Michigan Math. J. 55 (2007)

Sur le Sous-Groupe de Décomposition d'une Courbe Irrationnelle dans le Groupe de Cremona du Plan

Ivan Pan

A la mémoire de Felice Ronga

1. Introduction

On désigne par $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le plan projectif sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$ le groupe des transformations de Cremona sur le plan projectif et $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible non rationnelle; notons $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ *le sous-groupe de décomposition* de C dans $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C := \{F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2) : F(C) = C\};$$

cette notion a été introduite par M. H. Gizatullin, dans un contexte général, dans [Gi] (comme Gizatullin explique dans l'Exemple 1 de cet article, cette terminologie est inspirée de la théorie de Galois; voir [Z, Chap. 5, Sec. 10]). On dira que F *stabilise* C si $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$.

Observons que la classe d'équivalence birationnelle d'une courbe non rationnelle C est un invariant (par conjugaison) de tout élément de $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$. Le but de ce travail est de donner des renseignements sur le groupe $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ et ses éléments dans les cas où C est lisse ou elle est singulière avec normalisation de genre $>$ 1. Ce sujet a été traité classiquement, par exemple dans [C1; Coo, Book IV; Go; Cob, Chap. I]; des références précises seront données au fur et à mesure que l'on développera le travail.

Considérons les exemples suivants; on note PGL(3) le groupe des automorphismes du plan.

Exemple 1.1. Soit C une cubique lisse et $p, q, r \in C$ trois points non alignés. Si F est une transformation quadratique standard définie par le choix d'une base ordonnée du système linéaire des coniques par p, q, r, on constate que $F(C)$ est une cubique lisse isomorphe à C. Si $\varphi \in \mathrm{PGL}(3)$ est un isomorphisme linéaire qui envoie $F(C)$ sur C, on a $\varphi \circ F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$; une droite que relie deux points de $\{p, q, r\}$ est collapsée par celle-ci sur un point de C, donc les points-base de son inverse sont aussi sur C (cf. Théorème 1.3). On appelera une telle transformation une *transformation quadratique* C*-générique*. Observons qu'alors $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ est infini non dénombrable, car p, q, r sont arbitraires.

Received May 10, 2006. Revision received October 23, 2006.
Partiellement soutenu par le CNPq-Brasil.

Par exemple la transformation quadratique standard (voir aussi [Rep, p. 44])

$$Q = (yz : xz : xy)$$

est C-générique par rapport à toute cubique lisse d'équation

$$axyz + b(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Si $p \in \mathbb{P}^2$ on note $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ le sous-groupe de $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$ constitué des transformations qui envoient une droite générique par p dans une droite par p: c'est l'ensemble des *transformations de de Jonquières de centre* p. On a une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}(x)) \longrightarrow \mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow 1$$

où $\mathbb{C}(x)$ désigne le corps des fractions en x (voir [dJ] ou [H, Chap. VI, Sec. I]).

