Hokkaido Mathematical Journal Vol. 20 (1991) p. 425-440

# Tauber-Bedingungen für Potenzreihenverfahren und bewichtete Mittel

Von Hubert TIETZ
(Received January 10, 1989, Revised November 19, 1990)

## 1. Einleitung.

Es sei $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $p_0>0$ und

(1.1) $\quad P_n:=p_0+\ldots+p_n\rightarrow\infty,$

für welche die Potenzreihe

(1.2) $\quad p(x):=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n$

den Konvergenzradius 1 hat. Die Folge $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexer Zahlen heißt $J_p$-limitierbar zum Wert $\sigma$ ($J_p$-$\lim s_n=\sigma$), wenn die Reihe

(1.3) $\quad p_s(x):=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s_n x^n$

für $0<x<1$ konvergiert und $\lim_{x\rightarrow 1-}p_s(x)/p(x)=\sigma$ gilt. Die Folge $s$ heißt $M_p$-limitierbar zum Wert $\sigma$ ($M_p$-$\lim s_n=\sigma$), wenn für die Folge $t=\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$, mit

(1.4) $\quad t_n:=P_n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu s_\nu,$

$\lim t_n=\sigma$ gilt. Die Verfahren $J_p$ und $M_p$ sind wegen (1.1) permanent, d. h., sie limitieren jedes $s\in c$, dem Raum der konvergenten Folgen, zum Wert $\lim s_n$, und aus $M_p$-$\lim s_n=\sigma$ folgt stets $J_p$-$\lim s_n=\sigma$ (Ishiguro [6]), aber nicht umgekehrt. Unter geeigneten zusätzlichen Bedingungen für die Folge $s$ kann man jedoch von $M_p$-$\lim s_n=\sigma$ auf $\lim s_n=\sigma$, von $J_p$-$\lim s_n=\sigma$ auf $M_p$-$\lim s_n=\sigma$ oder sogar von $J_p$-$\lim s_n=\sigma$ auf $\lim s_n=\sigma$ zurückschließen. Wir werden solche Bedingungen, falls einer der eben genannten Fälle vorliegt, eine Tauber-Bedingung (TB) vom $M_p\rightarrow c$-Typ, vom $J_p\rightarrow M_p$-Typ bzw. vom $J_p\rightarrow c$-Typ nennen. Für $p_n:=1$ ist (das Potenzreihenverfahren) $J_p$ das Abel-Verfahren $A_1$. Hierfür gilt zum Beispiel der folgende

SATZ SRJ (Szász [25, Theorem I], Rényi [21] bzw. Jakimovski [8, Theorem 1]). *Jede der Bedingungen*

(1.5) $\quad (n+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\rho}\{|s_\nu-s_{\nu-1}|-(s_\nu-s_{\nu-1})\}^{\rho}=O(1)$ *für ein* $\rho>1$,

(1.6) $\quad \{(n+1)^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu|s_\nu-s_{\nu-1}|\}\in c$,

(1.7) $\quad \liminf(n+1)^{-1}\sum_{\nu=m+1}^{n}\nu(s_\nu-s_{\nu-1})\geq 0$ *für* $n/m\to 1\,(n/m\to\infty)$

*ist eine* TB *vom* $A_1\to c$*-Typ.*

In Nr. 3 der vorliegenden Arbeit werden die Tauber-Bedingungen (TBn) aus Satz SRJ sowie verschiedene damit verwandte TBn vom $A_1\to c$ -Typ auf eine große Klasse von $J_p$-Verfahren übertragen. Zu Satz SRJ vergleiche man die Bedingungen (3.33), (3.14) und (3.4). In Nr. 4 und Nr. 5 behandeln wir entsprechende TBn vom $J_p\to M_p$-bzw. vom $M_p\to c$ -Typ. Die betreffenden Sätze enthalten alle uns bekannten Resultate mit TBn der jeweiligen Art als Spezialfälle. Man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen und Hinweise von Gaier in [14] sowie Zeller/Beekmann [33, Nr. 52 und 55].

## 2. Bezeichnungen und Definitionen.

Der Folgenindex soll, wenn nichts Besonderes gesagt ist, von 0 an laufen, und Folgenglieder mit einem negativen Index sind gleich 0 zu setzen. Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Folgen mit $y_n\neq 0$ für $n\geq n_0$, so bedeute $x_n=o(y_n)$ bzw. $x_n=O(y_n)$, daß die Folge $\{x_n/y_n\}$ $(n\geq n_0)$ gegen 0 konvergiert bzw. beschränkt ist. Sind die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ reell und ist $y_n\neq 0$ für $n\geq n_0$, so schreiben wir $x_n=O_L(y_n)$, wenn es eine Konstante $K\in\boldsymbol{R}$ gibt mit $x_n/y_n>K$ für $n\geq n_0$. Für eine auf $(0,1)$ definierte Funktion $f$ bedeute $f(x)=O(1)$ für $x\to 1-$, daß es ein $K>0$ gibt mit $|f(x)|<K$ für alle $x\in(0,1)$.

Stets sei $a_n:=s_n-s_{n-1}$ und $b_n:=t_n-t_{n-1}$ mit $t=\{t_n\}=:\{(M_ps)_n\}$ aus (1.4). Neben den Folgen $\{p_n\}$ und $\{P_n\}$ benötigen wir auch die Folge $\{Q_n\}$ mit $Q_n:=P_0+\ldots+P_n$. Ist $\{r_n\}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $r_0>0$ und

(2.1) $\quad R_n:=r_0+\ldots+r_n\to\infty$,

und ist $s$ eine Folge komplexer Zahlen, so sei

$$\delta_n^{Ra}:=R_n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}R_{\nu-1}a_\nu \text{ und } \vartheta_n^{Ra}:=R_n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}R_{\nu-1}|a_\nu|.$$

Damit gilt dann

(2.2) $\quad \delta_n^{Ra} = s_n - (M_r s)_n.$

Ist $s$ eine Folge reeller Zahlen, so sei ferner

$$d_n^{Ra} := \vartheta_n^{Ra} - \delta_n^{Ra}.$$

Darüber hinaus schreiben wir im Falle $R_n = P_n$ kurz

$$\delta_n := \delta_n^{Pa},\quad \vartheta_n := \vartheta_n^{Pa},\quad d_n := \vartheta_n - \delta_n.$$

Hinter $n/m \to 1$, $P_n/P_m \to 1$, $Q_n/Q_m \to 1$ sowie $R_n/R_m \to 1$ ist stets $n > m \to \infty$ ergänzt zu denken.

