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1}, \alpha_p + 1, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$-\sum_{q=1}^{m'}\frac{\bar G_q-G'-\beta_q+1}{\beta_q}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{q-1}j_{q-1},\,\beta_q-1,\,j_q\beta_{q+1}j_{q+1}\ldots\beta_{m'}j_{m'}}.$$

Somit ersehen wir die folgenden Beziehungen zwischen den beiden Extensoren

$$\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m\gamma k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}$$

und

$$\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m\gamma k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}}$$

derselben Art von denselben Graden $G_p-G'-1$, $\bar G_q-G'-1$ bzw. $G'-1$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ

$$\text{(12.13 a)}\qquad \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 0k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}} = \mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}}.$$

Deshalb bekommt man wieder den Extensor

$$\text{(12.11 b)}\qquad \mathfrak{A}^2T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m\gamma k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}} = \frac{1}{\gamma+1}\Big\{\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m,\,\gamma+1,\,k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}} - \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m,\,\gamma+1,\,k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\Big\},$$

welcher von den Graden $G_p-G'-1$, $\bar G_q-G'-1$ bzw. $G'-2$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ ist.

Ferner setzen wir in (12.11b) $\gamma=0$, dann ergibt sich der Extensor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^2T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}} &= \mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'}j_{m'}} - \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 1k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\\
&= \frac{1}{2}\prod_{q'=1}^{m'}(\beta_{q'}+1)\Big\{\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 2k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\\
&\quad+\sum_{p=1}^{m}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_{p-1}i_{p-1},\,\alpha_p+1,\,i_p\alpha_{p+1}i_{p+1}\ldots\alpha_m i_m 1k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}\\
&\quad+\sum_{q=1}^{m'}\frac{\bar G_q-G'-\beta_q}{\beta_q+1}\\
&\quad\times\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 1k}_{\beta_1+1,\,j_1,\ldots,\,\beta_{q-1}+1,\,j_{q-1}\beta_q j_q,\,\beta_{q+1}+1,\,j_{q+1},\ldots,\,\beta_{m'}+1,\,j_{m'}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}{}^{(1)}\\
&-\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 2k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\\
&+\check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 2k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\Big\}\\
&+\frac{1}{2}\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}\\
=\;&\frac{1}{2}\Big\{\sum_{p=1}^{m}\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1},\, \alpha_p+1,\, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}\\
&+\sum_{q=1}^{m'}\frac{\bar{G}_q-G'-\beta_q+1}{\beta_q}\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{q-1} j_{q-1},\, \beta_q-1,\, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \dots \beta_{m'} j_{m'}}\\
&+\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 1k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}-\Big(\mathfrak{S}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}\Big)^{(1)}\Big\},
\end{aligned}
$$

da nach (11.26) und (11.27)

$$
\begin{aligned}
&\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\\
=\;&\prod_{r=1}^{m'}(\beta_r+1)\Big\{\check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m,\, \gamma-1,\, k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}{}^{(1)}\\
&-\sum_{p=1}^{m}\check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_{p-1} i_{p-1},\, \alpha_p+1,\, i_p \alpha_{p+1} i_{p+1} \dots \alpha_m i_m,\, \gamma-1,\, k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\\
&-\sum_{q=1}^{m'}\frac{\bar{G}_q-G'-\beta_q}{\beta_q+1}\\
&\times\check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m,\, \gamma-1,\, k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{q-1}+1, j_{q-1} \beta_q j_q,\, \beta_{q+1}+1, j_{q+1}, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\Big\}
\end{aligned}
$$

ist. Somit gibt es

$$
\text{(12.13 } b) \quad \prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}^2 T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{m'}+1, j_{m'}} = \frac{1}{2}\mathfrak{S}^2\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m 0k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}},
$$

daraus bekommen wir wieder einen Extensor

$$
\text{(12.11 c)} \quad \mathfrak{A}^3 T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m \gamma k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}} = \frac{1}{\gamma+1}\Big\{\mathfrak{S}^2\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_m i_m,\, \gamma+1,\, k}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{m'} j_{m'}}
$$

$$-2\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}^2 T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m,\, \gamma+1,\, k}_{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\beta_1+1, j_1, \ldots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\Big\},$$

der von den Graden $G_p - G' - 2$, $\bar{G}_q - G' - 2$ bzw. $G' - 3$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ ist.

56. Im allgemeinen behaupten wir den

Satz 54. *Es sei* $T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \gamma k}_{\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$ *ein gemischter Extensor* $(m+m'+1)$*-ter Stufe, der von den Graden* G_p, $\bar{G}_q$ *bzw.* G *in bezug auf* α_p, β_q *bzw.* γ *ist, dann leiten die Operatoren* $\mathfrak{A}^H$, *welche durch die Rekursionsformeln*

$$(12.11)\quad \mathfrak{A}^{H+1} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \gamma k}_{\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \frac{1}{\gamma+1}\Big\{\mathfrak{S}^H \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m,\, \gamma+1,\, k}_{\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$-H\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}^H T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m,\, \gamma+1,\, k}_{\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1+1, j_1, \ldots, \beta_{m'}+1, j_{m'}}\Big\}$$

definiert sind, aus dem Extensor $T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \gamma k}_{\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$ *je einen neuen Extensor derselben Art, der von den Graden* $G_p - G' - H$, $\bar{G}_q - G' - H$ *bzw.* $G' - H - 1$ *in bezug auf* α_p, β_q *bzw.* γ *ist, her. Dabei setzt man (12.12),*

$$(12.11\text{a})\quad \mathfrak{A} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m \gamma k}_{\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \frac{1}{\gamma+1}\Big[\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m,\, \gamma+1,\, k}_{\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$-\sum_{\rho=0}^{\gamma+1}(-1)^\rho \binom{\gamma+1}{\rho}\rho\,!\sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda}\Big\{\prod_{p=1}^{m}\lambda_p\,!\Big\}^{-1}$$

$$\times\Big\{\prod_{q=1}^{m'}\frac{(\beta_q-\mu_q)\,!}{\beta_q\,!}\binom{\bar{G}_q - G' - \beta_q + \mu_q}{\mu_q}\Big\}$$

$$\times\overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m 0 k}_{\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}-\mu_{m'},\, j_{m'}}{}^{(\gamma+1-\rho)}\Big]$$

und G' *ist eine beliebige positive ganze Zahl nicht grösser als* G, *während* $H = 1, 2, \ldots, \bar{H}$, *wobei* $\bar{H} = \mathrm{Min}\,(G_p - G',\ \bar{G}_q - G',\ G' - 1)$.

Der Beweis des letzten Satzes kann bezüglich H induktiv durchgeführt werden, berücksichtigend die Beziehung

(12.14) $\mathfrak{A}^{H+1} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m \gamma k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$

$$= \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{\nu} \frac{\gamma!\, H!}{(\gamma+\nu+1)!\,(H-\nu)!} \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+\nu)!}{\beta_q!}$$

$$\times \mathfrak{S}^{H-\nu} \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m,\, \gamma+\nu+1,\, k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1+\nu,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+\nu,\, j_{m'}}$$

$$+ (-1)^{H+1} \frac{\gamma!\, H!}{(\gamma+H+1)!} \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+H)!}{\beta_q!}$$

$$\times \check{T}^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m,\, \gamma+H+1,\, k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1+H,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H,\, j_{m'}}$$

$$= \frac{1}{H+1} \sum_{\nu=0}^{H+1} \binom{\gamma+\nu}{\nu}^{-1} \binom{H+1}{\nu} \sum_{\sigma=1}^{\nu} (-1)^{\sigma} \binom{\gamma+\nu}{\gamma+\sigma} \sum_{\rho=0}^{H+1-\nu} (-1)^{H-\nu-\rho} \binom{H+1-\nu}{\rho}$$

$$\times \rho! \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \Big\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \Big\{ \frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\overline{G}_q - G' - \beta_q - H + \mu_q}{\mu_q} \Big\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m,\, \gamma+\nu,\, k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'}} \cdot (H+1-\nu-\rho)$$

$$+ (-1)^{H+1} \frac{1}{H+1} \frac{(H+1)!\, \gamma!}{(\gamma+H+1)!} \sum_{\rho=0}^{\gamma+H+1} (-1)^{\rho} \binom{\gamma+H+1}{\rho} \rho!$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \Big\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \Big\{ \frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\overline{G}_q - G' - \beta_q - H + \mu_q}{\mu_q} \Big\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m 0 k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'}} \cdot (\gamma+H+1-\rho),$$

die wir nach einiger Rechnung befinden können. In der Tat setzen wir in (12.14) $\nu+\rho=\sigma$ und $\gamma=0$ an, dann erhalten wir nach einiger Rechnung

$$\mathfrak{A}^{H+1} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_m i_m 0 k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1 j_1 \cdots \beta_{m'} j_{m'}}$$

$$= \frac{1}{H+1} \sum_{\nu=0}^{H+1} \binom{H+1}{\nu} \sum_{\sigma=\nu}^{H+1} (-1)^{H+1-\sigma} \binom{H+1-\nu}{\sigma-\nu} (\sigma-\nu)!$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\sigma-\nu-\lambda} \Big\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \Big\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \Big\{ \frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\overline{G}_q - G' - \beta_q - H + \mu_q}{\mu_q} \Big\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m \nu k}_{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'}} \cdot (H+1-\sigma)$$

$$= \frac{1}{H+1}\sum_{\sigma=0}^{H+1}(-1)^{H-\sigma+1}\binom{H+1}{\sigma}\sigma!\sum_{\nu=0}^{H-\sigma+1}\frac{1}{\nu!}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda}\sum_{(\mu_q)}^{\sigma-\nu-\lambda}\left\{\prod_{p=1}^{m}\lambda_p!\right\}^{-1}\prod_{q=1}^{m'}\left\{\frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!}\binom{\bar{G}_q-G'-\beta_q-H+\mu_q}{\mu_q}\right\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m\nu k}{}_{\beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'}}{}^{(H+1-\sigma)}$$

$$= \frac{1}{H+1}\left\{\prod_{q=1}^{m'}\beta_q\right\}^{-1}\mathfrak{S}^{H+1}\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m 0k}{}_{\beta_1-1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}-1,\, j_{m'}}.$$

Danach erkennen wir wegen Satz 37 die Extensoreigenschaft von (12.11), worin $H+1$ anstatt H gesetzt wird.

57. Auf ganz analoge Weise lautet der folgende Satz, welcher eine exkovariante Indizes γ betrifft:

Satz 55. *Es sei $T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}$ ein gemischter Extensor $(m+m'+1)$-ter Stufe, der von den Graden G_p, $\bar{G}_q$ bzw. G in bezug auf α_p, β_q bzw. γ ist, dann können wir mittels der Operatoren $\mathfrak{A}^H$, welche durch die Rekursionsformeln*

$$\mathfrak{A}^{H+1}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} = \mathfrak{S}^H T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} - H\prod_{q=1}^{m'}(\beta_q+1)\mathfrak{A}^H T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1+1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+1,\, j_{m'}\gamma k} \tag{12.15}$$

definiert werden, aus dem Extensor $T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}$ je einen anderen Extensor derselben Art, der von den Graden $G_p-G'-H$, $\bar{G}_q-G'-H$ bzw. $G'-H-1$ in bezug auf α_p, β_q bzw. γ ist, herleiten. Hierbei werden gesetzt

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} = \frac{(\gamma+G-G')!}{\gamma!}\prod_{q=1}^{m'}\frac{(\beta_q+G')!}{\beta_q!} \times T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1+G',\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+G',\, j_{m'},\, \gamma+G-G',\, k}, \tag{12.16}$$

$$\mathfrak{A}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} = \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} - G!\,\check{T}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k}, \tag{12.15a}$$

$$\check{T}^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1\ldots\beta_{m'} j_{m'}\gamma k} = \frac{G'!}{G!}\sum_{\rho=0}^{G'-\gamma}\frac{(-1)^\rho}{\gamma!\,(G'-\gamma-\rho)!} \tag{12.17}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p ! \right\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \left\{ \frac{(\beta_q-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\bar{G}_q-G'-\beta_q+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}{}_{\beta_1-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}-\mu_{m'},\, j_{m'} G' k}^{(G'-\gamma-\rho)}$$

und G' darf eine beliebige positive ganze Zahl aber nicht grösser als G sein, während $H=1, 2, \ldots, \bar{H}$, wobei

$$\bar{H} = \mathrm{Min}\,(G_p - G',\ \bar{G}_q - G',\ G'-1).$$

Entsprechend (12.14), ergibt sich die Beziehung

$$(12.18) \quad \mathfrak{A}^{H+1} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m}{}_{\beta_1 j_1 \ldots \beta_{m'} j_{m'} \gamma k}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{\nu} \frac{H!}{(H-\nu)!} \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+\nu)!}{\beta_q!} \mathfrak{S}^{H-\nu} \overset{0}{T}{}^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m}{}_{\beta_1+\nu,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+\nu,\, j_{m'} \gamma k}$$

$$+ (-1)^{H+1} H! \prod_{q=1}^{m'} \frac{(\beta_q+H)!}{\beta_q!} \check{T}{}^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_m i_m}{}_{\beta_1+H,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H,\, j_{m'} \gamma k}$$

$$= \frac{1}{H+1} \sum_{\nu=1}^{H+1} \nu! \binom{H+1}{\nu} \sum_{\rho=0}^{H+1-\nu} (-1)^{H+1-\nu-\rho} \binom{H+1-\nu}{\rho} \rho!$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \right\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \left\{ \frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\bar{G}_q-G'-\beta_q-H+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}{}_{\beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'} \gamma k}^{(H+1-\nu-\rho)}$$

$$+ (-1)^{H+1} \frac{H!\, G'!}{G!} \sum_{\rho=0}^{G'-\gamma} (-1)^{\rho} \frac{1}{\gamma!\,(G'-\gamma-\rho)!}$$

$$\times \sum_{(\lambda_p)}^{\lambda} \sum_{(\mu_q)}^{\rho-\lambda} \left\{ \prod_{p=1}^{m} \lambda_p! \right\}^{-1} \prod_{q=1}^{m'} \left\{ \frac{(\beta_q+H-\mu_q)!}{\beta_q!} \binom{\bar{G}_q-G'-\beta_q-H+\mu_q}{\mu_q} \right\}$$

$$\times \overset{0}{T}{}^{\alpha_1+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_m+\lambda_m,\, i_m}{}_{\beta_1+H-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_{m'}+H-\mu_{m'},\, j_{m'} G' k}^{(G'-\gamma-\rho)}.$$

Bemerkung. Wiederholte Anwendungen der Operatoren (12.11) und (12.15), von denen jeder eine verschiedene Indizes betrifft, werden uns solche Operatoren als die Verallgemeinerung von Satz 54 sowie Satz 55 angeben, die mehrere verschiedene Indizes betreffen. Hierbei dürfen die betreffenden Indizes nicht nur exkontra- oder exkovariant sondern auch ein Teil exkontravariant und die anderen exkovariant sein. Z.B. $\mathfrak{A}^H T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r \gamma_1 k_1 \ldots \gamma_t k_t}{}_{\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s \delta_1 l_1 \ldots \delta_u l_u}$, welcher t exkontra- und u exkovariante Indizes $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ und $\delta_1, \ldots, \delta_u$ betrifft. Diese Operatoren leiten aus einem Extensor je einen anderen derselben Art aber von verschiedenen Graden her, dessen ausführlicher Ausdruck sehr kompliziert ist und dessen wirkliche Aufstellung demgemäss hier nicht hingeschrieben wird.

§13. Die von einem Extensor höherer Stufe abgeleiteten gewöhnlichen Tensoren. Symmetrie und Schiefsymmetrie eines Extensors höherer Stufe.

'58. Es sei ein Extensor höherer Stufe z.B. $T^{\alpha i \beta j}_{\cdots\cdots\gamma k}$ gegeben. Dann haben wir schon die gewöhnliche Tensoreigenschaft von $T^{0 i 0 j}_{\cdots\cdots G' k}$ eingesehen, während G' der Grad in bezug auf die Indizes γ ist, insofern seine Bestimmungszahlen $T^{0 i 0 j}_{\cdots\cdots G' k}$ nicht alle gleich Null sind, Wenn dagegen

$$T^{0 i 0 j}_{\cdots\cdots G' k} = 0 \qquad \text{für} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N$$

sind, so ist $T^{1 i 0 j}_{\cdots\cdots G' k}$, $T^{0 i 1 j}_{\cdots\cdots G' k}$ und $T^{0 i 0 j}_{\cdots\cdots G'-1, k}$ je ein gewöhnlicher Tensor. insofern ihre Bestimmungszahlen nicht alle verschwindend sind. Im allgemeinen bestätigen wir den

Satz 56. *Von den Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors* $T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$ *seien in bezug auf jeden Wert von* $p = 1, 2, \dots, r$ *und* $q = 1, 2, \dots, s$

$$T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = 0 \tag{13.1}$$

für $a_p < A_p$, $a_1 \leqq A_1, \dots, a_{p-1} \leqq A_{p-1}$, $a_{p+1} \leqq A_{p\ 1}, \dots, a_r \leqq A_r$, $\beta_1 \geqq B_1, \dots, \beta_s \geqq B_s$ *und für* $a_1 \leqq A_1, \dots, a_r \leqq A_r$, $\beta_q > B_q$, $\beta_1 \geqq B_1, \dots, \beta_{q-1} \geqq B_{q-1}$, $\beta_{q+1} \geqq B_{q+1}, \dots, \beta_s \geqq B_s$, *es sei aber wenigstens irgendeine von den Grössen* $T^{A_1 i_1 \dots A_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots B_1 j_1 \dots B_s j_s}$ *von Null verschieden, dann sind die Grössen* $T^{A_1 i_1 \dots A_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots B_1 j_1 \dots B_s j_s}$ *die Bestimmungszahlen eines gewöhnlichen Tensors mit* r *kontra- und* s *kovarianten Indizes* i_p *und* j_q[1].

Der Beweis dieses Satzes ist nicht so schwer. In der Tat folgt z.B. wegen der Transformationsregel des Extensors

$$T^{A_1 i_1 \dots A_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots B_1 j_1 \dots B_s j_s} = \prod_{p=1}^{r} \frac{\partial x^{(A_p) i_p}}{\partial \bar{x}^{(\alpha_p) a_p}} \prod_{q=1}^{s} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta_q) b_q}}{\partial x^{(B_q) j_q}} T^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_r a_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 b_1 \dots \beta_s b_s}$$

$$= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{a_1}} \prod_{p=2}^{r} \frac{\partial x^{(A_p) i_p}}{\partial \bar{x}^{(\alpha_p) a_p}} \prod_{q=1}^{s} \frac{\partial \bar{x}^{(\beta_q) b_q}}{\partial x^{(B_q) j_q}} T^{A_1 a_1 \alpha_2 a_2 \dots \alpha_r a_r}_{\cdots\cdots\cdots\cdots \beta_1 b_1 \dots \beta_s b_s},$$

(1) Es ist zu bemerken, dass dieser Satz in enger Beziehung mit Satz 37 steht.

da nach der Voraussetzung (13.1) für $p=1$ die Glieder auf der rechten Seite für $a_1 = 0, 1, \dots, A_1-1$ alle verschwinden und nur die Glieder für $a_1 = A_1$ nicht gleich Null bleiben mögen. Weitergehend in derselben Wege der Reihe nach für $p = 2, \dots, r$ und $q = 1, 2, \dots, s$, lässt die Voraussetzung (13.1) uns schliesslich zur Gleichung

$$T^{A_1 i_1 \dots A_r i_r}{}_{B_1 j_1 \dots B_s j_s} = \prod_{p=1}^{r} \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{a_p}} \prod_{q=1}^{s} \frac{\partial \bar{x}^{b_q}}{\partial x^{j_q}} T^{A_1 a_1 \dots A_r a_r}{}_{B_1 b_1 \dots B_s b_s}$$

gelangen, welche gerade die Richtigkeit der Behauptung des Satzes aussagt.

59. Ausser den oben-erwähnten Tensoren ergeben sich noch viele Tensoren, die von einem Extensor höherer Stufe abgeleitet werden, z.B. die Tensoren $\mathfrak{S}^H T^{0i_1 \dots 0i_r}{}_{G_1'-H, j_1, \dots, G_s'-H, j_s}$. Dieser Zustand regt die Frage an, ob noch andere gewöhnliche Tensoren aus dem Extensor erhalten werden können? Aber diese Frage beantwortet sich leider im allgemeinen mit nein. Damit solche gewöhnliche Tensoren sich ergeben, muss der ursprüngliche Extensor immer irgendwelche Bedingungen erfüllen.

Im Folgenden möchten wir dafür zwei Beispiele geben.