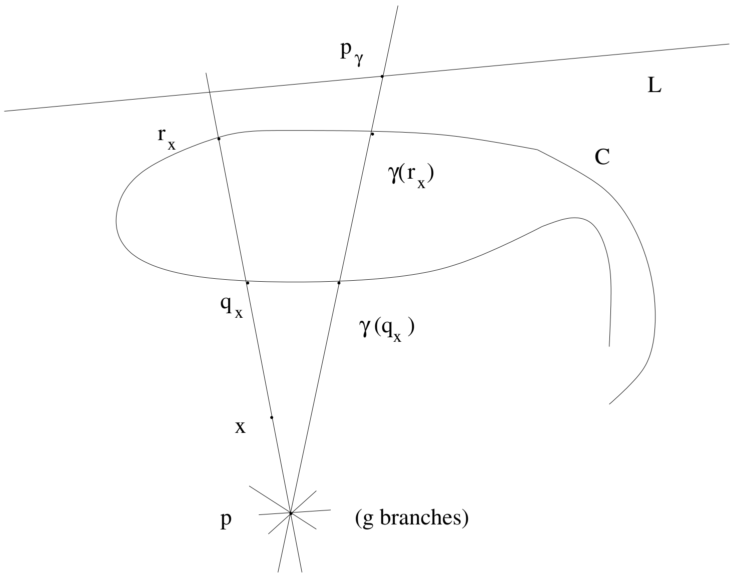

Figure 1

EXEMPLE 1.2 (cf. [Rep, p. 106]). Soit $C = C_{g+2} \subset \mathbb{P}^2$ une courbe de degré $g+2$ avec un point g-multiple ordinaire en $p \in \mathbb{P}^2$; notons C_0 sa normalisation, qui est une courbe hyperelliptique. Prenons $L \subset \mathbb{P}^2$ comme étant ou bien vide ou bien une courbe rationnelle L de degré ℓ passant par p avec multiplicité $\ell - 1$, et un automorphisme $\gamma \in \mathrm{Aut}(C_0)$; puisque γ stabilise le système linéaire g^1_2 de C_0 il opère sur l'ensemble des droites par p. On construit $J(\gamma) = J_{C,L}(\gamma) \in \mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ qui stabilise C de la manière suivante (voir Figure 1): si $x \in \mathbb{P}^2$ est générique, on note q_x, r_x les deux points d'intersection, autres que p, de C avec la droite xp et p_γ qui est ou bien p, lorsque $L = \emptyset$, ou bien le point d'intersection de $L \neq \emptyset$

avec la droite obtenue par l'opération de γ sur xp. L'image de x par $J = J(\gamma)$ est définie par

$$(x, p, q_x, r_x) = (J(x), p_\gamma, \gamma(q_x), \gamma(r_x)),$$

où (a, b, c, d) indique le birapport des points $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$.

On démontrera les théorèmes suivants (dont le deuxième n'est qu'une version stable du théorème de Noether–Castelnuovo: voir [Coo, Book IV, Chap. VI, Thm. 10]). Pour le premier comparer avec [Rep, p. 181]: d'après cette référence, Küper a montré dans [K] que si une transformation de Cremona F stabilise une courbe lisse de degré plus grand que 3 alors F est un automorphisme linéaire; le cas où les points de la courbe sont fixés est démontré dans [Coo, Book IV, Chap. VII, Sec. 3, Thm. 11]. D'après [Rep, p. 442] l'on devrait aussi comparer avec les références [J; G], mais nous ne les avons pas pu trouver.

Dans le théorème suivant B_F désigne l'ensemble des points-base de la transformation de Cremona $F : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ (voir Section 2).

THÉORÈME 1.3. *Soient $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible lisse non rationnelle et $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C \backslash \mathrm{PGL}(3)$. Alors $\deg C = 3$ et $B_F \subset C$.*

THÉORÈME 1.4. *Si C est une cubique lisse, alors $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ est engendré par des transformations quadratiques C-génériques.*

REMARQUE 1.5. Puisque le groupe stabilisateur $\mathrm{PGL}(3)_C$ de la cubique lisse C dans $\mathrm{PGL}(3)$ est fini, une seule transformation quadratique C-générique ne suffit pas pour engendrer $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ modulo $\mathrm{PGL}(3)_C$; en fait on en a besoin d'une infinité non dénombrable.

Dans [Gi, equation (1)] l'on considère, aussi dans un contexte plus général que le notre, le morphisme induit par restriction

$$\rho = \rho_C : \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C \to \mathrm{Bir}(C),$$

où $\mathrm{Bir}(C)$ est le groupe d'applications birationnelles de C; dans cette référence le noyau $\mathcal{I}(C)$ de ρ est appelé le *sous-groupe d'inertie* de la courbe C. Nous substituons C par sa normalisation C_0 et $\mathrm{Bir}(C)$ par $\mathrm{Aut}(C_0)$.