Das zum Abel-Verfahren $A_1$ gehörende Verfahren $M_p$ ist das Cesàro-Verfahren $C_1$. Für $\alpha > 0$ und $p_n := \binom{n+\alpha-1}{n}$ ist $J_p$ das verallgemeinerte Abel-Verfahren $A_\alpha$ . Für $p_n := (n+1)^{-1}$ sind $J_p$ und $M_p$ die logarithmischen Verfahren $L$ und $l$. Für $\alpha > 0$ und $p(x) := [-x^{-1} \ln (1-x)]^\alpha$ ergeben sich die verallgemeinerten logarithmischen Verfahren $L_\alpha$ und $l_\alpha$. In anderer Richtung werden $L$ und $l$ von Phillips [19] verallgemeinert. Bei diesen Verfahren $L_p$ und $l_p$ gilt $p_n = 0$ für $0 \le n < n_0$. Die $M_p$-*Transformierte* $t$ wird dann nur für $n \ge n_0$ betrachtet.

## 3. Tauber-Bedingungen vom $J_p \to c$-Typ.

Neben den in Nr.1 genannten generellen Voraussetzungen für die Folge $\{p_n\}$ verlangen wir in diesem Abschnitt

(3.1) $\quad P_n/P_m \to 1$ für $n/m \to 1$.

LEMMA 3.1 ([30, *Satz* 3.9]). *Gilt* (3.1), *so ist*

(3.2) $\quad \liminf (s_n - s_m) \ge 0$ *für* $P_n/P_m \to 1$

*eine* TB *vom* $J_p \to c$-*Typ*.

SATZ 3.2. *Gilt* (3.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0 > 0$, (2.1) *und*

(3.3) $\quad R_n/R_m \to 1$ *für* $P_n/P_m \to 1$,

*so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen*

(3.4) $\quad \liminf (R_n \delta_n^{Ra} - R_m \delta_m^{Ra})/R_n \ge 0$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(3.5) $\quad \delta_n^{Ra} = O_L(1) \wedge \liminf (\delta_n^{Ra} - \delta_m^{Ra}) \ge 0$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(3.6) $\quad \lim (R_n d_n^{Ra} - R_m d_m^{Ra})/R_n = 0$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(3.7) $\quad d_n^{Ra} = O(1) \wedge \lim (d_n^{Ra} - d_m^{Ra}) = 0$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(3.8) $\quad \{d_n^{Ra}\} \in c$

*und, falls die* $s_n$ *komplex sind, jede der Bedingungen*

(3.9) $\lim(R_n\delta_n^{Ra}-R_m\delta_m^{Ra})/R_n=0$ *für* $P_n/P_m\to1$,

(3.10) $\delta_n^{Ra}=O(1)\wedge\lim(\delta_n^{Ra}-\delta_m^{Ra})=0$ *für* $P_n/P_m\to1$,

(3.11) $\{\delta_n^{Ra}\}\in c$,

(3.12) $\lim(R_n\vartheta_n^{Ra}-R_m\vartheta_m^{Ra})/R_n=0$ *für* $P_n/P_m\to1$,

(3.13) $\vartheta_n^{Ra}=O(1)\wedge\lim(\vartheta_n^{Ra}-\vartheta_m^{Ra})=0$ *für* $P_n/P_m\to1$,

(3.14) $\{\vartheta_n^{Ra}\}\in c$

*eine* TB *vom* $J_p\to c$*-Typ.*

BEWEIS. Um zu zeigen, daß (3.4) eine TB vom $J_p\to c$-Typ ist, genügt es nach Lemma 3.1, die Implikation $(3.3)\wedge(3.4)\Longrightarrow(3.2)$ zu beweisen. Es gelte also $P_n/P_m\to1$. Aus (3.3) folgt damit $R_n/R_m\to1$, und nach dem Abelschen Lemma ist

$$s_n-s_m=\sum_{\nu=m+1}^{n}a_\nu\geq R_m^{-1}\min_{m<k\leq n}\sum_{\nu=m+1}^{k}R_{\nu-1}a_\nu \quad \text{für } n>m.$$

Für jedes Paar $n$, $m$ sei $\kappa=\kappa(m,n)$ ein festes $k\in\{m+1,\dots,n\}$, für welches dieses Minimum angenommen wird. Dann gilt

$$s_n-s_m\geq R_m^{-1}(R_\kappa\delta_\kappa^{Ra}-R_m\delta_m^{Ra}),$$

woraus man mit (3.4) schließlich (3.2) abliest. Mit (3.4) ist natürlich auch (3.9) eine TB vom $J_p\to c$-Typ. Ferner ist $(3.8)\Longrightarrow(3.7)$, $(3.11)\Longrightarrow(3.10)$ und $(3.14)\Longrightarrow(3.13)$ klar, und es gilt auch $(3.6)\Longrightarrow(3.4)$, denn es ist

(3.15) $-a_n\leq|a_n|-a_n\leq2|a_n|$

und damit für $P_n/P_m\to1$

$$\begin{aligned}\liminf R_n^{-1}(R_n\delta_n^{Ra}-R_m\delta_m^{Ra})&=-\limsup R_n^{-1}\sum_{\nu=m+1}^{n}R_{\nu-1}(-a_\nu)\\&\geq-\limsup R_n^{-1}(R_nd_n^{Ra}-R_md_m^{Ra}).\end{aligned}$$

Weiter gilt $(3.3)\wedge(3.7)\Longrightarrow(3.6)$, denn

$$R_n^{-1}(R_nd_n^{Ra}-R_md_m^{Ra})=(d_n^{Ra}-d_m^{Ra})+(1-R_mR_n^{-1})d_m^{Ra}.$$

Analog sieht man $(3.3)\wedge(3.5)\Longrightarrow(3.4)$, $(3.3)\wedge(3.10)\Longrightarrow(3.9)$ und $(3.3)\wedge(3.13)\Longrightarrow(3.12)$, und die Implikation $(3.12)\Longrightarrow(3.9)$ folgt aus

$$R_n^{-1}|R_n\delta_n^{Ra}-R_m\delta_m^{Ra}|\leq R_n^{-1}(R_n\vartheta_n^{Ra}-R_m\vartheta_m^{Ra}) \quad \text{für } n>m,$$

womit alles gezeigt ist.

