SUR LES OPÉRATIONS ANALYTIQUES DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT, II[1]

Par

Motokiti KONDÔ

Le but de la deuxième partie de ce travail est d'introduire la notion des opérations analytiques des fonctions. Celles-ci sont très importantes dans la théorie des ensembles et intimment liées avec les opérations analytiques des ensembles. En effet, les diverses propriétés de celles-ci des ensembles sont éclairées par la considération de ces opérations des fonctions. C'est la raison pour laquelle nous introduissons dans ce travail la notion de celles-ci.

Pour exprimer ici cette notion nouvelle, nous considérons d'ábord la construction des opérations des fonctions. Comme on sait, il y a diverses celles-ci, par exemple, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, $\int_a^x F(x)dx$, $\frac{d}{dx}F(x)$ etc.. Or, nous pouvons les classifier comme la façon suivante. Le mode par lequel les valeurs des fonctions obtenues par une opération donnée ont été déterminées est différente suivant la propriété de celle-ci, mais il appartient à une des trois façons suivantes; la valeur à un point d'une fonction obtenue par une opération donnée est déterminée par les propriétés des fonctions effectuees de celle-ci à leurs domaines tous entiers, ou bien au voisinage du point considéré, ou bien seulement au point considéré. Plus précisément, quand nous désignons par $\Phi(F_\alpha(x); x)$ une valeur à un point x d'une fonction obtenue en effectuant l'opération considérée sur une famille $\{F_\alpha(x)\}$ $(\alpha \in \Lambda)$ des fonctions ou bien la fonction ainsi obtenue elle-même, nous avons les trois cas suivants.

I. $\Phi(F_\alpha(x); x)$ est déterminée par les propriétés des fonctions $F_\alpha(x)$ $(\alpha \in \Lambda)$ à leurs domaines tous entiers, par exemple, les opérations linéaires des fonctions

$$\Phi(F(x);\ x) = \int_a^b F(y)K(x, y)dy$$

---

1) La première partie de ce travail a été publiée dans le tome VII (1938) p. 1–34 de ce même journal.

jouissent de cette propriété. Dans ce das, il n'y a aucune restriction entre les domaines de $F_\alpha(x)$ $(\alpha \in \Lambda)$ et $\Phi(F_\alpha(x); x)$.

II. Les fonctions $F_\alpha(x)$ $(\alpha \in \Lambda)$ et $\Phi(F_\alpha(x); x)$ sont définies sur un même domaine D et la valeur $\Phi(F_\alpha(x); x)$ à un point x de D est déterminée par les propriétés des $F_\alpha(x)$ au voisinage du x, par exemple, l'opération de la différentiation

$$\Phi(F(x); x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

est une de cette classe.

III. De même que le cas II, les fonctions $F_\alpha(x)$ $(\alpha \in \Lambda)$ et $\Phi(F_\alpha(x); x)$ sont définies sur un même domaine D et la valeur $\Phi(F_\alpha(x); x)$ à un point x de D n'est que déterminée par les propriétés des $F_\alpha(x)$ à ce point x, par exemple, la sommation, la multiplication et l'opération de la limite des fonctions appartiennent à cette classe.

Suivant le cas auquel les opérations appartiennent, elles jouissent de rôles différents dans l'analyse mathématique, mais il me parait que toute fonction obetenue par ces opérations est aussi obtenue par une opération appartennant au cas III en effectuant sur quelques fonctions données. De plus, nous pouvons trouver parmi celles appartenant au cas III les diverses opérations qui jouissent des rôles importants dans l'analyse mathématique. Et, la plupart des opérations des fonctions de la classe III sont celles effectuées sur un nombre fini ou infini dénombrable de fonctions et la précédente peut être considérée comme le cas special de l'autre. Nous envisageons maintenant un peu detaille ces opérations. Soient Φ une de celles-ci, $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les fonctions définies sur un même domaine D et $\Phi(F_n(x); x)$ la fonction obtenue en effectant Φ sur les fonctions $F_n(x)$. D'après la définition, $\Phi(F_n(x); x)$ à un point x_0 de D est déterminée par la suite $\{F_n(x_0)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres réels. Par conséquent, l'opération Φ au point x_0 peut être considérée comme une opération des nombres qui résulte d'un nombre réel $\Phi(F_n(x); x_0)$ à la suite $\{F_n(x_0)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres. Quand nous désignons par $\Phi_{x_0}(x_n)$ celle des nombres, nous avons

$$\Phi(F_n(x); x) = \Phi_x(F_n(x)) \qquad (x \in D)\,.$$

On peut ici distinguer les deux cas, le premier est que toutes les opérations $\Phi_x(x_n)$ des nombres sont identiques deux-à-deux, et la deuxième est qu'il n'appartient pas au premier cas. Les opérations analytiques des fonctions sont celles qui appartiennent au premier cas et celles qui appartiennent au dexuième cas sont quasi-analytiques. L'idée des opérations analytiques des fonction vient de celle-ci de M. M. L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON sur les opérations analytiques des ensembles (L. CANTOROVITCH et E. LIVENSON (1)).

Les resultats principaux de ce travail sont la représnetation des opérations analytiques et quasi-analytiques des fonctions. Dans le chapitre VIII, nous avons discuté la construction des opérations des nombres réels, et démontré qu'elles se composent de quelques opérations fondamentals. Ce sont une préparation pour la considération des opérations analytiques et quasi-analytiques des fonctions, et dans le chapitre IX, nous avons evisagé la représentation de celles-ci. Les cribles fermés et fonctionnels des fonctions sont les notions employées pour représenter celles-ci. Le but du chapitre X est de voir quelques propriétés des opérations analytiques des fonctions.

La relation entre les opérations analytiques et quasi-analytiques des fonctions et des ensembles sera discuté dans la troisième partie de ce travail.

VIII. LES OPÉRATIONS DES NOMBRES

18. Les opérations élémentaires. Pour envisager les opérations des nombres, nous introduirons d'abord l'espace $\mathfrak{N}$ des suites des nombres. Etant donné un ensemble $\mathfrak{N}$ de toutes les suites des nombres, nous définirons la distance dis $(\{x_n\}, \{y_n\})$ entre les deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ des nombres comme il suit,

$$\text{dis}\left(\{x_n\},\ \{y_n\}\right) = \underset{n}{b.s.}\ \nu(x_n\,;\,y_n)$$

où $\nu(x, y) = |\nu(x) - \nu(y)|$ et $\nu(t)$ une fonction définie par les égalités suivantes

$$\nu(t) = \frac{t}{1 + |t|} \text{ pour } t \neq \pm\infty \quad \text{et} \quad \nu(\pm\infty) = \pm 1\,.$$

L'ensemble $\mathfrak{N}$ est alors un espace métrique et complet, mais il n'est pas séparable.

Soit $\Phi(x_n)$ une opération des nombres qui résulte d'un nombre réel à une suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ des nombres réels. L'opération

$\Phi(x_n)$ peut être alors considérée comme une fonctionnel définie sur un sous-ensemble D de $\Re$. Au point de vue des fonctionnels, on peut introduire la notion de la continuité sur les opérations des nombres, c'est-à-dire,

Définition. Soient $\Phi(x_n)$ une opération des nombres définie sur un sous-ensemble D de $\Re$ et $\{x_n^0\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ une suite des nombres réels contenue dans D. Étant donné un nombre positif ε, si l'on peut déterminer un nombre positif δ de façon que les relations $\{x_n\} \in D$ et $\mathrm{dis}(\{x_n\}, \{x_n^0\}) < \delta$ entrainent

$$\nu\Big(\Phi(x_a),\ \Phi(x_n^0)\Big) < \varepsilon,$$

nous dirons que $\Phi(x_n)$ est continue sur la suite $\{x_n^0\}$. Et, quand $\Phi(x_n)$ est continue sur toute suite des nombres de D, nous dirons qu'elle est continue sur D.

On sait diverses opérations continues des nombres, par exemple, la sommation x_1+x_2 et la multiplication x_1x_2 de deux nombres réels x_1 et x_2, l'opérations des limitations supérieure $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ et inférieure $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ des nombres. Parmi celles-ci, les opérations arithmétiques et topologiques sont les plus importantes et fondamentales. Les précédentes sont définies comme il suit,

1°, l'addition par un nombre constant; $x+a$ $(a \neq \pm\infty)$,

2°, la multiplication par un nombre constant; $a\,x$ $(a \neq 0, \pm\infty)$,

3°, l'addition des deux nombres; x_1+x_2, où nous excluons les cas suivants, $x_1 = \pm\infty$ et $x_2 = \pm\infty$,

4°, la multiplication des deux nombres; x_1x_2, où nous excluons les cas suivants, $x_1 = 0$ et $x_2 = \pm\infty$; $x_1 = \pm\infty$ et $x_2 = 0$,

5°, la division par un nombre; x_1/x_2, où nous excluons les cas suivants, $x_1 = +\infty$ ou $-\infty$ et $x_2 = 0, +\infty$ ou $-\infty$.

Pour les opérations topologiques, nous avons la définition suivante.

Définition. Nous dirons qu'une opération continue $\Phi(x_n)$ des nombres définie sur $\Re$ tout entier est topologique, quand elle satisfait à la condition suivante; quelle que soit la fonction $\chi(t)$ continue et croissante monotone dans l'intervalle $[-\infty, +\infty]$, nous avons toujours

$$\Phi(\chi(x_n)) = \chi(\Phi(x_n)).$$

Nous avons alors sans peine les resultats suivants, I, les opérations suivantes des nombres

$$\underset{n}{b.s.}\{x_n\}\,,\quad \underset{n}{b.i.}\{x_n\}\,,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\,,\quad \text{et}\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

sont toutes topologiques,

II, quand les opérations $\Phi_k(x_n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots.)$ des nombres sont toutes topologiques, l'opération $\Phi_0(\Phi_k(x_n))$ des nombres est aussi topologique.

Maintenant, nous considérons le problème de la représentation des opérations topologiques des nombres. Pour cela posons d'abord la définition suivante.

Définition. Étant donné un ensemble $\mathfrak{N}$ des nombres irrationnels $(n_1, n_2, \ldots.)$, nous appelons l'opération des nombres

$$(1) \qquad \Phi(x_n) = \underset{\mathfrak{N}}{b.s.}\left\{\underset{k}{b.i.}(x_{n_k})\right\}$$

celle de M. F. HAUSDORFF et $\mathfrak{N}$ sa base.

La raison que nous l'appelons celle de M. F. HAUSDORFF est ce qu'elle est une traduction de la notion des opérations de M. F. HAUSDORFF des ensembles sur celles des nombre.

Or, on peut aussi donner la définition de celles-ci sous la forme un peu différente, c'est-à-dire, nous pouvons définir une opération $\Phi(x_n)$ de M. F. HAUSDORFF de la base $\mathfrak{N}$ par l'expression suivante,

$$(2) \quad \Phi(x_n) = \underset{r}{b.s.}\left\{(n_1, n_2, \ldots.) \in \mathfrak{N}\,;\; x_{n_k} > r \quad (k = 1.\ 2.\ \ldots.)\right\}.$$

En effet, pour le moment, nous désignons par $\Psi(x_n)$ l'opération des nombres définie par côté droit de l'égalité (2). Quel que soit le nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$ de $\mathfrak{N}$, nous avons $x_{n_k} \geqq \underset{k}{b.i.}(x_{n_k})$, et par suite $\Psi(x_n) \geqq \underset{k}{b.i.}(x_{n_k})$ d'où nous avons $\Psi(x_n) \geqq \Psi(x_n)$. D'autre part, quel que soit le nombre réel r tel qu'on ait $\Phi(x_n) > r$, il existe un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$ dans $\mathfrak{N}$ de sorte qu'on ait $\underset{k}{b.i.}(x_{n_k}) > r$, et donc nous avons $x_{n_k} > r$ $(k = 1, 2, \ldots.)$, ce qui entraine $\Psi(x_n) \geqq r$. Par conséquent, nous avons $\Psi(x_n) \leqq \Phi(x_n)$ et donc $\Psi(x_n) = \Phi(x_n)$, c'est-à-dire, nous avons l'égalité (2).

Nous pouvons alors démontrer le théorème suivant sur la représentation des opérations topologiques des nombres.

Théorème 20. *Pour qu'une opération $\Phi(x_n)$ des nombres soit topologique, il faut et il suffit qu'elle soit de M. F. HAUSDORFF.*

Démonstration. Nous démontrons d'abord que la condition donnée est nécessaire. Pour cela nous supposons qu'une opération $\Phi(x_n)$ des nombres soit topologique. Soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble de tout nombre irrationnel $(n_1, n_2 \ldots\ldots)$ ayant la propriété suivante; il existe une suite $\{x_n^0\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombre réels et un nombre réel r tels qu'on ait $\Phi(x_n^0) > r$, $x_{n_k}^0 > r$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$ et $x_n^0 \leqq r$ $(n \neq n_k)$. L'ensemble $\mathfrak{N}$ est alors non-vide. En effet, étant donnée une suite $\{x_n^0\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombres réels telle qu'on ait $x_n^0 = 0$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$, nous considérons la fonction continue $\chi(t) = 2t$ monotone croissante. Selon la topologicité de l'opération $\Phi(x_n)$, nous avons $2\Phi(x_n^0) = \chi(\Phi(x_n^0)) = \Phi(\chi(x_n^0)) = \Phi(x_n^0)$, ce qui entraine $\Phi(x_n^0) = 0$. Nous avons donc $x_n^0 > -1$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ et $\Phi(x_n^0) > -1$, d'où nous avons $(1, 2, \ldots\ldots) \in \mathfrak{N}$; c'est-à-dire, $\mathfrak{N}$ est non-vide.

Maintenant, nous définirons une opération $\Psi(x_n)$ des nombres définie sur $\mathfrak{N}$ comme il suit, étant donnée une suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres réels, quand il n'existe aucun nombre réel r tel qu'on ait $x_{n_k} > r$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$ et $x_n \leqq r$ $(n \neq n_k)$ pour au moins un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots\ldots)$ de $\mathfrak{N}$, nous posons $\Psi(x_n) = -\infty$, et sinon, posons

$$(3) \quad \Psi(x_n) = b.s.\Big\{(n_1, n_2, \ldots\ldots) \in \mathfrak{N}\,;\; x_{n_k} > r \;\; (k = 1, 2, \ldots\ldots) \text{ et } x_n \leqq r \;\; (n \neq n_k)\Big\}.$$

Nous pouvons alors démontrer qu'on a $\Phi(x_n) \equiv \Psi(x_n)$. Pour cela, nous démontrons d'abord qu'on a $\Phi(x_n) \geqq \Psi(x_n)$. Etant donnée une suite $\{x_n^0\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombre réels, quand nous avons $\Psi(x_n^0) = -\infty$, il est évident que $\Phi(x_n^0) \geqq \Psi(x_n^0)$. Puis, nous considérons le cas où $\Psi(x_n^0) > -\infty$. Le nombre $\Psi(x_n^0)$ est alors défini par l'égalité (3). Nous prenons maintenant un nombre réel r tel qu'on ait $x_{n_k}^0 > r$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$, $x_n^0 \leqq r$ $(n \neq n_k)$ et $(n_1, n_2, \ldots\ldots) \in \mathfrak{N}$. Selon la définition de $\mathfrak{N}$, il existe une suite $\{y_n^{(0)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombres réels et un nombre réel s tel qu'on ait $y_{n_k}^{(0)} > s$ $(k = 1, 2, \ldots\ldots)$, $y_n^{(0)} \leqq s$ $(n \neq n_k)$ et $\Phi(y_n^{(0)}) > -\infty$. Or, d'après la topologicité de $\Phi(x_n)$, nous avons

$$\Phi(y_n^{(0)} + (r-s)) = \Phi(y_n^{(0)}) + (r-s) > r,$$

$$y_{n_k}^{(0)} + (r-s) > r \;\; (k = 1, 2, \ldots\ldots) \quad \text{et} \quad y_u^{(3)} + (r-s) \leqq r \;\; (n \neq n_k),$$

et par suite, sans perdre la généralité, nous pouvons supposer qu'on ait $s = r$.