Pour ce qui concerne les involutions du groupe de Cremona, et plus généralement les transformations d'ordre premier, nous faisons référence à [Go, Chap. VIII, Sec. 4; BaBe; F; BeB]. Notons $D_1 \subseteq \mathbb{P}^2$ (resp. $D_2 \subseteq \mathbb{P}^2$) la courbe de points fixes d'une involution de Bertini (resp. Geiser); sans perte de généralité on supposera qu'elle est une courbe de degré 9 (resp. 6) avec 8 points triples (resp. 7 points doubles) ordinaires. De même, dénotons $D_3 \subseteq \mathbb{P}^2$ une sextique avec 8 points doubles ordinaires qui est l'ensemble de points fixes d'une transformation de Cremona d'ordre 3. Finalement, observons que la courbe C_{g+2} de l'Exemple 1.2 est bien la courbe de points fixes d'une involution de de Jonquières.

THÉORÈME 1.6. *Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible irrationnelle de genre > 1. On a*:

(a) *Le groupe d'inertie* $\mathcal{I}(C)$ *de* C *est ou bien cyclique d'ordre* ≤ 3 *ou bien il est isomorphe à un sous-groupe abélien d'ordre infini de* $\mathrm{Jon}(\mathbb{P}^2)$.
(b) *Supposons que* $\mathcal{I}(C) \neq \{\mathrm{id}\}$. *Alors la paire* $(\mathbb{P}^2, C)$ *est birationnellement équivalente à*:
  (b1) $(\mathbb{P}^2, C_{g+2})$ *lorsque* $|\mathcal{I}(C)| = \infty$;
  (b2) $(\mathbb{P}^2, D_1)$ *ou* $(\mathbb{P}^2, D_2)$ *lorsque* $|\mathcal{I}(C)| = 2$;
  (b3) $(\mathbb{P}^2, D_3)$ *lorsque* $|\mathcal{I}(C)| = 3$.

Dans les deux théorèmes plus bas on donne des renseignements supplementaires sur les cas (b1) et (b2) du Théorème 1.6. Pour le premier théorème on garde les notations de l'Exemple 1.2.

THÉORÈME 1.7. *Soit* $C = C_{g+2}$ *comme dans l'Exemple 1.2. Alors*:
(a) *On a* $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C \subset \mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$.
(b) *Tout élément de* $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ *est de la forme* $J(\gamma)$ *pour un* $\gamma \in \mathrm{Aut}(C_0)$; *en particulier on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(C) \longrightarrow \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C \xrightarrow{\rho_C} \mathrm{Aut}(C_0) \longrightarrow 1.$$

Désignons par Λ_1 et Λ_2 les systèmes linéaires des noniques planes avec 8 points triples ordinaires et des sextiques planes avec 7 points doubles ordinaires, respectivement, tous ces points en position générale. Les courbes D_1 et D_2, sont des courbes dans ces deux systèmes linéaires respectivement.

Notons $\pi_i : S_i \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en les points-base de Λ_i, pour $i = 1, 2$. Si $C_i \in \Lambda_i$ est irréductible, on désigne par $\widetilde{C}_i \subset S_i$ la transformée stricte de C_i par π_i.

La surface S_i est une surface de del Pezzo de degré i qui, comme l'on sait, est un revêtement double ramifié d'un cône quadratique lorsque $i = 1$ et d'un plan lorsque $i = 2$. On sait que les involutions de ces revêtements sont conjuguées, via π_i, aux involutions de Bertini et Geiser respectivement (voir [BaBe]). Dans cette conjugaison, la courbe $D_i \in \Lambda_i$ est l'image par π_i de la courbe de ramification du revêtement correspondant. En plus, les modèles lisses pour D_1 et D_2 sont des courbes non hyperelliptiques.

THÉORÈME 1.8. *Soit* $i \in \{1, 2\}$. *On a*:
(a) $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_{D_i} = \pi_i \,\mathrm{Aut}(S_i) \pi_i^{-1}$, $i = 1, 2$.
(b) $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_{C_i} \subset \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_{D_i}$ *si* $C_i \in \Lambda_i$ *est irréductible avec des singularités ordinaires.*

En particulier on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_{D_i} \xrightarrow{\rho_{D_i}} \mathrm{Aut}(\widetilde{D_i}) \longrightarrow 1, \quad i = 1, 2,$$

où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *est engendré par l'involution de Bertini ou Geiser suivant que* $i = 1$ *ou* 2.