Beispiele für Folgen $\{R_n\}$ mit (3.3) sind $R_n:=P_n^\varepsilon$ für jedes feste $\varepsilon>0$,

(3.16) $R_n:=P_{n+\lambda}$ für jedes ganzzahlige $\lambda$, (3.17) $R_n := \ln P_n$.

Da für die Folgen (3.16) und (3.17) der Fall $R_n \leq 0$ für endlich viele $n$ eintreten kann, ist es bei der Anwendung von Satz 3.2 auf diese Folgen erforderlich, die in (3.4) bis (3.14) auftretenden Ausdrücke nur für hinreichend große Indizes zu betrachten. Für $R_n := P_n$ sind die Bedingungen (3.4), (3.5) und (3.9) bis (3.11) auch notwendig für die Konvergenz von $s$, da aus $s \in c$ sogar

(3.18) $\delta_n \to 0$

folgt.

Für eine speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren tritt (3.11) mit $R_n := P_n$, also $\{\delta_n\} \in c$, als TB vom $J_p \to c$-Typ bei Tietz/Trautner [32, Seite 170] auf. Die stärkere Bedingung (3.18) ist, wie Mikhalin [18, Satz 1] zeigt, auch unter schwächerer Voraussetzung als (3.1) eine TB vom $J_p \to c$-Typ. Zu (3.11) mit $R_n := P_{n+1}$ ist die Bedingung $\{\delta_n'\} \in c$ mit

(3.19) $\delta_n' := P_n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu a_\nu$

äquivalent. Sie tritt für eine speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren bei Tietz/Trautner [32, Korollar 4.5] auf. Die Bedingung $\delta_n' \to 0$ findet man für eine noch speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren bei Štěpánek [23, Theorem 2], dazu äquivalente Bedingungen für $L$ bei Kaufman [10, Satz 2 b] und Kwee [12, Theorem 2].

Wenden wir Satz 3.2 auf $A_1$ an, so ist (3.1) wegen $P_n = n+1$ trivial, und wir erhalten folgendes

KOROLLAR 3.3. *Ist $\{r_n\}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $r_0 > 0$,* (2.1) *und*

(3.20) $R_n/R_m \to 1$ *für* $n/m \to 1$,

*so ist, falls die $s_n$ reell sind, jede der Bedingungen* (3.8),

(3.21) $\liminf (R_n \delta_n^{Ra} - R_m \delta_m^{Ra})/R_n \geq 0$ *für* $n/m \to 1$,

(3.22) $\delta_n^{Ra} = O_L(1) \wedge \liminf (\delta_n^{Ra} - \delta_m^{Ra}) \geq 0$ *für* $n/m \to 1$,

(3.23) $\lim (R_n d_n^{Ra} - R_m d_m^{Ra})/R_n = 0$ *für* $n/m \to 1$,

(3.24) $d_n^{Ra} = O(1) \wedge \lim (d_n^{Ra} - d_m^{Ra}) = 0$ *für* $n/m \to 1$

*und, falls die $s_n$ komplex sind, jede der Bedingungen* (3.11), (3.14),

(3.25) $\lim (R_n \delta_n^{Ra} - R_m \delta_m^{Ra})/R_n = 0$ *für* $n/m \to 1$,

(3.26) $\delta_n^{Ra} = O(1) \wedge \lim (\delta_n^{Ra} - \delta_m^{Ra}) = 0$ *für* $n/m \to 1$,

(3.27) $\lim (R_n \vartheta_n^{Ra} - R_m \vartheta_m^{Ra})/R_n = 0$ *für* $n/m \to 1$, (3.28) $\vartheta_n^{Ra}=O(1)\wedge\lim(\vartheta_n^{Ra}-\vartheta_m^{Ra})=0$ *für* $n/m\to 1$

*eine* TB *vom* $A_1\to c$-*Typ.*

Mit $R_n:=n+1$ ist (3.21) die TB vom $A_1\to c$-Typ (1.7) von Jakimovski aus Satz SRJ, finden sich (3.23) und (3.24) bei Szâsz [26, Theorems 2 und 3], tritt (3.11) bei Meyer-König/Tietz [16] auf (der Spezialfall (3.18) ergibt die "zweite" Bedingung von Tauber [27]), ist (3.14) die TB vom $A_1\to c$-Typ (1.6) von Rênyi [21] aus Satz SRJ (vgl. auch Szâsz [26, Theorem B]), und liefert (3.28) ein weiteres Resultat von Szâsz [26, Theorem 1].

Bei (3.5) und (3.10) kann man auf $\delta_n^{Ra}=O_L(1)$ bzw. $\delta_n^{Ra}=O(1)$ verzichten, wenn man statt dessen

(3.29) $J_p\text{-}\lim s_n=\sigma\Longrightarrow J_p\text{-}\lim(M_r s)_n=\sigma$

voraussetzt. Diese Bedingung, die also fordert, daß mit $s$ stets auch die $M_r$-Transformierte $M_r s$ von $s$ zum gleichen Wert $J_p$-limitierbar sein soll, ist zum Beispiel erfüllt für $J_p=A_1$ und $M_r=C_1$ (vgl. Szâsz [24, Satz 4]) sowie für $J_p=L$ und $M_r=l$ (Kwee, [12, Lemma 3]). Damit umfaßt der nachfolgende Satz insbesondere ein Resultat von Jakimovski [8, Theorem 1].