En posant maintenant

$$y_{n_k}^{(1)} = y_{n_k}^{(0)} \ (k = 1, 2, \ldots\ldots) \quad \text{et} \quad y_n^{(1)} = r \ (n \neq n_k),$$

nous considérons un nombre positif ε tel qu'on ait $\nu(r^*) - \nu(r) > 2\varepsilon$ et $\Phi(y_n^{(0)}) > r^* > r$. On peut alors, d'après la continuité de l'opération $\Phi(x_n)$, choisir un nombre positif δ comme il suit, toute suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombre réels telle qu'on ait $\nu(x_n, y_n^{(1)}) < \delta$, jouit de la propriété $\nu(\Phi(x_n), \Phi(y_n^{(0)})) < \varepsilon$. Puis, nous considérons une fonction contiue $\chi_1(t)$ monotone croissante définie de façon que

$$\chi_1(x) = \begin{cases} t & \text{pour } t \geqq r, \\ \delta\nu(t-r)+r & \text{pour } t < r. \end{cases}$$

Nous avons alors $|\chi_1(y_n^{(0)}) - r| < \delta$ $(n \neq n_k)$, ce qui entraine $\nu(\chi_1(y_n^{(0)}), y_n^{(0)}) > \delta$, et donc d'après la continuité de $\Phi(x_n)$, nous avons

$$(4) \qquad \nu\Big(\Phi\big(\chi_1(y_n^{(1)})\big),\ \Phi(y_n^{(1)})\Big) < \varepsilon.$$

Or, puisque $\Phi(x_n)$ est topologique et que $\chi_1(t)$ est monotone croissante, nous avons $\chi_1(\Phi(x_n)) = \Phi(\chi_1(x_n))$ en particulier, $\chi_1(\Phi(y_n^{(0)})) = \Phi(\chi_1(y_n^{(0)}))$. Par suite, en vertu de la définition de $\chi_1(t)$ et relation $\Phi(y_n^{(0)}) > r$, nous avons $\Phi(\chi_1(y_n^{(0)})) = \chi_1(\Phi(y_n^{(0)}))$ et donc d'après (4), nous avons

$$(5) \qquad \nu\big(\Phi(y_n^{(0)}),\ \Phi(y_n^{(1)})\big) < \varepsilon.$$

Puis, nous prenons une suite $\{y_n^{(2)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots\ldots)$ des nombres réels donnée par l'égalité

$$y_{n_k}^{(2)} = y_{n_k}^{(0)} \ (k = 1, 2, \ldots\ldots) \quad \text{et} \quad y_n^{(2)} = x_n^0 \ (n \neq n_k).$$

Nous avons alors aussi $\nu(\chi_1(y_n^{(2)}), y_n^{(0)}) > \delta$ et par conséquent, d'après la continuité de $\Phi(x_n)$, nous avons $\nu(\Phi(y_n^{(1)}), \Phi(\chi_1(y_n^{(2)})) < \varepsilon$. Par conséquent, nous avons d'après (5), $\nu(\Phi(y_n^{(0)}), \Phi(\chi_1(y_n^{(2)})) < 2\varepsilon$, d'où

$$\nu\Big(\Phi\big(\chi_1(y_n^{(2)})\big)\Big) > \nu\big(\Phi(y_n^{(0)})\big) - 2\varepsilon > \nu(r^*) - 2\varepsilon > \nu(r),$$

ce qui entraine $r < \Phi(\chi_1(y_n^{(2)})) = \chi_1(\Phi(y_n^{(2)}))$ et par suite nous avons $\Phi(y_n^{(2)}) > r$.

Puis nous considérons la suite $\{y_n^{(3)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres réels donnée par l'égalité

$$y_{n_k}^{(3)} = r \ (k = 1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad y_n^{(3)} = x_n^0 \ (n \neq n_k) .$$

Étant donné un nombre positif ε, nous pouvons choisir un nombre positif δ de facon que la relation $\nu(x_n, y_n^{(3)}) > \delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ entraine $\nu(\Phi(x_n), \Phi(y_n^{(3)})) < \varepsilon$. Nous définirons maintenant une fonction continue $\chi_2(t)$ monotone donnée par les équations

$$\chi_2(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t \leqq r , \\ \delta v(t-r)+r & \text{pour } t > r . \end{cases}$$

Nous avons alors $\nu(\chi_2(y_n^{(2)}), y_n^{(3)}) > \delta$ et par suite

$$(6) \qquad \nu\Big(\Phi\big(\chi_2(y_n^{(2)})\big), \ \Phi(y_n^{(3)})\Big) < \varepsilon .$$

Or, comme nous avons su plus haut, nous avons $\Phi(y_n^{(2)}) > r$ et par conséquent d'après la topologicité de $\Phi(x_n)$, nous avons $\Phi(\chi_2(y_n^{(2)})) = \chi_2(\Phi(y_n^{(2)})) > r$. Il en résulte selon l'égalité (6) que nous avons $\nu(\Phi(y_n^{(3)})) > \nu(r) - \varepsilon$. Or, d'après la définition, nous avons $\nu(\Phi(\chi_2(x_n^0)), \Phi(y_n^{(3)})) < \varepsilon$ et par conséquent $\nu(r) - 2\varepsilon < \nu(\Phi(\chi_2(x_n^0))) = \nu(\chi_2(\Phi(x_n^0)))$. On peut ici choisir un nombre réel r^* tel qu'on ait $r^* < r$ et $\nu(r^*) = \nu(r) - 2\,\varepsilon$. Nous avons donc $\nu(r^*) < \nu(\chi_2(\Phi(x_n^0)))$ et par suite $r^* > \chi_2(\Phi(x_n^0))$ ou $\chi_2^{-1}(r^*) < \Phi(x_n^0)$. Par conséquent, d'après la définition de $\chi_2(t)$, nous avons $r^* < \Phi(x_n^0)$. Or, le côté droit de cettte inégalité est indépendent du nombre positif ε et $\lim_{\varepsilon \to 0} r^* = r$, et donc nous avons $r \leqq \Phi(x_n^0)$, c'est-à-dire, pour tout nombre réel r tel qu'on ait $x_{n_k}^0 > r$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $x_n^0 \leqq r$ $(n \neq n_k)$ et $(n_1, n_2, \ldots) \in \mathfrak{N}$, nous avons toujours $\Phi(x_n^0) \geqq r$, et par suite d'après la définition de $\Psi(x_n)$, nous avons $\Phi(x_n^0) \geqq \Psi(x_n^0)$ pour tous les cas.

Puis, nous démontrerons que nous avons $\Psi(x_n^0) \geqq \Phi(x_n^0)$. Quand nous avons $\Phi(x_n^0) = -\infty$, il est évident que nous avons $\Psi(x_n^0) \geqq \Phi(x_n^0)$, et donc, nous supposerons dans la suite que $\Phi(x_n^0) > -\infty$. Étant donné un nombre reel r tel qu'on ait $\Phi(x_n^0) > r$, nous avons alors un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots)$ qui satisfait des deux conditions $x_{n_k}^0 > r$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et $x_n^0 \leqq r$ $(n \neq n_k)$. En effet, lorsqu'il n'existe aucun tel nombre irrationnel, nous avons $x_n^0 \leqq r$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Par conséquent, pour une fonction continue $\chi(t)$ monotone croissante telle qu'on ait

$$\chi(t)=\begin{cases} t & \text{pour } t\leqq r\,,\\ 2t-r & \text{pour } t>r\,,\end{cases}$$

nous avons $\chi(x_n^0)=x_n^0$ $(n=1,\,2,\,\ldots.)$, ce qui entraine $\Phi(\chi(x_n^0))=\Phi(x_n^0)$. Or, comme $\Phi(x_n)$ est topologique, nous avons $\chi(\Phi(x_n^0))=\Phi(\chi(x_n^0))=\Phi(x_n^0)>r$, ce qui entraine une contradiction. Par suite, il existe un nombre irrationnel $(n_1,\,n_2,\,\ldots.)$ ayant la propriété dennée plus haut. Selon la définition de $\Psi(x_n)$, nous avons donc $\Psi(x_n^0)\geqq r$. Or, puisque r est un nombre réel arbitraire tel qu'on ait $\Phi(x_n^0)>r$, nous avons $\Psi(x_n^0)\geqq\Phi(x_n^0)$. Donc, par la conséquence obtenue plus haute, nous avons $\Phi(x_n^0)=\Psi(x_n^0)$, c'est-à-dire, les deux opérations $\Phi(x_n)$ et $\Psi(x_n)$ sont identiques deux-à-deux. Par conséquent, pour voir que l'opération $\Phi(x_n)$ est de M. F. Hausdorff, il suffit de démontrer que $\Psi(x_n)$ est de la même classe. Pour cela, nous servons de la définition des opérations de M. F. Hausdorff données par la deuxième forme. Maintenant, nous désignons par $\Psi^*(x_n)$ l'opération de M. F. Hausdorff de la base $\mathfrak{N}$, et supposons que $\Psi^*(x_n)$ soit définie par la deuxième façon. Il est alors évident qu'on a $\Psi^*(x_n)\geqq\Psi(x_n)$. Or, d'autre part, nous avons $\Psi(x_n)\geqq\Psi^*(x_n)$. Pour le voir, nous supposons par impossible qn'il existe une suite $\{x_n^0\}$ $(n=1,\,2,\,\ldots.)$ des nombres réels telle qu'on ait $\Psi^*(x_n^0)>\Psi(x_n^0)$. On peut alors choisir un nombre réel r de sorte qu'on ait $\Psi^*(x_n)>r>\Psi(x_n)$, $(n_1,\,n_2,\,\ldots.)\in\mathfrak{N}$ et $x_{n_k}^0<r$ $(k=1,\,2,\,\ldots.)$. Maintenant, nous désignons par $(m_1,\,m_2,\,\ldots.)$ un nombre irrationnel qui satisfait aux conditions $x_{m_k}^0>r$ $(k=1,\,2,\,\ldots.)$ et $x_m^0\leqq r$ $(m\neq m_k)$. Le nombre irrationnel $(m_1,\,m_2,\,\ldots.)$ contient alors les chiffres n_k $(k=1,\,2,\,\ldots.)$, mais ce nombre irrationnel n'appartient pas à $\mathfrak{N}$. En désignant par $\{m_{\nu_k}\}$ $(k=1,\,2,\,\ldots.)$ les chiffres du nombre irrationnel $(m_1,\,m_2,\,\ldots.)$ qui n'appartient pas au nombre irrationnel $(n_1,\,n_2,\,\ldots.)$, nous considérons les suites $\{x_n^{(p)}\}$ $(n=1,\,2,\,\ldots.\,;\;p=1,\,2,\,\ldots.\,+\infty)$ des nombres réels telles qu'on ait

$$x_{n_k}^{(p)}=1\,,\quad x_{m_{\nu_k}}^{(p)}=\frac{1}{p}\quad(k,\,p=1,\,2,\,\ldots.)\,,$$

$$x_n^{(p)}=0\quad(n\neq m_k\;\;p=1,\,2,\,\ldots.\,,\,+\infty)\quad\text{et}\quad x_{m_{\nu_k}}^{(+\infty)}=0\,.$$

D'après la définition de $\mathfrak{N}$, les suites $\{x_n^{(p)}\}$ $(p=1,\,2,\,\ldots.)$ des nombres réels convergent vers la suite $\{x_n^{(+\infty)}\}$ et par conséquent, selon la continuité de $\Phi(x_n)$, les nombres $\Phi(x_n^{(p)})$ $(p=1,\,2,\,\ldots.)$ convergent vers le nombre $\Phi(x_n^{(+\infty)})$. Or, comme le nombre irrationnel $(m_1, m_2, \ldots.)$ n'appartient pas à $\mathfrak{N}$, nous avons $\Phi(x_n^{(p)}) \leqq 0$ $(p = 1, 2, \ldots.)$ et $\Phi(x_n^{(+\infty)}) = \Psi(x_n^{(+\infty)}) = 1$, c'est contradictoire avec le résultat obtenu plus haut. Il en résulte qu'on a $\Psi(x_n) \geqq \Psi^*(x_n)$, et donc nous avons $\Psi(x_n) = \Psi^*(x_n)$, c'est-à-dire, $\Psi(x_n)$ est de M. F. HAUSDORFF, et par suite la condition donnée est nécessaire pour qu'une opération soit topologique.

Puis, nous démontrerons que la condition donnée est suffisant. Soit $\Phi(x_n)$ une opération des nombres de M. F. HAUSDORFF de la base $\mathfrak{N}$. Lorsque $\chi(t)$ une fonction continue monotone croissante définie dans l'intervalle $[-\infty, +\infty]$, il est évident que $\chi(t)$ est permutable avec les opérations résultées de la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble de nombres réels, et donc nous avons

$$\chi\left(\Phi(x_n)\right) = \chi\left\{\underset{N}{b.s.}(\underset{k}{e.i.}\ x_{n_k})\right\} = \underset{N}{b.s.}\ \chi(\underset{k}{b.i.}\ x_{n_k})$$

$$= \underset{N}{b.s.}\left\{\underset{k}{b.i.}\ \chi(x_{n_k})\right\} = \Phi\left(\chi(x_{n_k})\right) .$$

D'autre part, soient $\{x_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, ; n = 1, 2, \ldots.)$ les deux suites de nombres réels telles qu'on ait $\nu(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) < \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots.)$, où ε est un nombre positif. En vertu des égalités $\nu(x_n^{(1)}) < \nu(x_n^{(2)}) + \varepsilon$, nous avons $\underset{n}{b.i.}\ \nu(x_n^{(1)}) \leqq \underset{n}{b.i.}\ \nu(x_n^{(2)}) + \varepsilon$, et par suite $\Phi(\nu(x_n^{(1)})) \leqq \Phi(\nu(x_n^{(2)})) + \varepsilon$. Or, comme nous avons su plus haut, l'opération $\Phi(x)$ est permutable avec des fonctions continues monotones croissantes, nous avons $\nu(\Phi(x_n^{(1)})) \leqq \nu(\Phi(x_n^{(2)})) + \varepsilon$. De même, nous avons $\nu(\Phi(x_n^{(2)})) \leqq \nu(\Phi(x_n^{(1)})) + \varepsilon$, d'où nous avons $\nu(\Phi(x_n^{(1)}), \Phi(x_n^{(2)})) < \varepsilon$. Par conséquent, $\Phi(x)$ est continue et donc topologique, c'est-à-dire, la condition donnée est suffiante pour qu'une opération des nombres soit topologique.

C. Q. F. D.

19. Les bases des opérations topologiques. Comme nous avons su déjà, une opération des nombres est déterminée uniquement par son domaine et la distribution des valeurs de celle-ci sur ce domaine, mais pour les opérations topologiques des nombres, sa base n'est pas déterminée uniquement. Il faut donc obtenir la relation entre les opérations topologiques et leurs bases. Or, nous pouvons résoudre ce problème comme il suit. Pour cela, nous posons la définition suivante.

Définition. Pour deux opérations topologiques $\Phi_k(x_n)$ $(k=1, 2)$ ayant les bases $\mathfrak{N}_k$ respectivement, quand nous avons toujours pour chaque suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ des nombres réels $\Phi_1(x_n) \geqq \Phi_2(x_n)$ nous désignons ce fait par $\mathfrak{N}_1 \gtrsim \mathfrak{N}_2$. Et, quand nous avons $\mathfrak{N}_1 \gtrsim \mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_2 \gtrsim \mathfrak{N}_1$ en même temps, nous désignons ce fait par $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$ et nous dirons que les deux bases $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont équivalentes.

Lemme. *Étant donnée une base $\mathfrak{N}$ d'une opération topologique $\Phi(x_n)$ des nombres, nous pouvons donner une base $\widetilde{\mathfrak{N}}$ d'une opération topologique ayant les propriétés suivantes,*

1°, $\mathfrak{N} \sim \widetilde{\mathfrak{N}}$ *et* $\widetilde{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{N}$,

2°, pour toute base $\mathfrak{N}_0$ telle qu'on ait $\mathfrak{N}_0 \supset \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}_0 \sim \mathfrak{N}$, nous avons toujours $\widetilde{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{N}_0$.

Démonstration. Nous pouvons donner la base $\widetilde{\mathfrak{N}}$ qui jouit de la propriété demandée comme il suit, c'est-à-dire, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ est l'ensemble de tout nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$ qu'il existe une stite $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ des nombres naturels telle qu'on ait $(n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots.) \in \mathfrak{N}$. Pour voir que $\widetilde{\mathfrak{N}}$ remplit la condition donnée, nous désignons par $\widetilde{\Phi}(x_n)$ l'opération topologique ayant la base $\widetilde{\mathfrak{N}}$.