Als das erste Beispiel nehmen wir einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe $T^{\alpha i \beta j}$, für den T^{0i0j} in bezug auf i und j symmetrisch ist, d.h.

$$T^{0i0j} - T^{0j0i} = 0 \; .$$

Diese Beziehung ist mit der Tatsache gleichbedeutend, dass die Bestimmungszahlen des Extensors

$$T^{[\alpha i \beta j]} \equiv \frac{1}{2}(T^{\alpha i \beta j} - T^{\beta j \alpha i})$$

für $\alpha = \beta = 0$ identisch verschwindend sind. Also kann man nach Satz 56 auf die Tensoreigenschaft von $T^{[1i0j]}$ schliessen. Wenn dazu auch $T^{[1i0j]} = 0$ für alle Werte von i und j seien, so soll $T^{[1i1j]}$ und $T^{[2i0j]}$ je ein gewöhnlicher Tensor sein. Im allgemeinen ist $T^{[A+1, iBj]}$ und $T^{[Ai, B+1, j]}$ je ein gewöhnlicher Tensor, während

$$T^{[\alpha i \beta j]} = 0 \qquad \text{für} \quad \alpha \leqq A \, , \quad \beta \leqq B \, .$$

Im Falle, dass die letzte Beziehung für alle Werte von α und β gilt, wird man unschwer den Begriff "Symmetrie eines Extensors" erfassen.

Wir sind somit jetzt in der Lage, die Symmetrie eines Extensors zu definieren. Die Definition stellt sich so vor:

Ein exkontra- bzw. exkovarianter Extensor zweiter Stufe $T^{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2}$ bzw. $T_{\beta_1 j_1 \beta_2 j_2}$ heisst *symmetrisch*, für den die Beziehungen gelten

$$T^{\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2} - T^{\alpha_2 i_2 \alpha_1 i_1} = 0 \quad \text{bzw.} \quad T_{\beta_1 j_1 \beta_2 j_2} - T_{\beta_2 j_2 \beta_1 j_1} = 0\,,$$

die einfachheitshalber als

$$2\,T^{[\alpha_1 i_1 \alpha_2 i_2]} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad 2\,T_{[\beta_1 j_1 \beta_2 j_2]} = 0$$

abgekürzt werden. Im allgemeinen verstehen wir unter einem symmetrischen exkontra- bzw. exkovarianten Extensor höherer Stufe einen solchen, der die Beziehungen erfüllt

$$T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} = T^{\alpha_{\kappa_1} i_{\kappa_1} \cdots \alpha_{\kappa_r} i_{\kappa_r}} \quad \text{bzw.} \quad T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_r j_r} = T_{\beta_{\kappa_1} j_{\kappa_1} \cdots \beta_{\kappa_r} j_{\kappa_r}}\,,$$

worin $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ eine Permutation von $1, 2, \ldots, r$ bezeichnet.

Ein Extensor z.B. $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}$ heisst dagegen *schiefsymmetrisch*, wenn die Beziehungen bestehen

$$T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} = T^{\alpha_{\kappa_1} i_{\kappa_1} \cdots \alpha_{\kappa_r} i_{\kappa_r}} \quad \text{oder} \quad T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} = -T^{\alpha_{\kappa_1} i_{\kappa_1} \cdots \alpha_{\kappa_r} i_{\kappa_r}}$$

je nachdem, ob $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_r$ eine gerade oder ungerade Permutation von $1, 2, \ldots, r$ ist.

Man kann offenbar auch von der Symmetrie oder Schiefsymmetrie von einem Teil der Indizes eines Extensors so reden, wie von derjenigen eines gewöhnlichen Tensors.

60. Betrachtet man als das zweite Beispiel wieder einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe $T^{\alpha i \beta j}$, der die Bedingung erfüllt, dass die Determinante $|T^{0i0j}|$ von Null verschieden ist. Dann ergibt sich bekanntlich ein solcher kovarianter Tensor T_{ij}, dass

$$T^{0i0j}\,T_{ik} = \delta^j_k \quad \text{und} \quad T^{0i0j}\,T_{kj} = \delta^i_k\,. \tag{13.2}$$

Aus der Transformationsregel

$$T^{1i0j} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\,T^{1a0b} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(1)}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\,T^{0a0b}$$

folgt daraus sogleich

(13.3)
$$T_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^k}T_b^a - \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(1)}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k},$$

setzend

(13.4)
$$T_k^i = -T^{1i0j}T_{kj}.$$

Es ist jetzt nicht schwer zu erkennen, dass

(13.5a)
$$\overset{01}{T}{}^{ij} = T^{0i1j} + T_k^j T^{0i0k}$$

und

(13.5b)
$$\overset{11}{T}{}^{ij} = T^{1i1j} + T_k^j T^{1i0k} + T_k^i T^{0k1j} + T_k^i T_h^j T^{0k0h}$$

je ein kontravarianter gewöhnlicher Tensor ist. Im allgemeinen lautet der

Satz 57. *Wenn die Determinante* $|T^{0i0j}|$, *die von den Bestimmungszahlen* T^{0i0j} *eines exkontravarianten Extensors zweiter Stufe* $T^{\alpha i\beta j}$ *gebildet ist, nicht verschwindet, so sind*

(13.5)
$$\overset{\alpha\beta}{T}{}^{ij} = \sum_{\gamma=0}^{\alpha}\sum_{\delta=0}^{\beta}\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\delta}\overset{\alpha-\gamma}{T_h^i}\overset{\beta-\delta}{T_k^j}T^{\gamma h\delta k}$$

für jeden Wert von $\alpha = 0, 1, \ldots, G_1$ *und* $\beta = 0, 1, \ldots, G_2$ *je ein kontravarianter gewöhnlicher Tensor zweiter Stufe, während* G_1 *und* G_2 *die Grade des vorgegebenen Extensors sind. Darin definieren sich* $\overset{\lambda}{T_h^i}$ *durch die Rekursionsformeln*

(13.6)
$$\overset{0}{T_h^i} = \delta_h^i, \quad \overset{1}{T_h^i} = T_h^i = -T^{1i0j}T_{hj},$$
$$\overset{\lambda+1}{T_h^i} = \overset{\lambda}{T_h^{i(1)}} + T_k^i\overset{\lambda}{T_h^k}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots .$$

Beweis. Es ist nicht unmöglich, den Satz unter Berücksichtigung auf die Transformationsregel direkt zu beweisen, wenn man sich um die Komplizierung sowie die Langeweile im Beweisgang nicht kümmert. Aber wir wollen ihn nun durch eine andere Methode beweisen, die viel einfacher ist. Der Ausdruck (13.3) lernt uns, dass T_k^i sich bei jeder Koordinatentransformation wirklich eben so wie die affinen Übertragungsparameter verändern. Daraus folgt die Vektoreigenschaft von

$$\overset{1}{V}{}^i = V^{i(1)} + T_h^i V^h$$

noch allgemeiner

$$\overset{\alpha}{V}{}^i = \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^i_h V^{h(\gamma)}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots \tag{13.7}$$

für einen beliebigen kontravarianten Vektor V^i. Der Beweis von (13.7) ist leicht. Nämlich wir können die Richtigkeit von (13.7) durch Induktion bezüglich α so zeigen:

$$\begin{aligned}\overset{\alpha}{V}{}^{i(1)} + T^i_k \overset{\alpha}{V}{}^k &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \Big\{ \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^i_h V^{h(\gamma+1)} + \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^{i(1)}_h V^{h(\gamma)} \Big\} + T^i_k \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^k_h V^{h(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^i_h V^{h(\gamma+1)} + \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma+1}{T}{}^i_h V^{h(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma=1}^{\alpha+1} \binom{\alpha}{\gamma-1} \overset{\alpha-\gamma+1}{T}{}^i_h V^{h(\gamma)} + \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma+1}{T}{}^i_h V^{h(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{\gamma} \overset{\alpha+1-\gamma}{T}{}^i_h V^{h(\gamma)} \\ &\equiv \overset{\alpha+1}{V}{}^i ,\end{aligned}$$

was zu beweisen ist, da $\overset{\alpha}{V}{}^{i(1)} + T^i_k \overset{\alpha}{V}{}^k$ der linken Seite die Bestimmungszahlen eines Vektors geben, wenn $\overset{\alpha}{V}{}^i$ ein Vektor ist.

Der Ausdruck (13.7) enthält die verschiedenen Ableitungen $V^{i(\gamma)}$ der Bestimmungszahlen des Vektors V^i, aber die Vektoreigenschaft von (13.7) hängt nicht eigentlich von den Differentiationen selbst ab, sondern von ihrem Transformationszustande. Ersetze man somit alle $V^{i(\gamma)}$ in (13.7) durch z.B. die entsprechenden Bestimmungszahlen $V^{\gamma i}$ eines exkontravarianten Extensors erster Stufe, die sich bei jeder Koordinatentransformation auf gerade dieselbe Weise wie $V^{i(\gamma)}$ transformieren, dann liefert (13.7) auch die gewöhnlichen Vektoren

$$\overset{\alpha}{V}{}^i = \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^i_h V^{\gamma h}. \tag{13.8}$$

Alle Bestimmungszahlen eines Extensors zweiter Stufe $T^{\alpha i \beta j}$ verändern sich nach eben derselben Transformationsregel wie die entsprechenden Produkte $V^{\alpha i} W^{\beta j}$ der Bestimmungszahlen von irgend zwei Extensoren erster Stufe und deswegen folgt die Tensoreigenschaft von (13.5) unmittelbar aus der Tensoreigenschaft von

$$\overset{\alpha}{V}{}^i \overset{\beta}{W}{}^j = \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \sum_{\delta=0}^{\beta} \binom{\alpha}{\gamma} \binom{\beta}{\delta} \overset{\alpha-\gamma}{T}{}^i_h \overset{\beta-\delta}{T}{}^j_k V^{\gamma h} W^{\delta k},$$

da die Tensoreigenschaft von $\overset{\alpha}{V^i}\overset{\beta}{W^j}$ nicht von der Tatsache "Produkt" selbst sondern nur von ihrem Transformationsverfahren abhängt.

Der analoge Satz für einen exkovarianten Extensor besteht:

Satz 58. *Es sei $T_{\alpha i \beta j}$ ein exkovarianter Extensor zweiter Stufe vom Grad G_1 bzw. G_2 in bezug auf α bzw. β. Wenn die Determinante $|T_{G_1 i G_2 j}|$ von Null verschieden ist, dann ist*

$$T_{\underset{\alpha\beta}{ij}} = \sum_{\gamma=0}^{\alpha}\sum_{\delta=0}^{\beta}\binom{G_1-\gamma}{G_1-\alpha}\binom{G_2-\delta}{G_2-\beta}\underset{\alpha-\gamma}{T_i^h}\,\underset{\beta-\delta}{T_j^k}\,T_{G_1-\gamma,\, h,\, G_2-\delta,\, k} \tag{13.9}$$

für jeden Wert von $\alpha = 0, 1, \dots, G_1$ und $\beta = 0, 1, \dots, G_2$ je ein kovarianter gewöhnlicher Tensor zweiter Stufe, wobei $\underset{\lambda}{T_i^h}$ durch die folgenden Ausdrücke bestimmt werden:

$$\begin{gathered} T^{ij}T_{G_1 i G_2 k} = \delta_k^j, \qquad T^{ij}T_{G_1 k G_2 j} = \delta_k^i, \\ \underset{0}{T_h^i} = \delta_h^i, \qquad \underset{1}{T_h^i} = -\frac{1}{G_1}T_{G_1-1,\, hG_2 j}T^{ij}, \\ \underset{\lambda+1}{T_h^i} = \underset{\lambda}{T_h^{i(1)}} + \underset{1}{T_h^k}\underset{\lambda}{T_k^i}, \qquad \lambda = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{13.10}$$

Der Satz wird auf die analoge Weise wie Satz 57 bewiesen, berücksichtigend, dass $\binom{G}{\alpha}V_i^{(G-\alpha)}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors erster Stufe sind, wenn V_i ein kovarianter Vektor ist, und dass $V_i^{(1)} + \underset{1}{T_i^h}V_h$ folglich $\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\underset{\alpha-\gamma}{T_i^h}V_h^{(\gamma)}$ auch ein kovarianter Vektor ist. Den ausführlichen Beweis des Satzes lassen wir demgemäss hier aus, aber wir wollen nun die Bemerkung hinzufügen, dass $\overset{1}{T_h^i}$ und $-\underset{1}{T_h^i}$ sich bei jeder Koordinatentransformation auf eben dieselbe Weise transformieren und ihre Transformationsregel ist nichts anderes als diejenige der affinen Übertragungsparameter. Somit erhalten wir auch gewöhnliche Tensoren, wenn $\overset{1}{T_h^i}$ in (13.5) und $-\underset{1}{T_h^i}$ in (13.9) durch die affinen Übertragungsparameter Γ_h^i ersetzt werden. Dieser Gedanke führt uns zum

Satz 59. *Wenn die Funktionen Γ_h^i vorgegeben sind, die bei jeder Koordinatentransformation auf dieselbe Weise wie die affinen Übertragungsparameter sich verändern, dann können wir aus jedem Extensor z.B. $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ immer die gewöhnlichen Tensoren*

$$(13.11)\quad \overset{\alpha_1\cdots\alpha_r}{T}{}^{i_1\cdots i_r}_{\beta_1\cdots\beta_s\; j_1\cdots j_s} = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\gamma_r=0}^{\alpha_r}\sum_{\delta_1=0}^{\beta_1}\cdots\sum_{\delta_s=0}^{\beta_s}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\alpha_r}{\gamma_r}$$

$$\times\binom{G_1-\delta_1}{G_1-\beta_1}\cdots\binom{G_s-\delta_s}{G_s-\beta_s}$$

$$\times \overset{\alpha_1-\gamma_1}{\Gamma}{}^{i_1}_{h_1}\cdots\overset{\alpha_r-\gamma_r}{\Gamma}{}^{i_r}_{h_r}\underset{\beta_1-\delta_1}{\Gamma}{}^{k_1}_{j_1}\cdots\underset{\beta_s-\delta_s}{\Gamma}{}^{k_s}_{j_s}$$

$$\times T^{\gamma_1 h_1\cdots\gamma_r h_r}{}_{G_1-\delta_1,\,k_1,\,\ldots,\,G_s-\delta_s,\,k_s}$$

ausführen, wobei

$$(13.12)\quad \begin{aligned} &\overset{0}{\Gamma}{}^i_h = \underset{0}{\Gamma}{}^i_h = \delta^i_h\,, && \overset{1}{\Gamma}{}^i_h = -\underset{1}{\Gamma}{}^i_h = \Gamma^i_h\,,\\ &\overset{\lambda+1}{\Gamma}{}^i_h = \overset{\lambda}{\Gamma}{}^{i(1)}_h + \overset{1}{\Gamma}{}^i_k\overset{\lambda}{\Gamma}{}^k_h\,, && \underset{\lambda+1}{\Gamma}{}^i_h = \underset{\lambda}{\Gamma}{}^{i(1)}_h + \underset{1}{\Gamma}{}^k_h\underset{\lambda}{\Gamma}{}^i_k\,, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

61. Nach Einführung der Tensoren von der Art (13.11) kann man den folgenden wichtigen Satz schliessen.

Satz 60. *Es seien die Funktionen* $\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ *von einigen exkontra-, exkovarianten oder gemischten Extensoren z.B.* $T^{\alpha_1 h_1\alpha_2 h_2}$ *und* $U_{\beta_1 k_1\beta_2 k_2}$ *gegeben, welche für jede Koordinatentransformation die Tensoreigenschaft besitzen und deren Funktionalformen dazu auch erhalten bleiben. Dann müssen die Funktionen* $\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ *nur von den aus den Extensoren mittels (13.11) abgeleiteten gewöhnlichen Tensoren z.B.* $\overset{\alpha_1\alpha_2}{T}{}^{h_1h_2}$ *und* $\underset{\beta_1\beta_2}{U}{}_{k_1k_2}$ *und nicht von anderem abhängig sein, und dabei sind ihre Funktionalformen ganz ähnlich, nämlich z.B.*

$$(13.13)\quad \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\left(T^{\alpha_1h_1\alpha_2h_2},\ U_{G_1-\beta_1,\,k_1,\,G_2-\beta_2,\,k_2}\right)$$

$$= \Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\left(\overset{\alpha_1\alpha_2}{T}{}^{h_1h_2},\ \underset{\beta_1\beta_2}{U}{}_{k_1k_2}\right).$$

Beweis. Nun wollen wir am Beispiel den Satz beweisen, da der Satz im allgemeinen Falle auf ganz analoge Weise bewiesen werden kann. Wir erhalten nach (13.11) durch Auflösung in bezug auf $T^{\alpha_1h_1\alpha_2h_2}$ oder $U_{G_1-\beta_1,\,k_1,\,G_2-\beta_2,\,k_2}$

$$T^{\alpha_1 h_1 \alpha_2 h_2} = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_1}{\gamma_1}\binom{\alpha_2}{\gamma_2} \overset{\alpha_1-\gamma_1}{\mathfrak{C}}{}^{h_1}_{i_1} \overset{\alpha_2-\gamma_2}{\mathfrak{C}}{}^{h_2}_{i_2} \overset{\gamma_1\gamma_2}{T}{}^{i_1 i_2},$$

(13.14)

$$U_{G_1-\beta_1,\, k_1,\, G_2-\beta_2,\, k_2} = \sum_{\delta_1=0}^{\beta_1} \sum_{\delta_2=0}^{\beta_2} \binom{G_1-\delta_1}{G_1-\beta_1}\binom{G_2-\delta_2}{G_2-\beta_2} \underset{\beta_1-\delta_1}{\mathfrak{C}}{}^{j_1}_{k_1} \underset{\beta_2-\delta_2}{\mathfrak{C}}{}^{j_2}_{k_2} \underset{\delta_1\delta_2}{U}{}_{j_1 j_2},$$

wobei

$$\sum_{\gamma=\delta}^{\alpha} \binom{\alpha-\delta}{\gamma-\delta} \overset{\alpha-\gamma}{\mathfrak{C}}{}^{h}_{i} \overset{\gamma-\delta}{\Gamma}{}^{i}_{k} = \delta^h_k \delta_{\alpha\delta},$$

(13.15)

$$\sum_{\gamma=\delta}^{\beta} \binom{\beta-\delta}{\beta-\gamma} \underset{\beta-\gamma}{\mathfrak{C}}{}^{j}_{k} \underset{\gamma-\delta}{\Gamma}{}^{h}_{j} = \delta^h_k \delta_{\beta\delta}.$$

Wegen (13.15) müssen $\overset{\alpha-\gamma}{\mathfrak{C}}{}^i_j$ und $\underset{\beta-\gamma}{\mathfrak{C}}{}^j_k$ von der Form sein

$$\overset{0}{\mathfrak{C}}{}^i_j = \underset{0}{\mathfrak{C}}{}^i_j = \delta^i_j,$$

(13.16a)
$$\overset{\lambda}{\mathfrak{C}}{}^i_j = -\overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j + \left[\overset{\lambda-1}{\Gamma}, \overset{\lambda-2}{\Gamma}, \ldots, \overset{1}{\Gamma}\right],$$

$$\underset{\lambda}{\mathfrak{C}}{}^i_j = -\underset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j + \left[\underset{\lambda-1}{\Gamma}, \underset{\lambda-2}{\Gamma}, \ldots, \underset{1}{\Gamma}\right],$$

wobei [ ] eine Funktion von den in den eckigen Klammern enthaltenen Γ bedeutet. Man erkennt leicht die Ausdrückbarkeit von $\underset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j$ durch $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j, \overset{\lambda-1}{\Gamma}{}^i_j, \ldots, \overset{1}{\Gamma}{}^i_j$, somit soll jedes $\underset{\lambda}{\mathfrak{C}}{}^i_j$ auch durch $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j, \overset{\lambda-1}{\Gamma}{}^i_j, \ldots, \overset{1}{\Gamma}{}^i_j$ ausdrückbar sein, d.h.

(13.16b)
$$\underset{\lambda}{\mathfrak{C}}{}^i_j = \overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j + \left[\overset{\lambda-1}{\Gamma}, \overset{\lambda-2}{\Gamma}, \ldots, \overset{1}{\Gamma}\right].$$

Setzen wir statt $T^{\alpha_1 h_1 \alpha_2 h_2}$ und $U_{G_1-\beta_1,\, k_1,\, G_2-\beta_2,\, k_2}$ auf der linken Seite von (13.13) die rechten Seiten von (13.14) ein, dann werden $\Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}$ die Funktion von den Tensoren $\overset{\gamma_1\gamma_2}{T}{}^{i_1 i_2}$, $\underset{\delta_1\delta_2}{U}{}_{j_1 j_2}$ und von $\underset{\lambda}{\mathfrak{C}}{}^j_k$, folglich von $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j$, wie (13.16ab) zeigen.