SATZ 3.4. *Gilt* (3.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0>0$, (2.1), (3.3) *und* (3.29), *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind,*

(3.30) $\liminf(\delta_n^{Ra}-\delta_m^{Ra})\geq 0$ *für* $P_n/P_m\to 1$

*und, falls die* $s_n$ *komplex sind,*

(3.31) $\lim(\delta_n^{Ra}-\delta_m^{Ra})=0$ *für* $P_n/P_m\to 1$

*eine* TB *vom* $J_p\to c$-*Typ.*

BEWEIS. Es genügt, den Fall (3.30) zu betrachten. Sei $J_p\text{-}\lim s_n=\sigma$. Wegen (3.29) ist dann auch $J_p\text{-}\lim\,(M_r s)_n=\sigma$, nach (2.2) also $J_p\text{-}\lim\,\delta_n^{Ra}=0$. Daraus ergibt sich mit (3.30) nach Lemma 3.1 sogar $\lim\delta_n^{Ra}=0$. Dies aber ist nach Satz 3.2 eine TB vom $J_p\to c$-Typ, womit $\lim s_n=\sigma$ gezeigt ist.

Für $R_n:=P_n$ sind die Bedingungen (3.30) und (3.31) auch notwendig für die Konvergenz von $s$.

Setzen wir für die Folge $\{r_n\}$

(3.32) $r_n>0$ für $n=0,1,\ldots$

voraus, so lassen sich weitere TBn vom $J_p\to c$-Typ angeben:

SATZ 3.5. *Gilt (3.1) und ist $\{r_n\}$ eine Folge positiver Zahlen mit (2.1) und (3.3), so ist, falls die $s_n$ reell sind, jede der Bedingungen*

(3.33) $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{1-\rho} R_{\nu-1}^{\rho}(|a_\nu|-a_\nu)^\rho = O(R_n)$ *für ein* $\rho>1$,

(3.34) $R_n a_n = O_L(r_n)$,

(3.35) $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{1-\rho} R_{n-1}^{\rho-1}(|a_n|-a_n)^\rho < \infty$ *für ein* $\rho>1$

*und, falls die $s_n$ komplex sind, jede der Bedingungen*

(3.36) $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{1-\rho} R_{\nu-1}^{\rho}|a_\nu|^\rho = O(R_n)$ *für ein* $\rho>1$,

(3.37) $R_n a_n = O(r_n)$,

(3.38) $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{1-\rho} R_{n-1}^{\rho-1}|a_n|^\rho < \infty$ *für ein* $\rho>1$

*eine* TB *vom* $J_p \to c$*-Typ.*

BEWEIS. Es genügt, die reellen Fälle zu betrachten. (3.3) $\wedge$ (3.33) $\Longrightarrow$(3.7): Es sei $\rho>1$, und $\lambda>1$ sei definiert durch $\rho^{-1}+\lambda^{-1}=1$. Damit folgt aus (3.33) nach der Hölderschen Ungleichung zunächst

$$d_n^{Ra} \leqq R_n^{-1}\{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{1-\rho} R_{\nu-1}^{\rho}(|a_\nu|-a_\nu)^\rho\}^{1/\rho}\{\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{(\rho-1)\lambda/\rho}\}^{1/\lambda} = R_n^{-1} O(R_n^{1/\rho}) R_n^{1/\lambda}$$
$$=O(1),$$

und weiter für $n>m$ in ähnlicher Weise

$$d_n^{Ra} - d_m^{Ra} = (R_m - R_n) R_n^{-1} R_m^{-1} \sum_{\nu=1}^{m} R_{\nu-1}(|a_\nu|-a_\nu) + R_n^{-1} \sum_{\nu=m+1}^{n} R_{\nu-1}(|a_\nu|-a_\nu),$$

für $P_n/P_m \to 1$ wegen (3.3) also

$$d_n^{Ra} - d_m^{Ra} = o(1)\ O(1) + R_n^{-1} O(R_n^{1/\rho})(R_n - R_m)^{1/\lambda} = o(1).$$

(3.34)$\Longrightarrow$(3.33): Ist $K>0$ mit $R_n a_n \geq -K r_n$, so gilt nach (3.15) für die $a_n$ mit $a_n<0$, und nur solche $a_n$ beeinflussen (3.33), $|a_n|-a_n \leq 2K r_n/R_n$, also

$$\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu^{1-\rho} R_{\nu-1}^{\rho}(|a_\nu|-a_\nu)^\rho \leq 2^\rho K^\rho R_n \text{ für jedes } \rho>1.$$

Auch (3.35)impliziert (3.33). Ähnlich wie Fejér [1] kann man jedoch zeigen, daß (3.35) sogar stärker ist als $d_n^{Ra} \to 0$.

Die zu (3.34) und (3.37) gehörenden Teile von Satz 3.5 finden sich für $R_n := P_n$ schon in [30, Satz 4.1]. Der dortige Beweis zeigt, daß man bei diesen TBn auf (3.32) verzichten kann, wenn man (3.34) und (3.37) als $R_n a_n \geq -K r_n$ bzw. $R_n|a_n| \leq K r_n$ mit einem $K>0$ interpretiert und direkt auf Lemma 3.1 zurückführt.

Für speziellere Klassen von $J_p$-Verfahren treten (3.34) und (3.37) mit $R_n := P_n$ als TBn vom $J_p \to c$-Typ bei Jakimovski/Tietz [9, Theorems 5.3, 5.4, 5.4*] und Tietz/Trautner [32, Satz 4.4] auf. Für noch speziellere Klassen, mit $o$ statt $O$ und $R_n := P_n$, findet sich (3.37) schon bei Ishiguro [6], [7] und Štěpaněk [23, Seite 257]. Mit $o$ statt $O$ und $R_n := P_n$ ist (3.37) jedoch, wie auch (3.38), nach Mikhalin [18, Satz 2] unter schwächerer Voraussetzung als (3.1) eine TB vom $J_p \to c$-Typ. Beispiele zu (3.34) für $A_\alpha$ und $L$ finden sich bei Rangachari/Sitaraman [20, Theorems I(A) und I(L)] und für $L_p$ bei Phillips [19, Corollary], zu (3.37) für $L$ auch bei Kokhanovskii [11, Korollar 1]. Die im Vergleich zu (3.36) stärkere Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu^{1-\rho} R_\nu^\rho |a_\nu|^\rho = o(R_n), \tag{3.39}$$

bei der auch noch $\rho=1$ zulässig ist, geht für $R_n := P_{n+1}$ und eine speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren auf Štěpaněk [23, Corollary 1] zurück.