D'après la définition, nous avons $\widetilde{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{N}$ et donc $\widetilde{\mathfrak{N}} \gtrsim \mathfrak{N}$ et toujours $\widetilde{\Phi}(x_n) \geqq \Phi(x_n)$. Or, pour tout nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$, il existe une suite $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ des nombres naturels telle qu'on ait $(n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots.) \in \mathfrak{N}$, ce qui entraine $\underset{k}{b.i.}(x_{n_k}) \leqq \underset{k}{b.i.}(x_{n_{\nu_k}})$ et donc $\widetilde{\Phi}(x_n) \leqq \Phi(x_n)$ ou $\widetilde{\mathfrak{N}} \lesssim \mathfrak{N}$. Nous anons donc $\widetilde{\mathfrak{N}} \sim \mathfrak{N}$.

Puis, nous considérons une base $\mathfrak{M}$ d'une opération topologique $\Psi(x_n)$ telle qu'on ait $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$. Pour un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$ de $\mathfrak{M}$, nous prenons une suite $\{x_n^0\}$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ des nombres réels telle qu'on ait $x_{n_k}^0 = 1$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ et $x_n^0 = 0$ pour $n \neq n_k$. Nous avons alors $\Phi(x_n^0) = \widetilde{\Phi}(x_n^0) = 1$ et donc il existe une suite $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ des nombres naturels telle qu'on ait $(n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots.) \in \mathfrak{N}$, ce qui entraine $\{n_k\} \in \widetilde{\mathfrak{N}}$ ou $\widetilde{\mathfrak{N}} \supset \mathfrak{M}$. Par suite la base $\widetilde{\mathfrak{N}}$ jouit de la propriété donnée. C. Q. F. D.

Corollaire. *$\widetilde{\mathfrak{N}}$ est l'ensemble de tout nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots.)$ qu'il existe une suite $\{\nu_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots.)$ des nombres naturels telle qu'on ait $(n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots.) \in \mathfrak{N}$ et il jouit des propriétés suivantes:*

1°, $\widetilde{(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})} = \widetilde{\mathfrak{M}} + \widetilde{\mathfrak{N}}$,

2°, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{M}}} = \widetilde{\mathfrak{M}}$,

3°, $\widetilde{O} = O$.

Théorème 21. *$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ étant les bases des opérations topologiques des nombres. Pour que nous ayons $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ (ou $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$), il faut et il suffit que nous ayons $\tilde{\mathfrak{M}} > \tilde{\mathfrak{N}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{N}}$).*

En effet, quand nous avons $\tilde{\mathfrak{M}} > \tilde{\mathfrak{N}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{N}}$), nous avons aussi $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{N}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{M}} \sim \tilde{\mathfrak{N}}$). Or, $\mathfrak{M} \sim \tilde{\mathfrak{M}}$ et $\tilde{\mathfrak{N}} \sim \mathfrak{N}$, ce qui entraine $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ (ou $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$). D'autre part, quand nous avons $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ (ou $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$), nous avons d'après le lemme précédent $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{N}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{M}} \sim \tilde{\mathfrak{N}}$), ce qui donne $\tilde{\mathfrak{M}} > \tilde{\mathfrak{N}}$ (ou $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{N}}$). C. F. Q. D.

20. **La représentation des opérations des nombres.** Nous avons introduit déjà les notions des opérations élémentaires. Grâce à celles, on peut résondre le problème de la représentation des opérations des nombres. Soit $\Phi(x_n)$ une opération des nombres définie sur un sous-ensemble D de l'espace $\mathfrak{R}$. Ici, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $D = \mathfrak{R}$. En effet, lorsque nous avons $D \neq \mathfrak{R}$, nous envisageons l'opération $\Phi^*(x_n)$ des nombres définie comme il suit, c'est-à-dire, pour toute suite $\{x_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ des nombres appartenant à D, nous posons $\Phi^*(x_n) = \Phi(x_n)$, et sinon $\Phi^*(x_n) = 0$. Maintenant, étant donné un nombre entier p, nous prenons les ensembles des suites des nombres

$$E_n^{(p)} = Ens\left\{\Phi(x_n) \geqq \frac{n}{p}\right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$E_{-\infty}^{(p)} = \mathfrak{R} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n^{(p)}$$

et, en désignant par $\Phi_n^{(p)}(x^n)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $E_n^{(p)}$, nous considérons les opérations des nombres données par les équations

$$(1) \qquad \Phi^{(p)}(x_n) = b.s.\left\{\frac{n}{p}\Phi_n^{(p)}(x_n),\ \lim_{n\to\infty} -n\,\Phi_\infty^{(p)}(x_n)\right\};$$

Les opérations $\Phi^{(p)}(x_n)$ des nombres sont définie sur toute les suites des nombres et nous pouvons voir sans peine qu'on a

$$(2) \qquad \Phi(x_n) = \overline{\lim_{p\to\infty}}\, \Phi^{(p)}(x_n).$$

Par conséquent, en appliquant itérativement les opérations arithemétiques et topologiques sur les opérations $\Phi_n^{(p)}(x_n)$, nous pouvons obtenir l'opération $\Phi^{(p)}(x_n)$, et donc le problème de la représentation de $\Phi(x_n)$ reduit celui-ci de la représentation des opérations $\Phi_u^{(p)}(x_n)$, ou en général celui de la représentation de fonctions caractéristiques des sous-ensembles de R.

Or, le problème dernier peut être distingué en deux cas. Le premier cas, c'est que la fonction caractéristique $\Phi(x_n)$ est d'un rectangulaire de R. Ici, nous entendrons par un rectangulaire E de R l'ensemble des suites des nombres définies comme il suit, étant donnée une suite finie $\{(a_k, b_k; n_k)\}$ $(k=1, 2, \cdots \nu)$ des triples des nombres réels a_k et b_k, et d'un nombre naturel n_k tel qu'on ait $a_k \leqq b_k$ $(k=1, 2, \cdots \nu)$, E est celui des suites $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ des nombres de sorte qu'on ait $a_k \leqq x n_k \leqq b_k$ $(k=1, 2, \cdots \nu)$. Nous pouvons alors représenter cette opération comme il suit. Nous considérons d'abord le cas où $\nu=1$, c'est-à-dire, E est défini par les inégalités $a_1 \leqq x_{n1} \leqq b_1$. Or, on voit sans peine que la fonction caractéristique de celui-ci est donnée par l'équation

$$\Phi(x_n; a_1, b_1, n_1) = \nu\Big(\lim_{n\to\infty}\big(1+\nu(x_{n_1}-a_1)\big)^n\Big)\nu\Big(\lim_{n\to\infty}\big(1-\nu(x_{n_1}-b_1)\big)^n\Big)$$

et en général la fonction caractéristique d'un rectangulaire E est donnée sous la forme suivante

$$\Phi(x_n) = \prod_{k=1}^{\nu} \Phi(x_n; a_k, b_k, n_k).$$

Par conséquent, la fonction caractéristique d'un rectangulaire peut être obtenue en appliquant itérativement les opérations arithmétiques et topologiuues sur les nombres $x_n (n=1, 2, \cdots)$.

Puis, nous envisageons le deuxième cas où la fonction caractéristique $\Phi(x_k)$ est d'un sous-ensemble arbitraire E de R. Tout d'abord, étant donnée une suite finie $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ des nombres rationnels tels qu'on ait $-1 \leqq a_n \leqq 1$ $(n=1, 2, \cdots, k)$, nous considérons le rectangulaire $R(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ donné par les inégalités; $|\nu(x_n)-a_n| \leqq \frac{1}{k}$ $(n=1, 2, \cdots, k)$. Tous les rectangulaires ainsi obtenus donnent un ensemble effectivement dénombrable, et par suite on peut ranger ces rectangulaires en une suite infinie, nous désignons par $\{R_n\}(n=1, 2, 2, \cdots)$ une de celles-ci. Nous pouvons alors voir sans peine que, quel que soit le point p de $\mathfrak{R}$, on peut trouver une suite $\{n_k\}(k=1, 2, \cdots)$ des nombres naturels telle qu'on ait $(p) = \prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}$. On peut aussi dire ce fait par quelques autres termes, c'est-à-dire, lorsqu'on désigne par $\Psi^{(n)}(x_n)$ la fonction caractéristique de l'ensemble R_n, on peut choisir un nombre irrationnel $(n_1, n_2, \ldots)$ de façon que la fonction $b.i.\ \Psi^{(n_k)}(x_n)$ prend la valeur 1 au point p et 0 aux points autres. Maintenant, nous désignons par $\mathfrak{N}_p$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels $(n_1, n_2, \ldots)$ ayant cette propriété. Il est alors evident que les ensembles $\mathfrak{N}_p (p \in \mathfrak{R})$ sont non vides et disjoints deux-à-deux.

Maintenant, étant donné un sous-ensemble E de $\mathfrak{R}$, nous considérons l'ensemble $\mathfrak{N} = \sum_{p \in E} \mathfrak{N}_p$ des nombres irrationnels. Nous avons alors sans peine que $\underset{\mathfrak{N}}{b.s.} \{ \underset{\nu}{b.i.}\ \Psi^{(n_k)}(x_n) \}$ est la fonction caractéristique de E, d'où on voit que la fonction caractéristique de E peut être obtenue par l'application itérativement des opérations arithmétiques et topologiques sur les fonctions caractéristiques des rectangulaires. Or, nous avons la représentation des fonctions dernieres plus haut. Par suite, en resumant les resultats obtenus déjà, nous avons le

Théorème 22. *$\Phi(x_n)$ étant une opération des nombres définie sur un sous-ensembles D de $\mathfrak{R}$, on peut choisir une opération $\Phi^*(x_n)$ des nombres définie sur $\mathfrak{R}$ qui satisfait aux conditions suivantes:*

1°, pour tout suite $\{x_n\}$ $(x = 1, 2, \ldots)$ des nombres contenue dans D, nous avons toujours $\Phi^*(x_n) = \Phi(x_n)$,

2°, l'opération $\Phi^*(x_n)$ des nombres peut être obtenue par l'application itérativement des opérations arithmétiques et topologiques sur les nombres $x_n (n = 1, 2, \ldots)$.

21. Les opérations conjugués. Parmi les notions sur les opérations des nombres, celle de la conjugttion est très importante. Nous pouvons définir celle-ci comme il suit.

Définition. Étant donnée une opération $\Phi(x_n)$ des nombres définie sur $\mathfrak{A}$, nous dirons que l'opération $-\Phi(-x_n)$ est conjuguée à $\Phi(x_n)$ et nous la désignons par $\bar{\Phi}(x_n)$.

Nous avons alors sans peine que

1°, $\bar{\bar{\Phi}}(x_n) = \Phi(x_n)$,

2°, l'opération conjuguée à une opération topologique est aussi topologique,

3°, les deux opérations des nombres $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ et $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ou bien $\underset{n}{b.s.}\, x_n$ et $\underset{n}{b.i.}\, x_n$ sont conjuguée deux-à-deux.

Grâce à la notion de la conjugaison, nous pouvons introduire la notion de la convergance des suites des nombres. Voici la définition.

Définition. Étant donnée une opération $\Phi(x_n)$ des nombres définie sur $\mathfrak{R}$, nous considérons une suite des nombres $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Quand nous avons $\Phi(x_n) = \bar{\Phi}(x_n)$, nous dirons que la suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers $\Phi(x_n) = \bar{\Phi}(x_n)$ par rapport à $\Phi(x_n)$ et que $\Phi(x_n) = \bar{\Phi}(x_n)$ est la limite de la suite $\{x_n\}$ par rapport à $\Phi(x_n)$.

Il est evident que la convergence et la limite par rapport à l'opération topologique $\lim\limits_{n\to\infty} x_w$ sont coincidents à celles au sense ordinaire.

IX. LA REPRÉSENTATION DES OPÉRATIONS ANALYTIQUES ET QUASI-ANALYTIQUES DES FONCTIONS.

22. **Les opérations analytiques des fonctions.** J'ai expliqué déjà dans l'introduction la notion des opérations analytiques des fonctions. Mais, pour la préciser, nous donnerons d'abord la définition de celles-ci.

Définition. Soit $\Phi(x_n)$ une opération des nombres définie sur un sous-ensemble D de $\mathfrak{R}$. Quand nous donnerons une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions réeles et définies sur un même ensemble R telleque pour tout element x_0 de R la suite $\{F_n(x_0)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres appartient à D, nous pouvons donner alors une opération des fonctions qui resulte d'une fonction—nous designons par $\Phi(F_n(x))$ la fonction ainsi obtenue ou bien la valeur de cette fonction à un element x ou bien cette opération elle-même—à la suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions de façon qu'elle corresponde à un nombre réel $\Phi\{F_n(x_0)\}$ pour chaque element x_0 de R. Nous dirons qu'elle est analytique et que les opérations $\Phi(x_n)$ des nombres et $\Phi(F_n(x))$ des fonctions sont associées deux-à-deux.

Comme nous avons su plus haut, nous pouvons prolonger du domaine D sur lequel une opération $\Phi(x_n)$ des nombres est définie sur $\mathfrak{R}$ tout entier sans changer les valeures de $\Phi(x_n)$ sur D, et par suite nous supposerons dans la suite que les opérations des nombres sont toujours définies sur toutes suites des nombres. Il est alors evident que les opérations analytiques des fonctions sont définies sur toutes suites des fonctions.

Un des problèmes fondamentaux des opérations analytiques des fonctions est celui de la représentation de ces opérations. Or, selon la représentation des opérations des nombres, nous pouvons représenter celles des fonctions, c'est-à-dire, nous avons d'après les théorèmes 20 et 22 le

Théorème 23. *Toute opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions peut être obtenue en appliquant itérativement sur les fonctions $F_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ les opérations arithmétiques et topologiques, c'est-à-dire.*

1°, $\Phi_1(F(x)) = F(x)+a$ (*a est un nombre constant*)

2°, $\Phi_2(F(x)) = F(x)a$ (*a est un nombre constant*)

3°, $\Phi_3(F_1(x), F_2(x)) = F_1(x)+F_2(x)$

4°, $\Phi_4(F_1(x), F_2(x)) = F_1(x)F_2(x)$

5°, $\Phi_5(F_n(x)) = \underset{\mathfrak{N}}{b.s.}\,(\underset{k}{b.i.}\, F_{n_k}(x))$.

Or, pour étudier la famille des fonctions obtenues par une opérations analytiques des fonctions, il serait très utile de représenter ces opérations par les cribles fermés et fonctionnels. Maintenant, nous avancons à l'étude de ces représentations.

23. Les cribles fermés des fonctions. Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, nous considérons la famille $\mathfrak{C}(J)$ de tous les sous-ensembles fermées de J. Maintenant, nous définissons la distance dis (E, F) entre les deux ensembles E et F de $\mathfrak{C}(J)$ comme il suit; si les deux ensembles sont non-vides an même temps, nous entendrons par dis (E, F) la borne supérieure de dis $(x, F)+$ dis (E, y) lorsque x et y parcourent les ensembles E et F respectivement, et sinon, par dis (E, F) le nombre réel 0 ou 1, suivant qu'on a $E=F$ ou non. Il est alors evident que $\mathfrak{C}(J)$ est un espace métrique et compact.

R étant un espace métrique. nous prenons un sous-ensemble fermé H de l'espace produit $R\times J$. Pour un point x de R, nous désignons par $H_{(x)}$ l'ensemble de tous les points de H dont la projection sur R est précisément le point x et par $H^{(x)}$ la projection de $H_{(x)}$ sur J.

Étant donnée une fonction Θ définie sur $\mathfrak{C}(J)$, nous désignons par un de $\Gamma(\Theta), J, R; H)$, $\Gamma(\Theta, J; H)$ ou $\Gamma(\Theta; H)$ la fonction $\Gamma(x)$ définie sur R de sorte qu'on ait $\Gamma(x) = \Theta(H^{(x)})$, et nous appellons cette fonction celle criblée au moyen de H par rapport à Θ, H un crible fermé des fonctions et Θ la base du crible fermé donnée. Maintenant, nous désignons par $\Gamma(\Theta; J, R)$ ou $\Gamma(\Theta, R)$ la famille de toute fonction $\Gamma(\Theta; H)$ lorsque H parcourt tous les sous-ensembles fermés de $R \times J$ et nous appellons cette famille cette criblée de la classe (Γ) par rapport à Θ.