$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^i_j$ bekommt andererseits bei einer Koordinatentransformation die Ableitungen von $\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$ nach dem Parameter t und die höchsten Ableitungen $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\lambda)}$ sind darin in der Gestalt

$$\overset{\lambda}{\Gamma}{}^{i}_{j} = -\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\lambda)} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^j} + [*] \tag{13.17}$$

enthalten, wobei $[*]$ die Glieder bedeutet, die nur die als λ niedrigen Ableitungen von $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$ enthalten. Da nach einer Koordinatentransformation $\Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}$ wegen seiner Tensoreigenschaft nur $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$ aber nicht ihre Ableitungen bekommt, so muss nach der Voraussetzung und (13.17) die folgende Beziehung gelten:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}\left(\overset{\gamma_1\gamma_2}{T}{}^{h_1 h_2}, \underset{\delta_1\delta_2}{U}{}_{k_1 k_2}, \overset{\lambda}{\Gamma}{}^{j}_{k}\right) \\
&= \Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}\left(\frac{\partial x^{h_1}}{\partial \bar{x}^{c_1}} \frac{\partial x^{h_2}}{\partial \bar{x}^{c_2}} \overset{\gamma_1\gamma_2}{T}{}^{c_1 c_2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{\partial \bar{x}^{d_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \bar{x}^{d_2}}{\partial x^{k_2}} \underset{\delta_1\delta_2}{U}{}_{d_1 d_2}, -\left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\lambda)} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k} + [*]\right) \\
&= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \bar{x}^{a_r}} \frac{\partial \bar{x}^{b_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{b_s}}{\partial x^{j_s}} \\
&\qquad \times \Phi^{a_1 \cdots a_r}_{\cdots\cdots b_1 \cdots b_s}\left(\overset{\gamma_1\gamma_2}{T}{}^{c_1 c_2}, \underset{\delta_1\delta_2}{U}{}_{d_1 d_2}, \overset{\lambda}{\Gamma}{}^{a}_{b}\right).
\end{aligned}$$

Wenn die grösste Zahl μ von den oberen Indizes λ von $\overset{\lambda}{\Gamma}{}^{j}_{k}$, die in $\Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}$ enthalten sind, gleich 1 oder grösser als 1 sei, differenzieren wir die letzte Gleichung nach $\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)^{(\mu)}$, dann ergibt sich

$$-\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial \overset{\mu}{\Gamma}{}^{j}_{k}} \Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s} = 0,$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial \overset{\mu}{\Gamma}{}^{j}_{k}} \Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s} = 0,$$

d.h. $\Phi^{i_1 \cdots i_r}_{\cdots\cdots j_1 \cdots j_s}$ enthalten nicht $\overset{\mu}{\Gamma}{}^{j}_{k}$, nämlich Γ^{j}_{k} sowie ihre sukzessiven Ableitungen. Demgemäss dürfen wir bei der Einsetzung von (13.14) in die linke Seite von (13.13) alle $\overset{\mu}{\Gamma}{}^{j}_{k}$, folglich wegen (13.16 ab) auch alle $\overset{\mu}{\mathfrak{C}}{}^{j}_{k}$ und $\underset{\mu}{\mathfrak{C}}{}^{j}_{k}$, für $\mu > 0$ gleich Null ansehen, in anderen

Worten, $T^{\alpha_1 h_1 \alpha_2 h_2}$ bzw. $U_{G_1-\beta_1,\,k_1,\,G_2-\beta_2,\,k_2}$ auf der linken Seite von (13.13) darf durch $\overset{\alpha_1\alpha_2}{T}{}^{h_1h_2}$ bzw. $\underset{\beta_1\beta_2}{U}{}_{k_1k_2}$ ersetzt werden. Jetzt ist die Richtigkeit von (13.13) bewiesen.

Gemäss diesem Satze schliessen wir ohne weiteres

Satz 61. *Der durch Überschiebungen einiger Extensoren sich ergebende Skalar (bzw. Tensor) kann sich durch die Summe von solchen Skalaren (bzw. Tensoren) darstellen, die durch Überschiebungen der gewöhnlichen Tensoren von der Art (13.11) erhalten werden, wenn irgendwelche Funktionen Γ^i_h gegeben sind, die bei jeder Koordinatentransformation eben so wie die affinen Übertragungsparameter sich verändern.*

Z.B.

$$T^{\alpha i\beta j}V_{\alpha i}W_{\beta j} = \sum_{\alpha=0}^{G_1}\sum_{\beta=0}^{G_2} \overset{\alpha\beta}{T}{}^{ij} \underset{G_1-\alpha}{V_i} \underset{G_2-\beta}{W_j}\,. \tag{13.18}$$

§14. Erweiterung der Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ auf die Extensoren höherer Stufe.

62. In §12 haben wir den Operator $\mathfrak{S}$ für die Extensoren höherer Stufe durch die Eliminationsmethode aus der Transformationsregel durchgeführt. Jetzt wollen wir eine andere Methode erzählen, die uns auch den Operator $\mathfrak{S}$ für die Extensoren höherer Stufe liefert. Zuerst wird insbesondere ein exkontravarianter Extensor zweiter Stufe $T^{\alpha i\beta j}$ in Betracht gezogen, um das Verständnis zu erleichtern. Nimmt man dazu einen beliebigen kovarianten Vektor W_j an, so gibt $W_{\beta j} \equiv \binom{G'}{\beta} W_j^{\,;(G'-\beta)}$ einen exkovarianten Extensor erster Stufe vom Grad G', wie Satz 4 gezeigt hat. G' ist dabei kleiner als die Gradzahl des Extensors $T^{\alpha i\beta j}$ in bezug auf β. Wir haben dann durch Überschiebung einen exkontravarianten Extensor erster Stufe

$$V^{\alpha i} \equiv T^{\alpha i\beta j}W_{\beta j} = \sum_{\beta=0}^{G'}\binom{G'}{\beta} T^{\alpha i\beta j} W_j^{\,;(G'-\beta)}\,. \tag{14.1}$$

Anwendend den Operator $\mathfrak{S}$ auf diesen Extensor, ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}V^{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G'}\binom{G'}{\beta}\Big\{ & T^{\alpha+1,\,i\beta j}W_j^{\,;(G'-\beta)} - T^{\alpha i\beta j(1)}W_j^{\,;(G'-\beta)} \\ & - T^{\alpha i\beta j}W_j^{\,;(G'-\beta+1)}\Big\}\end{aligned} \tag{14.2}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} W_j^{\cdot(G'-\beta)} \left\{ T^{\alpha+1, i\beta j} + T^{\alpha i, \beta+1, j} - T^{\alpha i\beta j(1)} \right\}$$

$$- \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} T^{\alpha i, \beta+1, j} W_j^{\cdot(G'-\beta)} - \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} T^{\alpha i\beta j} W_j^{\cdot(G'-\beta+1)}$$

$$= W_{\beta j} \mathfrak{S} T^{\alpha i\beta j} - \sum_{\beta=0}^{G'+1} \left\{ \binom{G'}{\beta-1} + \binom{G'}{\beta} \right\} T^{\alpha i\beta j} W_j^{\cdot(G'+1-\beta)}$$

$$= W_{\beta j} \mathfrak{S} T^{\alpha i\beta j} - \sum_{\beta=0}^{G'+1} \binom{G'+1}{\beta} T^{\alpha i\beta j} W_j^{\cdot(G'+1-\beta)} .$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist offenbar ein exkontravarianter Extensor erster Stufe, deshalb muss das erste Glied auch ein Extensor sein. Andererseits ist $W_{\beta j}$ ganz beliebig, deswegen soll

$$\mathfrak{S} T^{\alpha i\beta j} = T^{\alpha+1, i\beta j} + T^{\alpha i, \beta+1, j} - T^{\alpha i\beta j(1)}$$

einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe geben. Daraus erhalten wir den Operator $\mathfrak{S}$ für die Extensoren zweiter Stufe. Um die Operatoren $\mathfrak{S}^H$ zu erlangen, soll man das oben erzählte Verfahren wiederholen. Für den Extensor höherer Stufe z.B. dritter Stufe $T^{\alpha i\beta j\gamma k}$ ist es genügend den Extensor

$$V^{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G_2} \sum_{\gamma=0}^{G_3} \binom{G_2}{\beta} \binom{G_3}{\gamma} T^{\alpha i\beta j\gamma k} W_j^{\cdot(G_2-\beta)} U_k^{\cdot(G_3-\gamma)} \tag{14.3}$$

in Gebrauch zu nehmen, während W_j und U_k je ein beliebiger Vektor ist, dann folgt $\mathfrak{S} T^{\alpha i\beta j\gamma k}$ sogleich aus $\mathfrak{S} V^{\alpha i}$, wobei G_2 bzw. G_3 die Gradzahl des Extensors $T^{\alpha i\beta j\gamma k}$ in bezug auf β bzw. γ darstellt.

63. Für die exkovarianten Extensoren höherer Stufe sind die Umstände ganz analog. Nämlich aus dem exkovarianten Extensor z.B. zweiter Stufe $T_{\alpha i\beta j}$ bilden wir zunächst den Extensor $(\beta+1) T_{\alpha i, \beta+1, j}$ und danach gebrauchen wir den Extensor

$$V_{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G'-1} (\beta+1) T_{\alpha i, \beta+1, j} U^{j(\beta)} , \tag{14.4}$$

wobei U^j einen beliebigen kontravarianten Vektor bezeichnet und G' die Gradzahl des Extensors $T_{\alpha i\beta j}$ in bezug auf β ist. Durch Anwendung des Operators $\mathfrak{S}$ auf den Extensor $V_{\alpha i}$ tritt dann auf

$$\mathfrak{S} V_{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G'-1} \Big\{ (G-\alpha)(\beta+1) T_{\alpha i, \beta+1, j} U^{j(\beta)} \tag{14.5}$$
$$- (\alpha+1)(\beta+1) (T_{\alpha+1, i, \beta+1, j}{}^{(1)} U^{j(\beta)} + T_{\alpha+1, i, \beta+1, j} U^{j(\beta+1)}) \Big\}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{G'-1} \Big\{ (G-\alpha)(\beta+1) T_{\alpha i,\, \beta+1, j} - (\alpha+1)(\beta+1) T_{\alpha+1, i, \beta+1, j}^{\;\cdot\;\cdot\;(1)}$$

$$+ (G'-\beta)(\alpha+1) T_{\alpha+1, i\beta j} \Big\} U^{j(\beta)}$$

$$- \sum_{\beta=0}^{G'-1} (G'-\beta)(\alpha+1) T_{\alpha+1, i\beta j} U^{j(\beta)}$$

$$- \sum_{\beta=0}^{G'-1} (\alpha+1)(\beta+1) T_{\alpha+1, i, \beta+1, j} U^{j(\beta+1)}$$

$$= U^{j(\beta)} \mathfrak{S} T_{\alpha i\beta j}$$

$$-(\alpha+1) \Big\{ \sum_{\beta=0}^{G'} (G'-\beta) T_{\alpha+1, i\beta j} U^{j(\beta)} - \sum_{\beta=1}^{G'} \beta T_{\alpha+1, i\beta j} U^{j(\beta)} \Big\}$$

$$= U^{j(\beta)} \mathfrak{S} T_{\alpha i\beta j} - G'(\alpha+1) T_{\alpha+1, i\beta j} U^{j(\beta)},$$

wobei G die Gradzahl des Extensors $T_{\alpha i\beta j}$ in bezug auf α sein soll. Da das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung offenbar ein Extensor erster Stufe und da U^j ein beliebiger Vektor ist, können wir die Extensoreigenschaft von

$$\mathfrak{S} T_{\alpha i\beta j} = (G-\alpha)(\beta+1) T_{\alpha i,\, \beta+1, j} + (G'-\beta)(\alpha+1) T_{\alpha+1, i\beta j}$$
$$-(\alpha+1)(\beta+1) T_{\alpha+1, i, \beta+1, j}^{\;\cdot\;\cdot\;(1)}$$

erkennen.

64. Nächstens gehen wir mit einem gemischten Extensor z.B. $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}$ um. Darum betrachtet man zwei Extensoren erster Stufe

$$V^{\alpha i} \equiv \sum_{\beta=0}^{G'-1} (\beta+1) T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1, j} U^{j(\beta)},$$

(14.6)

$$V_{\beta j} \equiv \sum_{\alpha=0}^{G} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} \binom{G}{\alpha} W_i^{\;(G-\alpha)},$$

während U^j bzw. W_i ein beliebiger kontra- bzw. kovarianter Vektor sei. Danach ergibt sich erstens der Extensor

$$\mathfrak{S} V^{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G'-1} (\beta+1) \Big\{ T^{\alpha+1, i}_{\cdot\cdot\beta+1, j} U^{j(\beta)} - T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1, j}{}^{(1)} U^{j(\beta)} - T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1, j} U^{j(\beta+1)} \Big\}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{G'-1} (\beta+1) \Big\{ T^{\alpha+1, i}_{\cdot\cdot\beta+1, j} - T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1, j}{}^{(1)} \Big\} U^{j(\beta)} - \sum_{\beta=1}^{G'} \beta T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\beta)}$$

$$= \mathfrak{S} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\beta)} - G' T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\beta)},$$

berücksichtigend (12.3a). Das zweite Glied des letzten Ausdrucks ist bekanntlich ein Extensor, deshalb muss das erste auch einer sein.

Davon erkennt man die Extensoreigenschaft von $\mathfrak{S}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}$, weil U^j ein beliebiger Vektor sein kann. Aus $V_{\beta j}$ erhalten wir auch dasselbe Resultat, indem man hat

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S} V_{\beta j} = {} & (G'-\beta)\sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}W_i^{\cdot(G-\alpha)} \\
& -(\beta+1)\sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}\left\{T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}{}^{\cdot(1)}W_i^{\cdot(G-\alpha)}+T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}W_i^{\cdot(G-\alpha+1)}\right\} \\
= {} & \sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}\left\{(G'-\beta)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}-(\beta+1)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}{}^{\cdot(1)}+(\beta+1)T^{\alpha+1,i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}\right\}W_i^{\cdot(G-\alpha)} \\
& -\sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}(\beta+1)\,T^{\alpha+1,i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}W_i^{\cdot(G-\alpha)} \\
& -(\beta+1)\sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}W_i^{\cdot(G-\alpha+1)} \\
= {} & \sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}W_i^{\cdot(G-\alpha)}\mathfrak{S}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} \\
& -(\beta+1)\left\{\sum_{\alpha=1}^{G+1}\binom{G}{\alpha-1}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}W_i^{\cdot(G-\alpha+1)}+\sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}W_i^{\cdot(G-\alpha+1)}\right\} \\
= {} & \sum_{\alpha=0}^{G}\binom{G}{\alpha}W_i^{\cdot(G-\alpha)}\mathfrak{S}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}-(\beta+1)\sum_{\alpha=0}^{G+1}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}\binom{G+1}{\alpha}W_i^{\cdot(G+1-\alpha)}\,.
\end{aligned}$$

Das zweite Glied des letzten Ausdrucks ist nichts anderes als der Extensor erster Stufe, der durch Überschiebung von den zwei Extensoren $(\beta+1)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+1,j}$ und $\binom{G+1}{\alpha}W_i^{\cdot(G+1-\alpha)}$ erhalten wird.

65. Nun wende man den Operator $\mathfrak{Z}$ auf den Extensor (14.1) an, dann erhält man nach Satz 17 den Extensor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} V^{\alpha i} = {} & \sum_{\beta=0}^{G'}\sum_{\lambda=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda}\binom{G'}{\beta}\left(T^{\lambda i\beta j}W_j^{\cdot(G'-\beta)}\right)^{(\alpha-\lambda)} \\
= {} & \sum_{\beta=0}^{G'}\sum_{\lambda=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}2^{\lambda}\binom{G'}{\beta}\sum_{\mu=0}^{\alpha-\lambda}\binom{\alpha-\lambda}{\mu}T^{\lambda i\beta j(\mu)}W_j^{\cdot(G'-\beta+\alpha-\lambda-\mu)} \\
= {} & \sum_{\beta=0}^{G'}\sum_{\lambda=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\lambda}2^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{G'}{\beta}\sum_{\nu=\beta+\lambda}^{\alpha+\beta}\binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta-\lambda}T^{\lambda i\beta j(\nu-\beta-\lambda)}W_j^{\cdot(G'+\alpha-\nu)} \\
& \qquad\qquad (\nu=\beta+\lambda+\mu \text{ gesetzt}) \\
= {} & \sum_{\beta=0}^{G'}\sum_{\nu=\beta}^{\alpha+\beta}\sum_{\lambda=0}^{\nu-\beta}(-1)^{\alpha-\lambda}2^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{G'}{\beta}\binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta-\lambda}T^{\lambda i\beta j(\nu-\beta-\lambda)}W_j^{\cdot(G'+\alpha-\nu)} \\
= {} & \sum_{\nu=0}^{G'+\alpha}\sum_{\beta=\nu-\alpha}^{\nu}\sum_{\lambda=0}^{\nu-\beta}(-1)^{\alpha-\lambda}2^{\lambda}\binom{\alpha}{\lambda}\binom{G'}{\beta}\binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta-\lambda}T^{\lambda i\beta j(\nu-\beta-\lambda)}W_j^{\cdot(G'+\alpha-\nu)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\gamma=G-\alpha}^{G+G'} \sum_{\beta=\gamma-G}^{\gamma+\alpha-G} \sum_{\lambda=0}^{\gamma+\alpha-\beta-G} (-1)^{\alpha-\lambda} 2^{\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{G+\beta-\gamma} \binom{G'}{\beta}$$

$$\times T^{\lambda i \beta j(\gamma+\alpha-G-\beta-\lambda)} W_{j}^{\cdot(G+G'-\gamma)} \quad (\gamma = G+\nu-\alpha \text{ gesetzt}),$$

wobei man auf die Ansetzung $\binom{G'}{\beta} = 0$ für $\beta < 0$ aufmerksam sein soll. Da W_j ein beliebiger kovarianter Vektor sein kann, sollen die Koeffizienten von $\binom{G+G'}{\gamma} W_j^{\cdot(G+G'-\gamma)}$ im letzten Ausdrucke die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors zweiter Stufe von den Graden G und $G+G'$ sein, nämlich wir erhalten den

Satz 62. *$T^{\alpha i \beta j}$ sei ein exkontravarianter Extensor zweiter Stufe vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β, dann ist*

$$(14.7) \quad \mathfrak{Z}T^{\alpha i \beta j} = \binom{G+G'}{\beta}^{-1} \sum_{\mu=\beta-G}^{\alpha+\beta-G} \sum_{\lambda=0}^{\alpha+\beta-\mu-G} (-1)^{\alpha-\lambda} 2^{\lambda}$$

$$\times \binom{\alpha}{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{G+\mu-\beta} \binom{G'}{\mu} T^{\lambda i \mu j(\alpha+\beta-G-\lambda-\mu)}$$

auch ein solcher vom Grad G bzw. $G+G'$ in bezug auf α bzw. β.

66. Das analoge Verfahren für den exkovarianten Extensor

$$(14.8) \qquad V_{\alpha i} \equiv T_{\alpha i \beta j} U^{j(\beta)}$$

liefert wegen Satz 18 den Extensor vom Grad $G-1$

$$\mathfrak{Z}V_{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{G-\alpha-1} (-1)^{\nu} V_{\alpha+\nu+1,\, i}^{\cdot\,(\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{G-\alpha-1} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\mu} T_{\alpha+\nu+1,\, i\beta j}^{\cdot\;\cdots(\nu-\mu)} U^{j(\beta+\mu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{G-\alpha-1} \sum_{\beta=0}^{G'} \sum_{\lambda=\beta}^{\beta+\nu} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\lambda-\beta} T_{\alpha+\nu+1,\, i\beta j}^{\cdot\;\cdots(\nu-\lambda+\beta)} U^{j(\lambda)}$$

$$(\beta+\mu = \lambda \text{ gesetzt})$$

$$= \sum_{\nu=0}^{G-\alpha-1} \sum_{\lambda=0}^{G'+\nu} \sum_{\beta=\lambda-\nu}^{\lambda} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\lambda-\beta} T_{\alpha+\nu+1,\, i\beta j}^{\cdot\;\cdots(\nu-\lambda+\beta)} U^{j(\lambda)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{G+G'-\alpha-1} \sum_{\nu=\lambda-G'}^{G-\alpha-1} \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\mu} T_{\alpha+\nu+1,\, i,\, \mu-\nu+\lambda,\, j}^{\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\,(\mu)} U^{j(\lambda)}$$

$$(\mu = \nu-\lambda+\beta \text{ gesetzt}),$$

wobei man auf die Ansetzung $\binom{\nu}{\lambda-\beta} = 0$ für $\nu < 0$ aufmerken soll. Demgemäss können wir schliessen, dass die Koeffizienten von $U^{j(\beta)}$

im letzten Ausdrucke einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad $G-1$ bzw. $G+G'-1$ in bezug auf α bzw. β bestimmen. D.h.

Satz 63. *Ein exkovarianter Extensor zweiter Stufe $T_{\alpha i\beta j}$ vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β sei gegeben, dann setzen*

$$\mathfrak{Z}T_{\alpha i\beta j}=\sum_{\nu=\beta-G'}^{G-\alpha-1}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu}T_{\alpha+\dot{\nu}+1,\dot{i},\beta+\dot{\mu}-\nu,\dot{j}}{}^{(\mu)} \tag{14.9}$$

einen Extensor derselben Art vom Grad $G-1$ bzw. $G+G'-1$ in bezug auf α bzw. β fest.

67. Für den Extensor höherer Stufe können wir auch den Operator $\mathfrak{Z}$ einführen, indem wir den Operator $\mathfrak{Z}$ auf den Extensor erster Stufe anwenden, der aus dem Extensor höherer Stufe und den durch Differentiation einiger beliebigen Vektoren erhaltenen Extensoren erster Stufe durch Überschiebungen eingeführt wird.