Wenden wir Satz 3.5 auf $A_1$ an, so erhalten wir, entsprechend der Begründung von Korollar 3.3, jetzt das

KOROLLAR 3.6. *Ist* $\{r_n\}$ *eine Folge positiver Zahlen mit* (2.1) *und* (3.20), *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen* (3.33) *bis* (3.35) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind, jede der Bedingungen* (3.36) *bis* (3.38) *eine* TB *vom* $A_1 \to c$*-Typ.*

Mit $R_n := n+1$ ist (3.33) die TB vom $A_1 \to c$-Typ (1.5) von Szász aus Satz SRJ, stammt (3.34) von Hardy/Littlewood [3, Theorem 11], findet sich (3.35) bei Szász [25, Theorem V] und (3.36) bei Hardy/Littlewood [5, Seite 283] sowie Szász [24, Satz I], und liefert (3.37) den bekannten Satz von Littlewood [15]. Bei gleichem $R_n$ und mit $o$ statt $O$ ist (3.37) die "erste" Bedingung von Tauber [27] und ergibt (3.38) ein weiteres Resultat von Hardy/Littlewood [4, Theorem A] und Szász [24, Seite 259].

## 4. Tauber-Bedingungen vom $J_p \to M_p$-Typ.

Jede der TBn vom $J_p \to c$-Typ aus Nr. 3 ist, unter den dortigen Voraussetzungen, wegen der Permanenz von $M_p$ natürlich eine TB vom $J_p \to M_p$-Typ. Einige dieser TBn lassen sich jedoch abschwächen, und es treten neue TBn vom $J_p \to M_p$-Typ auf.

LEMMA 4.1 ([30, Satz 3.7]). *Gilt* (3.1), *so ist*

(4.1) $\quad \liminf(s_n - s_m) > -\infty$ *für* $P_n/P_m \to 1$

*eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ.*

SATZ 4.2. *Gilt* (3.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Satz* 3.2, *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen*

(4.2) $\quad \liminf(R_n\delta_n^{Ra} - R_m\delta_m^{Ra})/R_n > -\infty$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(4.3) $\quad \limsup(R_n d_n^{Ra} - R_m d_m^{Ra})/R_n < \infty$ *für* $P_n/P_m \to 1$,
(4.4) $\quad d_n^{Ra} = O(1)$

*eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ.*

BEWEIS. Um zu zeigen, daß (4.2) eine TB vom $J_p \to M_p$-Typ ist, genügt es nach Lemma 4.1, die Implikation (3.3)$\wedge$(4.2)$\Longrightarrow$(4.1) zu beweisen. Dies geschieht wie der Nachweis von (3.3)$\wedge$(3.4)$\Longrightarrow$(3.2) im Beweis von Satz 3.2. Weiter gilt (4.4)$\Longrightarrow$(4.3)$\Longrightarrow$(4.2), wobei man die letzte Implikation wie (3.6)$\Longrightarrow$(3.4) im Beweis von Satz 3.2 sieht.

Wenden wir Satz 4.2 auf $A_1$ an, so erhalten wir folgendes

KOROLLAR 4.3. *Ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Korollar* 3.3, *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen* (4.4),

(4.5) $\quad \liminf(R_n\delta_n^{Ra} - R_m\delta_m^{Ra})/R_n > -\infty$ *für* $n/m \to 1$,
(4.6) $\quad \limsup(R_n d_n^{Ra} - R_m d_m^{Ra})/R_n < \infty$ *für* $n/m \to 1$

*eine* TB *vom* $A_1 \to C_1$-*Typ.*

LEMMA 4.4. ([30, Satz 3.6]). *Gilt* $Q_{n+1}/Q_n \to 1$, $Q_{2n} = O(Q_n)$ *und*

(4.7) $\quad \liminf(t_n - t_m) > -\infty$ *für* $Q_n/Q_m \to 1$,

*so folgt aus*

(4.8) $\quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n t_n x^n / \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = O(1)$ *für* $x \to 1-$

*auch* $t_n = O(1)$.

HILFSSATZ 4.5. *Gilt* (3.1) *und*

(4.9) $\quad \delta_n = O_L(1)$,

*so folgt aus* $p_s(x)/p(x) = O(1)$ *für* $x \to 1-$ *stets* $s_n = O_L(1)$.

BEWEIS. Aus (3.1) folgt $P_{n+1}/P_n \to 1$ und daraus $Q_{n+1}/Q_n \to 1$ wegen

$$Q_{n+1}Q_n^{-1} = P_0 Q_n^{-1} + Q_n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu P_{\nu+1} P_\nu^{-1}$$

und der Permanenz von $M_P$. Aus (3.1) folgt nach Stadtmüller/Trautner [22] auch $P_{2n}/P_n=O(1)$, und damit $Q_{2n}/Q_n=O(1)$. Ist nämlich $K>0$ mit $P_{2n}\leq KP_n$, so ergibt sich

$$Q_{2n}Q_n^{-1}=Q_n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}P_{2\nu}+Q_n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}P_{2\nu-1}\leq 2Q_n^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}P_{2\nu}\leq 2K.$$

Weiter folgt aus (4.9) die Existenz einer Konstanten $L>0$ mit $t_n-t_m\geq -L(P_n/P_m-1)$ für alle $n\geq m\geq 0$ (vgl. Mikhalin [17, Beweis von Satz 3]), also gilt (4.7), denn $Q_n/Q_m\to 1$ impliziert $n/m\to 1$ und damit $P_n/P_m\to 1$ wegen (3.1). Nun ist $p_s(x)/p(x)=O(1)$ für $x\to 1-$ äquivalent zu (4.8). Damit folgt $t_n=O(1)$ aus Lemma 4.4, also wegen (4.9) schließlich $s_n=O_L(1)$.