Θ_1 et Θ_2 étant deux bases des cribles fermés des fonctions, si l'on a toujours l'égalité $\Gamma(\Theta_1, R) = \Gamma(\Theta_2, R)$ pour tout espace métrique R, nous dirons que les deux bases Θ_1 et Θ_2 sont équivalentes deux-à-deux, et nous désignons ce fait par $\Theta_1 \sim \Theta_2$ ou $\Theta_2 \sim \Theta_1$. En prenant maintenant l'espace métrique $\mathfrak{C}(J)$, nons considérons l'ensemble H de tous les points (E, x) ds l'espace produit $\mathfrak{C}(J) \times J$ tels qu'on ait $x \in E$, L'ensemble H est alors fermé dans $\mathfrak{C}(J) \times J$ et nous avons $H = \Gamma(\Theta\,;\, H)$.

Enfin, nous ajouterons un théorème sur la relation entre les bases des cribles fermés des fonctions et les opérations analytiques des fonctions.

Théorème 24. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact et indénombrable, $\Theta_n (n = 1, 2, \ldots)$ les bases des cribles fermés des fonctions et $\Phi(F_n(x)\,;\, x)$ une opération analytique des fonctions. Nous avons alors pour tout sous-ensemble fermé H de $R \times J$*

$$\Phi\Big(\Gamma(\Theta_n\,;\, H)\Big) = \Gamma\Big(\Phi(\Theta_a)\,;\, H\Big)\,.$$

24. La représentation par les cribles fermés des fonctions. Nous sommes partis des ensembles fermés pour représenter les opérations analytiques des ensembles par les cribles fermés. Or, de même pour représenter celles des ensembles par les cribles fermés des ensembles, il serait plus convenant de sortir des fonctions continues supérieurement et inférieurement que des fonctions continues. Maintenant, nous posons le définition suivante.

Définition. Étant donnée une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions et une famille $\mathfrak{F}$ des fonctions définies sur un ensemble D, nous désignons par $\Phi(F)$ la famille de toutes les fonctions $\Phi(F_n(x))$ obtenues, lorsque le suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions parcourt toute celle des fonctions contenues dans la famille $\mathfrak{F}$.

Définition. Étant donné un espace métrique R, nous désignons par $\mathfrak{C}(R)$, $\mathfrak{S}(R)$ et $\mathfrak{I}(R)$ respectivement les familles des fonctions continues, celles continues supérieurement et inférieurement sur R.

Or, d'après le théorème 23, une opération analytique des fonctions peut être représenter comme l'itération successive des opérations $\Phi_k(F_n(x))$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ données dans le théorème 23, et donc le problème de la représentation des familles $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ et $\Phi(\mathfrak{I}(R))$ se partage en deux parties, c'est-à-dire, I, la représentation des famille $\mathfrak{C}(R)$ et $\mathfrak{J}(R)$ par des cribles fermés des fonctions,

II, étant donnée une suite $\{\Gamma(\Theta_n; H)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des cribles fermés des fonctions, la représentation des famille $\Phi(\Gamma(\Theta_n, R))$ où $\Phi(F_n(x))$ est une opération analytique des fonctions, par les cribles fermés des fonctions.

Pour les considérer, nous posons d'abord le

Lemme. *Soient J et J^* les deux espaces métriques compacts et indénombrables et Θ une base d'un crible fermé des fonctions, définie sur la famille $\mathfrak{C}(J)$. On peut alors définir sur la famille $\mathfrak{C}(J^*)$ une base Θ^* d'un crible fermé des fonctions telle qu'on ait $\Theta \sim \Theta^*$.*

Démonstration. Nous considérons d'abord le cas où J^* est le discontinu Δ de G. Cantor. Comme J est un espace métrique, on peut trouver une transformation $\varphi(t)$ qui transforme Δ en J. Maintenant, nous désignons par Θ^* la fonction définie sur $\mathfrak{C}(J^*)$ de façon qu'on ait $\Theta^*(E) = \Theta(\varphi(E))$ pout tout sous-ensemble fermé E de Δ. On voit alors $\Gamma(\Theta, R) = \Gamma(\Theta^*, R)$ pour tout espace métrique R. En effet, nous prenons d'abord une fonction $F(x)$ contenue dans $\Gamma(\Theta, R)$. On peut alors définir un sous-ensemble fermé H dans $R \times J$ tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta; H)$. Nous désignons par H^* l'ensemble de tous les points (x, y) de $R \times \Delta$ tel qu'on ait $(x, \varphi(y)) \in H$. Il est alors évident que H^* est fermé dans $R \times \Delta$. Mais, on peut voir que $F(x) = \Gamma(\Theta^*; H^*)$. En effet, pour un point x de R, nous avons $F(x) = \Theta(H^{(x)})$, Or, nous avons d'après la définition $H^{(x)} = \varphi(H^{*(x)})$, d'où on a $F(x) = \Gamma(\Theta^*; H^*)$, ce qui donne $\Gamma(\Theta, R) \subset \Gamma(\Theta^*, R)$. De même, on voit que $\Gamma(\Theta^*, R) \subset \Gamma(\Theta, R)$, et par suite $\Gamma(\Theta^*, R) = \Gamma(\Theta^*, R)$.

Puis, nous considérons le cas où J^* est un espace métrique compact et indénombrable arbitraire. Or, comme nous avons fait plus haut, on peut trouver dans $\mathfrak{C}(\Delta)$ une fonction Θ_Δ telle qu'on ait $\Theta \sim \Theta_\Delta$. Donc, pour démontrer qu'il existe une fonction Θ^* dans $\varepsilon(J^*)$ telle qu'on ait $\Theta \sim \Theta^*$, il suffit de démontrer qu'il exsite une fonction Θ^* sur telle qu'on ait $\Theta_\Delta \sim \Theta^*$. Par suite, on peut supposer, sans perdre la généralité, qu'on ait $J = \Delta$. Puisque J^* est un espace métrique compact et indénombrable, on peut prendre une transformation topologique $\varphi(t)$ qui transforme Δ en un sous-ensemble de J^*. Maintenant nous désignons par Θ^* la fonction définie sur $\mathfrak{C}(J^*)$ de façon qu'on ait $\Theta^*(E) = \Theta(\varphi^{-1}(E\varphi(\Delta)))$. Nous avons alors $\Gamma(\Theta, R) = \Gamma(\Theta^*, R)$. En effet, pour une fonction $F(x)$ de $\Gamma(\Theta, R)$, on peut trouver dans $R \times J$ un sous-ensemble fermé H tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta, H)$. Or, d'après la transformation σ; $x' = x$ et $J' = \varphi(y)$, H est transformé en un sous-ensemble fermé H^* de $R \times J^*$ et nous avons $\sigma(H^{(x)}) = H^{*(x)}$ pour tout point x de R, d'où nous avons $F(x) = \Gamma(\Theta^*; H^*)$ et par suite $F(x) \in \Gamma(\Theta^*, R)$, ce qui entraine $\Gamma(\Theta, R) < \Gamma(\Theta^*, R)$. D'autre part, pour une fonction $F(x)$ de $\Gamma(\Theta^*, R)$, on peut trouver dans un sous-ensemble fermé H^* tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta^*; H^*)$. Or nous avons d'après la définition de Θ^*, $F(x) = \Gamma(\Theta^*; H^*(R \times \varphi(\Delta)))$, ce qui donné $F(x) = \Gamma(\Theta; \sigma^{-1}(H^*R \times \varphi(\Delta)))$, d'où nous avons $F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$ ou $\Gamma(\Theta^*, R) < \Gamma(\Theta, R)$ et donc $\Gamma(\Theta^*, R) = \Gamma(\Theta, R)$.

Maintenant, nous considérons le problème I. Étant donné l'intervalle fermé $I = [-1, +1]$, nous définirons les fonctions $\Theta_S(x)$ et $\Theta_I(x)$ sur l'espace $\mathfrak{C}(I)$ comme il suit; quand un sous-ensemble fermé E de I est non-vide, pour les points supérieure M et inférieure m de E, nous posons $\Theta_S(E) = \nu^{-1}(M)$ et $\Theta_I(E) = \nu^{-1}(m)$, sinon $\Theta_S(E) = -\infty$ et $\Theta_I(E) = +\infty$. Nous avons alors $\mathfrak{C}(R) = \Gamma(\Theta_S, R)$ et $\mathfrak{J}(R) = \Gamma(\Theta_I, R)$ pour tout espace métrique R. En effet, étant donnée une fonction $F(x)$ de la famille $\Gamma(\Theta_S, R)$, nous considérons un sous-ensemble fermé H de $R \times I$ tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta_S; H)$. Or, quand nous désignons par $M(x)$ la borne supérieure de l'ensemble $(H + (-1) \times R)^{(x)}$ pour tout point x de R, nous avons $F(x) = \nu^{-1}(m(x))$. Selon la définition de $M(x)$, la fonction $M(x)$ est continue supérieurement, et par suite $\nu^{-1}(M(x)) = F(x)$ est aussi continue supérieurement, d'où nous avons $F(x) \in \mathfrak{C}(R)$, c'est-à-dire, $\Gamma(\mathfrak{S}_S, R) < (R)$. D'autre part, étant donnée une fonction $F(x)$ continue supérieurement sur R, nous considérons l'ensemble H de tous les points (x, y) de $R \times I$ tels qu'on ait $y \leqq \nu(F(x))$. L'ensemble H est alors fermé et quand nous désignons par $M(x)$ la borne supérieure de $(H + (-1) \times R)^{(x)}$ pour tout point x de R, nous avons $\nu^{-1}(M(x)) = F(x)$ et par suite $F(x) = F(\Theta_S; H)$, ce qui donne $\mathfrak{S}(R) < \Gamma(\Theta_S, R)$. Donc, nous avons $\mathfrak{S}(R) = \Gamma(\Theta_S, R)$ pour tout espace métrique R. De même, on peut démontrer que nous avons $\mathfrak{J}(R) = \Gamma(\Theta_I; R)$ pour tout espace métrique R. Dans nos considération, on voit qu'il existe dans $\mathfrak{C}(I)$ une base d'un crible fermé qui représente la famille des fonctions continues supérieurement ou inférieurement, mais selon le lemme, on peut voir que, étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, il existe sur $\mathfrak{C}(J)$ une base d'un crible fermé ayant la même propriété. Nous pouvons donc résoudre complétement le problème I.

Puis, nous considérons le problème II. Or, pour le résoudre, il suffit de résoudre le problème suivant: étant donnée une suite $\{\Gamma(\Theta_n; H)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des cribles fermés des fonctions et une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions, la famille $\Phi(\Gamma(\Theta_n, R))$ des fonctions peut-être représentée par un crible fermé des fonctions? Grâce au lemme 1, on peut supposer, sans perdre la généralité, que les bases $\Theta_n (n = 1, 2, \ldots)$ des cribles fermés des fonctions soient définies sur l'espace $\mathfrak{C}(\varDelta)$, où $\varDelta$ est le discontinu de G. CANTOR. Pour tout nombre naturel n, en dèsignant par $\varDelta_n$ la partie de $\varDelta$ contenue dans l'intervalle $\left[\frac{1}{23^n}, \frac{1}{23^{n+1}}\right]$, nous prenons une transformation $\varphi_n(t)$ qui transforme $\varDelta$ en $\varDelta_n$ topologiquement. Maintenant, nous définirons la fonction Θ sur $\mathfrak{C}(I)$ comme il suit. Étant donné un sous-ensemble fermé E de I, nous posons

$$\Theta(E) = \Phi\Big(\Theta_n\big(\varphi_n^{-1}(\varDelta_n E)\big)\Big).$$

Nous avons alors $\Phi(\Gamma(\Theta_n, R)) = \Gamma(\Theta, R)$ pour tout espace métrique R. En effet, pour une fonction $F(x)$ de $\Gamma(\Theta, R)$, nous pouvons prendre un sous-ensemble fermé H de $R \times J$ tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta; H)$. Or, nous avons d'après la définition de Θ

$$F(x) = \Phi\Big(\Gamma\big(\Theta_u;\ \varphi_n^{-1}(\varDelta_n H)\big)\Big),$$

ce qui entraine $F(x) \in \Phi(\Theta_n, R))$ et par suite $\Gamma(\Theta, R) \subset (\Gamma(\Theta_n, R))$. D'autre part, pour une fonction $F_n(x)$ de $\Gamma(\Theta_n, R)$, nous pouvons déterminer un sous-ensemble fermé H_n de $R \times J$ tel qu'on ait $F_n(x) = \Gamma(\Theta_n; H_n)$. Or, l'ensemble $H = R \times (0) + \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ est fermé dans $R \times J$ et nous avons $\Gamma(\Theta; H) = \Phi(F_n(x))$, d'où nous avons $\Phi(\Gamma(\Theta_n, R)) \subset \Gamma(\Theta, R)$ et par conséquent $\Gamma(\Theta, R) = \Phi(\Gamma(\Theta_n, R))$, c'est-à-dire, le problème II est résolu complétement.

Puis, nous considèrons l'inverse du problème de la représentation des opèrations analytiques des fonctions par les cribles fermés. Pour le considérer, il suffit d'après le lemme de considérer le cas où une base Θ d'un crible fermé donné est défini sur $\mathfrak{C}(\varDelta)$, où $\varDelta$ est le discontinu de G. CANTOR.

Soit R un espace métrique. Étant donné un sous-ensemble fermé H de l'espace $R \times \varDelta$, nous définirons les sous-ensembles fermés

$$E^{(\nu)}_{n_1, n_2, \ldots n_k} \quad (\nu = 1, 2, \ldots; \ n_k = 0 \text{ ou } 1,\ k = 1, 2, \ldots)$$

de R comme il suit. Pour cela, nous développerons d'abord le nombre ν en la fraction de la base 2

$$\nu = m_1 + 2m_2 + 2^2 m_3 + \cdots + 2^{j-1} m_j \quad (m_i = 0 \text{ ou } 1,\ m_j = 1)\,.$$

Quand nous avons $j > k$, nous posons

$$E^{\nu}_{n_1,\, n_2 i\, \ldots ,\, n_k} = R$$

et sinon

$$E^{(\nu)}_{n_1,\, n_2,\, \ldots\, n_k} = \operatorname{Proj} R\ (\Delta_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}}) \times R \cdot H\,,$$

où nous avons

$$(p_2\,,\ p_4\,,\ \ldots p_{2k}) = (n_1\,,\ n_2\,,\ \ldots\,,\ n_h)$$

et $$(p_1\,,\ p_3\,,\ \ldots p_{2k-1}) = (m_1\,,\ m_2\,,\ \ldots\,,\ m_j\,,\ 0\,,\ \ldots 0)\,.$$

On voit alors sans peine que nous avons pour toute suite finie $(n_1\, n_2, \ldots , n_{k-1})$ et tout nombre entier ν

$$E^{(\nu)}_{n_1 n_2 \ldots n_k} \geqq E^{(\nu)}_{n_1 n_2 \ldots n_k n_{k+1}}\,.$$

Maintenant, nous définissons les fonctions $F^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sur R par les relations suivantes

$$Ens\left\{F^{(\nu)}(x) \geqq r_{n_1 n_2 \ldots n_k}\right\} = E^{(\nu)}_{n_1 n_2 \ldots n_k}\,,$$

$$r_{n_1 n_2 \ldots n_k} = \nu^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{k} n_j 2^{-j}\Big)\,.$$

Les fonctions $F^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sont alors continue supérieurement sur R.

Or, étant donnée une suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement sur R, nous pouvons inversement définir un sous-ensemble fermé H de $R \times \Delta$ comme il suit. Pour cela, nous posons d'abord pour un nombre naturel

$$\nu = m_1 + 2m_2 + 2^2 m_3 + \cdots + 2^{j-1} m_j \quad (m_i = 0 \text{ ou } 1\,,\ m_j = 1)\,,$$

$$E_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}} = Ens\left\{F^{(\nu)}(x) \geqq r_{p_2 p_4 \ldots p_{2k}}\right\}\,,$$

où nous avons $k \geqq j$ et $(p_1\, p_3 \ldots p_{2k-1}) = (m_1, \ldots m_j, 0, \ldots 0)$. Il est alors évident que les ensembles $E_{p_1 p_2 \ldots p_k}$ sont fermés. Nous pouvons alors définir un sous-ensemble fermé dans $R \times \Delta$ par l'égalité

$$H = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}} E_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}} \times \Delta_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}} .$$

D'après cette procédure, nous avons une correspondence entre une suite des fonctions continues supéreurement sur R et un sous-ensemble fermé de $R \times \Delta$. Ici, nous dennerons quelques remarques sur cette procédure,

1°, d'après cette procédure, nous avons une correspondence entre une suite des nombres et un sous-ensembles fermé de Δ,

2°, quand nous pouvons deduire une suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement sur R de l'ensemble un sous-ensemble fermé H de $R \times \Delta$ selon cette procédure, un sous-ensemble fermé de $R \times \Delta$ deduit de la suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ par cette procédure est précisément H.