Wiederholen wir das oben erklärte Verfahren, so treten die Operatoren $\mathfrak{Z}^H$ für die Extensoren höherer Stufe ein.

68. Es ist bemerkenswert, dass $\mathfrak{Z}T^{\alpha i\beta j}$ sowie $\mathfrak{Z}T_{\alpha i\beta j}$ in seiner Form in bezug auf α und β nicht symmetrisch ist, wie (14.7) oder (14.9) zeigt. Diese Tatsache lehrt uns die Existenz der Operatoren von zwei Arten, die Operatoren erster Art sind durch (14.7) oder (14.9) gegeben und diejenigen zweiter Art sollen aus dem Extensor $\mathfrak{Z}\left\{\sum_{\alpha=0}^{G}T^{\alpha i\beta j}\binom{G}{\alpha}W_{\dot{i}}{}^{(G-\alpha)}\right\}$ oder $\mathfrak{Z}T_{\alpha i\beta j}V^{i(\alpha)}$ erhalten werden, die sich so darstellen:

$$\mathfrak{Z}^{[2]}T^{\alpha i\beta j}=\binom{G+G'}{\alpha}^{-1}\sum_{\lambda=\alpha-G'}^{\alpha+\beta-G'}\sum_{\mu=0}^{\alpha+\beta-\lambda-G'}(-1)^{\beta-\mu}2^{\mu}\binom{\beta}{\mu}\times\binom{\beta-\mu}{G'+\lambda-\alpha}\binom{G}{\lambda}T^{\lambda i\mu j(\alpha+\beta-G'-\lambda-\mu)}, \tag{14.10}$$

$$\mathfrak{Z}^{[2]}T_{\alpha i\beta j}=\sum_{\nu=\alpha-G}^{G'-\beta-1}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{\mu}T_{\alpha+\dot{\mu}-\nu,\dot{i},\beta+\dot{\nu}+1,\dot{j}}{}^{(\mu)}. \tag{14.11}$$

Um Operatoren von zwei Arten zu unterscheiden, möchten wir oben nach dem Operatorzeichen $\mathfrak{Z}$ die Bezeichnungen [1] oder [2] hinzufügen, wie $\mathfrak{Z}^{[1]}$ oder $\mathfrak{Z}^{[2]}$. Für einen Extensor höherer Stufe z.B. H-ter Stufe existieren natürlich Operatoren von H Arten $\mathfrak{Z}^{[1]}, \mathfrak{Z}^{[2]}, \dots, \mathfrak{Z}^{[H]}$, entsprechend jedem Indizespaar, das bei der Ausführung des Operators mit dem Indizespaar des aus einem beliebigen Vektor abgeleiteten Extensors nicht überschoben geworden ist.

69. Von einem gemischten Extensor z.B. $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}$ betrachtet man zwei Extensoren erster Stufe

$$V^{\alpha i} \equiv T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\beta)} \quad \text{und} \quad V_{\beta j} \equiv \sum_{\alpha=0}^{G} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} \binom{G}{\alpha} W_i^{\cdot(G-\alpha)},$$

während U^j bzw. W_i ein beliebiger kontra- bzw. kovarianter Vektor sein kann. Aus diesen Extensoren ergibt sich erstens der Extensor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} V^{\alpha i} &= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\mu} T^{\lambda i\cdot\cdot(\alpha-\lambda-\mu)}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\beta+\mu)} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{G'} \sum_{\nu=\beta}^{\alpha+\beta-\lambda} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta} T^{\lambda i\cdot\cdot(\alpha+\beta-\lambda-\nu)}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\nu)} \\
&\qquad\qquad (\beta+\mu=\nu \text{ gesetzt}) \\
&= \sum_{\lambda=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha+G'-\lambda} \sum_{\beta=\nu+\lambda-\alpha}^{\nu} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta} T^{\lambda i\cdot\cdot(\alpha+\beta-\lambda-\nu)}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\nu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\alpha+G'} \sum_{\lambda=0}^{\alpha+G'-\nu} \sum_{\beta=\nu+\lambda-\alpha}^{\nu} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\nu-\beta} T^{\lambda i\cdot\cdot(\alpha+\beta-\lambda-\nu)}_{\cdot\cdot\beta j} U^{j(\nu)},
\end{aligned}$$

wobei man anmerken soll:

$$\binom{\alpha}{\lambda} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha < \lambda \quad \text{und} \quad T^{\lambda i}_{\cdot\cdot\beta j} = 0 \quad \text{für} \quad \beta > G'.$$

Schreibend β in μ um, geht daraus der gesuchte gemischte Extensor zweiter Stufe aus den Koeffizienten von $U^{j(\nu)}$ hervor. Zweitens erhält man den Extensor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} V_{\beta j} &= \sum_{\nu=0}^{G'-\beta-1} (-1)^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \sum_{\alpha=0}^{G} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta+\nu+1,j}{}^{\cdot(\nu-\mu)} \binom{G}{\alpha} W_i^{\cdot(G-\alpha+\mu)} \\
&= \sum_{\nu=0}^{G'-\beta-1} \sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{\gamma=G'-1-\mu}^{G+G'-\mu-1} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\mu} \binom{G}{\gamma+\mu+1-G'} \\
&\qquad \times T^{\gamma+\mu+1-G',i}_{\cdot\quad\cdot\beta+\nu+1,j}{}^{\cdot(\nu-\mu)} W_i^{\cdot(G+G'-1-\gamma)} \\
&\qquad\qquad (G'-1+\alpha-\mu=\gamma \text{ gesetzt}) \\
&= \sum_{\nu=0}^{G'-\beta-1} \sum_{\gamma=G'-1-\nu}^{G+G'-1} \sum_{\lambda=G'-1}^{G+G'-1} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\lambda-\gamma} \binom{G}{\lambda+1-G'} \\
&\qquad \times T^{\lambda+1-G',i}_{\cdot\quad\cdot\beta+\nu+1,j}{}^{\cdot(\nu-\lambda+\gamma)} W_i^{\cdot(G+G'-1-\gamma)} \qquad (\gamma+\mu=\lambda \text{ gesetzt}) \\
&= \sum_{\gamma=\beta}^{G+G'-1} \sum_{\nu=G'-1-\gamma}^{G'-\beta-1} \sum_{\lambda=G'-1}^{G+G'-1} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\lambda-\gamma} \binom{G}{\lambda+1-G'} \\
&\qquad \times T^{\lambda+1-G',i}_{\cdot\quad\cdot\beta+\nu+1,j}{}^{\cdot(\nu-\lambda+\gamma)} W_i^{\cdot(G+G'-1-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten des letzten Ausdrucks von $\binom{G+G'-1}{\gamma} W_i^{\cdot (G+G'-1-\gamma)}$ liefern uns die Bestimmungszahlen des gesuchten Extensors zweiter Stufe.

Zusammenfassend die obigen beiden Ergebnisse, lautet der

Satz 64. *Ein gemischter Extensor zweiter Stufe* $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}$ *vom Grad* G *bzw.* G' *in bezug auf* α *bzw.* β *sei vorgegeben, dann ist*

$$\mathfrak{Z}^{[1]} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{\alpha+G'-\beta} \sum_{\mu=\beta+\lambda-\alpha}^{\beta} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} 2^{\lambda} \binom{\alpha-\lambda}{\beta-\mu} T^{\lambda i \cdot \cdot (\alpha-\beta-\lambda+\mu)}_{\cdot\cdot\mu j} \tag{14.12}$$

und

$$\mathfrak{Z}^{[2]} T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} = \binom{G+G'-1}{\alpha}^{-1} \sum_{\nu=G'-1-\alpha}^{G'-\beta-1} \sum_{\lambda=G'-1}^{G+G'-1} (-1)^{\nu} \binom{\nu}{\lambda-\alpha} \times \binom{G}{\lambda+1-G'} T^{\lambda+1-G', i \cdot \cdot (\nu-\lambda+\alpha)}_{\cdot \cdot \beta+\nu+1, j} \tag{14.13}$$

je auch ein gemischter Extensor zweiter Stufe. Der erste ist vom Grad G *bzw.* $G+G'$ *und der letzte vom Grad* $G+G'-1$ *bzw.* $G-1$ *in bezug auf* α *bzw.* β.

Die Umstände sind für den gemischten Extensor höherer Stufe ganz gleich, bis auf den Gebrauch mehrerer beliebiger Vektoren, und betreffs des vorgegebenen Extensors kann man auch viele Operatoren erhalten, deren Anzahl derjenigen der Stufe des Extensors gleich ist.

Wiederholend das oben benützte Verfahren, bekommen wir noch dazu die Operatoren von der Art $\mathfrak{Z}^H$ für die gemischten Extensoren höherer Stufe.

70. Wenden wir den Operator $\mathfrak{Y}$ auf den Extensor

$$V^{\alpha i} = \sum_{\beta=0}^{G'} T^{\alpha i \beta j} \binom{G'}{\beta} W_j^{\cdot (G'-\beta)}$$

an, während $T^{\alpha i \beta j}$ ein vorgegebener exkontravarianter Extensor zweiter Stufe vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β und W_j ein beliebiger kovarianter Vektor ist. Dann haben wir den Extensor erster Stufe

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} V^{\alpha i} &= \sum_{\beta=0}^{G'} (G+1-\alpha) \binom{G'}{\beta} T^{\alpha i \beta j} W_j^{\cdot (G'-\beta)} \\ &\quad + \alpha \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} \left\{ T^{\alpha-1, i\beta j(1)} W_j^{\cdot (G'-\beta)} + T^{\alpha-1, i\beta j} W_j^{\cdot (G'-\beta+1)} \right\} \\ &= \sum_{\beta=0}^{G'} \left\{ (G+1-\alpha) T^{\alpha i \beta j} + \alpha T^{\alpha-1, i\beta j(1)} \right\} \binom{G'}{\beta} W_j^{\cdot (G'-\beta)} \\ &\quad + \alpha \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} T^{\alpha-1, i\beta j} W_j^{\cdot (G'-\beta+1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{G'+1} \left\{(G+1-\alpha)T^{\alpha i,\,\beta-1,\,j} + \alpha T^{\alpha-1,\,i,\,\beta-1,\,j(1)}\right\}\binom{G'}{\beta-1} W_j^{\,\cdot(G'+1-\beta)}$$

$$+ \alpha \sum_{\beta=0}^{G'} \binom{G'}{\beta} T^{\alpha-1,\,i\beta j} W_j^{\,\cdot(G'+1-\beta)}$$

$$= \frac{1}{G'+1} \sum_{\beta=0}^{G'+1} \left\{\beta(G+1-\alpha)T^{\alpha i,\,\beta-1,\,j} + \alpha\beta T^{\alpha-1,\,i,\,\beta-1,\,j(1)}\right.$$

$$\left. + \alpha(G'+1-\beta)T^{\alpha-1,\,i\beta j}\right\}\binom{G'+1}{\beta} W_j^{\,\cdot(G'+1-\beta)},$$

davon erhält man einen exkontravarianten Extensor zweiter Stufe von den Graden $G+1$ und $G'+1$

$$\mathfrak{Y}T^{\alpha i\beta j} = \beta(G+1-\alpha)T^{\alpha i,\,\beta-1,\,j} + \alpha(G'+1-\beta)T^{\alpha-1,\,i\beta j} + \alpha\beta T^{\alpha-1,\,i,\,\beta-1,\,j(1)} \tag{14.14a}$$

aus den Koeffizienten von $\binom{G'+1}{\beta} W_j^{\,\cdot(G'+1-\beta)}$ im letzten Ausdrucke.

Wiederholend dieses Verfahren, kann man zum folgenden allgemeinen Ergebnisse gelangen.

Satz 65. *Die Grössen*

$$\mathfrak{Y}^H T^{\alpha i\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{\alpha!}{(\alpha-H+\lambda-\mu)!} \frac{\beta!}{(\beta-H-\mu)!} \times \binom{G+H-\alpha}{\lambda-\mu}\binom{G'+H-\beta}{\mu} T^{\alpha-H+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H+\mu,\,j(H-\lambda)} \tag{14.14}$$

sind für jeden Wert von $H=1, 2, \ldots$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad $G+H$ bzw. $G'+H$ in bezug auf α bzw. β, wenn $T^{\alpha i\beta j}$ diejenigen eines Extensors derselben Art vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β sind.

Beweis. Wir benutzen die Induktion bezüglich H, um den Satz zu beweisen. Unter der Voraussetzung der Richtigkeit des Satzes für ein festes H, erhalten wir, berücksichtigend die Gradzahlen $G+H$ und $G'+H$ des Extensors $\mathfrak{Y}T^{\alpha i\beta j}$, den Extensor

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^H T^{\alpha i\beta j})$$

$$= \beta(G+H+1-\alpha)\mathfrak{Y}^H T^{\alpha i,\,\beta-1,\,j} + \alpha(G'+H+1-\beta)\mathfrak{Y}^H T^{\alpha-1,\,i\beta j}$$

$$+ \alpha\beta\mathfrak{Y}^H T^{\alpha-1,\,i,\,\beta-1,\,j(1)}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \lambda! \left\{\beta(G+H+1-\alpha) \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{\alpha!}{(\alpha-H+\lambda-\mu)!} \frac{(\beta-1)!}{(\beta-H-1+\mu)!}\right.$$

$$\times\binom{G-\alpha+H}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda)}$$

$$+\alpha(G'+H+1-\beta)\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha-1)\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H+\mu)\,!}$$

$$\left.\times\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H+\mu,\,j(H-\lambda)}\right\}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\lambda\,!\,\alpha\beta\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(\alpha-1)\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{(\beta-1)\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}$$

$$\times\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{H+1}\binom{H}{\lambda-1}(\lambda-1)\,!\left\{\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}\right.$$

$$\times\binom{G-\alpha+H}{\lambda-1-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}(G+H+1-\alpha)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\lambda}\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}$$

$$\left.\times\binom{G'-\beta+H}{\mu-1}(G'+H+1-\beta)\right\}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\lambda\,!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}$$

$$\times\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{H+1}\binom{H}{\lambda-1}(\lambda-1)\,!\left\{\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}(\lambda-\mu)+\sum_{\mu=1}^{\lambda}\mu\right\}$$

$$\times\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}$$

$$\times\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\lambda\,!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}$$

$$\times\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{H+1}\left\{\binom{H}{\lambda-1}+\binom{H}{\lambda}\right\}\lambda\,!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{\alpha\,!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)\,!}\frac{\beta\,!}{(\beta-H-1+\mu)\,!}$$

$$\times\binom{G-\alpha+H+1}{\lambda-\mu}\binom{G'-\beta+H+1}{\mu}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\,i,\,\beta-H-1+\mu,\,j(H-\lambda+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda=0}^{H+1} \binom{H+1}{\lambda} \lambda! \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{\alpha!}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)!} \frac{\beta!}{(\beta-H-1+\mu)!} \\
&\quad \times \binom{G+H+1-\alpha}{\lambda-\mu} \binom{G'+H+1-\beta}{\mu} T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\, i,\, \beta-H-1+\mu,\, j\, (H+1-\lambda)} \\
&= \mathfrak{Y}^{H+1} T^{\alpha i \beta j}\,. \qquad\qquad \text{W. z. b. z.}
\end{aligned}
$$

71. Auf ähnliche Weise hat man

Satz 66. *Es sei $T_{\alpha i \beta j}$ ein exkovarianter Extensor zweiter Stufe vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β, dann bilden die Grössen*

$$
\mathfrak{Y}^H T_{\alpha i \beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} T_{\alpha-\dot\lambda+\mu,\, \dot i,\, \beta-\dot\mu,\, \dot j}{}^{(H-\lambda)} \tag{14.15}
$$

einen exkovarianten Extensor zweiter Stufe vom Grad $G+H$ bzw. $G'+H$ in bezug auf α bzw. β, wobei man unter $T_{\alpha i \beta j}$ für $\alpha < 0$, $\alpha > G$ oder $\beta < 0$, $\beta > G'$ immer Null verstehen soll.

Beweis. Es seien V^j die Bestimmungszahlen eines beliebigen kontravarianten Vektors, dann sind $V_{\alpha i} \equiv T_{\alpha i \beta j} V^{j(\beta)}$ diejenigen eines exkovarianten Extensors erster Stufe. Wenden wir den Operator $\mathfrak{Y}$ auf diesen letzten Extensor an, so ergibt sich ein Extensor erster Stufe vom Grad $G+1$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Y} V_{\alpha i} &= V_{\dot\alpha \dot i}{}^{(1)} + V_{\alpha-1,\, i} = T_{\dot\alpha \dot i \dot\beta \dot j}{}^{(1)} V^{j(\beta)} + T_{\alpha i \beta j} V^{j(\beta+1)} + T_{\alpha-1,\, i\beta j} V^{j(\beta)} \\
&= \sum_{\beta=1}^{G'+1} T_{\alpha i,\, \beta-1,\, j} V^{j(\beta)} + \sum_{\beta=0}^{G'} (T_{\dot\alpha \dot i \dot\beta \dot j}{}^{(1)} + T_{\alpha-1,\, i\beta j}) V^{j(\beta)} \\
&= \sum_{\beta=0}^{G'+1} (T_{\alpha i,\, \beta-1,\, j} + T_{\alpha-1,\, i\beta j} + T_{\dot\alpha \dot i \dot\beta \dot j}{}^{(1)}) V^{j(\beta)}\,,
\end{aligned}
$$

danach sollen die Koeffizienten von $V^{j(\beta)}$

$$
\mathfrak{Y} T_{\alpha i \beta j} = T_{\alpha i,\, \beta-1,\, j} + T_{\alpha-1,\, i\beta j} + T_{\dot\alpha \dot i \dot\beta \dot j}{}^{(1)} \tag{14.15 a}
$$

die Bestimmungszahlen eines exkovarianten Extensors zweiter Stufe vom Grad $G+1$ bzw. $G'+1$ in bezug auf α bzw. β sein. Nämlich der Satz für $H=1$ ist wirklich richtig. Zunächst brauchen wir die Induktion bezüglich H, wie im Beweise von Satz 65.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^H T_{\alpha i \beta j}) = \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\mu} \Big\{ & T_{\alpha-\dot\lambda+\mu,\, \dot i,\, \beta-\dot 1-\mu,\, \dot j}{}^{(H-\lambda)} \\
& + T_{\alpha-1-\dot\lambda+\mu,\, \dot i,\, \beta-\dot\mu,\, \dot j}{}^{(H-\lambda)} + T_{\alpha-\dot\lambda+\mu,\, \dot i,\, \beta-\dot\mu,\, \dot j}{}^{(H-\lambda+1)} \Big\}.
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{H+1}\binom{H}{\lambda-1}\Big\{\sum_{\mu=1}^{\lambda}\binom{\lambda-1}{\mu-1}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda+1)}$$

$$+\sum_{\mu=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda-1}{\mu}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda+1)}\Big\}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda+1)}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{H+1}\binom{H}{\lambda-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda+1)}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda+1)}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{H+1}\binom{H+1}{\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}T_{\alpha-\lambda+\mu,\,i,\,\beta-\mu,\,j}{}^{(H+1-\lambda)}$$

$$= \mathfrak{D}^{H+1}T_{\alpha i\beta j}\,. \qquad \text{W. z. b. z.}$$

72. **Satz 67.** *Geben die Grössen* $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}$ *einen gemischten Extensor zweiter Stufe vom Grad G bzw. G' in bezug auf α bzw. β fest, dann bilden die Grössen*

$$\mathfrak{D}^H T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} = \sum_{\lambda=0}^{H}\binom{H}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{\alpha!}{(\alpha-H+\lambda-\mu)!} \times\binom{G+H-\alpha}{\lambda-\mu}\frac{1}{\mu!}T^{\alpha-H+\lambda-\mu,\,i}{}_{\cdot\;\cdot\;\beta-\mu,\,j}{}^{(H-\lambda)} \tag{14.16}$$

einen Extensor derselben Art vom Grad $G+H$ bzw. $G'+H$ in bezug auf α bzw. β, wobei man voraussetzt

$$T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} = 0 \quad \textit{für} \quad \alpha<0,\ \alpha>G \quad \textit{oder} \quad \beta<0,\ \beta>G'\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Richtigkeit des Satzes zuerst für $H=1$ und dann für beliebige Werte von H durch Induktion. Nimmt man den Extensor erster Stufe $T^{\alpha i}_{\cdot\cdot j\beta}U^{j(\beta)}$ auf, in dem U^j ein beliebiger kontravarianter Vektor ist, und wendet den Operator $\mathfrak{D}$ auf den Extensor an, dann sieht man ohne weiteres die Extensoreigenschaft von