EXEMPLES 1.9 (cf. le Théorème 1.6(a), (b) et [Gi, Ex. 3]). (a) Considérons la courbe plane hyperelliptique C d'équation affine

$$y^2 = h(x),$$

où h est un polynôme sans racines multiples de degré $2g+2$ pour $g = 1, 2, \ldots$. Considérons l'application birationnelle de $\mathbb{C}^2$ définie par

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{a(x)y + h(x)}{y + a(x)}\right),$$

avec $a(x)^2 - h(x) \not\equiv 0$ pour $a \in \mathbb{C}(x)$; pour $a(x)$ générique une telle transformation est d'ordre infini. Observons que le noyau de ρ_C est constitué par des transformations de ce type, ce qui démontre déjà la commutativité de ce groupe, anoncée dans le Théorème 1.6(a).

(b) Dans le Théorème 1.7, si on prend $p = (0 : 0 : 1)$, la courbe C_{g+2} a une équation de la forme

$$h_g(x, y)z^2 + h_{g+1}(x, y)z + h_{g+2}(x, y) = 0,$$

où $h_\ell \in \mathbb{C}[x, y]$ est un polynôme homogène de degré ℓ. Dans une carte affine $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{x,z}$ ou $\mathbb{C} = \mathbb{C}_{y,z}$, on peut décrire le groupe d'inertie $\mathcal{I}(C_{g+2})$ de manière samblable à comme on a fait dans (a).

On désigne par $g(C)$ le *genre* de la normalisation de C. Des Théorèmes 1.3 et 1.6 suivent, respectivement, les corollaires suivants (dont le deuxième est à comparer avec [Coo, Book IV, Chap. VII, Sec. 3, Thm. 16]).

COROLLAIRE 1.10. *Soit $\varphi\colon S \to \mathbb{P}^2$ un revêtement ramifié le long d'une courbe lisse irrationnelle C avec $g(C) > 1$; notons $C_0 \subset S$ la courbe des points de ramification de φ. Alors, toute application birationnelle $\phi\colon S \dashrightarrow S$ qui stabilise (génériquement) l'ensemble des fibres de φ est un isomorfisme qui stabilise C_0.*

Démonstration. Puisque ϕ invoie une fibre en position générale de φ sur une fibre de φ, elle induit une transformation de Cremona $F\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ qui stabilise C telle que $\varphi\phi = F\varphi$. Le Théorème 1.3 implique que F est un isomorphisme (linéaire) d'où l'assertion. □

COROLLAIRE 1.11. *Supposons que la paire $(\mathbb{P}^2, C)$ n'est pas birationnellement équivalente à $(\mathbb{P}^2, C_{g+2})$. Alors le sous-groupe de décomposition de C est conjugué à un groupe fini d'automorphismes d'une surface rationnelle, extension d'un groupe d'ordre ≤ 3 par un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(C_0)$. *En particulier, si C est générique il n'existe pas de transformation de Cremona nontriviale qui stabilise C.*

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de combiner le Théorème 1.6 avec le fait qu'un sous-groupe fini d'applications birationnelles d'une surface projective (lisse) est conjugué à un sous-groupe d'automorphismes d'une surface projective, ce qui a était démontré pas Ein et Fernex [FEi, Thm. 3.2]. La dernière assertion est une conséquence du fait que le seul automorphisme d'une courbe générique de genre plus grand que 1 est l'identité. □

REMERCIEMENTS. (a) Certains des résultats qui font partie de cet article étaient inclus dans un autre travail dont le rapporteur a trouvé des fautes. J'aimerais remercier cette personne d'abord pour répérer ces fautes, puis pour tous ses commentaires par rapport aux théorèmes (et notations), l'Exemple 4.3 et, finalement, pour les références [Bak; G; Cob; Gi; dJ; Rep], qu'il m'a signalé.