Maintenant, nous désignons par $E(x_n)$ un sous-ensemble fermé de Δ déduit d'une suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des nombres par cette procédure. Selon ces ensembles fermés de Δ, nous définirons une opération analytique $\varphi(x_n)$ des nombres par

$$\Phi(x_n) = \Theta\big(E(x_n)\big) .$$

Nous avons alors pour tout espace métrique R $\Phi(\mathfrak{S}(R)) = \Gamma(\Theta, R)$ c'est-à-dire, le crible fermé $\Gamma(\Theta; H)$ des fonctions peut être représenté par une opération analytique des fonctions. En effet, étant donné un sous-ensemble fermé H de $R \times \Delta$, nous considérons une fonction $F(x) = \Gamma(\Theta; H)$. D'après notre procédure, on peut deduire une suite $\{^{(\nu)}(x)\} = (\nu = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement de H. Or, comme on sait dans la proposition 2°, l'ensemble H est deduit de la suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ par notre procédure et l'opération $\Phi(x_n)$ est définie par l'équation (1), nous avons $F(x) = \Phi(F^{(\nu)}(x))$, ce qui entraine $F(x) \in \Phi(R)$ et par suite $\Gamma(\Theta, R) \subset \Phi(\gamma(R))$. D'autre part, étant donnée une suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement sur R, nous considérons une fonction $F(x) = \Phi(F^{(\nu)}(x))$. Quand nous deduissons dans un sous-ensemble fermé H de la suite $\{F^{(\nu)}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ par notre procédure, nous avons d'après la définition de H pour tout point x de R $E(F^{(\nu)}(x)) = H^{(x)}$. Par conséquant, nous avons d'après (I) $\Gamma(\Theta; H) = F(x)$ et par suite $F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$, ce qui entraine $\Phi(\mathfrak{S}(R)) \subset \Gamma(\Theta, R)$. Nous avons donc d'après le resultat obtenu plus haut $\Phi(\mathfrak{S}(R)) = \Gamma(\Theta; \mathfrak{S}(R))$. De même, on peut définir une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions telle qu'on ait $\Phi^*(\mathfrak{F}(R)) = \Gamma(\Theta, \mathfrak{F}(R))$

pour tout espace métrique R. Donc, en resumant les résultats sinsi obtenus, nous avons

Théorème 25. *Toute opération analytique des fonctions peut être representée par un cribles fermé $\Gamma(\Theta; H)$ des fonctions, et inversement, quelque soit le crible fermé $\Gamma(\Theta; H)$ des fonctions, il existe une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions telle qu'on ait $\Phi(\mathfrak{S}(R)) = \Gamma(\Theta, \mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R)) = \Gamma(\Theta, \mathfrak{S}(R))$).*

25. La relation entre les opérations analytiques des fonctions et des ensembles. Les deux opérations analytiques des fonctions et des ensembles sont intimement liées et nous avons sur cela un théorème suivant. Pour le poser, nous donnerons d'abord une définition.

Définition. Soient $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions, R un espace et N un ensemble des nombres réels. Nous désignons alors par $Ens\{\Phi(\mathfrak{S})R)) \in N\}$ (ou $Ens\,\{(\mathfrak{J}(R)) \in N\}$) la famille de tous les ensembles $Ens\,\{\Phi(F_n(x)) \in N\}$ tels qu'on ait $F_n(x) \in \mathfrak{S}(R)$ (ou $F_n(x) \in \mathfrak{S}(R)$). En particulier, quand N est un ensemble de tous les nombres r tel qu'on ait $r \geqq r_0$, nous désignons par $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \doteq r_0\}$ la famille $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. Da même, nous définirons les familles $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) > r_0\}$; $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{J}(R)) \geqq r_0\}$ etc.

Théorème 26. *Étant donnée une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions et un ensemble N des nombres réels, nous pouvons définir une opération analytique $\Psi(E_n)$ des ensembles comme il suit, quelque soit l'espace R, nous avons toujours*

$$\Psi(R) = Ens\left\{\Phi\left(\mathfrak{S}(R)\right) \in N\right\}. \tag{1}$$

Inversement, étant donnée une opération analytique $\Psi(E_n)$ des ensembles et un ensemble N des nombres réels, nous pouvons définir une opération analytique $\Phi(E_n(x))$ des fon tions comme il suit, quelque soit l'espace R, nous avons toujours l'égalité (1).

Démonstration. Étant donnée une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions et un ensemble N des nombres réels, nous définirons une opération analytique des ensembles $\Phi(E_n)$ comme il suit. Pour cela, nous rangeons tous les nombres rationnels en une suite $\{r_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Pour une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés d'un espace R, nous définirons maintenant une suite $\{F^n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions définies sur R par les relations telles qu'on ait pour tout nombre naturel n et tout nombre réel s

$$Ens\left(F_n(x) \geqq s\right) = \prod_{s \geqq r_k} E_{2^{n-1}(2k-1)} \quad \text{et} \quad Ens\ \left(F_n(x) \geqq -\infty\right) = R\,.$$

Pour que $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soient définies par cette relation, il faut qu'on ait $Ens\ (F_n(x) \geqq s_1) > Ens\ \{(x) \geqq s_2\}$ pour les deux nombres réels s_1 et s_2 tels qu'on ait $s_2 \geqq s_1$. Or, il est évident que $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jouissent de cette propriété. Comme les ensembles $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés, les ensembles $Ens\ \{F_n(x) \geqq s\}$ sont aussi fermés, et par suite $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont continues supérieurement. Nous pouvons donc effectuer $\Phi(F_n(x))$ sur ces fonctions $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nous définirons maintenant une opération analytique $\Psi(E_n)$ des ensembles par l'équation

$$(2) \qquad \Psi(E_n) = Ens\left\{\Phi\left(F_n(x)\right) \in N\right\}\,.$$

Nous avons alors $\Psi(R) = Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. En effet, pour un ensemble E de $Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$, il existe une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions supérieurement sur R telles qu'on ait $E = Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. Nous posons maintenant

$$E_{2^{n-1}(2k-1)} = Ens\left\{F_n(x) \geqq r_k\right\} \quad (k, n = 1, 2, \ldots\ldots)\,.$$

Les ensembles $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont alors fermés et les fonctions construites par $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ en employant cette méthode coincident avec les fonctions $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nous avons donc d'après (2) $\Psi(E_n) = E$ et par suite $E \in \Psi(R)$, d'où nous avons $Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\} < \Psi(R)$. D'autre part, pour un ensemble E de $\Psi(R)$, nous pouvons choisir une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R de façon qu'on ait $E = \Psi(E_n)$. Quand nous construissons les fonctions $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de la suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ selon la méthode donnée plus haut, nous avons d'après (2) $E = \Psi(E_x) = Ens\ \{\Phi(F_n(x)) \in N\}$, ce qui entraine $E \in Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$ ou $\Psi(R) < Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. Nous avons donc d'après le résultats obtenu plus haut $\Psi(R) = Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$.

Puis, étant donnée une opération analytique $\Psi(E_n)$ des ensembles et un ensemble N des nombres réels, nous définirons une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions de façon suivante. Pour une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement sur R, nous posons

$$(3) \qquad \Phi\left(F_n(x)\right) = a + b\varphi_{\Psi(E_n)}(x)\,,$$

où $E_n = Ens\ \{F_n(x) \geqq 1\}\ (n = 1, 2, \ldots)$, $\varphi_{\Psi(E_n)}(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\Psi(E_n)$ définie sur R et a, b les nombres réels tels qu'on ait $a \bar{\in} N$ et $a+b \in N$. Or, comme la valeur de $\Phi(F_n(x))$ à un point x_0 de R n'est détermine que par les relations $F(x_0) \geqq 1$ ou non, $\Phi(F_n(x))$ est donc analytique.

Nous avons alors $\Psi(R) = Ens\ \{\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. En effet, pour un ensemble E de $\Psi(R)$, nous prenons une suite $\{E_n\}\ (n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R telle qu'on ait $E = \Psi(R)$. Or, nous avons d'après (3)

$$E = Ens\left\{\Phi\left(\varphi_{E_n}(x)\right) \in N\right\}$$

et $\varphi_{E_n}(x)$ est continue supérieurement. L'ensemble E est donc contenu dans $Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$, ce qui donne $\Psi(R) \subset Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$. D'autre part, étant donnée un ensemble E de $Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\}$, nous pouvons choisir une suite $\{F_n(x)\}\ (n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues supérieurement de façon qu'on ait $E = Ens\ \{\Phi(E_n(x) \in N\}$. Or, les ensembles $E_n = Ens\ \{F_n(x) \geqq 1\}$ sont fermés et $E = \Psi(E_n)$, ce qui entraine $E \in \Psi(R)$. Nous avons donc $Ens\ \{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \in N\} \subset \Psi(R)$. et par suite l'égalité demandée.

C. Q. F. D.

26. Les cribles fonctionnels des fonctions. Nous avons plus hant donné les cribles fermés des fonctions pour représenter les opérations analytiques des fonctions. Or, on voit sans peine que la famille des fonctions obtenues par l'application d'une opération analytique des fonctions sur les fonctions continues ne peut nécessairement être représenté par un crible fermé des fonctions. Pour cette inconvenance, nous introduirons la notion des cribles fonctionnels des fonctions.

Étant donné un espace métrique J compact et indénombrable, nous considérons la famille $\mathfrak{G}(J)$ de toutes les fonctions continues réelles et définies sur J. Nous définirons la distance dis $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ entre les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ de $\mathfrak{G}(J)$, comme il suit

$$\text{dis}\left\{\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\right\} = \underset{x \in J}{b.s.}\ \nu\left(\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\right).$$

La famille $\mathfrak{G}(J)$ est alors un espace métrique complet et séparable. R étant un espace métrique quelconque, nous prenons une fonction $F(x, y)$ continue, définie sur l'espace produit $R \times J$. Étant donnée une fonction Θ définie sur l'espace $\mathfrak{G}(J)$, nous désignons par une de

$\Pi(\Theta, J, R; F(x, y))$, $\Pi(\Theta, J; F(x, y))$ ou $\Pi(\Theta; F(x, y))$ la fonction définie sur R de façon que la valeur à un point x de R est donnée par l'expression $\Theta(F(x, y))$, et nous appellons cette fonction celle criblée au moyen de $F(x, y)$ par rapport à Θ et $F(x, y)$ un crible fonctionnel des fonctions. Maintenant, nous désignons par $\Pi(\Theta, R)$ ou $\Pi(\Theta, J, R)$ la famille de toutes fonctions $\Pi(\Theta, F(x, y))$, lorsque $F(x, y)$ parcourt toutes les fonctions continues définies sur $R \times J$, et nous appellons cette famille celle criblée de la classe (Π) par rapport à Θ et Θ la base de $\Pi(\Theta, R)$. Θ_1 et Θ_2 étant les deux bases des cribles fonctionnels des fonctions, si l'on a $\Pi(\Theta_1, R) = \Pi(\Theta_2, R)$, pour tout espace métrique R, nous dirons que les deux bases Θ_1 et Θ_2 sont équivalentes deux-à-deux et nous désignons ce fait par $\Theta_1 \sim \Theta_2$ ou $\Theta_2 \sim \Theta_1$. En prenant maintenant l'espace métrique $\mathfrak{S}(J)$, nous considérons la fonction $F(x, y)$ définie sur l'espace produit $\mathfrak{S}(J) \times J$ selon l'égalité $F(x, y) = \varphi(y)$, où $\varphi(y)$ désigne la fonction contenue dans $\mathfrak{S}(J)$ représentée par x. Il est alors évident que la fonction $F(x, y)$ est continue et qu'on a $\Theta = \Pi(\Theta; F(x, y))$.

Da même que les cribles fermés des fonctions, nous avons un théorème suivant sur les bases des cribles fonctionnels.

Théorème 27. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact, $\Theta_n (n = 1, 2, \dots)$ les bases des cribles fonctionnels des fonctions définies sur $\mathfrak{S}(J)$ et $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions. Nous avons alors pour tout sous-ensemble fermé H de l'espace produit $R \times J$*

$$\Phi\big(\Pi(\Theta_n; H)\big) = \Pi\big(\Phi(\Theta_n); H\big).$$

27. La représentation par les cribles fonctionnels des fonctions. Nous commencerons par la représentation des opérations analytiques des fonctions par les cribles fonctionnels des fonctions.

Théorème 28. *Soient R un espace métrique, J un espace métrique compact indénombrable, et $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions. On peut alors définir une base Θ d'un crible fonctionnel des fonctions sur $\mathfrak{S}(J)$ de façon qu'on ait*

$$\Pi\big(\Theta, \mathfrak{C}(R)\big) = \Phi\big(\mathfrak{C}(R)\big).$$

Démonstration. Prenons dans J un point p d'accumulation de J et une suite $\{p_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ de points telle qu'on ait dis $(p, p_n) \leqq \frac{1}{n}$ et $p \neq p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$ et nous désignons par $U(x)$

la fonction définie sur J dont la valeur à un point x de J est dis (x, p). $U(x)$ est alors continue sur J et $U(p_n) \leqq \frac{1}{n}$. Maintenant, nous définirons une fonction Θ sur $\mathfrak{G}(J)$ comme il suit. Étant donnée une fonction continue $F(x)$ sur J, nous poserons

$$F^*(x) = \max\{-U(x), \min(U(x), F(x))\}.$$

$F^*(x)$ est alors continue sur J et $|F^*(p_n)| \leqq U(p_n)$. Nous définirons Θ par l'équation

$$(1) \qquad \Theta(F(x)) = \Phi\left(\nu^{-1}\left(\overline{U}(p_n)^{-1}F^*(p_n)\right)\right).$$

En vertu de cette fonction Θ, nous avons pour un espace R

$$\Pi(\Theta;\ \mathfrak{C}(R)) = \Phi(\mathfrak{C}(R)).$$

En effet, étant donnée une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues sur R, nous considérons la fonction $F(x) = \Phi(F_x(x))$. En désignant par P l'ensemble des points p et $p_n (n = 1, 2, \ldots)$, nous définirons la fonction $F^*(x, y)$ sur l'espace produit $R \times P$ par l'expression suivante

$$F^*(x, p) = 0, \quad F^*(x, p_n) = U(p_n)\nu^{-1}(F_n(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots.).$$

Puisque $F^*(x, p_n)$ est continue sur R et que $F^*(x, p_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ convergent vers la fonction $F^*(x, p)$, $F^*(x, y)$ est continue sur $R \times P$. Or, P est un sous-ensemble fermé de J, nous pouvons prolonger $F^*(x, y)$ sur $R \times J$ continuellement. Nous désignons par $F(x, y)$ la fonction ainsi obtenue. Mais, comme nous avons d'après (2)

$$\nu\left(U(p_n)^{-1}F(x, p_n)\right) = F_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots.),$$

nous avons d'après (1) $\Pi(\Theta; F(x, y)) = \Phi(F_n(x)) = F(x)$, ce qui donne $F(x) \in \Pi(\Theta;\ \mathfrak{C}(R))$, d'où nous avons $\Phi(\mathfrak{C}(R)) \subset \Pi(\Theta, \mathfrak{C}(R))$.