$$\mathfrak{D}T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}U^{j(\beta)} = (G+1-\alpha)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j}U^{j(\beta)} + \alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta j}{}^{(1)}U^{j(\beta)} + \alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta j}U^{j(\beta+1)}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{G'}\Big\{(G+1-\alpha)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} + \alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta j}{}^{(1)}\Big\}U^{j(\beta)} + \sum_{\beta=1}^{G'+1}\alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta-1,\,j}U^{j(\beta)}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{G'+1}\Big\{(G+1-\alpha)T^{\alpha i}_{\cdot\cdot\beta j} + \alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta j}{}^{(1)} + \alpha T^{\alpha-1,\,i}_{\cdot\;\cdot\;\beta-1,\,j}\Big\}U^{j(\beta)}\,,$$

berücksichtigend $T^{\alpha i}{}_{-1,j} = T^{\alpha i}{}_{G'+1,j} = 0$. Da U^j ein beliebiger Vektor sein darf, können wir daraus ersehen, dass die Koeffizienten von $U^{j(\beta)}$

$$\text{(14.16 a)} \qquad \mathfrak{Y} T^{\alpha i}{}_{\beta j} = (G+1-\alpha) T^{\alpha i}{}_{\beta j} + \alpha T^{\alpha-1, i}{}_{\beta-1, j} + \alpha T^{\alpha-1, i}{}_{\beta j}{}^{(1)}$$

die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors zweiter Stufe von den Graden $G+1$ und $G'+1$ sein müssen, was die Behauptung des betreffenden Satzes für $H=1$ ist. Wir wollen hier nur eine kleine Bemerkung hinzufügen, dass durch Anwendung des Operators $\mathfrak{Y}$ auf den exkovarianten Extensor $\sum_{\alpha=0}^{G} \binom{G}{\alpha} T^{\alpha i}{}_{\beta j} W_i^{(G-\alpha)}$, wobei W_i ein beliebiger kovarianter Vekter ist, wir aus den Koeffizienten der Bestimmungszahlen des Extensors $\binom{G+1}{\alpha} W_i^{(G+1-\alpha)}$ nichts anderes als (14.16a) bis auf einen Zahlfaktor $\dfrac{1}{G+1}$ bekommen. Sodann gehen wir zum Beweise des Satzes für jeden Wert von H durch Induktion vor. Unter der Voraussetzung der Extensoreigenschaft von $\mathfrak{Y}^H T^{\alpha i}{}_{\beta j}$ erhalten wir sogleich nach Anwendung des Operators $\mathfrak{Y}$ den Extensor von den Graden $G+H+1$ und $G'+H+1$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^H T^{\alpha i}{}_{\beta j}) &= \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{\mu=0}^{\lambda} \Bigg\{ (G+H+1-\alpha) \frac{\alpha!}{(\alpha-H+\lambda-\mu)!} \\
&\quad \times \binom{G+H-\alpha}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-H+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-\mu, j}{}^{(H-\lambda)} \\
&\quad + \frac{\alpha!}{(\alpha-1-H+\lambda-\mu)!} \binom{G-\alpha+1+H}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-1-H+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-1-\mu, j}{}^{(H-\lambda)} \\
&\quad + \frac{\alpha!}{(\alpha-1-H+\lambda-\mu)!} \binom{G-\alpha+1+H}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-1-H+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-\mu, j}{}^{(H-\lambda+1)} \Bigg\} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{H+1} \binom{H}{\lambda-1} (\lambda-1)! \Bigg\{ \sum_{\mu=0}^{\lambda-1} \frac{\alpha!(\lambda-\mu)}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)!} \\
&\quad \times \binom{G+H+1-\alpha}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-\mu, j}{}^{(H+1-\lambda)} \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \frac{\alpha!\,\mu}{(\alpha-H-1+\lambda-\mu)!} \binom{G+H+1-\alpha}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-1-H+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-\mu, j}{}^{(H-\lambda+1)} \Bigg\} \\
&\quad + \sum_{\lambda=0}^{H} \binom{H}{\lambda} \lambda! \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{\alpha!}{(\alpha-1-H+\lambda-\mu)!} \\
&\quad \times \binom{G+H+1-\alpha}{\lambda-\mu} \frac{1}{\mu!} T^{\alpha-1-H+\lambda-\mu, i}{}_{\beta-\mu, j}{}^{(H-\lambda+1)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{H+1}\binom{H+1}{\lambda}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{a!}{(a-H-1+\lambda-\mu)!}$$

$$\times\binom{G+H+1-a}{\lambda-\mu}\frac{1}{\mu!}T^{\alpha-H-1+\lambda-\mu,\, i}{}_{\cdot\ \beta-\mu,\, j}^{\cdot\ \cdot\ (H+1-\lambda)}$$

$$= \mathfrak{D}^{H+1}T^{\alpha i}{}_{\cdot\cdot\,\beta j}\,.$$

73. Die vorhergehenden drei Sätze können in dem folgenden Satze zusammengefasst und verallgemeinert werden:

Satz 68. *Unter der Voraussetzung, dass* $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ *ein vorgegebener gemischter Extensor* $(r+s)$*-ter Stufe vom Grad* G_p $(p = 1, 2, \ldots, r)$ *bzw.* $\overline{G}_q$ $(q = 1, 2, \ldots, s)$ *in bezug auf* a_p *bzw.* β_q *ist, müssen die Grössen*

$$\text{(14.17)}\quad \mathfrak{D}^H T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$

$$= \sum_{\rho=0}^{H}\binom{H}{\rho}\rho!\sum_{(\lambda_p,\,\mu_q)}^{\rho}\prod_{p=1}^{r}\left\{\frac{a_p!}{(a_p+\lambda_p-H)!}\binom{G_p+H-a_p}{\lambda_p}\right\}\left(\prod_{q=1}^{s}\mu_q!\right)^{-1}$$

$$\times T^{\alpha_1-H+\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_r-H+\lambda_r,\, i_r}{}_{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \beta_1-\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_s-\mu_s,\, j_s}^{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ (H-\rho)}$$

für jeden Wert von $H = 1, 2, \ldots$ *die Bestimmungszahlen eines gemischten Extensors derselben Art vom Grad* $G_p + H$ *bzw.* $\overline{G}_q + H$ *in bezug auf* a *bzw.* β *sein.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass die Behauptung des Satzes für jeden Extensor $(r+s-1)$-ter Stufe $U^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_{r-1} i_{r-1}}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ oder $U^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_{s-1} j_{s-1}}$ immer richtig ist, worin r und s irgend zwei feste positive ganze Zahlen sind. Durch Anwendung des Operators $\mathfrak{D}$ auf die Extensoren $(r+s-1)$-ter Stufe $\sum_{\alpha_r=0}^{G_r}\binom{G_r}{a_r}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} \times W_{i_r}^{\cdot(G_r-\alpha_r)}$ oder $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}V^{j_s(\beta_s)}$, haben wir dann aus dem vorgegebenen Extensor $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ den folgenden Extensor $(r+s-1)$-ter Stufe, während V^j bzw. W_i ein beliebiger kontra- bzw. kovarianter Vektor ist:

$$\mathfrak{D}\left\{\sum_{\alpha_r=0}^{G_r}\binom{G_r}{a_r}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}{}_{\cdots\cdots\cdot\,\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}W_{i_r}^{\cdot(G_r-\alpha_r)}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha_r=0}^{G_r}\binom{G_r}{a_r}\prod_{p'=1}^{r-1}a_{p'}\left\{\sum_{p=1}^{r-1}\frac{G_p+1-a_p}{a_p}\right.$$

$$\times T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha_p i_p,\, \alpha_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \ldots,\, \alpha_{r-1}-1,\, i_{r-1}\alpha_r i_r}{}_{\cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdots\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{q=1}^{s} T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{r-1}-1,\, i_{r-1}\alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{q-1} j_{q-1},\, \beta_q-1,\, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \dots \beta_s j_s} \\
&+T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{r-1}-1,\, i_{r-1}\alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}(1)\Big\} W_{i_r}^{(G_r-\alpha_r)} \\
&+\sum_{\alpha_r=0}^{G_r}\binom{G_r}{\alpha_r}\prod_{p'=1}^{r-1}\alpha_{p'}\, T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{r-1}-1,\, i_{r-1}\alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} W_{i_r}^{(G_r-\alpha_r+1)} \\
=&\sum_{\alpha_r=1}^{G_r+1}\binom{G_r}{\alpha_r-1}\prod_{p'=1}^{r-1}\alpha_{p'}\Big\{\sum_{p=1}^{r-1}\frac{G_p+1-\alpha_p}{\alpha_p} \\
&\times T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha_p i_p,\, \alpha_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} \\
&+\sum_{q=1}^{s} T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{q-1} j_{q-1},\, \beta_q-1,\, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \dots \beta_s j_s} \\
&+T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}(1)\Big\} W_{i_r}^{(G_r-\alpha_r+1)} \\
&+\sum_{\alpha_r=0}^{G_r}\frac{1}{G_r+1}\binom{G_r+1}{\alpha_r}\frac{G_r+1-\alpha_r}{\alpha_r}\prod_{p'=1}^{r}\alpha_{p'} \\
&\times T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{r-1}-1,\, i_{r-1}\alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} W_{i_r}^{(G_r-\alpha_r+1)} \\
=&\frac{1}{G_r+1}\sum_{\alpha_r=0}^{G_r+1}\binom{G_r+1}{\alpha_r}\prod_{p'=1}^{r}\alpha_{p'}\Big\{\sum_{p=1}^{r}\frac{G_p+1-\alpha_p}{\alpha_p} \\
&\times T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha_p i_p,\, \alpha_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} \\
&+\sum_{q=1}^{s} T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_{q-1} j_{q-1},\, \beta_q-1,\, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \dots \beta_s j_s} \\
&+T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}(1)\Big\} W_{i_r}^{(G_r+1-\alpha_r)} \\
=&\frac{1}{G_r+1}\sum_{\alpha_r=0}^{G_r+1}\binom{G_r+1}{\alpha_r} W_{i_r}^{(G_r+1-\alpha_r)}\mathfrak{D}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}
\end{aligned}
$$

oder auf dieselbe Weise

$$
\mathfrak{D}\left(T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} V^{j_s(\beta_s)}\right) = \sum_{\beta_s=0}^{G'_s+1} V^{j_s(\beta_s)}\mathfrak{D}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s},
$$

daraus erkennt man, dass $\mathfrak{D}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}{}_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$ ein gemischter Extensor $(r+s)$-ter Stufe vom Grad G_p+1 bzw. G'_q+1 in bezug auf α_p bzw. β_q ist. Jetzt hat man durch Induktion die Richtigkeit des Satzes für

$H=1$ bewiesen. Der Beweis des Satzes für beliebigen Wert von H stellt sich durch Induktion bezüglich H vor, indem wir den folgenden Extensor in Betracht ziehen.

$$\mathfrak{D}\left(\mathfrak{D}^H T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}\right)$$

$$= \prod_{p'=1}^{r} a_{p'} \left\{ \sum_{p=1}^{r} \frac{G_p+H+1-a_p}{a_p} \right.$$

$$\times \mathfrak{D}^H T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha_p i_p,\, \alpha_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$

$$+ \sum_{q=1}^{s} \mathfrak{D}^H T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_{q-1} j_{q-1},\, \beta_q-1,\, j_q \beta_{q+1} j_{q+1} \cdots \beta_s j_s}$$

$$\left. + \left(\mathfrak{D}^H T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}\right)^{(1)} \right\}$$

$$= \prod_{p'=1}^{r} a_{p'} \sum_{\rho=0}^{H} \binom{H}{\rho} \rho! \sum_{(\lambda_q,\, \mu_q)}^{\rho} \left[\sum_{p=1}^{r} \prod_{p'' \neq p}^{1,r} \left\{ \frac{(a_{p''}-1)!}{(a_{p''}-1-H+\lambda_{p''})!} \binom{G+H-a_{p''}+1}{\lambda_{p''}} \right\} \right.$$

$$\times \frac{(a_p-1)!}{(a_p-H+\lambda_p)!} \binom{G_p+H-a_p}{\lambda_p} (G_p+H+1-a_p) \left(\prod_{q=1}^{s} \mu_q! \right)^{-1}$$

$$\times T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha'_p i_p,\, \alpha'_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r \cdots (H-\rho)}_{\beta'_1 j_1 \cdots \beta'_s j_s}$$

$$+ \prod_{p=1}^{r} \left\{ \frac{(a_p-1)!}{(a_p-1-H+\lambda_p)!} \binom{G_p+H-a_p+1}{\lambda_p} \right\} \left(\prod_{q'=1}^{s} \mu_{q'}! \right)^{-1}$$

$$\left. \times \sum_{q=1}^{s} T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r \cdots (H-\rho)}_{\beta'_1 j_1 \cdots \beta'_{q-1} j_{q-1},\, \beta'_q-1,\, j_q \beta'_{q+1} j_{q+1} \cdots \beta'_s j_s} \right]$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{H} \binom{H}{\rho} \rho! \sum_{(\lambda_p,\, \mu_q)}^{\rho} \prod_{p=1}^{r} \left\{ \frac{a_p!}{(a_p-1-H+\lambda_p)!} \binom{G_p+H-a_p+1}{\lambda_p} \right\} \left(\prod_{q=1}^{s} \mu_q! \right)^{-1}$$

$$\times T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r \cdots (H-\rho+1)}_{\beta'_1 j_1 \cdots \beta'_s j_s}.$$

$$\text{(wobei} \quad a'_p \equiv a_p - H + \lambda_p\,, \quad \beta'_q \equiv \beta_q - \mu_q)\,.$$

Schreiben wir $\rho-1$ statt ρ im ersten Glied im letzten Ausdrucke und dann λ_p-1 statt λ_p bzw. μ_q-1 statt μ_q im ersten bzw. zweiten Glied in den eckigen Klammern, dann führt sich der Ausdruck in die Form über:

$$\sum_{\rho=1}^{H+1} \binom{H}{\rho-1} (\rho-1)! \sum_{(\lambda_p,\, \mu_q)}^{\rho} \prod_{p'=1}^{r} \left\{ \frac{a_{p'}!}{(a_{p'}-H-1+\lambda_{p'})!} \binom{G_{p'}+H+1-a_{p'}}{\lambda_{p'}} \right\}$$

$$\times\Big(\prod_{q'=1}^{s}\mu_{q'}!\Big)^{-1}\Big\{\sum_{p=1}^{r}\lambda_p+\sum_{q=1}^{s}\mu_q\Big\}$$

$$\times\, T^{\alpha_1-H-1+\lambda_1,\, i_1,\,\ldots,\,\alpha_r-H-1+\lambda_r,\, i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1-\mu_1,\, j_1,\,\ldots,\,\beta_s-\mu_s,\, j_s}\ .\ (H-\rho+1)$$

$$+\sum_{\rho=0}^{H}\binom{H}{\rho}\rho!\sum_{(\lambda_p,\,\mu_q)}^{\rho}\prod_{p=1}^{r}\left\{\frac{a_p!}{(a_p-1-H+\lambda_p)!}\binom{G+H+1-a_p}{\lambda_p}\right\}\Big(\prod_{q=1}^{s}\mu_q!\Big)^{-1}$$

$$\times\, T^{\alpha_1-H-1+\lambda_1,\, i_1,\,\ldots,\,\alpha_r-H-1+\lambda_r,\, i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1-\mu_1,\, j_1,\,\ldots,\,\beta_s-\mu_s,\, j_s}\ .\ (H-\rho+1)$$

$$=\sum_{\rho=0}^{H+1}\binom{H+1}{\rho}\rho!\sum_{(\lambda_p,\,\mu_q)}^{\rho}\prod_{p=1}^{r}\left\{\frac{a_p!}{(a_p-H-1+\lambda_p)!}\binom{G+H+1-a_p}{\lambda_p}\right\}\Big(\prod_{q=1}^{s}\mu_q!\Big)^{-1}$$

$$\times\, T^{\alpha_1-H-1+\lambda_1,\, i_1,\,\ldots,\,\alpha_r-H-1+\lambda_r,\, i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1-\mu_1,\, j_1,\,\ldots,\,\beta_s-\mu_s,\, j_s}\ .\ (H+1-\rho)$$

$$=\mathfrak{Y}^{H+1}T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1\ldots\beta_s j_s},$$

da $\sum_{p=1}^{r}\lambda_p+\sum_{q=1}^{s}\mu_q=\rho$ ist. W. z. b. z.

§15. Einige Beziehungen unter den Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$.

74. Wir gehen weiter, die verschiedenen Beziehungen zu untersuchen, die unter den Operatoren $\mathfrak{S}^H$, $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ bestehen. Darum beweisen wir zuerst als Vorbereitung den folgenden Satz, der die Umkehrung von Satz 7 oder Satz 9 ist.

Satz 69. *Während $V^{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* (1, $\mathfrak{k}$, *G*, *M*) *sind, sollen* $\binom{a}{H}V^{\alpha-H,\,i}$ *diejenigen eines exkontravarianten relativen Extensors mit der Charakteristik* (1, $\mathfrak{k}$, $G+H$, *M*) *sein, wobei man voraussetzt* $\binom{a}{H}=0$ *falls* $a<H$. *Im allgemeinen sollen die Grössen* $\prod_{p=1}^{r}\binom{a_p}{H_p}T^{\alpha_1-H_1,\, i_1,\,\ldots,\,\alpha_r-H_r,\, i_r}$ *für beliebige ganze Zahlen H_p die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten relativen Extensors r-ter Stufe vom Gewichte* $\mathfrak{k}$ *und der Ordnung M, der vom Grad G_p+H_p in bezug auf a_p ist, sein, wenn* $T^{\alpha_1 i_1\ldots\alpha_r i_r}$ *diejenigen eines relativen Extensors derselben Art vom Gewichte* $\mathfrak{k}$ *und der Ordnung M sind, der vom Grad G_p in bezug auf a_p ist.*

Beweis. Es mag genug sein, den ersten Teil des Satzes zu beweisen, da der letzte Teil des Satzes auf eben dieselbe Weise bewiesen werden kann. Aus den Transformationsgleichungen folgt bei jeder Koordinatentransformation nach der Voraussetzung

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{H}V^{\alpha-H,a} &= \varDelta^{-\mathfrak{k}}\binom{\alpha}{H}\frac{\partial\bar{x}^{(\alpha-H)a}}{\partial x^{(\beta)i}}V^{\beta i}\\ &= \varDelta^{-\mathfrak{k}}\binom{\alpha}{H}\sum_{\gamma=H}^{\alpha}\frac{\partial\bar{x}^{(\alpha-H)a}}{\partial x^{(\gamma-H)i}}V^{\gamma-H,i}\\ &= \varDelta^{-\mathfrak{k}}\binom{\alpha}{H}\sum_{\gamma=H}^{\alpha}\binom{\alpha-H}{\gamma-H}\left(\frac{\partial\bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\gamma)}V^{\gamma-H,i}\\ &= \varDelta^{-\mathfrak{k}}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\gamma}{H}\left(\frac{\partial\bar{x}^{a}}{\partial x^{i}}\right)^{(\alpha-\gamma)}V^{\gamma-H,i}\\ &= \varDelta^{-\mathfrak{k}}\sum_{\gamma=0}^{\alpha}\frac{\partial\bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\gamma)i}}\binom{\gamma}{H}V^{\gamma-H,i},\end{aligned}$$

da $\binom{\alpha}{H}\binom{\alpha-H}{\gamma-H}=\binom{\alpha}{\gamma}\binom{\gamma}{H}$ ist. W. z. b. z.

Entsprechend Satz 69 lautet die Umkehrung von Satz 8 oder Satz 10:

Satz 70. *Während $W_{\alpha i}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G', M)$ sind, sollen die $N(G'+H+1)$ Grössen $W_{\alpha i}$ $(\alpha=0, 1, \ldots, G'+H)$ einen exkovarianten relativen Extensor mit der Charakteristik $(1, \mathfrak{k}, G'+H, M)$ aufbauen, wobei man setzt*

$$W_{\alpha i}=0 \qquad \text{für} \qquad \alpha=G'+1, \ \ldots, \ G'+H.$$

Im allgemeinen sollen die Grössen $T_{\beta_1 j_1\ldots\beta_s j_s}$ $(\beta_q=0, 1, \ldots, G'_q+H_q$ und $q=1, 2, \ldots, s)$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors s-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und der Ordnung M, der vom Grad G'_q+H_q in bezug auf β_q ist, sein, wobei man setzt

$$T_{\beta_1 j_1\ldots\beta_s j_s}=0 \qquad \text{für} \quad \beta_q=G'_q+1, \ \ldots, \ G'_q+H_q,$$

während q je einen Wert von $1, 2, \ldots, r$ annimmt, wenn $T_{\beta_1 j_1\ldots\beta_s j_s}$ die Bestimmungszahlen eines exkovarianten relativen Extensors s-ter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{k}$ und der Ordnung M, der vom Grad G'_q in bezug auf β_q ist.

Beweis. Man sieht leicht nach den Transformationsgleichungen

$$W_{\alpha a} = \sum_{\beta=\alpha}^{G'} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} = \sum_{\beta=\alpha}^{G'+H} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} \qquad \text{für} \quad \alpha \leqq G'$$

$$= 0 \qquad \text{für} \quad \alpha > G'$$

und nach der Voraussetzung

$$W_{\alpha a} = \sum_{\beta=\alpha}^{G'+H} \frac{\partial x^{(\beta)i}}{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}} W_{\beta i} \qquad \text{für} \quad \alpha > G'.$$

Jetzt ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Die Richtigkeit des letzten Teils des Satzes kann auch auf dieselbe Weise bewiesen werden. W. z. b. z.