(b) J'aimerai aussi remercier Thierry Vust et Jérémy Blanc pour leurs precieux commentaires et suggestions.

2. Le Cas Lisse

Soit $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$. On note B_F l'ensemble des points-base de F; les points infinimum proches (ou voisins) sont considérés comme des points distincts de B_F. Si $B_F = \{p_1, \dots, p_r\}$, on note $m_i = m_{p_i}$ la multiplicité en p_i d'un élément générique du système linéaire qui définit F; on suppose $m_1 \geq \cdots \geq m_r$.

Notons $d := \deg F$ le degré de F, c'est-à-dire, le degré des polynômes, sans facteurs communs, qui définissent F. On rappelle d'une part les équations de Noether ([H, p. 5] ou [A-C, Sec. 2.5]):

(a) $\sum_{i=1}^r m_i = 3d - 3$,
(b) $\sum_{i=1}^r m_i^2 = d^2 - 1$,

et d'autre part l'inégalité de Noether ([H, p. 10] ou [A-C, Sec. 2.6])

(c) $m_1 + m_2 + m_3 \geq d + 1$.

Soient $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$ et $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible lisse non rationnelle stabilisée par F.

Démonstration du Théorème 1.3. Soit $L \subset \mathbb{P}^2$ une droite générique; notons $D := F^*L$ la transformée (inverse) totale de L par F. On peut supposer que L est transverse à C et que $L \cap C$ est contenue dans l'ouvert où F^{-1} est injective.

Alors, du fait que C est lisse on déduit

$$\begin{aligned} \deg D \cdot C &= d \deg C \\ &= \deg C + \sum_{p \in B_F \cap C} m_p. \end{aligned}$$

De l'équation (a) ci-dessus suit

$$\begin{aligned} \sum_{p \in B_F \cap C} m_p &\leq \sum_{p \in B_F} m_p \\ &= 3d - 3, \end{aligned}$$

avec l'égalité si et seulement si $B_F \subset C$. On en déduit l'inégalité équivalente

$$(d-1) \deg C \leq 3(d-1),$$

d'où suit l'assertion. □

Comme on a vu, $B_F \subset C$ implique que les conditions de contact pour une $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ sont très simples; le corollaire suivant explicite encore plus ce fait.

Prenons $p \in \mathbb{P}^2$, $p \in B_F$. Notons $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ une résolution minimale (locale) de F en p, c'est-à-dire une suite d'un nombre minimal d'éclatements commençant par p de sorte qu'il existe un voisinage ouvert U de p dans $\mathbb{P}^2$ tel que $F \circ \pi$ est régulière dans $\pi^{-1}(U)$; notons $G_p(F)$ le graphe (dual) des incidences dont les sommets $e_1, \ldots, e_s$ correspondent aux composantes irréductibles E_i, pour $i = 1, \ldots, s$, de $\pi^{-1}(p)$, respectivement.

COROLLAIRE 2.1. *Le graphe $G_p(F)$ est de la forme (linéaire):*

$$e_1 \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } e_s$$

où les auto-intersections sont -1 pour e_s, -2 pour les autres e_i.

Démonstration. Il suffit d'observer qu'après chaque éclatement au-dessus de p, la transformée stricte de C est transverse au diviseur exceptionnel correspondant. □

Soit C une cubique plane lisse et p, q, r trois points en position générale sur C (eventuellement infinimum proches sur C, c'est-à-dire, ou bien p, q des vrais points et $r \to p$ voisin générique de p, ou bien $r \to q$ voisin générique de q et $q \to p$ voisin générique de p). Notons $Q_{p,q,r} \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$ une transformation quadratique définie par le systéme linéaire des coniques passant par p, q et r; le lemme suivant, dont on omettra la preuve, généralise l'Exemple 1.1.

LEMME 2.2. *Il existe $\varphi \in \mathrm{PGL}(3)$ tel que $\varphi \circ Q_{p,q,r} \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$.*

Notons Q_1 et Q_2 les transformations quadratiques dans $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$ définies comme dans le lemme avec des conditions de points voisins.