Puis, étant donnée une fonction continue $F(x, y)$ définie sur $R \times J$, nous considérons la fonction $F(x) = \Pi(\Theta;\ F(x, y))$. Or, la fonction $F^*(x, y)$ définie par l'égalité

$$F^*(x, y) = \max\{-U(x), \min(U(x), F(x, y))\}$$

crible, d'après la définition de $F^*(x, y)$, une fonction de même que

$F(x, y)$ rapport à la base Θ, c'est-à-dire, $\Pi(\Theta; F(x, y)) = \Pi(\Theta; F^*(x, y))$. Quand nous posons

$$(3) \qquad F_n(x) = \nu^{-1}\left\{U(p_n)^{-1}F^*(x, p_n)\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots\ldots),$$

ces fonctions sont continues sur R et $F^*(x, p_n) = U(p_n)\ \nu(F_n(x))$, c'est-à-dire, $F^*(x, y)$ est une prologation continue de la fonction qui prend la valeur $U(p_n)\nu(F_n(x))$ pour un point (x, p_n) et la valeur 0 pour un point (x, y). Nous avons donc d'après (1) $\Phi(F_n(x)) = \Pi(\Theta; F^*(x, y)) = F(x)$, ce qui entraine $F(x) \in \Phi(\mathfrak{C}(R))$ ou $\Pi(\Theta, \mathfrak{C}(R)) \subset \Phi(\mathfrak{C}(R))$. Par conséquent, grâce au resultat obtenu plus haut. nous avons $\Pi(\Theta, \mathfrak{C}(R)) = \Phi(\mathfrak{C}(R))$.

C. Q. F. D.

Dans le théorème 28, nous avons la représentation de la famille $\Phi(\mathfrak{C}(R))$ par un crible fonctionnel des fonctions. Or, nous pouvons représenter $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$ par un crible fonctionnel des fonctions, Pour le voir, il suffit d'après le théorème 27 de voir que le famille $\mathfrak{S}(R)$ ou $\mathfrak{J}(R)$ peut être représentée par un crible fonctionnels des fonctions. Or, comme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x)$ ou $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, F_n(x)$ est analytique, $\mathfrak{S}(R)$ ou $\mathfrak{J}(R)$ est d'après le théorème 28 représentée par un crible fonctionnel $\Pi(\Theta; F(x, y))$ de manière que $\mathfrak{S}(R)$ ou $\mathfrak{J}(R) = \Pi(\Theta, \mathfrak{C}(R))$. Nous avons donc

Corollaire. *$\Phi(F_n(x))$ étant une opération analytique des fonctions, il existe un cribles fonctionnel $\Pi(\Theta; F(x, y))$ des fonctions tel qu'on ait pour tout espace métrique R*

$$\Pi(\Theta, R) = \Phi\big(\mathfrak{S}(R)\big) \quad ou \quad \Phi\big(\mathfrak{J}(R)\big).$$

28. Les opérations quasi-analytiques des fonctions. Nous avons envisagé dans les paragraphes 22-27 la représentation des opérations analytiques des fonctions, mais comme nous pouvons voir sans peine, ces resultats sont prolongés sur celles quasi-analytiques des fonctions par quelques modifications légères. Par exemple, pour obtenir une représentation de celles-ci comme nous avons dans le théorème 23, il suffit de considérer au lieu des opérations fondamentales $\Phi_k(F_n(x))$ $(x = 1, 2, \ldots 5)$ données dans ce théorème les opérations suivantes; 1°, $\Phi^*(F(x)) = F(x) + a(x)$ ou $a(x)$ est une fonction quelconque; 2°, $\Phi_2^*(F(x)) = F(x)a(x)$ où $a(x)$ est une fonction quelconque; 3°, $\Phi_3^*(F_1(x), F_2(x)) = \Phi_3(F_1(x), F_2(x))$; 4°, $\Phi_4^*(F_1(x),$

$F_2(x)) = \Phi_4(F_1(x),\ F_2(x))$; 5°, $\Phi_5{}^*(F_k(x)) = \underset{\mathfrak{N}(x)}{b.s.}\ \{\underset{k}{b.i.}\ Fn_k(x)\}$ où les ensembles $\mathfrak{N}(x)$ peuvent varier avec x.

X. LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES OPÉRATIONS ANALYTIQUES DES FONCTIONS.

29. Les théorèmes sur l'existence. Étant donné un espace métrique séparable R, nous considérons une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions. Comme la famille $\mathfrak{S}(R)$ est de la puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$, $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ est aussi de la puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$. Nous pouvons démontrer ce qui suit.

1°. $\mathfrak{F}$ étant une famille da la puissance $\leqq 2^{\aleph_0}$ des fonctions définies sur R, on peut définir une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions telle qu'on ait $\Phi(\mathfrak{S}(R)) \subset \mathfrak{F}$.

En effet, puisque R est donnée comme une image continue d'un sous-ensemble de l'ensemble R^* de tous les nombres irrationnels, il suffit de considérer le cas où on a $R = R^*$. Étant conné un intervalle $J = [0, 3]$, nous désignons par H_r pour un nombre réel $r(0 \leqq r \leqq 1)$ l'ensemble de tous les points (x, y) de l'espace produit $R^* \times J$ tel qu'on ait $0 \leqq y \leqq \nu(x)+1$ et $y = 2+r$. Les ensembles $H_r(0 \leqq r \leqq 1)$ sont alors fermés dans $R^* \times J$ et $H_r{}^{(x)}$ $(x \in R^*, (0 \leqq r \leqq 1))$ sont distincts deux-à-deux. Maintenant, en désignant par $F_r(x)$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ les fonctions de $\mathfrak{F}$, nous définirons une base Θ d'un crible fermé des fonctions sur $\mathfrak{C}(J)$ comme il suit ; pour un sous-ensemble fermé E de J, quand nous avons $E = H_r{}^{(x)}$, nous posons $\Theta(E) = F_n(x)$ et sinon, $\Theta(E) = 0$. Nous avons alors $F_r(x) = \Gamma(\Theta;\ H_r)$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ et donc d'après le théorème 25 nous pouvons choisir une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions telle qu'on ait $\mathfrak{F} \subset \Phi(\mathfrak{S}(R))$.

C. Q. F. D.

De même, nous pouvons donner d'après les théorèmes 25 et 28 une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions telle qu'on ait $\mathfrak{F} \subset \Phi(\mathfrak{J}(R))$ ou $\mathfrak{F} \subset (\mathfrak{C}(R))$.

Puis, pour l'existence d'une fonction universelle da la famille $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$, nous avons la suivante.

2°. Soient $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions et R un espace métrique et séparable. I étant un intervalle fermé $[0, 1]$, nous pouvons choisir une fonction $F(x, y)$ parmi $\Phi(\mathfrak{S}(R \times I))$ ou $\Phi(\mathfrak{J}(R \times I))$ de façon suivante, quelle que soit la fonction $F(x)$ de $\varphi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$), il existe un point y_0 dans l'intervalle I tel qu'on ait $F(x) \equiv F(x, y_0)$ pour tout point x de R. I^* étant l'ensemble de tous les nombres irrationnels contenus dans I, nous avons une fonction $F(x, y)$ de $\Phi(\mathfrak{C}(R \times I^*))$, telle que, quelle que soit la fonction $F(x)$ de $\Phi(\mathfrak{C}(R))$, il existe dans I^* un point y_0 tel qu'on ait $F(x) \equiv F(x, y_0)$ pour tout point x de R.

En effet, étant donné un espace métrique compact et indénombrable J, nous pouvons définir d'après le lemme de W. Sierpiński (W. Sierpiński (4)) dans l'espace produit $R \times J \times I$ un sous-ensemble fermé U qui est universel pour tous les sous-ensembles fermés de $R \times J$. Or, nous pouvons définir sur l'espace $\mathfrak{C}(J)$ une base Θ d'un crible fermé des fonctions de façon qu'on ait $\Phi(\mathfrak{S}(R)) = \Gamma(\Theta, R)$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R)) = \Gamma(\Theta, R)$). Il est alors évident que la fonction $F(x, y) = \Gamma(\Theta; U)$ est universelle pour toutes les fonctions de $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$, c'est-à-dire, pour toute fonction $F(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$, il existe dans I un point y_0 tel qu'on ait $F(x) \equiv F(x, y_0)$.

Comme on sait, nous pouvons définir sur l'espace produit $R \times J \times I^*$ une fonction continue $F(x, y, z)$ qui est universelle pour toutes les fonctions continues sur l'espace produit $R \times J$. De méme que nous avons fait plus haut, nous pouvons donc d'après le théorème 28 démontrer qu'il existe une fonction universelle pour toutes les fonctions de $\Phi(\mathfrak{C}(R))$ sur $R \times I^*$. C. Q. F. D.

Remarque. D'aprés la proposition 2°, nous pouvons voir qu'il existe sur l'espace R une fonction contenue dans $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$. Par exemple, nous considérons $\Phi(\mathfrak{S}(R))$. Pour simplifier la démonstration, nous supposons qu'on ait $R = I$. Alors, pour une fonction $F(x, y)$ définie sur $I \times I$ qui appartient à $\Phi(\mathfrak{S}(I \times I))$ et qui est universelle pour toutes les fonctions de $\Phi(\mathfrak{S}(R))$, la fonction

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} e^{-nF(x, x)^2}$$

n'appartint pas à $\Phi(\mathfrak{S}(R))$. Ene ffet, l'ensemble de tous les points de $I \times I$ tel qu'on ait $F(x, y) = 0$ est universelle pour tous les ensembles de $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) = 0\}$ et par suite l'ensemble $I - Ens\,\{F(x, x) = 0\}$ ou $Ens\,\{F(x) = 0\}$ n'appartient pas à $Ens\,\{\Phi(\mathfrak{S}(R) = 0\}$. Par conséquent, $F(x)$ n'appartient pas à $\Phi(\mathfrak{S}(R))$. C. Q. F. D.

Or, pour les opérations topologiques des fonctions, nous pouvons démontrer le

Théorème 29. *Soient $\Phi(F_n(x))$ une opération topologique des fonctions et R un espace métrique séparable complet et indénombrable.*

Il existe dans $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$) une fonction $F(x)$ telle qu'on ait $-F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$).

Démonstration. Étant donné un ensemble E de $\Phi(R)$, nous pouvons choisir une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R de façon qu'on ait $E = \Phi(E_n)$. Par suite, pour les fonctions caractéristiques $\varphi_E(x)$ et $\varphi_{E_n}(x)$ des ensembles E et $E_n (n = 1, 2, \ldots)$, nous avons $\varphi_E(x) = \Phi(\varphi_{E_n}(x))$. Nous avons donc d'après le théorème 26 et $\varphi_E(x)$, $\varphi_{E_n}(x) \in \mathfrak{S}(R)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $E \in Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \equiv 1\}$, ce qui entraine $\Phi(R) \subset Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \leqq 1\}$. Or, selon le théorème 26 tout ensemble de $Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \geqq 1\}$ appartient à $\Phi(R)$ et donc nous avons $\Phi(R) = Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \geqq 1\} = Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \geqq 0\}$. Or, d'après le théorème de W. SIERPIŃSKI (W. SIERPIŃSKI) (4)), il existe dans $\Phi(R)$ un ensemble E tel qu'on ait $R - E \bar{\in} \Phi(R)$. La fonction caractéristique $\varphi_E(x)$ de cet ensemble est alors contenue dans $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ et nous avons $Ens\{-\varphi_E(x) \geqq 0\} = R - E \bar{\in} \Phi(R) = Ens\{\Phi(\mathfrak{S}(R)) \geqq 0\}$, ce qui entraine $-\varphi_E(x) \bar{\in} \Phi(\mathfrak{S}(R))$. $\varphi_E(x)$ est donc une fonction demandée dans ce théorème. C. Q. F. D.

Remarque. Pour toute opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions, il n'existe pas nécessairement dans $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ une fonction $F(x)$ telle qu'on ait $-F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$. En effet, on peut donner une opération analytique $\Phi(E_n)$ des fonctions telle que $F(x) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ entraine $-F(x) \in \Phi((R))$ pour tout espace métrique R. Pour cela, nous prenons un intervalle fermé $J = [-1, +1]$. En désignant par $\rho(x)$ une transformation qui transforme une point x de J en le point $-x$ de J, nous définirons sur l'espace $\mathfrak{E}(J)$ une fonction Θ comme il suit : nous avons pour tout sous-ensemble fermé E de J

$$\Theta\big(\rho(E)\big) = -\Theta(E). \tag{1}$$

La relation $F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$ entraine alors $-F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$ pour tout espace métrique R. En effet, pour la fonction $F(x)$, nous avons un sous-ensemble fermé H de $R \times J$ tel qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta ; H)$. Or, l'ensemble H_0 de tous les points $(x, \rho(y))$ de $R \times J$ tels qu'on ait $(x, y) \in H$ est fermé et nous avons d'après (1) $-F(x) = \Gamma(\Theta; H_0)$, ce qui donné $-F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$. Ici, on peut choisir d'après le théorème 25 une opération analytique $\Phi(F_n(x))$ des fonctions de façon qu'on ait $\Phi(\mathfrak{S}(R)) = \Gamma(\Theta, R)$ pour tout espace métrique R, ce qui entraine l'existence d'une opération analytique demandée des fonctions.

30. Le prolongement des fonctions. Nous considérons dans la suite le prolongement des fonctions obetenues par une opération analytique des fonctions.

Théorème 30. *Soient $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonctions, R un espace, R_0 un sous-ensemble de R et $F_0(x)$ une fonction appartenant à $\Phi(\mathfrak{S}(R_0))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R_0))$). Il existe alors dans $\Phi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{S}(\mathfrak{J}(R)))$ une fonction $F(x)$ telle qu'on ait $F(x) \equiv F_0(x)$ pour tout point x de R_0.*

En effet, étant donné un espace métrique J compact indénombrable, nous pouvons définir d'après le théorème 4 de la première partie de ce travail un crible fermé $\Gamma(\mathfrak{R}; H)$ des ensembles de façon qu'on ait $\Gamma(\mathfrak{R}, R) = \Phi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$) pour tout espace métrique R, nous prenons maintenant un sous-ensemble fermé H_0 de $R_0 \times J$ de sorte qu'on ait $F_0(\mathfrak{R}; H^0)$. Nous pouvons alors choisir un sous-ensemble fermé H de $R \times J$ tel qu'on ait $H_0 = H \cdot R_0 \times J$. Nous avons $\Gamma(\mathfrak{R}; H) \in \Phi(\mathfrak{S}(R))$ (ou $\Phi(\mathfrak{J}(R))$) et $\Gamma(\mathfrak{R}; H) \equiv \Gamma(\mathfrak{R}; H_0) \equiv F_0(x)$ sur R_0.

Théorème 31. *Soient $\Phi(F_n(x))$ une opération analytique des fonction, R un espace métrique, R_0 un sous-ensemble de R et $F_0(x)$ une fonction de $\Phi(\mathfrak{C}(R))$. On peut alors choisir un sous-ensemble G_δ G de R et une fonction $F(x)$ de façon qu'on ait $F(x) \in \Phi(\mathfrak{C}(G))$ et $F(x) \equiv F_0(x)$ pour tout point x de R_0.*

En effet, il existe une suite $\{F_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des fonctions continues sur R_0 telle qu'on ait $F_0(x) \equiv \Phi(F_n(x))$. Or, on peut prolonger chaque fonction $F_n(x)$ sur un sous-ensemble G_δ G_n de R en tenant sa continuité. L'ensemble $G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ est aussi de la classe $G\delta$ et toutes les fonctions $F_n^*(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ainsi obtenunes sont continues sur cet ensemble. Donc, on voit sans peine que la fonction $\Phi(F_n(x))$ jouit de la propriété demandée. C. Q. F. D.