75. Bestimmen die Grössen $V^{\alpha i}$ einen exkontravarianten Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M)$, dann ist $\mathfrak{S}V^{\alpha i}$ nach Satz 12 ein Extensor derselben Art mit der Charakteristik $(1, 0, G-1, M+1)$. Satz 69 lehrt uns alsdann, dass

$$\bar{\mathfrak{S}}V^{\alpha i} \equiv \alpha \mathfrak{S} V^{\alpha-1,\, i} \tag{15.1}$$

ein exkontravarianter Extensor mit der Charakteristik $(1, 0, G, M+1)$ ist. Und man definiert $\bar{\mathfrak{S}}^H V^{\alpha i}$ durch die Rekursionsformeln

$$\bar{\mathfrak{S}}(\bar{\mathfrak{S}}^H V^{\alpha i}) = \bar{\mathfrak{S}}^{H+1} V^{\alpha i}. \tag{15.2}$$

Andererseits zeigt Satz 5, dass die $N(G+1)$ Grössen $\mathfrak{Y}V^{\alpha i}(\alpha=0, 1, \ldots, G)$ die Bestimmungszahlen eines exkontravarianten Extensors erster Stufe vom Grad G liefern, da $\mathfrak{Y}V^{\alpha i}(\alpha = 0, 1, \ldots, G+1)$ diejenigen des Extensors derselben Art vom Grad $G+1$ sind (vgl. Satz 21). Um diese beiden Extensoren zu unterscheiden, wollen wir den ersten Extensor mit $\bar{\mathfrak{Y}}V^{\alpha i}$ bezeichnen.

Eliminierend die Ableitungen $V^{\alpha-1,\, i(1)}$ aus den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{S}}V^{\alpha i} &= \alpha(V^{\alpha i} - V^{\alpha-1,\, i(1)}), \\ \bar{\mathfrak{Y}}V^{\alpha i} &= (G+1-\alpha)V^{\alpha i} + \alpha V^{\alpha-1, i\,(1)}, \end{aligned} \tag{15.3}$$

haben wir den exkontravarianten Extensor erster Stufe vom Grad G

$$\bar{\mathfrak{S}}V^{\alpha i} + \bar{\mathfrak{Y}}V^{\alpha i} = (G+1)V^{\alpha i} \tag{15.4}$$

oder

$$\bar{\mathfrak{Y}}V^{\alpha i} = (G+1)V^{\alpha i} - \bar{\mathfrak{S}}V^{\alpha i}. \tag{15.4a}$$

Wiederholt man dieses Verfahren, so tritt dann der exkontravariante Extensor erster Stufe vom Grad G ein:

$$\mathfrak{Y}^H V^{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu} V^{\alpha i} \tag{15.5a}$$

oder

$$\mathfrak{S}^H V^{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{Y}^{H-\nu} V^{\alpha i}, \tag{15.5b}$$

da wir z.B. durch Induktion bezüglich H den exkontravarianten Extensor erster Stufe vom Grad G erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}(\mathfrak{Y}^H V^{\alpha i}) &= (G+1) \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu} V^{\alpha i} \\
&\quad - \mathfrak{S}\left(\sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu} V^{\alpha i} \right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^{\nu+1} \mathfrak{S}^{H-\nu} V^{\alpha i} \\
&\quad - \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu+1} V^{\alpha i} \\
&= \sum_{\nu=1}^{H+1} (-1)^{H-\nu+1} \binom{H}{\nu-1} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu+1} V^{\alpha i} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu+1} \binom{H}{\nu} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H-\nu+1} V^{\alpha i} \\
&= \sum_{\nu=0}^{H+1} (-1)^{H+1-\nu} \left\{ \binom{H}{\nu-1} + \binom{H}{\nu} \right\} (G+1)^\nu \mathfrak{S}^{H+1-\nu} V^{\alpha i} \\
&= \mathfrak{Y}^{H+1} V^{\alpha i}.
\end{aligned}$$

76. Im allgemeinen können wir auf eben dieselbe Weise die analoge Beziehung für einen exkontravarianten Extensor höherer Stufe auffinden. Darum liegt man einen exkontravarianten Extensor $T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}$ r-ter Stufe vom Grad G_p in bezug auf α_p vor und danach leitet man den Extensor derselben Art vom Grad $G_p + \lambda_p$ in bezug auf α_p

$$\mathfrak{B}^{[\lambda_p]} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} = \prod_{p=1}^{r} \frac{\alpha_p!}{(\alpha_p - \lambda_p)!} T^{\alpha_1 - \lambda_1, i_1, \ldots, \alpha_r - \lambda_r, i_r} \tag{15.6}$$

her. Der Operator $\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}$ ist bekanntlich linear und genügt der Beziehung

$$(15.7) \qquad \mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\mathfrak{B}^{[\mu_p]} = \mathfrak{B}^{[\lambda_p+\mu_p]},$$

wie leicht verifiziert werden kann. Nehmen wir dazu nach (12.5) den Operator

$$(15.8) \quad \mathfrak{B}^{[1]}\mathfrak{S}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r} \equiv \mathfrak{S}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}$$
$$= \prod_{p=1}^{r} a_p \Big\{ \sum_{q=1}^{r} T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_{q-1}-1,\, i_{q-1}\alpha_q i_q,\, \alpha_{q+1}-1,\, i_{q+1},\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r}$$
$$-T^{\alpha_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha_r-1,\, i_r(1)}\Big\}$$

an, dann ist

$$(15.9) \quad \mathfrak{S}\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r} = \prod_{p=1}^{r} \left\{ a_p \frac{(a_p-1)!}{(a'_p-1)!} \right\}$$
$$\times \left\{ \sum_{q=1}^{r} \frac{a_q}{a'_q} T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_{q-1}-1,\, i_{q-1}\alpha'_q i_q,\, \alpha'_{q+1}-1,\, i_{q+1},\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r} \right.$$
$$\left. - T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r(1)} \right\}$$
$$= \prod_{p=1}^{r} \left\{ \frac{a_p!}{a'_p!} a'_p \right\} \left\{ \mathfrak{S}T^{\alpha'_1 i_1 \dots \alpha'_r i_r} \right.$$
$$\left. + \sum_{q=1}^{r} \frac{\lambda_q}{a'_q} T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_{q-1}-1,\, i_{q-1}\alpha'_q i_q,\, \alpha'_{q+1}-1,\, i_{q+1},\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r} \right\}$$
$$= \mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\mathfrak{S}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r} + \sum_{(\mu_p)}^{1} \lambda_p \mu_p \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1-\mu_p]}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}$$
$$(\text{wobei } a'_p \equiv a_p - \lambda_p),$$

berücksichtigend (15.7), weil

$$\sum_{(\mu_p)}^{1} \lambda_p \mu_p \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1-\mu_p]}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}$$
$$= \sum_{p=1}^{r} \lambda_p \mathfrak{B}^{[\lambda_1+1,\, \dots,\, \lambda_{p-1}+1,\, \lambda_p,\, \lambda_{p+1}+1,\, \dots,\, \lambda_r+1]}T^{\alpha_1 i_1 \dots \alpha_r i_r}$$
$$\equiv \sum_{p=1}^{r} \lambda_p \left(\prod_{q=1}^{r} \frac{a_q!}{(a'_q-1)!} \right) \frac{1}{a'_p}$$
$$\times T^{\alpha'_1-1,\, i_1,\, \dots,\, \alpha'_{p-1}-1,\, i_{p-1}\alpha'_p i_p,\, \alpha'_{p+1}-1,\, i_{p+1},\, \dots,\, \alpha'_r-1,\, i_r}.$$

(15.9) darf auch in die Gestalt

$$(15.10)\qquad \mathfrak{B}^{[1]}\mathfrak{S}\mathfrak{B}^{[\lambda_p]} = \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1]}\mathfrak{S} + \sum_{(\mu_p)}^{1} \lambda_p\mu_p \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1-\mu_p]}$$

umgeschrieben werden. (15.8) und (14.17) liefern sogleich durch Elimination der Ableitungen $T^{\alpha_1-1,\,i_1,\dots,\,\alpha_r-1,\,i_r(1)}$ die Beziehung

$$(15.11)\qquad \bar{\mathfrak{S}}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} + \bar{\mathfrak{Y}}^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} = \sum_{(\mu_p)}^{1}(G_p+1)\mu_p \mathfrak{B}^{[1-\mu_p]}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r},$$

wobei man setzt

$$\bar{\mathfrak{Y}}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} = \mathfrak{Y}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r}$$

falls $\alpha_p \leqq G_p$ für alle Werte von $p = 1, 2, \dots, r$

$= 0$

falls $\alpha_p = G_p+1$ für irgendeinen Wert von $p = 1, 2, \dots, r$.

(15.11) ist die gesuchte Beziehung zwischen den Operatoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Y}$.

77. Um die Beziehungen zwischen den Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ durchzuführen, genügt es, das oben erzählte Verfahren zu wiederholen. Dann erhalten wir die Beziehung in den Rekursionsformeln

$$(15.12)\qquad \bar{\mathfrak{Y}}^H T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} = \sum_{(\mu_p)}^{1}(G_p+1)\mu_p \mathfrak{B}^{[1-\mu_p]}\bar{\mathfrak{Y}}^{H-1}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} - \bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{Y}}^{H-1}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r}$$

oder

$$(15.13)\qquad \bar{\mathfrak{S}}^H T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} = \sum_{(\mu_p)}^{1}(G_p+1)\mu_p \mathfrak{B}^{[1-\mu_p]}\bar{\mathfrak{S}}^{H-1}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r} - \bar{\mathfrak{Y}}\bar{\mathfrak{S}}^{H-1}T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_r i_r}.$$

Hierbei kann der Operator $\bar{\mathfrak{S}}\bar{\mathfrak{Y}}^{H-1}$ und folglich auch $\bar{\mathfrak{Y}}^H$ infolge (15.7) und (15.9) durch die Operatoren der Form $\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\bar{\mathfrak{S}}^K (K=0, 1, \dots, H)$ mit festen von α_p unabhängigen Koeffizienten linear dargestellt werden, wie man durch Induktion beweisen kann. In der Tat versteht es sich von selbst für $\bar{\mathfrak{Y}}$ wegen (15.11). Wenn $\bar{\mathfrak{Y}}^{H-1}$ durch die Operatoren $\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\bar{\mathfrak{S}}^K (K = 0, 1, \dots, H-1)$ linear ausgedrückt werden könne, dann muss $\bar{\mathfrak{Y}}^H$ infolge (15.9) ein linearer Ausdruck von den Operatoren der Form

$$\bar{\mathfrak{S}}\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\bar{\mathfrak{S}}^K = \mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\bar{\mathfrak{S}}^{K+1} + \sum_{(\mu_p)}^{1}\lambda_p\mu_p \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1-\mu_p]}\bar{\mathfrak{S}}^K, \quad K = 0, 1, \dots, H-1$$

sein. Demgemäss zeigt (15.12) wegen (15.7), dass $\overline{\mathfrak{Y}}^H$ durch die Operatoren der Form $\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\overline{\mathfrak{S}}^K$ $(K = 0, 1, \dots, H)$ linear dargestellt werden kann. Auf analoge Weise kann der Operator $\overline{\mathfrak{Y}}\mathfrak{S}^{H-1}$ folglich auch $\overline{\mathfrak{S}}^H$ in (15.13) durch eine lineare Kombination von Operatoren der Form $\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\overline{\mathfrak{Y}}^K$ $(K = 0, 1, \dots, H)$ mit festen von α_p unabhängigen Koeffizienten ausgedrückt werden. Denn es ist

$$\overline{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} = \mathfrak{B}^{[\lambda_p]}\overline{\mathfrak{Y}}\,T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r} - \sum_{(\mu_p)}^{1} \lambda_p \mu_p \mathfrak{B}^{[\lambda_p+1-\mu_p]}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r},$$

dessen Richtigkeit man leicht versichern kann.

78. Über die exkovarianten Extensoren können wir eine analoge Formel affinden. Nämlich man zieht einen exkovarianten Extensor $T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$ s-ter Stufe vom Grad G'_q in bezug auf β_q in Betracht und leitet daraus mit Hilfe von (12.6) und (14.17) die folgenden zwei Extensoren derselben Art von demselben Grad G'_q

$$\overline{\mathfrak{S}}T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} = \mathfrak{S}T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} \quad \text{falls } \beta_q \leqq G'_q - 1 \text{ für alle Werte von } q = 1, 2, \dots, s$$
$$= 0 \quad \text{falls } \beta_q = G'_q \text{ für irgendeinen Wert von } q = 1, 2, \dots, s \tag{15.14}$$

und

$$\overline{\mathfrak{Y}}T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} = \prod_{q=1}^{s}(\beta_q + 1)\mathfrak{Y}T_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_s+1, j_s} \tag{15.15}$$

her. Nach der Definition erhalten wir dann

$$\overline{\mathfrak{S}}T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} = \prod_{p=1}^{s}(\beta_p + 1)\Bigl\{ - T_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_s+1, j_s}^{\;\cdot\;\;\;\cdot\;\;\;\cdots\;\;\;\cdot\;\;\;\cdot\;(1)} + \sum_{q=1}^{s} \frac{G'_q - \beta_q}{\beta_q + 1} T_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{q-1}+1, j_{q-1} \beta_q j_q, \beta_{q+1}+1, j_{q+1}, \dots, \beta_s+1, j_s} \Bigr\},$$

$$\overline{\mathfrak{Y}}T_{\beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} = \prod_{p=1}^{s}(\beta_q + 1)\Bigl\{ T_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_s+1, j_s}^{\;\cdot\;\;\;\cdot\;\;\;\cdots\;\;\;\cdot\;\;\;\cdot\;(1)} + \sum_{q=1}^{s} T_{\beta_1+1, j_1, \dots, \beta_{q-1}+1, j_{q-1} \beta_q j_q, \beta_{q+1}+1, j_{q+1}, \dots, \beta_s+1, j_s} \Bigr\}.$$

Summierend dieselben Seiten dieser letzten beiden Gleichungen, ergibt sich die Beziehung

$$(15.16)\qquad \bar{\mathfrak{Y}} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} + \bar{\mathfrak{S}} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \sum_{(\mu_q)}^{1} (G'_q + 1)\mu_q \mathfrak{B}_{[1-\mu_q]} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s},$$

wobei

$$(15.17)\qquad \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \prod_{q=1}^{s} \frac{(\beta_q + \lambda_q)\,!}{\beta_q\,!} T_{\beta_1+\lambda_1,\, j_1,\, \dots,\, \beta_s+\lambda_s,\, j_s},$$

folglich

$$(15.18)\qquad \bar{\mathfrak{Y}} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \mathfrak{B}_{[1]} \mathfrak{Y} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}.$$

(15.16) ist nichts anderes als die gesuchte Beziehung.

Wir können leicht weiter schliessen

$$(15.19)\qquad \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} \mathfrak{B}_{[\mu_q]} = \mathfrak{B}_{[\lambda_q + \mu_q]}$$

und

$$(15.20)\qquad \bar{\mathfrak{S}} \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} = \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} \bar{\mathfrak{S}} + \sum_{(\mu_q)}^{1} \lambda_q \mu_q \mathfrak{B}_{[\lambda_q + 1 - \mu_q]},$$

$$(15.21)\qquad \bar{\mathfrak{Y}} \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} = \mathfrak{B}_{[\lambda_q]} \bar{\mathfrak{Y}} - \sum_{(\mu_q)}^{1} \lambda_q \mu_q \mathfrak{B}_{[\lambda_q + 1 - \mu_q]}.$$

Die letzten Beziehungen können auf eben dieselbe Weise wie (15.9) bewiesen werden. Unter Berücksichtigung auf (15.19) und (15.20) oder (15.21) bekommen wir durch wiederholte Anwendung der Beziehungen (15.16) die Beziehungen zwischen den Operatoren $\bar{\mathfrak{S}}^H$ und $\bar{\mathfrak{Y}}^H$, welche durch die Rekursionsformeln

$$(15.22)\qquad \bar{\mathfrak{Y}}^H T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \sum_{(\mu_q)}^{1} (G_q + 1)\mu_q \mathfrak{B}_{[1-\mu_q]} \bar{\mathfrak{Y}}^{H-1} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} - \bar{\mathfrak{S}} \bar{\mathfrak{Y}}^{H-1} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s},$$

$$(15.23)\qquad \bar{\mathfrak{S}}^H T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} = \sum_{(\mu_q)}^{1} (G_q + 1)\mu_q \mathfrak{B}_{[1-\mu_q]} \bar{\mathfrak{S}}^{H-1} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s} - \bar{\mathfrak{Y}} \bar{\mathfrak{S}}^{H-1} T_{\beta_1 j_1 \dots \beta_s j_s}$$

gegeben werden und die rechte Seite von (15.22) bzw. (15.23) kann sich durch die Operatoren der Form $\mathfrak{B}_{[\lambda_q]} \bar{\mathfrak{S}}^K$ bzw. $\mathfrak{B}_{[\lambda_q]} \bar{\mathfrak{Y}}^K$ $(K = 0, 1, \dots, H)$ mit festen von β_q unabhängigen Koeffizienten linear ausdrücken.

79. Im Falle $s=1$ d.h. für einen exkovarianten Extensor erster Stufe wird (15.16) in die Gestalt

$$\bar{\mathfrak{S}} V_{\beta j}+\bar{\mathfrak{Y}} V_{\beta j} = (G'+1) V_{\beta j} \tag{15.16a}$$

umgeschrieben, und (15.22) bzw. (15.23) in

$$\bar{\mathfrak{Y}}^H V_{\beta j} = \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}(G'+1)^\nu \bar{\mathfrak{S}}^{H-\nu} V_{\beta j} \tag{15.22a}$$

bzw.

$$\bar{\mathfrak{S}}^H V_{\beta j} = \sum_{\nu=0}^{H} (-1)^{H-\nu}\binom{H}{\nu}(G'+1)^\nu \bar{\mathfrak{Y}}^{H-\nu} V_{\beta j}, \tag{15.23a}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{S}} V_{\beta j} &= \mathfrak{S} V_{\beta j} && \text{für } \beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ G'-1 \\ &= 0 && \text{für } \beta \mp G', \\ \bar{\mathfrak{Y}} V_{\beta j} &= (\beta+1)\mathfrak{Y} V_{\beta+1, j}. \end{aligned}$$

80. Für einen gemischten Extensor können wir das Gleiche bekommen. In der Tat setze man

$$\mathfrak{B}^{[\lambda_p]}_{[\mu_q]} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s} = \prod_{p=1}^{r} \frac{\alpha_p!}{(\alpha_p-\lambda_p)!} \prod_{q=1}^{s} \frac{(\beta_q+\mu_q)!}{\beta_q!} \times T^{\alpha_1-\lambda_1,\, i_1,\, \ldots,\, \alpha_r-\lambda_r,\, i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1+\mu_1,\, j_1,\, \ldots,\, \beta_s+\mu_s,\, j_s}, \tag{15.24}$$

$$\bar{\mathfrak{S}} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s} = \mathfrak{B}^{[1]}_{[0]} \mathfrak{S} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s} \tag{15.25}$$

falls $\beta_q \leqq G'_q-1$ für alle Werte von $q=1,\ 2,\ \ldots,\ s$

$$= 0$$

falls $\beta_q = G'_q$ für irgendeinen Wert von $q=1,\ 2,\ \ldots,\ s$,

$$\bar{\mathfrak{Y}} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s} = \mathfrak{B}^{[0]}_{[1]} \mathfrak{Y} T^{\alpha_1 i_1 \ldots \alpha_r i_r}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\beta_1 j_1 \ldots \beta_s j_s} \tag{15.26}$$

falls $\alpha_p \leqq G_p$ für alle Werte von $p=1,\ 2,\ \ldots,\ r$

$$= 0$$

falls $\alpha_p = G_p+1$ für irgendeinen Wert von $p=1,\ 2,\ \ldots,\ r$,

dann erhalten wir

$$\text{(15.27)}\quad \mathfrak{S}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s} + \mathfrak{Y}T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$
$$= \sum_{(\lambda_p,\, \mu_q)}^{1} \left\{(G_p+1)\lambda_p + (G'_q+1)\mu_q\right\} \mathfrak{B}\begin{bmatrix}1-\lambda_p\\ 1-\mu_q\end{bmatrix} T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_r i_r}_{\cdots\cdots\cdots \beta_1 j_1 \cdots \beta_s j_s}$$

und schliessen, dass der Operator $\mathfrak{Y}^H$ bzw. $\mathfrak{S}^H$ durch einen linearen Ausdruck der Operatoren der Form $\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix}\mathfrak{S}^K$ bzw. $\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix}\mathfrak{Y}^K$ $(K = 0, 1, \ldots, H)$ mit festen von α_p und β_q unabhängigen Koeffizienten dargestellt werden kann. Denn man kann die Richtigkeit der folgenden Beziehungen ohne Schwierigkeit versichern:

$$\text{(15.28)}\qquad \mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix}\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda'_p\\ \mu'_q\end{bmatrix} = \mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p+\lambda'_p\\ \mu_q+\mu'_q\end{bmatrix},$$

$$\text{(15.29)}\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix} = \mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix}\mathfrak{S} + \sum_{(\lambda'_p,\, \mu'_q)}^{1} (\lambda_p\lambda'_p + \mu_q\mu'_q)\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p+1-\lambda'_p\\ \mu_q+1-\mu'_q\end{bmatrix},$$

$$\text{(15.30)}\qquad \mathfrak{Y}\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix} = \mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p\\ \mu_q\end{bmatrix}\mathfrak{Y} - \sum_{(\lambda'_p,\, \mu'_q)}^{1} (\lambda_p\lambda'_p + \mu_q\mu'_q)\mathfrak{B}\begin{bmatrix}\lambda_p+1-\lambda'_p\\ \mu_q+1-\mu'_q\end{bmatrix}.$$