LEMME 2.3. *Les transformations Q_1 et Q_2 sont compositions de transformations quadratiques C-génériques.*

Démonstration. Dans le cas $q, r \to p$ on choisit $Q_0 = Q_{p,q,r'}$ pour $r' \in C$ générique et dans le cas $r \to q \to p$ on fait de même avec $Q_0 = Q_{p,q',r'}$ pour $q', r' \in C$ génériques. Par l'Exemple 1.1, la courbe $Q_0(C)$ est une cubique lisse isomorphe à C. A partir de cette observation, on constate que la décomposition "classique" de Q_i, $i = 1, 2$, comme produit de transformations quadratiques standard (voir [A-C, Prop. 8.5.1 et Prop. 8.5.2]) se relativise au cas C-générique. □

Première Preuve du Théorème 1.4. Soit $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$. D'après le Théorème 1.3 et les Lemmes 2.2 et 2.3, il suffit de montrer, suivant une idée de Max Noether, que si m_1, m_2, et m_3 sont des multiplicités maximales comme dans l'inégalité de Noether et $Q_{p_1,p_2,p_3} \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$, alors

$$\deg F \circ Q^{-1}_{p_1,p_2,p_3} = 2 \deg F - (m_1 + m_2 + m_3),$$

et faire une récurrence sur $\deg F$; en général comme il a été remarqué par C. Segre, il se peut qu'il n'existe pas Q_{p_1,p_2,p_3}. Cepandant, dans notre contexte et grace au Corollaire 2.1, pour $p_1, p_2, p_3 \in B_F$, il existe une transformation quadratique $Q_{p_1,p_2,p_3} \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$.

La preuve suit de [A-M, Prop. 4.2.5]. □

Deuxième Preuve du Théorème 1.4. Soit $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$. D'après le théorème de Noether–Castelnuovo,

$$F = Q_1 \cdots Q_{\ell-1} Q_\ell$$

avec Q_i des transformations quadratiques génériques, c'est-à-dire dont les trois points-base sont distincts. La demonstration est par récurrence sur ℓ.

Si $\ell = 1$ la preuve suit du Théorème 1.3. Supposons $\ell > 1$.

D'après la preuve classique du théorème de Noether–Castelnuovo (essentiellement celle de Castelnuovo; voir [A-M, Sec. 8.3 et Sec. 8.4]) les points-base de Q_ℓ peuvent être choisis ou bien comme étant des points-base de F ou bien n'appartenant pas à un certain nombre fini de courbes rationnelles. Puisque $B_F \subset C$ (Théorème 1.3) on peut supposer $B_{Q_\ell} \subset C$. Si $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ est un automorphisme dont l'inverse envoie C sur sa transformée stricte (directe) via Q_ℓ, on en déduit que φQ_ℓ est une transformation quadratique C-générique et

$$F(\varphi Q_\ell)^{-1} = Q_1 \cdots (Q_{\ell-1}\varphi^{-1}),$$

d'où l'assertion. $\square$

3. Preliminaires pour le Cas Singulier

Pour ce paragraphe on s'est inspiré de [Go, Chap. VII]. Il est à comparer avec [So] et [VdV].

Soient X une surface lisse projective et $C \subset X$ une courbe irréductible dans X; on note $g(C)$ le genre de la normalisation de C. Considerons une résolution plongée des singularités de C

$$\pi : Y \to X;$$

dans le cas où C est lisse on peut prendre $\pi = \mathrm{id}_X$. Notons $\widetilde{C}$ la transformée inverse stricte de C par π.