Für eine speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren wurde Hilfssatz 4.5 von Mikhalin [17, Satz 3], für $A_1$ mit

(4.10) $\quad \delta_n=O(1)$

statt (4.9) und $s_n=O(1)$ statt $s_n=O_L(1)$ von Szász [24, Satz 1] bewiesen.

SATZ 4.6. *Gilt* (3.1), *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind,* (4.9) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind,* (4.10) *eine* TB *vom* $J_p\to M_p$-*Typ.*

BEWEIS. Es genügt, den Fall (4.9) zu betrachten. Nach Hilfssatz 4.5 folgt aus $J_p$-lim $s_n=\sigma$ stets $s_n=O_L(1)$, womit sich nach Tietz/Trautner [32, Korollar 4.2] dann $M_p$-lim $s_n=\sigma$ ergibt.

Mit (4.9) wurde Satz 4.6 für $A_1$ von Szász [24, Satz 2], [25, Theorem II], für $L$ von Kwee [12, Theorem 5] und für eine spezielle Klasse von $J_p$-Verfahren von Mikhalin [17, Satz 3] bewiesen.

Keine der Bedingungen (4.9) und (4.10) ist eine TB vom $J_p\to c$-Typ. Dies folgt aus [29, Satz 2.1], da jedes $J_p$ eine beschränkte divergente Folge limitiert. Für $A_1$ fanden dies schon Hardy/Littlewood [5, Seite 284] und Szász [24, Seite 255].

LEMMA 4.7 ([30, Satz 5.1]). *Gilt*

(4.11) $\quad Q_n/Q_m\to 1$ *für* $n/m\to 1$,

*so ist*

(4.12) $\quad \lim\inf(t_n-t_m)\geq 0$ *für* $n/m\to 1$

*eine* TB *vom* $J_p\to M_p$-*Typ.*

SATZ 4.8. *Gilt* (3.1) *oder wenigstens* (4.11), *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind,* (4.13) $np_n\delta_n = O_L(P_n)$

*und, falls die* $s_n$ *komplex sind,*

(4.14) $np_n\delta_n = O(P_n)$

*eine* TB *vom* $J_p \to M_p$*-Typ.*

BEWEIS. Nach [30, Nr. 5] wind (4.11) durch (3.1) impliziert. Ferner genügt es, den Fall (4.13) zu betrachten. Aus (4.13) folgt die Existenz einer Konstanten $K>0$ mit $t_n - t_m \geq -K \ln(n/m)$ für alle $n>m>0$ (vgl. Mikhalin [17, Beweis von Satz 3]). Damit ergibt sich (4.12), nach Lemma 4.7 also die Behauptung.

Für $A_1$ sind (4.13) und (4.14) äquivalent zu (4.9) und(4.10). Mit (4.13) wurde Satz 4.8 für eine speziellere Klasse von $J_p$-Verfahren von Mikhalin [17, Satz 3], mit (4.14) für $L$ von Kokhanovskii [11, Satz 3] und für $L_\alpha$ von Teslenko [28, Satz 3] bewiesen.

Wie zu Satz 4.6 überlegt man sich, daß zumindest im Falle $np_n = O(P_n)$ keine der Bedingungen (4.13) und (4.14) eine TB vom $J_p \to c$-Typ ist. In [31, Theorem 1] wird gezeigt, daß man unter der Voraussetzung (3.1) in Satz 4.8 stets $\delta_n$ durch $s_n$ ersetzen darf.

Aus $J_p$-lim $s_n = \sigma$ folgt $J_P$-lim $t_n = \sigma$. Damit ergeben sich aus Satz 3.2, Korollar 3.3, Satz 3.4, Satz 3.5 und Korollar 3.6 die folgenden Resultate.

SATZ 4.9. *Gilt* (4.11) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0>0$, (2.1) *und*

(4.15) $R_n/R_m \to 1$ *für* $Q_n/Q_m \to 1$,

*so erhält man aus jeder der* TBn *vom* $J_p \to c$*-Typ* (3.4) bis (3.14)eine TB *vom* $J_p \to M_p$*-Typ, wenn man dort* $\{\delta_n^{Ra}\}$ *durch* $\{\delta_n^{Rb}\}$, $\{\vartheta_n^{Ra}\}$ *durch* $\{\vartheta_n^{Rb}\}$, $\{d_n^{Ra}\}$ *durch* $\{d_n^{Rb}\}$ *und* $\{P_n\}$ *durch* $\{Q_n\}$ *ersetzt.*

KOROLLAR 4.10. *Ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Korollar* 3.3, *so erhält man aus jeder der* TBn *vom* $A_1 \to c$*-Typ* (3.8), (3.11), (3.14) *und* (3.21) *bis* (3.28) *eine* TB *vom* $A_1 \to C_1$*-Typ, wenn man dort* $\{\delta_n^{Ra}\}$ *durch* $\{\delta_n^{Rb}\}$, $\{\vartheta_n^{Ra}\}$ *durch* $\{\vartheta_n^{Rb}\}$ *und* $\{d_n^{Ra}\}$ *durch* $\{d_n^{Rb}\}$ *ersetzt, wobei hier* $b_n := (C_1 s)_n - (C_1 s)_{n-1}$ *ist.*

Als weitere Anwendung von Satz 4.9 erhalten wir

SATZ 4.11. *Gilt* (3.1), *so ist*

(4.16) $M_p$-lim $\delta_n$ *existiert*

*eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ.*

BEWEIS. Aus (3.1) folgt (4.11), und es gilt (4.15) mit $R_n := P_n$ (vgl. [30, Nr. 5]). Also ist $\{\delta_n^{Pb}\} \in c$ nach Satz 4.9 eine TB vom $J_p \to M_p$-Typ. Wegen $\delta_n^{Pb} = t_n - (M_p t)_n = [M_p(s-t)]_n = (M_p \delta)_n$ folgt daraus die Behauptung.