81. Nun sind wir im Stande, die Beziehungen zwischen den Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^H$ zu untersuchen. Die Definition des Operators $\mathfrak{S}^H$ für einen exkontravarianten Extensor erster Stufe finden durch die Gleichung

$$\text{(4.1)}\qquad \mathfrak{S}^H V^{\beta i} = \sum_{\lambda=0}^{H} (-1)^{H-\lambda}\binom{H}{\lambda} V^{\beta+\lambda,\, i(H-\lambda)}$$

statt. Setzend $\nu = \beta+\lambda$ statt λ und $\alpha = H+\beta$ statt H, gestaltet sich die letzte Gleichung in die Form

$$\mathfrak{S}^{\alpha-\beta} V^{\beta i} = \sum_{\nu=\beta}^{\alpha} (-1)^{\alpha-\nu}\binom{\alpha-\beta}{\nu-\beta} V^{\nu i(\alpha-\nu)}.$$

Schreiben wir dabei noch weiter μ statt β, multiplizieren mit $\binom{\alpha}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^H)^{\alpha-\mu}$ die beiden Seiten und summieren dann in bezug auf μ von Null bis α, so ergibt sich

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^H)^{\alpha-\mu}\mathfrak{S}^{\alpha-\mu}V^{\mu i}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\alpha}\sum_{\nu=\mu}^{\alpha}\binom{\alpha}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^H)^{\alpha-\mu}(-1)^{\alpha-\nu}\binom{\alpha-\mu}{\nu-\mu}V^{\nu i(\alpha-\nu)}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\alpha}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\alpha-\nu}\binom{\alpha}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^H)^{\alpha-\mu}\binom{\alpha-\mu}{\nu-\mu}V^{\nu i(\alpha-\nu)}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-\nu}\binom{\alpha}{\nu}(1-2^H)^{\alpha-\nu}2^{H\nu}V^{\nu i(\alpha-\nu)},$$

da

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{a}{\mu}\binom{a-\mu}{\nu-\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^{H})^{a-\mu}$$

$$=\binom{a}{\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^{H})^{a-\mu}$$

$$=\binom{a}{\nu}(1-2^{H})^{a}\left(1+\frac{2^{H+1}-1}{1-2^{H}}\right)^{\nu}$$

$$=\binom{a}{\nu}(1-2^{H})^{a-\nu}2^{H\nu}$$

ist. Infolgedessen erhält man wegen (5.1) die Beziehung

$$\mathfrak{Z}^{H}V^{ai}=\sum_{\mu=0}^{a}\binom{a}{\mu}(2^{H+1}-1)^{\mu}(1-2^{H})^{a-\mu}\mathfrak{S}^{a-\mu}V^{\mu i}, \tag{15.31}$$

was wir gesucht haben.

82. Nun fahren wir fort, indem wir die Beziehungen zwischen den beiden Operatoren $\mathfrak{S}^{H}$ und $\mathfrak{Z}^{H}$ für einen exkovarianten Extensoren aufstellen. Zu diesem Zweck beweisen wir als Vorbereitung die folgende Identität für einen beliebigen Extensor erster Stufe

$$(-1)^{\mu}\binom{a+\mu}{\mu}W_{a+\mu,\,i}^{\;\;\;\cdot\;\;\;;(\mu)}=\sum_{\nu=0}^{\mu}(-1)^{\mu-\nu}\frac{1}{\nu!}\binom{G-a-\nu}{\mu-\nu}\mathfrak{S}^{\nu}W_{ai}. \tag{15.32}$$

Nach (4.3) erhält man

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu}(-1)^{\mu-\lambda}\frac{1}{\lambda!}\binom{G-a-\lambda}{\mu-\lambda}\mathfrak{S}^{\lambda}W_{ai}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\mu}(-1)^{\mu-\lambda}\binom{G-a-\lambda}{\mu-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\lambda}(-1)^{\nu}\binom{a+\nu}{a}\binom{G-a-\nu}{\lambda-\nu}W_{a+\nu,\,i}^{\;\;\;\cdot\;\;\;;(\nu)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\mu}\sum_{\lambda=\nu}^{\mu}(-1)^{\mu+\nu-\lambda}\binom{a+\nu}{a}\binom{G-a-\lambda}{\mu-\lambda}\binom{G-a-\nu}{\lambda-\nu}W_{a+\nu,\,i}^{\;\;\;\cdot\;\;\;;(\nu)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\mu}\sum_{\tau=0}^{\mu-\nu}(-1)^{\mu-\tau}\binom{a+\nu}{a}\binom{G-a-\nu-\tau}{G-a-\mu}\binom{G-a-\nu}{\tau}W_{a+\nu,\,i}^{\;\;\;\cdot\;\;\;;(\nu)}$$

($\tau=\lambda-\nu$ gesetzt)

$$=(-1)^{\mu}\binom{a+\mu}{a}W_{a+\mu,\,i}^{\;\;\;\cdot\;\;\;;(\mu)},$$

da man infolge (1.7) sieht

$$\sum_{\tau=0}^{\mu-\nu}(-1)^{\tau}\binom{G-a-\nu}{\tau}\binom{G-a-\nu-\tau}{G-a-\mu}=0 \qquad \text{für} \quad \mu\gneqq\nu$$

$$=1 \qquad \text{für} \quad \mu=\nu.$$

Nun liefert (5.3) mittels (15.32)

$$\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} = \sum_{\nu=0}^{G-H-\alpha} \binom{H-1+\nu}{H-1} \binom{\alpha+H+\nu}{\nu}^{-1} \left\{ (-1)^\nu \binom{\alpha+H+\nu}{\nu} W_{\alpha+H+\nu,\, i}^{(\nu)} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{G-H-\alpha} \binom{H-1+\nu}{H-1} \binom{\alpha+H+\nu}{\nu}^{-1}$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^{\nu-\lambda} \frac{1}{\lambda!} \binom{G-\alpha-H-\lambda}{\nu-\lambda} \mathfrak{S}^\lambda W_{\alpha+H,\, i}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{G-H-\alpha} \frac{1}{\lambda!} \sum_{\nu=\lambda}^{G-H-\alpha} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{H-1+\nu}{H-1} \binom{\alpha+H+\nu}{\nu}^{-1}$$

$$\times \binom{G-\alpha-H-\lambda}{\nu-\lambda} \mathfrak{S}^\lambda W_{\alpha+H,\, i}\,.$$

Es ist aber

$$\sum_{\nu=\lambda}^{G-H-\alpha} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{H-1+\nu}{H-1} \binom{\alpha+H+\nu}{\nu}^{-1} \binom{G-\alpha-H-\lambda}{\nu-\lambda}$$

$$= \binom{H-1+\lambda}{\lambda} \binom{G-\lambda}{\alpha+H}^{-1} \binom{G}{\lambda}^{-1} \sum_{\nu=\lambda}^{G-H-\alpha} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{H-1+\nu}{H-1+\lambda} \binom{G}{\alpha+H+\nu}.$$

Der Summand rechts formt sich in

$$\sum_{\nu=\lambda}^{G-H-\alpha} (-1)^{\nu-\lambda} \binom{H-1+\nu}{H-1+\lambda} \binom{G}{\alpha+H+\nu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{G-H-\alpha-\lambda} (-1)^{G-(\alpha+H+\lambda)-\mu} \binom{G}{\mu} \binom{G-\alpha-1-\mu}{H-1+\lambda}$$

um, indem $G-(\alpha+H+\mu)$ an Stelle von ν gesetzt wird. Differenzieren wir andererseits die beiden Seiten der Identität

$$x^{G-(H+\lambda)} = x^G x^{-(H+\lambda)}$$

$\{G-(\alpha+H+\lambda)\}$-mal nach x und dividieren mit $(G-\alpha-H-\lambda)!$, so entsteht vermöge (1.2) nach einfacher Rechnung

$$\binom{G-H-\lambda}{\alpha} x^\alpha = \sum_{\mu=0}^{G-\alpha-H-\lambda} (-1)^{G-(\alpha+H+\lambda)-\mu} \binom{G}{\mu} \binom{G-\alpha-\mu-1}{H+\lambda-1} x^{G-\mu} x^{-(G-\alpha-\mu)},$$

da für $A > 0$

$$\frac{d^\tau}{dx^\tau} x^{-A} = (-1)^\tau \frac{(A+\tau-1)!}{(A-1)!} x^{-(A+\tau)}$$

ist. Somit ist

$$\binom{G-H-\lambda}{a} = \sum_{\mu=0}^{G-\alpha-H-\lambda} (-1)^{G-(\alpha+H+\lambda)-\mu} \binom{G}{\mu}\binom{G-a-1-\mu}{H-1+\lambda}.$$

Daher ersieht man schliesslich

$$\mathfrak{Z}^H W_{\alpha i} = \frac{H!}{G!}\binom{a+H}{a} \times \sum_{\lambda=0}^{G-H-\alpha} (G-H-\lambda)!\binom{H-1+\lambda}{\lambda}\mathfrak{S}^\lambda W_{\alpha+H,i}, \tag{15.33}$$

welches die gesuchte Beziehung zwischen den beiden Operatoren $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{S}^H$ angibt.

83. Wir können auch die Beziehungen zwischen den beiden Operatoren $\mathfrak{S}^H$ und $\mathfrak{Z}^H$ für einen Extensor höherer Stufe auf dieselbe Weise durchführen, indem wir die sukzessiven Ableitungen von Bestimmungszahlen des Extensors eliminieren. Aber wegen ihrer sehr komplizierten Gestalt schreiben wir sie hier nicht ausführlich hin.

84. Wir möchten die vorliegende Abhandlung unter Hinzufügung der Bemerkung abschliessen, dass man auch Beziehungen zwischen den beiden Operatoren $\mathfrak{Z}^H$ und $\mathfrak{Y}^H$ für einen Extensor beliebiger Stufe aufstellen kann. Wir gehen jedoch nicht weiter darauf ein.

Januar 1940.

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzung der Namen der Zeitschriften.

Amer. J. M. = American Journal of Mathematics.
Ann. M. = Annals of Mathematics, series 2.
Bull. A. M. S. = Bulletin of the American Mathematical Society.
Bull. A. R. Belg. = Bulletin de Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 5e série.
Bull. Soc. Math. France = Bulletin de la Société Mathématique de France.
C. R. = Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris.
Crelles J. = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Jap. J. M. = Japanese Journal of Mathematics.
Jahres. D. M. V. = Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
J. F. S. Hok. = Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, series I (Mathematics).
J. L. = Journal de Mathématiques pures et appliquées, 9e série.
M. A. = Mathematische Annalen.
Mémoires S. M. = Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectoriel et tensoriel et pour ses applications à la géométrie, à méchanique et à la physique, Moscou.
Monatsh. = Monatshefte für Mathematik und Physik.
M. Z. = Mathematische Zeitschrift.
P. M. F. = Prace Matematyczno-Fizyczne.
Proc. Amst. = Proceedings Koninklijke Akademie van Wetenshappen te Amsterdam.
Proc. I. A. S. = Proceedings of the Indian Academy of Science.
Proc. I. A. Tokio = Proceedings of the Imperial Academy, Tokio.
Proc. N. A. S. = Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.
Quart. J. M. O. = Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series.
Rend. C. M. Palermo = Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
Rend. Lincei = Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie 6a.
Tôhoku M. J. = Tôhoku Mathematical Journal.
Trans. A. M. S. = Transactions of the American Mathematical Society.

I. Die Differentialgeometrie höherer Ordnung.

(FINSLERsche Räume und die Geometrie von Bahnen zweiter Ordnung ausgeschlossen)

L. BERWALD

[1] Über die n-dimensionalen CARTANschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-fachen Oberflächenintegrals, Acta Mathematica, 71 (1939, 191–248.

[2] Über FINSLERsche und CARTANsche Geometrie II. Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallelhyperflächen in CARTANschen Räumen, Compositio Mathematica, 7 (1939), 141–176.

E. BORTOLOTTI

[1] Trasporti non lineari: Geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. I. Preliminari. II. Le proprietà intrinseche del sistema. III. Altri operatori differenziali intrinsechi. Le proprietà descrittive del sistema, Rend. Lincei, 23 (1936), 16–21, 104–110, 175–180.

É. CARTAN

[1] Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actualités scientifiques et industrielles, 72 (1933), 47 S.

[2] La géométrie de l'intégral $\int F(x, y, y', y'')dx$, J. L., 15 (1936), 42–69.

[3] Les espaces généralisés et l'intégration de certain classes d'équations différentielles, C. R., 206 (1938), 1689–1693.

H. V. CRAIG

[1] On the solution of the EULER equations for their highest derivatives, Bull. A. M. S., 36 (1930), 558–562.

[2] On parallel displacement in a non-FINSLER space, Trans. A. M. S., 33 (1931), 125–142.

[3] On a covariant differentiation process, Bull. A. M. S., 37 (1931), 731–734.

[4] On a covariant differentiation process II, Bull. A. M. S., 39 (1933), 919–922.

[5] On a generalized tangent vector, Amer. J. M., 57 (1935), 457–462.

[6] On a generalized tangent vector II, Amer. J. M., 58 (1936), 833–846.

[7] On tensors relative to the extended point transformation, Amer. J. M., 59 (1937), 764–774.

[8] On extensors and a EUCLIDean basis for higher order spaces, Amer. J. M., 61 (1939), 791–808.

S. CHERN

[1] Sur la géométrie d'une équation différentielle du troisième ordre, C. R., 204 (1937), 1227–1229.

TH. DE DONDER

[1] Théorie invariantive du calcul des variations, Bruxelle, 1935, 230 S.

J. DOUGLAS

[1] System of K-dimensional manifolds in an N-dimensional space, M. A., 105 (1931), 707–733.

J. GÉHÉNIAU

[1] Sur la forme paramétrique d'une intégrale n-uple, Bull. A. R. Belg., 1934, 1091–1095.

M. HACHTROUDI

[1] Les espaces d'éléments à connexion projective normale, Actualités scientifiques et industrielles, 565 (1937), 83 S.

M. HAIMOVICI

[1] Sur la géométrie d'une intégrale, C. R., 206 (1938), 1071–1073.

H. HASHIMOTO

[1] On the geometry of a system of partial differential equations of third order, J. F. S. Hok., 8 (1940), 163–172.

S. HOKARI

[1] Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören, J. F. S. Hok., 3 (1935), 15-26.

[2] Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören II, J. F. S. Hok., 4 (1935), 41-50.

[3] Die Geometrie des Integrals $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2b a_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt$, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 209-212.

[4] Die Differentialgeometrie in der speziellen KAWAGUCHIschen Mannigfaltigkeit mit der Massbestimmung von einer bestimmten Gestalt, J. F. S. Hok., 6 (1937), 125-157.

[5] Eine symmetrische, metrische Übertragung im KAWAGUCHIschen Raume der Ordnung zwei, Jap. J. M., 15 (1938), 129-137.

[6] Order of the line-elements in KAWAGUCHI spaces, Tensor, 1 (1938), 39-41.

[7] Die Krümmungstheorie im KAWAGUCHIschen Raume der Ordnung 2, J. F. S. Hok., 7 (1939), 95-147.

[8] Zur neuen Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, J. F. S. Hok., 8 (1940), 47-62.

[9] Die Theorie des KAWAGUCHIschen Raumes mit der Massbestimmung von einer bestimmten Gestalt, J. F. S. Hok., 8 (1940), 63-78.

H. HOMBU

[1] On a non-FINSLER metric space, Tôhoku M. J., 37 (1933), 190-198.

[2] Invariantentheorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 156-161.

[3] Theorie der kugelgeometrischen Übertragung in der Mannigfaltigkeit von Hyperflächenelementen, J. F. S. Hok., 4 (1936), 195-248.

[4] Geometrie des Integrals $\int (Ly''' + M)dx$, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 159-161.

[5] Projektiver Parameter der verallgemeinerten "paths", Proc. I. A. Tokio, 13 (1937), 406-409.

[6] Die projektive Theorie der "paths" $x^{(3)i} + A^i_k x^{(2)k} + B^i = 0$, Proc. I. A. Tokio, 13 (1937), 410-413.

[7] Die Theorie des KAWAGUCHIschen Raumes von der Dimension 2, Tôhoku M. J., 44 (1938), 217-242.

[8] Die projektive Theorie der "paths" 3-ter Ordnung $x^{(3)i} + H^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$, Proc. I. A. Tokio, 14 (1938), 36-40.

[9] Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung I, Jap. J. M., 15 (1938), 139-196.

[10] Die projektive Theorie eines Systems der "paths" höherer Ordnung II, J. F. S. Hok., 7 (1938), 35-94.

[11] Theory of a KAWAGUCHI space, Tensor, 1 (1938), 18-23.

[12] Theory of paths of higher order and its application, Tensor, 2 (1939), 32-36.

A. KAWAGUCHI

[1] Theory of connections in the generalized FINSLER manifold, Proc. I. A. Tokyo, 7 (1931), 211-214.

[2] Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit, Rend. C. M. Palermo, 56 (1932), 246-276.

[3] Theory of connections in the generalized FINSLER manifold II, Proc. I. A. Tokio, 8 (1932), 340-343.
[4] Theory of connections in the generalized FINSLER manifold III, Proc. I. A. Tokio, 9 (1933), 347–350.
[5] The foundation of the theory of displacements, Proc. I. A. Tokio, 9 (1933), 351–354.
[6] The foundation of the theory of displacements II (Application to the functional manifolds), Proc. I. A. Tokio, 10 (1934), 45-48.
[7] The foundation of the theory of displacements III (Application to a manifold of matrices), Proc. I. A. Tokio, 10 (1934), 133-136.
[8] Some intrinsic derivations in a generalized space, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 149-151.
[9] Certain identities in a generalized space, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 152–155.
[10] Die Geometrie des Integrals $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$, Proc. I. A. Tokio, 12 (1936), 205-208.
[11] Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des FINSLERschen Raumes ist, Monatsh., 43 (1936), 289-297.
[12] Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist, Monatsh., 44 (1936), 131-152.
[13] Theory of connections in a KAWAGUCHI space of order two, Proc. I. A. Tokio, 13 (1937), 183-186.
[14] Theory of connections in a KAWAGUCHI space of higher order, Proc. I. A. Tokio, 13 (1937), 237–240.
[15] Beziehung zwischen einer metrischen linearen Übertragung und einer nicht-metrischen in einem allgemeinen metrischen Raume, Proc. Amst., 40 (1937), 596-601.
[16] On the contractions of extensors, Proc. I. A. Tokio, 14 (1938), 237–241.
[17] Geometry in an n-dimensional space with the arc length $s = \int \{A_i(x, x')x''^i + B(x, x')\}^{\frac{1}{p}} dt$, Trans. A. M. S., 44 (1938), 153–167.
[18] Ein n-dimensionaler metrischer Raum mit dem Zusammenhang, der von m-dimensionalen Flächenelementen abhängig ist (Diese Arbeit wird in Mémoires S. M , 5 publiziert).
[19] Einige Sätze über die Extensoren, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 17 (1938), 166-176.
[20] Views on higher order geometry of connections, Tensor, 1 (1938), 13–18.
[21] Eine Verallgemeinerung von Extensoren, Monatsh., 48 (1939), 329–339.
[22] Views on higher order geometry of connections (continued), Tensor, 2 (1939), 39-45.

A. KAWAGUCHI und H. HOMBU
[1] Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, J. F. S. Hok., 6 (1937), 21-62.

D. D. KOSAMBI
[1] An affine calculus of variations, Proc. I. A. S., 2 (1933), 333–335.
[2] Path-spaces of higher order, Quart. J. M. O., 7 (1936), 97–104.
[3] The tensor analysis of partial differential equations, Tensor, 2 (1939), 36–39.

T. OHKUBO
[1] Base connections in a special KAWAGUCHI space, J. F. S. Hok., 5 (1937), 167-188.
[2] Die Geometrie der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, J. F. S. Hok., 6 (1937), 113-124.
[3] Die Geometrie der Differentialgleichungen dritter Ordnung, Jap. J. M., 14 (1938), 59-66.
[4] Übertragungen in dem metrischen Raume der "K-spreads", J. F. S. Hok., 6 (1938), 159-174.
[5] Generalized geometry of paths, Tensor, 1 (1938), 36-39.