Lorsque $h^0(\widetilde{C} + K_Y) > 1$, on définit le *système adjoint* de C, noté $\mathrm{Adj}(C)$, comme étant le système linéaire obtenu de $\pi_*|\widetilde{C} + K_Y|$ en supprimant les composantes fixes. Ce système linéaire ne dépend pas de la résolution choisie: en effet, si $\pi_i\colon Y_i \to X$ est une résolution plongée des singularités de C, pour $i = 1, 2$, on prend une résolution des points d'indétermination de l'application rationnelle $\pi_2^{-1}\pi_1\colon Y_1 \dashrightarrow Y_2$, disons $\sigma_1\colon Y \to Y_1$, et on note $\sigma_2 := \pi_2^{-1}\pi_1\sigma_1$. Alors $\pi_1\sigma_1 = \pi_2\sigma_2$ est aussi une résolution plongée des singularités de C. On en déduit que le système linèaire adjoint défini à l'aide de π_i ou $\pi_i\sigma_i$ est le même, pour $i = 1, 2$: il suit directement par récurrence sur le nombre de points-base de $\pi_2^{-1}\pi_1$.

Observons que lorsque $h^0(\widetilde{C} + K_Y) \leq 1$, par définition, le système adjoint n'existe pas; en général, on ne parlera de "système linéaire" que lorsque celui-ci contient au moins un pinceau (p. ex., un sous-système linéaire de dimension 1).

Du théorème de Riemann–Roch suit:

LEMME 3.1. *On a*

$$h^0(\widetilde{C} + K_Y) \geq g(C) + p_a(X), \tag{1}$$

avec égalité si et seulement si $h^1(-\widetilde{C}) = 0$. *En particulier, si X est rationnelle et* $g(C) > 1$ *le système* $\mathrm{Adj}(C)$ *existe.*

EXEMPLE 3.2. Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré d, avec des singularités $p_1, \dots, p_\ell$, de multiplicités $m_1, \dots, m_\ell \geq 2$ respectivement ($\ell \geq 0$). Supposons que $g(C) \geq 2$; observons qu'alors $d \geq 4$.

Si toutes les singularités $p_1, \dots, p_\ell$ sont ordinaires, une résolution plongée des singularités des C est obtenue en prenant pour $\pi : Y \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $p_1, \dots, p_\ell$ dans $\mathbb{P}^2$. Alors $\mathrm{Adj}(C)$ est le système linéaire

$$\pi_* \left| (d-3)L - \sum_{i=1}^{\ell} (m_i - 1) E_i \right|$$

dépourvu de ses composantes fixes, où L désigne l'image inverse par π d'une droite générale et E_i la courbe exceptionnelle au dessus de p_i.

EXEMPLE 3.3. (a) Soit $g \geq 2$. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe générale de degré $g+2$ avec un point singulier ordinaire p de multiplicité g (donc $g(C) = g$), un élément du système adjoint $\mathrm{Adj}(C)$ est une réunion de $g-1$ droites passant par p.

(b) Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une sextique générale avec 8 points doubles ordinaires, en position générale, alors $\mathrm{Adj}(C)$ est le pinceau des cubiques par ces 8 points.

(c) Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une sextique avec deux points triples ordinaires p et q, alors, $\pi_*|\widetilde{C} + K_Y|$ possède la droite pq comme composante fixe et $\mathrm{Adj}(C)$ est constitué des coniques par p, q. Une telle sextique peut être réalisée par projection d'une intersection complète d'une surface quadrique lisse avec une surface cubique, dans $\mathbb{P}^3$, à partir d'un point général de la quadrique.

(d) De manière analogue à ce qu'on a fait dans l'exemple (c) ci-dessus, mais en remplaçant la quadrique lisse par un cône quadratique, on obtient une sextique avec un point de multiplicité 3, disons p, et un point triple ordinaire qui est proche de celui-ci; notons $C \subset \mathbb{P}^2$ cette sextique. Le système $\pi_*|\widetilde{C} + K_Y|$ est constitué des cubiques avec un point double (cuspidal) et un point double au-dessus de celui-ci. Donc il contient une droite fixée, d'où suit que $\mathrm{Adj}(C)$ est le système des coniques de $\mathbb{P}^2$ par p avec tangente commune en ce point.