KOROLLAR 4.12. *Gilt* (3.1), *so ist*

$$(4.17) \qquad \{P_n^{-2} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu P_\nu \delta_\nu\} \in c$$

*eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ.*

BEWEIS. Setzen wir $x_n := P_n^{-2} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu P_\nu \delta_\nu$, so ist

$$p_n \delta_n = P_n x_n - P_{n-1}^2 P_n^{-1} x_{n-1} = (P_n x_n - P_{n-1} x_{n-1}) + P_{n-1} P_n^{-1} p_n x_{n-1}.$$

Daraus ergibt sich

$$(M_p \delta)_n = P_n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \delta_\nu = x_n + P_n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} P_{\nu-1} P_\nu^{-1} p_\nu x_{\nu-1}$$

und somit (4.16) wegen $\{x_n\} \in c$.

Der Spezialfall $J_p := L$, $M_p := l$ von Korollar 4.12 verallgemeinert ein Resultat von Kwee [12, Theorem 3].

SATZ 4.13. *Gilt* (4.11) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0 > 0$, (2.1), (4.15) *und*

$$(4.18) \qquad J_p\text{-}\lim s_n = \sigma \Longrightarrow J_p\text{-}\lim (M_r s)_n = \sigma,$$

*so erhält man aus jeder der* TBn *vom* $J_p \to c$-*Typ* (3.30) *und* (3.31) *eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ, wenn man dort* $\{a_n\}$ *durch* $\{b_n\}$ *und* $\{P_n\}$ *durch* $\{Q_n\}$ *ersetzt.*

SATZ 4.14. *Gilt* (4.11) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge positiver Zahlen mit* (2.1) *und* (4.15), *so erhält man aus jeder der* TBn *vom* $J_p \to c$-*Typ* (3.33) *bis* (3.38) *eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-*Typ, wenn man dort* $\{a_n\}$ *durch* $\{b_n\}$ *ersetzt.*

KOROLLAR 4.15. *Ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Korollar* 3.6, *so erhält man aus jeder der* TBn *vom* $A_1 \to c$-*Typ* (3.33) *bis* (3.38) *eine* TB *vom* $A_1 \to C_1$-*Typ, wenn man dort* $\{a_n\}$ *durch* $\{b_n\}$ *ersetzt, wobei hier* $b_n := (C_1 s)_n - (C_1 s)_{n-1}$ *ist.*

Es sei noch angefügt, daß $(C_1 s)_n - (C_1 s)_{n-1} = \delta_n / n$ für $n > 0$ gilt.

## 5. Tauber-Bedingungen vom $\mathbf{M_p \to c}$-Typ.

Jede der TBn vom $J_p \to c$-Typ aus Nr. 3 ist, unter den dortigen Voraussetzungen, wegen $M_p$-lim $s_n = \sigma \Longrightarrow J_p$-lim $s_n = \sigma$ natürlich eine TB vom $M_p \to c$-Typ. Alle jedoch sind auch unter schächeren Voraussetzungen TBn vom $M_p \to c$-Typ, und es treten neue TBn vom $M_p \to c$-Typ auf.

LEMMA 5.1 ([30, Korollar 3.2]). *Gilt*

$$P_{n+1}/P_n \to 1, \tag{5.1}$$

*so ist* (3.2) *eine* TB *vom* $M_p \to c$*-Typ.*

SATZ 5.2. *Gilt* (5.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Satz* 3.2, *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen* (3.4) *bis* (3.8) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind, jede der Bedingungen* (3.9) *bis* (3.14) *eine* TB *vom* $M_p \to c$*-Typ.*

BEWEIS. Wie bei Satz 3.2. Man hat nur zu beachten, daß (3.2) nach Lemma 5.1 unter der Voraussetzung (5.1) eine TB vom $M_p \to c$-Typ ist.

LEMMA 5.3 ([30, Korollar 3.4]). *Gilt* (3.1), *so ist*

$$\liminf (s_n - s_m) \geq 0 \ \textit{für}\ n/m \to 1 \tag{5.2}$$

*eine* TB *vom* $M_p \to c$*-Typ.*

SATZ 5.4. *Gilt* (3.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Korollar* 3.3, *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen* (3.8), (3.21), (3.23), (3.24) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind, jede der Bedingungen* (3.11), (3.14), (3.25), (3.27), (3.28) *eine* TB *vom* $M_p \to c$*-Typ.*

BEWEIS. Wie bei Satz 3.2. Man hat nur zu beachten, daß statt (3.2) nach Lemma 5.3 unter der Voraussetzung (3.1) sogar (5.2) eine TB vom $M_p \to c$-Typ ist.

Die Angabe der im Vergleich zu Korollar 3.3 fehlenden Bedingungen (3.22) und (3.26) erübrigt sich in Satz 5.4, da beide im nachfolgenden Satz verallgemeinert werden.

SATZ 5.5. a) *Gilt* (5.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0 > 0$, (2.1), (3.3) *und*

$$M_p\text{-}\lim s_n = \sigma \Longrightarrow M_p\text{-}\lim\ (M_r s)_n = \sigma \tag{5.3}$$

*so ist, falls die* $s_n$ *reell sind,* (3.30) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind,* (3.31) *eine* TB *vom* $M_p \to c$*-Typ.*

b) *Gilt* (3.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge nichtnegativer Zahlen mit* $r_0>0$, (2.1), (3.20) *und* (5.3), *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind,*

(5.4) $\qquad \liminf(\delta_n^{Ra}-\delta_m^{Ra})\geq 0$ *für* $n/m\to 1$

*und, falls die* $s_n$ *komplex sind,*

(5.5) $\qquad \lim(\delta_n^{Ra}-\delta_m^{Ra})=0$ *für* $n/m\to 1$

*eine* TB *vom* $M_p\to c$*-Typ.*

BEWEIS. Es genügt, die reellen Fälle zu betrachten. Sei $M_p$-lim $s_n=\sigma$. Dann ist nach (5.3) auch $M_p$-lim $(M_r s)_n=\sigma$, nach (2.2) also $M_p$-lim $\delta_n^{Ra}=0$. Hieraus ergibt sich mit (3.30) und Lemma 5.1 bzw. mit (5.4) und Lemma 5.3 sogar lim $\delta_n^{Ra}=0$. Dies aber ist im Falle a) nach Satz 5.2 und im Falle b) nach Satz 5.4 eine TB vom $M_p\to c$-Typ, womit lim $s_n=\sigma$ gezeigt ist.