31. Une propriété des cribles fermés des fonctions. Étant donné un espace métrique J compact indénombrable, nous considérons une base Θ d'un crible fermé des fonctions. Maintenant, nous obtenons une condition pour que la condition $\Theta^* \in \Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$ entraine $\Gamma(\Theta^*, R) \subset \Gamma(\Theta, R)$ pour tout espace métrique R. Pour cela, nous supposons qu'on ait $\Gamma(\Theta^*, R) \subset \Gamma(\Theta, R)$ pour toute fonction Θ^* de la famille $\Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$ et tout espace métrique R, et nous considérons une suite $\{R_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de sous-ensembles G_δ d'un espace métrique séparable R, telle qu'on ait $R_i R_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{n=1}^{\infty} R_n = R$. Nous prenons maintenant un schème de SOUSLIN

$\{F_{n_1 n_2 n \ldots n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R comme il suit. Parce que l'ensemble $R - R_1$ est de la classe F_σ, nous pouvons choisir une suite $\{F_{n_1}\}$ $(n_1 = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de R de façon qu'on ait $F_{n_1} F'_{n_2} = 0$ pour $n_1 \neq n'_2$ et $R - R_1 = \sum_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1}$. Puis, nous oonsidérons les ensembles $F_{n_1} - R_{n_2}$ $(n_1 = 1, 2, \ldots)$. Comme ces ensembles sont aussi de la classe F_ρ, nous pouvons donner une suite $\{F_{n_1 n_2}\}$ $(n_2 = 1, 2, \ldots)$ de sous-ensembles fermés de manière qu'on ait $F_{n_1 n_2} F_{n_1 n'_2} = 0$ pour $n_2 \neq n'_2$ et $F_{n_1} - R_2 = \sum_{n_2=1}^{\infty} F_{n_1 n_2}$. D'une manière générale, étant donné un sous-ensemble fermé $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ de R; nous considérons l'ensemble $F_{n_1 n_2 \ldots n_k} - R_{k\ 1}$. Comme cet ensemble est d'après l'hypothèse de la classe F_σ, nous pouvons définir une suite $\{F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}\}$ $(n_{n+1} = 1, 2, \ldots)$ de sous-ensembles fermés telle qu'on ait $F_{n_1 \ldots n_k} - R_{k\ 1} = \sum F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ et $F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} F_{n_1 \ldots n_k n'_{k+1}} = 0$ pour $n_{k+1} \neq n'_{k+1}$. Nous avons ainsi obtenue un schème de SOUSLIN $\{F_{n_1 \ldots n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ die sous-ensembles fermés be R qui jouit de la propriété suivante,

1°, $F_{n_1 \ldots n_k} \supset F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$,

2°, $F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} F_{n_1 \ldots n_k n'_{k+1}} = 0$ pour $n_{k+1} \neq n'_{k+1}$,

3°, $F_{n_1 \ldots n_k} - R_{k+1} = \sum_{n_{k+1}=1}^{\infty} F_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$ et $R - R_1 = \sum_{n_1=1}^{\infty} F_{n_1}$.

Puis nous supposons que les fonctions $G_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ soient définies sur les ensembles R_n respectivement et qu'on ait $G_n(x) \in \Gamma(\Theta, R_n)$ et nous considérons une fonctions $G(x)$ définie R de sorte qu'on ait $G(x) = G_n(x)$ pour tout point x de R_n. Pour obtenir un crible fermé des fonctions qui définit la fonction $G_n(x)$, nous définirons d'abord dans J un sous-ensemble fermé J_0, un schème de SOUSLIN $\{J_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés, un point P_0 et un schème de SOUSLIN $\{P_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ des points comme il suit,

1°, $J_{n_1 \ldots n_k} \supset \hat{J}_{n_1 \ldots u_k}$,

2°, $\hat{J}_{n_1 \ldots n_k} \supset J_{n_1 \ldots n_{k-1} n_{k+1}}$,

3°, $J_{n_1 \ldots n_k} \supset J_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$,

4°, $\hat{J}_{n_1 \ldots n_k} J_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} = (p_{n_1 \ldots n_k})$ et $J_0 J_{n_1} = (p_0)$,

$5°$, $p_{n_1\ldots n_k} \bar{\in} J_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$,

$6°$, $\lim_{n_{k+1}\to\infty} \delta(J_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}) = 0$ et $\lim_{n_1\to\infty} \delta(J_{n_1}) = 0$,

$7°$, $J_{n_1\ldots n_k}$ sont indénombrables.

D'où on peut voir sans peine qu'on a

$8°$, $J_{n_1\ldots n_k} \supset J_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$,

$9°$, $\hat{J}_{n_1\ldots n_k} \supset \hat{J}_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$,

$10°$, $p_{n_1\ldots n_k} \in \hat{J}_{n_1\ldots n_k}$ et $p_{n_1\ldots n_k} \in \hat{J}_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$,

$11°$, $\lim_{n_{k+1}\to\infty} p_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} = p_{n_1\ldots n_k}$ et $\lim_{n_1\to\infty} p_{n_1} = p_0$,

$12°$, $\lim_{n_{k+1}\to\infty} J_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} = (p_{n_1\ldots n_k})$ et $\lim_{n_1\to\infty} J_{n_1} = (p_0)$.

Avant donner un crible fermé des fonctions qui définit la fonction $G(x)$, nous démontrerons quelques lemmes.

Lemme 1. *Quels que soient les sous-ensembles fermés* $H_{n_1 n_2\ldots n_k}$ *des espace* $F_{n_1\ldots n_k} \times J_{n_1,\ldots n_k}$ *l'ensemble*

$$H = \sum_{n_1 n_2\ldots n_k} H_{n_1 n_2\ldots n_k} + P ,$$

où $P = R \times (p) + \sum_{n_1\ldots n_k} F_{n_1\ldots n_k} \times (p_{n_1\ldots n_k})$, *est toujours fermés.*

Démonstration. Nous posons maintenant

$$H^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1 n_2\ldots n_j} H_{n_1 n_2\ldots n_j} + \sum_{n_1 n_2\ldots n_{k+1}} F_{n_1\ldots n_{k+1}} \times J_{n_1\ldots n_{k+1}} + P .$$

Nous avons alors $H = \prod_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$. En effet, nous avons d'après la définition

$$F_{n_1\ldots n_{k+1}} \supset F_{n_1\ldots n_{k+1}\ldots n_j} \quad (j = k+1, k+2, \ldots.)$$

$$J_{n_1\ldots n_{k+1}} \supset J_{n_1\ldots n_{k+1}\ldots n_j} \supset \hat{J}_{n_1\ldots n_{k+1}\ldots n_j} \quad (j = k+1, \ldots.),$$

nous avons $F_{n_1\ldots n_{k+1}} \times J_{n_1\ldots n_{k+1}} \supset F_{n_1\ldots n_j} \times \hat{J}_{n_1\ldots n_j} \supset H_{n_1\ldots n_j} (j=k+1,\ldots)$ et donc $H \subset H^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ce qui entraine $H \subset \prod_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$. Puis, nous prenons un point $p = (x_0, y_0)$ de $\prod_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$. Puisque nous avons $H_{n_1\ldots n_k} \subset F_{n_1\ldots n_k} \times \hat{J}_{n_1\ldots n_k}$, nous avons aussi

$$p \in H^{(k)} \subset \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n_1 \ldots n_j} F_{n_1 \ldots n_j} \times \hat{J}_{n_1 \ldots n_j} + P$$

et par suite nous avons $p \in P$ ou $p \bar{\in} P$ et $p \in F_{n_1 \ldots n_{j_0}} \times \hat{J}_{n_1 \ldots n_{j_0}}$ pour quelques suites $(n_1, n_2, \ldots n_{j_0})$ des nombres naturels. Quand nous avons $p \in P$, nous avons aussi d'après la définition $p \in H$. Quand nous avons $p \in P$ et $p \in F_{n_1 \ldots n_{j_1}} \times \hat{J}_{n_1 \ldots n_{j_0}}$, nous avons d'après la définition

$$p \bar{\in} F_{n_1 \ldots n_j} \times \hat{J}_{n_1 \ldots n_j} \quad (j = j_0 + 1 , j_0 + 2, \ldots) ,$$

et donc, en vertu de la définition de $H^{(j_0)}$, nous avons $p \in \sum H_{n_1 \ldots n_{j_0}}$, ce qui entraine $p \in H$. Par suite, nous avons $p \in H$ pour tous les cas, et donc $\prod_{k=1}^{\infty} H^{(k)} \subset H_2$, ce qui donne $H = \prod_{k=1}^{\infty} H^{(k)}$. Par conséquent, pour démontrer que H est fermé, il suffit de démontrer que $H^{(k)}$ où $\sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + P$ et $\sum_{n_1 \ldots n_{k+1}} F_{n_1 \ldots n_{k+1}} \times J_{n_1 \ldots n_{k+1}} + P$ sont fermés. Nous considérons d'abord $\sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j}$ et prenons dans cet ensemble une suite $\{p^{(n)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des points qui convergent vers un point p de $R \times J$. Or, comme nous avons l'égalité

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + P = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + P \right) ,$$

nous pouvons supposer sans perdre la généralité que les points $p^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à $\sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + P$. Quand $\sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}$ appartient à un nombre fini des ensembles $H_{n_1 n_2 \ldots n_j} + P$, nous avons d'après l'hypothèse $p \in \sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + P$ et quand cet ensemble appartient à une infinité dénombrable des ensembles $H_{n_1 n_2 \ldots n_j} + P$, nous pouvons choisir une suite finie $(m_1, m_2 \ldots m_i)$ des nombres naturels comme il suit, il existe un nombre infini des nombres naturels n_{i+1} où les ensembles $H_{m_1 \ldots m_i n_{i+1} \ldots n_j} + \bar{P}$ contiennet au moins un point de $\sum_{n=1}^{\infty} (p^{(n)})$. Or, d'après la définition, nous avons $H_{m_1 \ldots m_i n_{i+1} \ldots n_j} \subset F_{m_1 \ldots m_i n_{i+1} \ldots n_j} \times \hat{J}_{m_i \ldots m_i n_{i+1}}$ et $\lim_{n_{i+1} \to \infty} \hat{J}_{m_i \ldots m_i n_{i+1}} = (p_{m_1 \ldots m_i})$ ce qui entraine $\lim_{n \to \infty} p^{(n)} = p \in P$, c'est-à-dire, nous avons toujours $p \in \sum_{j=1}^{k} \sum_{n_1 \ldots n_j} H_{n_1 \ldots n_j} + \bar{P}$ et donc cet ensemble est fermé.

Puis, nous considérons l'ensemble $\sum_{n_1\ldots n_{k+1}} F_{n_1\ldots n_{k+1}}+\hat{J}_{n_1\ldots n_{k+1}}+\bar{P}$. De même que nous avon fait plus haut, on voit que cet ensemble est aussi fermé, d'où nous avons que les ensembles $H^{(k)}$ sont aussi fermés. C. Q. F. D.

Lemme 2. *Étant donné un sous-ensemble fermé indénombrable J^* de l'espace J, on peut définir sur $\mathfrak{E}(J)$ une base Θ^* d'un crible fermé des fonctions telle qu'on ait $\Theta\sim\Theta^*$ et $\Theta^*(E)=\Theta^*(EJ^*)$ pour tout sous-ensemble fermé E de J.*

Démonstration. Pour la simplicité, nous ne considérons dans la suite que le cas où J est le discontinu de G. CANTOR et J^* contient un intervalle. Soit I un intervalle contenu dans J^*. Nous pouvons alors donner un nombre positif δ_0 tel qu'on ait $\text{dis}(I, J-I)>\delta$. Or, on peut définir une base Θ_I d'un crible fermé des fonctions équivalente à Θ. Il existe alors l'espace $\mathfrak{E}(I)\times I$ un sous-ensemble fermé H tel qu'on ait $\Theta_I=\Gamma(\Theta; H)$. Maintennant, nous définirons dans $\mathfrak{E}(J)\times J$ un sous-ensemble $\hat{H}$ d'après l'égalité $\hat{H}^{(E)}=H^{(EI)}$. L'ensemble $\hat{H}$ est alors fermé dans $\mathfrak{E}(J)\times J$. En effet, en prenant un sous-ensemble fermé E_0 de J, nous considérons une suite $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de J telle qu'on ait $\lim_{n\to\infty} E_n=E_0$. Quand un point x_0 de I n'appartient pas à $\hat{H}^{(E_0)}$, il existe un voisinage U du point x_0 disjoint à $\hat{H}^{(E_0)}$ et contenu dans I.

Or, nous avons $\lim_{n\to\infty} IE_n=IE_0$. En effet, étant donné un nombre positif ε tel qu'on ait $\varepsilon<\delta_0$, nous pouvons choisir un nombre naturel N tel qu'on ait

$$\text{dis}(E_0, E_n)<\varepsilon \qquad \text{pour} \quad n>N.$$

D'où, nous avons

$$(1) \qquad U(E_0, \varepsilon)>E_n \quad \text{et} \quad U(E_n, \varepsilon)>E_0 \qquad \text{pour} \quad n>N.$$

Or, nous savons sans peine

$$U(E_0, \varepsilon)=U(E_0I, E)+U(E_0-I, \varepsilon),$$

$$U(E_n, \varepsilon)=U(E_nI, \varepsilon)+U(E_n-I, \varepsilon) \qquad \text{pour} \quad n>N$$

et par suite, d'après l'hypothèse sur ε, nous avons

$$IU(E_0, \varepsilon)=IU(E_0I, \varepsilon)+IU(E_0-I, \varepsilon)=U(E_0I, \varepsilon),$$

$$IU(E_n, \varepsilon)=IU(E_nI, \varepsilon)+IU(E_n-I, \varepsilon)=U(E_nI, \varepsilon) \quad \text{pour} \quad n>N,$$

ce qui entraine d'après (1)

$$U(E_0I,\ \varepsilon) > E_nI \quad \text{et} \quad U(E_nI,\ \varepsilon) > E_0I \qquad \text{pour} \quad n > N,$$

c'est-à-dire, nous avons $\mathrm{dis}(E_nI, E_0I) < \epsilon$ pour $n > N$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} E_nI = E_0I$.

Par conséquent, nous avons d'après la définition de H

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, H^{(E_nI)} \leqslant H^{(E_0I)},$$

ce qui donne $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \hat{H}^{(E_n)} < H^{(E_0)}$, c'est-à-dire, $\hat{H}$ est fermè. Nous considérons maintenant une fonction $\Theta^* = I(\Theta\,;\,\hat{H})$ définie sur $\varepsilon(J)$. Or, comme nous avons $\Gamma(\Theta^*, R)$ $\Gamma(\Theta, R)$, $\Gamma(\Theta_I, R)$ $\Gamma(\Theta^*, R)$ et $\Theta_I \sim H$, nous avons aussi $\Theta \sim \Theta^*$, Enfin, il est évident que $\Theta^*(E) = \Theta^*(EI)$ pour tout sous-ensemble fermé E de J. C. Q. F. D.

Maintenant, étant données les fonctions $G_n(x)$ sur les ensembles $R_n (n = 1, 2, \ldots)$ de façon qu'on ait $G_n(x) \in \Gamma(\Theta, R_n)$, nous considérons la fonction $G(x)$ définie sur R de sorte qu'on ait $G(x) \equiv G_n(x)$ pour tout point x de R_n.

Nous prenons dans les ensembles fermés J_0 et $J_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ les intervalles I_0 et $I_{n \ldots n_k}$ respectivement tels qu'on ait

$$PI_0 = 0, \qquad J_0 - (P + I_0) \neq 0,$$

$$PI_{n_1 \ldots n_k} = 0 \quad \text{et} \quad J_{n_1 \ldots n_k} - (P + I_{n_1 \ldots n_k}) \neq 0.$$

Puis, nous prenons encore parmi les ensembles $J_0 - (P + I_0)$ et $J_{n_1 \ldots n_k} - (P + I_{n_1 \ldots n_k})$ les points q_0 et $q_{n_1 \ldots n_k}$.

Grâce au théorème 25, nous pouvons définir sur $\mathfrak{E}(J)$ les fonctions Θ_0 et $\Theta_{n_1 \ldots n_k}$ $(k, n_k = 1, 2, \ldots)$ de maniere qu'on ait

$$\Theta_\Delta \sim \Theta_0 \quad \text{et} \quad \Theta_{n_1 \ldots n_k} \sim \Theta$$

et $\qquad \Theta_0(E) = \Theta_0(EI_0) \quad \text{et} \quad \Theta_{n_1 \ldots n_k}(E) = \Theta_{n_1 \ldots n_k}(EI_{n_1 \ldots n_k})$.