V. PÂQUET
[1] Sur la formule fondamentale du calcul des variations, Bull. A. R. Belg., 1935, 510-517.
[2] Sur la formule fondamentale de la théorie invariantive des variations, Bull. A. R. Belg., 1936, 40-45.
[3] La forme intégrale H_n dans la théorie invariantive du calcul des variations, Bull. A. R. Belg., 1936, 1259-1272.

J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES
[1] On the theory of the geometric object, Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 42 (1937), 356-376.

V. SEETHARAMAN
[1] Differential invariants for path spaces of order 3, Proc. I. A. S., 5 (1937), 161-165.
[2] Differential invariants for path space of order 4, Proc. I. A. S., 5 (1937), 336-342.
[3] Differential invariants for higher path spaces, Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, 45 (1939), 64-87.

J. L. SYNGE
[1] Some intrinsic and derived vectors in a KAWAGUCHI space, Amer. J. M., 57 (1935), 679-691.

G. VRANCEANU
[1] Les invariants de deux équations aux différentielles totales de classe six, Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, 8 (1937), 583-602.
[2] La géométrisation des équations aux dérivées partielles du second ordre, J. L., 16 (1937), 361-374.

II. Andere verschiedene Gebiete.

(Nur die in der vorliegenden Abhandlung zitierten Arbeiten)

L. BERWALD
[i] Über Parallelübertragung in Räumen mit allgemeiner Massbestimmung, Jahres. D. M. V., 34 (1925), 213-220.
[ii] Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, M. Z., 25 (1926), 40-73.
[iii] Sui differenziali secondi covarianti, Rend. Lincei, 5 (1927), 763-768

[iv] Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, Crelles J., 156 (1928), 191–210, 211–222.

[v] Una forma normale invariante della seconda variazione, Rend. Lincei, 7 (1928), 301–306.

[vi] Parallelübertragung in allgemeinen Räumen, Atti del Congresso intern. dei Matematici Bologna, 4 (1928), 263–270.

[vii] Über eine charakteristische Eigenschaft der allgemeinen Räume konstanter Krümmung mit geradlinigen Extremalen, Monatsh., 36 (1929), 315–330.

[viii] Über die n dimensionalen Geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die kürzesten sind, M. Z., 30 (1929), 449–469.

[ix] Über FINSLERsche und verwandte Räume, Comptes Rendus du deuxième Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Praha, 1934.

[x] Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen FINSLERschen Raum, Monatsh., 43 (1936), 1–14.

[xi] On the projective geometry of paths, Ann. M., 37 (1936), 879–898.

[xii] Über FINSLERsche und CARTANsche Geometrie I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen FINSLERschen Raumes, Mathematica, 16 (1940).

W. BLASCHKE

[i] Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. 2, Berlin, 1923, 259 S.

E. BOMPIANI

[i] Geometrie riemanniane di specie superiore, Memoria della classe di scienze fisiche, matematiche e naturelí, Reale Accademia d'Italia, 6 (1935), 269–520.

[ii] Sulle varietà anolonome, Rend. Lincei, 27 (1938), 37–52.

E. BORTOLOTTI

[i] Nuova esposizione su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del VITALI, e applicazione alla geometria riemanniane di specie superiore, Rendiconti Seminario Padova, 2 (1930), 1–48, 164–208.

[ii] Differential invariants of direction and point displacements, Ann. M., 32 (1930), 361–377.

[iii] Trasporti rigidi e geometria delle varietà anolonome, Bollettino dell'-Unione Matematica Italiana, 10 (1931), 5–12.

[iv] Sulla geometria differenziale delle congruenze, Atti della Società Italiana, 22 (1934), 185–187.

[v] Vedute generali sul calcolo di VITALI e sue estensioni, Rend. Lincei, 19 (1934), 777–781, 854–859.

[vi] La méthode de G. VITALI dans la recherche géométrique, Mémoires S. M., 4 (1934), 269–288.

[vii] Superficie anolonome complementari, Scritti matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, 1936, 553–576.

[viii] Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonome, Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana, 1937, 312–317.

É. CARTAN

[i] Sur les variétés à connexion projective, Bull. Soc. Math. France, 52 (1924), 205–241.

[ii] Sur représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes, Atti del Congresso intern. dei Matematici Bologna, 4 (1928), 253–261.

[iii] Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés, Mathematica, 4 (1930), 114–136.

[iv] Les espaces de FINSLER, Actualités scientifiques et industrielles, 79 (1934), 40 S.

P. DELENS

[i] Sur certains problèmes rélatifs aux espaces de FINSLER, C. R., 196 (1933), 1356–1358.

[ii] La métrique angulaire des espaces de FINSLER et la géométrie différentielle projective, Actualités scientifiques et industrielles, 80 (1934), 38 S.

J. DOUGLAS

[i] The general geometry of paths, Ann. M., 29 (1928), 143–168.

A. DUSCHEK

[i] Über geometrische Variationsrechnung, Mémoires S. M., 4 (1934), 95–99.

A. DUSCHEK und W. MAYER

[i] Lehrbuch der Differentialgeometrie, Bd. 2, Leipzig-Berlin, 1930, 245 S.

[ii] Zur geometrischen Variationsrechnung, Monatsh., 40 (1933), 294–308.

L. P. EISENHART

[i] Spaces with corresponding paths, Proc. N. A. S., 8 (1922), 233–238.

L. P. EISENHART und M. S. KNEBELMAN

[i] Displacements in a geometry of paths which carry paths into paths, Proc. N. A. S., 13 (1927), 38–42.

P. FINSLER

[i] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissertation Göttingen, 1918, 120 S.

P. FRANKLIN und C. L. E. MOORE

[i] Geodesics of PFAFFIans, Journal of Mathematics and Physics, 10 (1931), 157–190.

G. FUBINI und E. ČECH

[i] Geometria proiettiva differenziale, I, II, Bologna, 1926–27, 794 S.

[ii] Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931, 290 S.

P. FUNK

[i] Über Geometrien, bei denen die Geraden die kürzesten Linien sind und die Äquidistanten zu einer Geraden wieder Gerade sind, Monatsh., 37 (1930), 153–158.

[ii] Über zweidimensionale FINSLERsche Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver konstanter Krümmung, M. Z., 40 (1935), 86–93.

ST. GOŁAB

[i] Einige Bemerkungen über Winkelmetrik in FINSLERschen Räumen, Internationaler Mathematikerkongress Zürich, 2 (1932), 178–179.

[ii] Sur la représentation conforme de l'espace de FINSLER sur l'espace EUCLIDien, C. R., 196 (1933), 25–28.

[iii] Sur la représentation conforme de deux espaces de FINSLER, C. R., 196 (1933), 986–988.
[iv] Sur la mesure des aires dans les espaces de FINSLER, C. R., 200 (1935), 197–200.
[v] Sur le rapport entre les notions des mesures des angles et des aires dans les espaces de FINSLER, C. R., 201 (1935), 250–251.
[vi] Les transformations par polaires réciproques dans la géométrie de FINSLER, C. R., 201 (1935), 1462–1464.
[vii] Sur une condition nécessaire et suffisante afin qu'un espace de FINSLER soit un espace RIEMANNien, Rend. Lincei, 21 (1935), 133–137.
[viii] Über das Anholonomitätsobjekt von SCHOUTEN und VAN DANTZIG, Congrès intern. d. Math. Oslo, 1936.
[ix] Über eine Art der Geometrie von KAWAGUCHI-HOKARI, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, 16 (1937), 25–30.
[x] Über die Klassifikation der geometrischen Objekt, M. Z., 44 (1938), 104–114.

J. HAANTJES

[i] On the projective geometry of paths, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, s. 2, 5 (1937), 103–115.

M. HAIMOVICI

[i] Formules fondamentales dans la théorie des hypersurfaces d'un espace de FINSLER, C. R., 198 (1934), 426–427.
[ii] Sur les espaces généraux qui se correspondent point par point avec conservation du parallélisme de M. CARTAN, C. R., 198 (1934), 1105–1108.
[iii] Sur quelques types de métriques de FINSLER, C. R., 199 (1934), 1091–1093.
[iv] Les formules fondamentales dans la théorie des hypersurfaces d'un espace général, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 20 (1935), 39–58.
[v] Sur les espaces de FINSLER à connexion affine, C. R., 204 (1937), 837–839.
[vi] Le parallélisme dans les espaces de FINSLER et la différentiation invariante de M. LEVI-CIVITA, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 24 (1938), 214–218.
[vii] Sulle superficie totalmente geodetiche negli spazi di FINSLER, Rend. Lincei, 27 (1938), 633–641.
[viii] Variétés totalement extrémales et variétés totalement géodésiques dans les espaces de FINSLER, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, 25 (1939), 559–644.

V. HLAVATÝ

[i] Sur la courbure des variétés non-holonomes, Rend. Lincei, 12 (1930), 567–574.
[ii] Sur les courbes des variétés non-holonomes, Rend. Lincei, 12 (1930), 647–654.
[iii] Über eine Art der Punktkonnexion, M. Z., 38 (1933), 135–145.
[iv] Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen, M. Z., 38 (1934), 283–300.

V. HLAVATÝ und ST. GOŁAB

[i] Zur Theorie der Vektor- und Punkt-konnexion, P. M. F., 39 (1932), 119–130.

S. HOKARI

[i] Winkeltreue Transformationen und Bewegungen im FINSLERschen Raume, J. F. S. Hok., 5 (1936), 1–8.

H. HOMBU

[i] Konforme Invarianten im FINSLERschen Raume I, J. F. S. Hok., 2 (1934), 157–168.

[ii] Konforme Invarianten im FINSLERschen Raume II, J. F. S. Hok., 4 (1935), 51–66.

[iii] Die Krümmungstheorie im FINSLERschen Raume, J. F. S. Hok., 5 (1936), 67–94.

Z. HORÁK

[i] Sur une généralisation de la notion de variété, Publications Fac. Sci. Univ. Masaryk, Brno, 86 (1927), 1–20.

[ii] Sur les systèmes non holonomes, Bulletin Académie des Sciences de Bohême, 29 (1927), 1–18.

[iii] Die Formeln für allgemeine Übertragung bei Benutzung von nicht-holonomen Parametern, Nieuw Archief voor Wisskunde, 2 r., 15 (1927), 193–201.

[iv] Sur la courbure des variétés non holonomes, C. R., 187 (1928), 1273–1276.

[v] Sur l'équation des ondes de SCHRÖDINGER, C. R., 188 (1929), 494–496.

[vi] Sur le principe d'HAMILTON dans le cas des liaisons non holonomes, Internationaler Mathematikerkongress Zürich, 1932, 292–293.

[vii] Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes, P. M. F., 41 (1933), 25–37.

T. HOSOKAWA

[i] On various linear displacements in the BERWALD-FINSLER's manifold, Science Reports Tôhoku Imp. University, s. 1, 19 (1930), 37–51.

[ii] Conformal property of a manifold B_n, Jap. J. M., 9 (1932), 59–62.

[iii] Über nicht-holonome Übertragung in allgemeiner Mannigfaltigkeit T_n, J. F. S. Hok., 2 (1934), 1–11.

[iv] FINSLERian wave geometry and MILNE's world-structure, Journal of Science of the Hirosima University, s. A, 8 (1938), 249–270.

P. HULUBEI

[i] Parallélisme dans un complexe linéare, Buletinul Facultatei de Stünte din Cernauci, 4 (1930), 136–145.

E. KÄHLER

[i] Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Hamburger Math. Einzelschriften, 16 (1934), 78 S.

A. KAWAGUCHI

[i] Über die Differentialgeometrie der Gruppe der linearen Transformationen mit einem festen Punkte, Jap. J. M., 2 (1926), 115–127.

[ii] Beiträge zur natürlichen Geometrie in der Inversionsebene, Science Reports Tôhoku Imp. University, s. 1, 15 (1926), 195–203.

[iii] Über die beiden niederen Differentialinvarianten einer räumlichen Transformationsgruppe, Science Reports Tôhoku Imp. University, s. 1, 15 (1926), 305–322.
[iv] Über projektive Differentialgeometrie II. Theorie der Ebenenkurven, Tôhoku M. J., 28 (1927), 171–192.

M. S. KNEBELMAN
[i] Groups of collineations in a space of paths, Proc. N. A. S., 13 (1927), 396–400.
[ii] Motions and collineations in a general space, Proc. N. A. S., 13 (1927), 607–611.
[iii] Collineations of projectively related affine connections, Ann. M., 29 (1928), 389–394.
[iv] Collineations and motions in generalized spaces, Amer. J. M., 51 (1928), 527–564.
[v] Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. N. A. S., 15 (1929), 376–379.

D. D. KOSAMBI
[i] Géométrie différentielle et calcul des variations, Rend. Lincei, 16 (1932), 410–415.
[ii] On the existence of a metric and the inverse variational problem, Bulletin of the Academy of Science Allahabad, 2 (1932), 17–28.
[iii] The problem of differential invariants, Journal of the Indian Mathematical Society, 20 (1933), 185–188.
[iv] Parallelism and path-space, M. Z., 37 (1933), 608–618.
[v] Homogeneous metrics, Proc. I. A. S., 1 (1935), 952–954.
[vi] Path-geometry and cosmogony, Quart. J. M. O., 7 (1936), 290–293.
[vii] Les métriques homogènes dans les espaces cosmogoniques, C. R., 206 (1938), 1086–1088.
[viii] Les espaces des paths généralisés qu'on peut associer avec un espace de FINSLER, C. R., 206 (1938), 1538–1541.

L. KOSCHMIEDER
[i] Über zwei bei der Variation der Doppelintegrale auftretende Invarianten, M. A., 94 (1925), 252–261.
[ii] Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale, M. Z., 24 (1925), 181–190.
[iii] Sobre la segunda variación de las integrales múltiples, Revista Mathemâtica Hispano-Americano, s. 2, 1 (1926), 129–146.
[iv] Invarianten der Integranden vielfacher Integrale in der Variationsrechnung I, II, Proc. Amst., 31 (1927), 140–150, 469–484.
[v] Die neuere formale Variationsrechnung, Jahres. D. M. V., 40 (1931), 109–132.

G. KOWALEWSKI
[i] Vorlesungen über allgemeine natürliche Geometrie und LIEsche Transformationsgruppen, Berlin, 1931, 280 S.

H. LEVY
[i] Normal coordinates in the geometry of paths, Proc. N. A. S., 16 (1930), 492–496.

W. MAYER

[i] Beiträge zur geometrischen Variationsrechnung, Jahres. D. M. V., 38 (1929), 260–281.

A. MAXIA

[i] Sulla geometria proiettiva differenziale di una X_3^2 in S_3, Rend. Lincei, 21 (1935), 248–253.

[ii] Varietà anolonome associate ad una trasformazione dualistica, Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 72 (1938–39), 437–454.

[iii] Varietà anolonome immerse in una varietà a connessione affine (X^{n-1}_n in E_n affine), Mémoires de la Société Royale des Sciences et des Lettres de Bohême, classe des sciences, 1939.

[iv] Varietà anolonome immerse in una varietà a connessione affine, Casopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky, 68 (1939), 33–49.

GR. C. MOISIL

[i] Sur les propriétés affines et conformes des variétés non holonomes, Buletinul Facultatei de Stünte din Cernauci, 4 (1930), 15–21.

J. A. SCHOUTEN

[i] On non-holonomic connexions, Proc. Amst., 21 (1928), 291–299.

[ii] Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n, M. Z., 30 (1929), 149–172.

J. A. SCHOUTEN und J. HAANTJES

[i] Über die Festlegung von allgemeinen Massbestimmung und Übertragungen in Bezug auf ko- und kontravariante Vektordichten, Monatsh., 43 (1936), 161–176.

J. A. SCHOUTEN und E. R. VAN KAMPEN

[i] Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nicht holonomer Gebilde, M. A., 103 (1930), 752–783.

V. SEETHARAMAN

[i] Differential invariants for path-space of order 2, Proc. I. A. S., s. A, 5 (1937), 161–165.

W. ŚLEBODZIŃSKI

[i] Sur deux connexions affines généralisées, P. M. F., 43 (1935), 167–205.

[ii] Sur la connexion rhéonome et sur un problème de l'équivalence, P. M. F., 45 (1936), 75–92.

S. L. SYNGE

[i] A generalization of the RIEMANNian line element, Trans. A. M. S., 27 (1925), 61-67.

[ii] Geodesics in non-holonomic geometry, M. A., 99 (1928), 738–751.

J. H. TAYLOR

[i] A generalization of LEVI-CIVITA's parallelism and the FRENET formulas, Trans. A. M S., 27 (1925), 246–264.

[ii] Parallelism and transversality in a sub-space of a general (FINSLER) space, Ann. M., 28 (1927), 620–628.

[iii] An application of tensor analysis to the first variation of an integral, Bull. A. M. S., 35 (1929), 231–236.

J. M. THOMAS

[i] Note on the projective geometry of paths, Proc. N. A. S., 11 (1925), 207–209.

T. Y. THOMAS

[i] On the projective and equi-projective geometry of paths, Proc. N. A. S., 11 (1925), 198–203.

[ii] The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths, Ann. M., 28 (1927), 549–561.

A. W. TUCKER

[i] On tensor invariance in the calculus of variations, Ann. M., 35 (1934), 341–350.

J. L. VANDERSLICE

[i] Non-holonomic geometries, Amer. J. M., 56 (1934), 153–193.

G. VARGA

[i] Beiträge zur Theorie der FINSLERschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen, Lotos Prag, 84 (1936), 1–4.

O. VEBLEN

[i] Normal coordinates for the geometry of paths, Proc. N. A. S., 8 (1922), 192–197.

[ii] Equiaffine geometry of paths, Proc. N. A. S., 9 (1923), 3–4.

[iii] Generalized projective geometry, Journal of the London Mathematical Society, 4 (1929), 140–160.

O. VEBLEN und J. M. THOMAS

[i] Projective normal coordinates for the geometry of paths, Proc. N. A. S., 11 (1925), 204–207.

[ii] Projective invariants of affine geometry of paths, Ann. M., 27 (1926), 278–296.

O. VEBLEN und T. Y. THOMAS

[i] The geometry of paths, Trans. A. M. S., 25 (1923), 551–608.

G. VITALI

[i] Geometria nello spazio HILBERTiano, Bologna, 1929, 282 S.

G. VRANCEANU

[i] Sur les espaces non holonome, C. R., 183 (1926), 852–854.

[ii] Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes, C. R., 183 (1926), 1083–1085.

[iii] Les espaces non holonomes, Mémorial des Sciences Mathématiques, 1936, 70 S.

[iv] Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie, 1 (1936), 8–11.

[v] Sur une théorie unitaire non holonome des champs, Journal de Physiques, 7 (1936), 514–526.

[vi] Les espaces non holonomes, Bollettino dell'Unione Matematica Italiano, 16 (1937), 89–93.

[vii] Invariants de deux surfaces non holonomes complémentaires, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Roumanie, 2 (1938), 459-465.

V. WAGNER

[i] Sur la géométrie différentielle des multiplicités anholonomes, Mémoires S. M., 2-3 (1932), 269-314.

[ii] Über BERWALDsche Räume, Recueil Mathématique Moscou, 3 (1938), 655-662.

J. M. WEGENER

[i] Hyperflächen in FINSLERschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen, Monatsh., 44 (1936), 115-130.

J. H. C. WHITEHEAD

[i] Affine spaces of paths which are symmetric about each point, M. Z., 35 (1932), 644-659.

[ii] Convex regions in the geometry of paths, Quart. J. M. O., 3 (1932), 33-42.

[iii] Couvex regions in the geometry of paths—addendum, Quart. J. M. O., 4 (1933), 226-227.

[iv] On the covering of a complete space by the geodesics through a point, Ann. M., 36 (1935), 679-704.

A. WINTERNITZ

[i] Über die affine Grundlage der Metrik eines Variationsproblems, Berliner Sitzungsberichte, 26 (1930), 457-469.

W. WIRTINGER

[i] On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, Transactions of the Philosophical Society of Cambridge, 22 (1922), 439-446.

A. WUNDHEILER

[i] Über die Variationsgleichungen über affine geodätische Linien und nicht holonome, nicht conservative dynamische Systeme, P. M. F., 38 (1931), 129-146.

[ii] Kovariante Ableitung und die CESÀROschen Unbeweglichkeitsbedingungen, M. Z , 36 (1932), 104-109.

[iii] Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik, P. M. F., 40 (1932), 97-142.

[iv] Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien, Mémoires S. M., 4 (1937), 366-375.

K. YANO

[i] La théorie unitaire des champs proposée par M. VRANCEANU, C. R., 204 (1937), 332-334.

[ii] Sur les espaces non holonomes totalement géodésiques, C. R., 205 (1937), 9-12.

[iii] Sur les équations des géodésiques dans une variété à connexion projective, C. R., 205 (1937), 829.

[iv] Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des "paths", Annales scientifiques de l'Université Jassy, 24 (1938), 395-464.

[v] La relativite non holonome et théorie unitaire d'EINSTEIN et MAYER, Mathematica, 14 (1938), 124-132.