Die Bedingung (5.3) ist zum Beispiel erfüllt, wenn $M_p$-lim $s_n=\sigma$ stets $M_r$-lim $s_n=\sigma$ impliziert, insbesondere also für $r_n:=p_n$.

SATZ 5.6. *Gilt* (5.1) *und ist* $\{r_n\}$ *eine Folge wie in Satz* 3.5, *so ist, falls die* $s_n$ *reell sind, jede der Bedingungen* (3.33) *bis* (3.35) *und, falls die* $s_n$ *komplex sind, jede der Bedingungen* (3.36) *bis* (3.38) *eine* TB *vom* $M_p\to c$*-Typ.*

BEWEIS. Wie bei Satz 3.5, jedoch unter Verwendung von Satz 5.2 statt Satz 3.2.

Für $C_1$ und $r_n:=1$ findet sich die TB vom $C_1\to c$-Typ (3.33) bei Szász [25, Theorem III], (3.34) bei Landau [13] (vgl. Szász [24, Seite 255]), (3.36) bei Hardy/Littlewood [5, Lemma $\delta$] und Szász [24, Satz 3] sowie (3.37) bei Hardy [2] und (3.38) für $\rho=2$ bei Fejér [1].

**Literatur**

[1] L. FEJÉR, Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene. Schwarz-Festschr. (1914) 42-53. Auch L. Fejér, Gesammelte Arbeiten I, 813-823. Basel: Birkhäuser Verlag 1970.

[2] G. H. HARDY, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910) 301-320.

[3] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proc. London Math. Soc. (2) 13 (1914) 174-191.

[4] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Some theorems concerning Dirichlet's series. Messenger of Math. (2) 43 (1914) 134-147.

[5] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, Notes on the theory of series (IV): On the strong summability of Fourier series. Proc. London Math. Soc. (2) 26 (1927) 273-286.
[6] K. ISHIGURO, A Tauberian theorem for $(J, p_n)$ summability. Proc. Japan Acad. 40 (1964) 807-812.
[7] K. ISHIGURO, Two Tauberian theorems for $(J, p_n)$ summability. Proc. Japan Acad. 41 (1965) 40-45.
[8] A. JAKIMOVSKI, On a Tauberian theorem by O. Szász. Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954) 67-70.
[9] A. JAKIMOVSKI and H. TIETZ, Regularly varying functions and power series methods. J. Math. Anal. Appl. 73 (1980) 65—84. Errata 95 (1983) 597-598.
[10] B. L. KAUFMAN, Theorems of Tauberian type for logarithmic methods of summation (Russisch). Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 1967, no. 1(56), 57-62.
[11] A. P. KOKHANOVSKII, Tauberian theorems for semicontinuous logarithmic methods of summation of series (Russisch). Ukrain. Mat. Zh. 26 (1974) 740-748. English translation: Ukrain. Math. J. 26 (1974) 607-613.
[12] B. KWEE, Some Tauberian theorems for the logarithmic method of summability. Canad. J. Math. 20 (1968) 1324-1331.
[13] E. LANDAU, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace mat.-fiz 21 (1910) 91-117.
[14] E. LANDAU und D. GAIER, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Dritte, erweiterte Auflage, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 1986.
[15] J. E. LITTLEWOOD, The converse of Abel's theorem on power series. Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910) 434-448.
[16] W. MEYER-KÖNIG und H. TIETZ, Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie. Arch. Math. (Brno) 5 (1969) 177-186.
[17] G. A. MIKHALIN, Theorems of Tauberian type for $(J, p_n)$ summation methods (Russisch). Ukrain. Mat. Zh. 29 (1977) 763-770. English translation: Ukrain. Math. J. 29 (1977) 564-569.
[18] G. A. MIKHALIN, Generalized Tauberian theorems for a class of $(J, p_n)$ summation methods (Russisch). Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 1980, no. 4 (215), 61-68. English translation: Soviet Math. (Iz. VUZ) 24, no. 4 (1980) 69-76.
[19] R. PHILLIPS, A Tauberian theorem for a scale of logarithmic methods of summation. Canad. J. Math. 25 (1973) 897-902.
[20] M. S. RANGACHARI and Y. SITARAMAN, Tauberian theorems for logarithmic summability (L). Tôhoku Math. J. (2) 16 (1964) 257-269. Correction 17 (1965) 443.
[21] A. RÉNYI, On a Tauberian theorem of O. Szász. Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 11 (1946) 119-123.
[22] U. STADTMÜLLER and R. TRAUTNER, Tauberian theorems for Laplace transforms. J. reine angew. Math. 311/312 (1979) 283-290.
[23] F. ŠTĚPÁNEK, A Tauber's theorem for $(J, p_n)$ summability. Monatsh. Math. 70 (1966) 256-260.
[24] O. SZÁSZ, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen. J. London Math. Soc. 3 (1928) 254-262.

[25] O. SZÁSZ, Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series. Duke Math. J. 1 (1935) 105-111.

[26] O. SZÁSZ, On a Tauberian theorem for Abel summability. Pacific J. Math. 1 (1951) 117-125.

[27] A. TAUBER, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatsh. Math. 8 (1897) 273-277.

[28] L. S. TESLENKO, Theorems of Tauberian type for a generalized semicontinuous logarithmic method of summability of series (Russisch). Approximation methods of mathematical analysis. Kiev. Gos. Ped. Inst., Kiev 1976, 108-119.

[29] H. TIETZ, Negative Resultate über Tauber-Bedingungen. Monatsh. Math. 75 (1971) 69-78.

[30] H. TIETZ, Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren. Acta Sci. Math. (Szeged) 54 (1990), 355-365.

[31] H. TIETZ, Tauberian theorems of $J_p \to M_p$-type. Math. J. Okayama Univ. 31 (1989) 221-225.

[32] H. TIETZ und R. TRAUTNER, Tauber-Sätze für Potenzreihenverfahren. Arch. Math. (Basel) 50 (1988) 164-174.

[33] K. ZELLER und W. BEEKMANN, Theorie der Limitierungsverfahren. Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag 1970.

Universität Stuttgart
Mathematisches Institut A
D 7000 Stuttgart 80
Bundesrepublik Deutschland