Or, comme la fonction $G_n(x)$ appartient à $\Gamma(\Theta, R_n)$, nous pouvons définir dans les ensembles $R_1 \times I_0$ et $F_{n_1 \ldots n_k} \cdot R_{k+1} \times I_{n_1 \ldots n_k}$ les sous-ensembles fermés H_0 et $H_{n_1 \ldots n_k}$ relatives à ces ensembles respectivement tels qu'on ait

$$\Gamma(\Theta_0\,;\, H_0) = G_1(x)$$

et

$$\Gamma(\Theta_{n_1 \ldots n_k}\,;\, H_{n_1 \ldots n_k}) = G_{k+1}(x)$$

pour tout point de R_1 et $F_{n_1}\ldots_{n_k}R_{k+1}$ respectivement. Nous prolongerons H_0 et $H_{n_1\ldots n_k}$ dans $R\times I_0$ et $F_{n_1\ldots n_k}\times I_{n_1\ldots n_k}$ respectivement en conservant la propriété être fermé. Nous poserons maintenant

$$H=\sum_{n_1\ldots n_k}(H_0+H_{n_1\ldots n_k}1+\bar{P}+R\times 1q_0)+\sum_{n_1\ldots n_k}F_{n_1\ldots n_k}\times 1q_{n_1\ldots n_k}).$$

Nous avons alors d'après la définition de Θ_0 et $\Theta_{n_1\ldots n_k}$

$$G_0(x)=\Gamma(\Theta_0\,;\,H)\qquad\text{pour tout point de } R_1\,,$$

$$G_n(x)=\Gamma(\Theta_{n_1\ldots n_k}\,;\,H)\qquad\text{pour tout point de } F_{n_1\ldots n_k}\times R_{k+1}\,.$$

Quand nous désignons par $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}_{n_1\ldots n_k}$ respectivement les familles des $H^{(x)}$ pour tout point x des R_1 et $F_{n_1}\ldots R_{k+1}$ respectivement, nous avons

$$\underset{(n_1\ldots n_k)}{b.i.}\left\{\text{dis}\,(\mathfrak{F}_0,\ \mathfrak{F}_{n_1\ldots n_k})\right\}>0$$

et $$\underset{(n_1\ldots n_k)\neq(m_1\ldots m_j)}{b.i.}\left\{\text{dis}\,(\mathfrak{F}_{n_1\ldots n_k},\ \mathfrak{F}_{m_1\ldots m_j}\right\}>0\quad(k,\ n_k=1,\ 2,\ \ldots).$$

En effet, tout ensemble de $\mathfrak{F}_{n_1\ldots n_k}$ contient le point $q_{n_1\ldots n_k}$ et nous avons dis $(q_{n_1\ldots n_k},\ J-J_{n_1\ldots n_k}+P)>0$ et donc

$$\text{dis}\,(H^{(x')},\ H^{(x'')})\geqq\text{dis}\,(q_{n_1\ldots n_k}\,,\ J-J_{n_1\ldots n_k}+P)>0$$

pour tous les points x^1 et x^0 de $F_{n_1\ldots n_k}$ et $F_{m_1\ldots m_j}$ respectivement, où $(n_1\cdots n_k)\neq(m_1\cdots m_j)$, ce qui donne les égalités (2). Nous avons donc

$$(3)\qquad \bar{\mathfrak{F}}_0\bar{\mathfrak{F}}_{n_1\ldots n_k}=0\quad\text{et}\quad\bar{\mathfrak{F}}_{n_1\ldots n_k}\bar{\mathfrak{F}}_{m_1\ldots m_j}=0$$

pour $(n_1\cdots n_k)\neq(m_1\cdots m_j)$ où $\bar{\mathfrak{F}}_0$ et $\bar{\mathfrak{F}}_{n_1\ldots n_k}$ désignant les fermétures de $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}_{n^1\ldots n_k}$ respectivement.

Or, nous pouvons donner d'après les définitions Θ_0 et $\Theta_{n_1\ldots n_k}$ les sous-ensembles fermés $\hat{H}_0$ et $\hat{H}_{n_1\ldots n_k}$ relatives à $R_0\times J$ et $F_{n_1\ldots n_k}$ $R_{k+1}\times J$ respectivement comme il suit.

$$(4)\qquad\begin{aligned}&\Theta_0=\Gamma(\Theta\,;\,\hat{H}_0) && \text{pour tout ensemble de } \mathfrak{F}_0\,,\\ &\Theta_{n_1\ldots n_k}=\Gamma(\Theta\,;\,\hat{H}_{n_1\ldots n_k}) && \text{pour tout ensemble de } \mathfrak{F}_{n_1\ldots n_k}.\end{aligned}$$

Alors, l'ensemble $\hat{H}=\hat{H}_0+\sum_{n_1\ldots n_k}H_{n_1\ldots n_k}$ est d'après (3) fermé dans l'ensemble $\{\mathfrak{F}_0 + \sum_{n_1 \dots n_k} \mathfrak{F}_{n_1 \dots n_k}\} \times J$ et donc nous pouvons prolonger cet ensemble dans $\mathfrak{C}(J) \times J$ en conservant la propriété "être fermé". La fonction $\Theta^* = \Gamma(\Theta; H)$ appartient alors à $\Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$ et an vertu de (4) et la définition des ensembles fermés, nous avons $G(x) = \Gamma(\Theta^*; H)$. Or, comme nous avons d'après l'hypothèse $\Gamma(\Theta^*, R) \subset \Gamma(\Theta, R)$ pour tout espace métrique R, nous avons $G(x) \in \Gamma(\Theta, R)$, c'est-à-dire, étant données les sous-ensembles G_δ $R_n (n = 1, 2, \dots)$ de R tels qu'on ait $R_i R_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_{n=1} R_n = R$, et les fonctions $Q_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ définies sur R_n de façon qu'on ait $G_n(x) \in \Gamma(\Theta, R_n)$, la fonction $G(x)$ définie sur R par les égalités: $G(x) = G_n(x)$ pour tout point x de R_n, appartient à $\Gamma(\Theta, R)$.

Mais, nous avons aussi que l'inverse de ce fait est vrai. Pour le voir, nous supposons qu'un crible fermé des fonctions d'une base Θ, qui définit sur $\mathfrak{C}(J)$ jouit de la propriété donnée plus haut. Étant données un espace métrique R et un sous-ensemble fermé H de $R \times J$, nous considérons la famille $\Gamma(\Theta^*, R)$, où $\Theta^* = \Gamma(\Theta; H)$. Pour une fonction $F(x)$ de $\Gamma(\Theta^*, R)$, nous pouvons déterminer un sous-ensemble fermé G de $R \times J$ de façon qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta; G)$. Or, d'après le théorème de MM. C. KURATOWSKI et E. SZPILRAJN (C. KURATOWSKI et E. SZPILRAJN, (2) et (3)) $G(x)$ est unc fonction de BAIRE de la première classe qui correspond à chaque point x de R un sous-ensemble fermé $G(x)$ de J, c'est-à-dire, quand nous désignons par $\chi(x)$ une fonction qui correspond $G^{(x)}$ à chaque point x de R, $\chi(x)$ est de la première classe. Nous pouvons donc decomposer R en les sous-ensembles G_δ $R_n (n = 1, 2, \dots)$ de manière que $R_i R_j = 0$ pour $i \neq j$, $\sum_{n=1}^{\infty} R_n = R$ et $\chi(x)$ est continue sur chaque ensemble R_n. Or, quand nous désignons par $\varphi(x)$ uno fonction qui correspond à chaque point x de $\mathfrak{C}(J)$ un sous-ensemble fermé $H^{(x)}$, la fonction $\varphi(x)$ est de la première classe et par suite, nous pouvons décomposer $\mathfrak{C}(J)$ en les sous-ensembles G_δ $J_n (n = 1, 2, \dots)$ de façon que $J_i J_j = 0$ pour $i \neq j$, $\sum_{n=1}^{\infty} J_n = J$ et $\varphi(x)$ est continue sur chaque ensemble J_n. Maintenant, nous désignons par R_{nk} l'ensemble de tout les points x de R_n tels qu'on ait $\chi(x) \in J_k$. Les ensembles R_{nk} $(n, k = 1, 2, \dots)$ sont alors de la classe G_δ. La fonction $\varphi(\chi(x))$ est continue sur chaque ensemble R_{nk} et donc les ensembles

$$H_{nk} = \sum_{x \in R_{nk}} (x) \times \varphi(\chi(x)) \quad (n, k = 1, 2, \dots .)$$

sont fermés dans les ensembles $R_{n_k} \times J$ respectivement. De plus, nous avons d'après la définition des fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ pour tout point x de R_{nk} $F(x) = \Gamma(\Theta\,;\, H_{nk})$. Par conséquent, en vertu de l'hypothèse sur la base Θ du crible fermé donné, nous avons $F(x) \in \Gamma(\Theta, R)$, ce qui donne $\Gamma(\Theta^*, R)$ pour tout espace métrique R.

Pour resumer le resultat ainsi obtenu, nous poserons d'abord la définition suivante.

Définition. Soient J un espace métrique compact indénombrable et Θ une fonction définie sur l'espace $\mathfrak{C}(J)$. Quand nous avons pour tout espace métrique séparable R $\Gamma(\Theta^*, R) \subset \Gamma(\Theta, R)$, quelle que soit la fonction Θ^* de $\Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$, nous dirons que la base Θ est règulière.

Nous avons alors

Théorème 32. *Étant donné un espace métrique compact indénombrable J, pour qu'une base Θ d'un crible fermé des fonctions définie sur $\mathfrak{C}(J)$ soit règulière, il faut et il suffit que, R étant un espace métrique séparable, quand nous décomposons R en les ensembles R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ disjoints et de la classe G_δ et quand nous donnons les fonctions $F_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sur R_n respectivement de façon qu'on ait $F_n(x) \in \Gamma(\Theta, R_n)$, la fonction $F(x)$ définie sur R de sorte qu'on ait $F(x) \equiv F_n(x)$ pour tout point de R_n appartient à $\Gamma(\Theta, R)$.*

Maintenant, nous donnerons quelques propriétés des cribles fermés réguliers des fonctions.

Théorème 33. *Soient $\Gamma(\Theta\,;\, H)$ un crible fermé régulier des fonctions, $R^{(1)}$ un espace métrique compact séparable, $R^{(2)}$ un espace métrique séparable et $F(x)$ une fonction de $\Gamma(\Theta, R^{(2)})$. Quelle que soit la transformation $\varphi(x)$ de* BAIRE *de la classe 1 qui fait correspondre un point de $R^{(2)}$ à chaque point de $R^{(1)}$, la fonction $F(\varphi(x))$ appartient à $\Gamma(\Theta, R^{(2)})$.*

Démonstration. Comme la transformation $\varphi(x)$ est de la classe 1 de BAIRE, nous pouvons décomposer $R^{(2)}$ en les ensembles G_δ $R_n (n = 1, 2, \ldots)$ de façon qu'on ait $R_i R_j = 0$ pour $i \neq j$ $\sum_{n=1}^{\infty} R_n = R^{(2)}$ et que $\varphi(x)$ soit continue sur chaque ensemble R_n. Or, la fonction $F(x)$ appartient à $\Gamma(\Theta, R^{(1)})$ et donc nous pouvons définir dans $R^{(1)} \times J$ un sous-ensemble fermé H de façon qu'on ait $F(x) = \Gamma(\Theta\,;\, H)$. Maintenant, nous considérons l'ensemble

$$H_0 = \sum_{t \in R_n} (t) \times H^{(\varphi(t))}.$$

Cet ensemble est alors aussi fermé dans $R_n \times J$ et par suite la fonction $F(\varphi(x))$ sur R_n appartient à $\Gamma(\Theta, R_n)$, d'où $F(\varphi(x))$ appartient aussi à $\Gamma(\Theta, R^{(2)})$. C. Q. F. D.

Théorème 34. *Soient J un espace métrique compact indénombrable et Θ une base d'un crible fermé des fonction défini sur $\mathfrak{C}(J)$. Il existe alors une basse Θ^* d'un crible fermé des fonctions telle qu'elle soit définie sur $\mathfrak{C}(J)$ et que, quelle que soit la fonction $F(x)$ de $\Gamma(\Theta^*, R)$ définie sur un espace R, on peut décomposer R en les ensembles G_δ $R_n (n = 1, 2, \ldots)$ comme il suit: $R_i R_j = 0$ pour $i \neq j$, $\sum_{n=1} R_n = R$ et $F(x)$ sur R_n appartient à $\Gamma(\Theta, R_n)$ et que toute fonction définie sur R qui admet une décomposition ainsi considérée appartient à $\Gamma(\Theta^*, R)$.*

Démonstration. Nous donnérons d'abord le

Lemme. *Soit Δ un discontinu de G. CANTOR. L'espace $\mathfrak{C}(J+\Delta)$ est alors homéomorphe à $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$.*

En effet, comme on sait, $\mathfrak{C}(\Delta)$ est homéomorphe à Δ et donc nous pouvons donner une transformation topologique $\chi(t)$ qui transforme $\mathfrak{C}(\Delta)$ en Δ. Gr ce à cette transformation, nous pouvons transformer chaque ensemble E de $\mathfrak{C}(J+\Delta)$ à un point $(EJ, \chi(E\Delta))$ de l'espace $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$, ce qui donne une homéomorphie entre $\mathfrak{C}(J+\Delta)$ et $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$. En effet, quand une suite $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de $J+\Lambda$ qui converge vers un sous-ensemble E_0 de $J+\Delta$, les deux suites $\{E_n J\}$ et $\{E_n \Delta\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ convergent vers les ensembles $E_0 J$ et $E_0 \Delta$ respectivement, et inversement quand les deux suites $\{E_n^{(k)}\}$ $(k = 1, 2; n = 1, 2, \ldots)$ des sous-ensembles fermés de J et Δ convergent vers $E_0^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ respectivement, la suite $\{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers $E_0^{(1)} + E_0^{(2)}$, d'où les deux espaces $\mathfrak{C}(J+\Delta)$ et $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$ sont homéomorphes deux-à-deux. C. Q. F. D.

La démonstration du théorème. D'après le resultat obtenu dans le paragraphe 29, nous pouvons définir sur $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$ une fonction universelle $U(x, y)$ des fonctions de $\Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$. Or, les espaces $\mathfrak{C}(J+\Delta)$ et $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$ sont homéomorphes deux-à-deux et par suite, pour une transformation topologique $\varphi(x)$ qui transforme $\mathfrak{C}(J) \times \Delta$ en $\mathfrak{C}(J+\Delta)$, nous pouvons donner une fonction $\Theta_1 = U(\varphi(t))$ sur $\mathfrak{C}(J+\Delta)$. La famille criblée $\Gamma(\Theta_1, R)$ des fonctions jouit alors de la propriété suivante, c'est-à-dire, nous pouvons décomposer R en les ensembles G_δ disjoints R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tels que la fonction $F(x)$ appartient à $\Gamma(\Theta, R_n)$ sur chaque ensemble R_n.

Puis, soit $F(x)$ une fonction définie sur R de façon que $F(x)$ sur chaqne ensemble R_n appartient à $\Gamma(\Theta, R_n)$. Alors, comme nous avons fait dans la démonstration du théorème 32, nous pouvons choisir une base Θ^* d'un crible fermé des fonctions dans $\Gamma(\Theta, \mathfrak{C}(J))$ de façon qu'on ait $F(x) \in \Gamma(\Theta^*, R)$. Or, $U(x, y)$ est universelle pour les fonctions de $L(\Theta, \mathfrak{C}(J))$ et donc en vertu de la définition de Θ_1, nous avons $F(x) \in \Gamma(\Theta_1, R)$, c'est-à-dire, $\Gamma(\Theta_1, R)$ est celle des fonctions demandées. C. Q. F. D.

Corollaire 1. *Soient R_0 un espace métrique complet séparable et $U(x)$ une fonction définie sur R_0. La famille $\mathfrak{F}$ de touts les fonctions $F(x)$ définie sur un espace métrique séparable R de manière qu'on peut décomposer R en les sous-ensembles G_δ R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ disjoints et que la fonction $F(x)$ soit sur chaque ensembles R_n respectivement représentée comme une " Urbild " par rapport à une fonction continue est celle criblée par un crible fermé régulière des fonctions.*

Corollaire 2. *Étant donnée une suite des familles criblées $\mathfrak{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ par des cribles fermés des fonctions, on peut définir la plus petite famille criblée $\mathfrak{F}$ par un crible fermé des fonctions de sorte qu'on ait $\mathfrak{F} < \mathfrak{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. KANTOROVITCH et E. LIVENSON, Memoir on the analytical operations and projective sets. (I), Fund. Math., t. 18 (1932) p. 214-279, (II) ibid., t. 20 (1933) p. 54-77.

(2) C. KURATOWSKI, Les fonction semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. Fund. Math., t. 18 (1932) p. 148-159.

(3) C. KURATOWSKI, et E. SZPILRAJN, Sur les cribles et leurs applicatsons. Fund. Math., t. 18 (1932) p. 160-170.

(4) W. SIERPIŃSKI, Sur l'existence de diverses classes d'ensembles. Fund. Math., t. 14 (1929) p. 82-91.