Soit $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ une application rationnelle de surfaces projectives lisses. Si $D \subset X_1$ est une courbe dont ses composantes irréductibles ne sont pas collapsées par φ, on note $\widetilde{\varphi}(D)$ la transformée directe stricte de D. Si X_2 est aussi une surface et $\mathcal{H}$ est un système linéaire sans composantes fixes, $\widetilde{\varphi}(\mathcal{H})$ est le plus petit système linéaire contenant les $\widetilde{\varphi}(D)$ pour $D \in \mathcal{H}$ générique.

La propriété fondamentale de $\mathrm{Adj}(C)$, vis-à-vis des applications que l'on veut faire aux transformations de Cremona, est la suivante:

THÉORÈME 3.4. *Soit* $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ *une application birationnelle entre des surfaces projectives* (*lisses*). *Si* $C \subset X_1$ *est une courbe irréductible qui n'est pas collapsée par* φ *et telle que* $\mathrm{Adj}(C)$ *existe, alors*

$$\widetilde{\varphi}(\mathrm{Adj}(C)) = \mathrm{Adj}(\widetilde{\varphi}(C)).$$

Démonstration. Considérons une résolution des points d'indéterminations de φ, c'est-à-dire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\sigma_2"] & \\ X_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & X_2 \end{tikzcd}$$

où σ_1, et donc σ_2, est un morphisme birationnel. Sans perte de géneralité on peut supposer que σ_1 résoud les singularités de C et donc σ_2 résoud celles de $\widetilde{\varphi}(C)$. Donc les images directes par σ_1 et σ_2 du système linéaire $|\widetilde{C} + K_Y|$, privées de leurs composantes fixes, sont $\mathrm{Adj}(C)$ et $\mathrm{Adj}(\widetilde{\varphi}(C))$ respectivement; d'où suit l'assertion. □

REMARQUE 3.5. Soit Λ un système linéaire de courbes sur $\mathbb{P}^2$; désignons par $\phi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^r = \Lambda^\vee$ l'application rationnelle associée. Soit $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)$. Alors F stabilise Λ si et seulement si ϕ est (génériquement) equivariante par F avec l'opération linéaire naturelle au but; c'est-à-dire, si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^r \arrow[r, "\hat{F}"] & \mathbb{P}^r \\ \mathbb{P}^2 \arrow[u, dashed, "\phi"] \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{P}^2 \arrow[u, dashed, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

où $\hat{F}$ est un automorphisme linéaire.

Le corollaire suivant redemontre la première partie du Théorème 1.3.

COROLLAIRE 3.6. *Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une curbe lisse de degré $d > 3$. Alors, toute transformation de Cremona qui stabilise C est un automorphisme.*

Démonstration. Soit $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_C$. Puisque C est lisse $\mathrm{Adj}(C) = |(d-3)L|$, où L désigne une droite dans $\mathbb{P}^2$. Ce système linéaire est stabilisé par F d'après le Théorème 3.4. Puisque $(d-3)L$ est très ample, l'assertion en suit (Remarque 3.5). □

REMARQUE 3.7. La définition de $\mathrm{Adj}(C)$ et la preuve du Théorème 3.4 fonctionnent aussi pour C une hypersurface de $\mathbb{P}^n$; on en déduit alors une version du corollaire precédent pour des hypersurfaces lisses de degré $> n$ dans $\mathbb{P}^n$.

4. Le Cas Singulier

Un théorème classique dû a G. Castelnuovo [C1] montre qu'une transformation de Cremona qui fixe les points d'une courbe irréductible de genre > 1 est ou bien d'ordre ≤ 4 ou bien elle est conjuguée à une transformation de de Jonquières. Dans [BPV, Thm. 1.5] on démontre une généralisation du théorème de Castelnuovo qui correspond essentiellement au resultat suivant:

Théorème 4.1. *Soit $M \neq \{\mathrm{id}\}$ un sous-groupe du groupe de Cremona de $\mathbb{P}^2$; supposons qu'il existe une courbe irréductible C de genre > 1 qui est laissée fixe points par points par tous les éléments de M. Alors ou bien M est cyclique d'ordre ≤ 3 ou bien M est conjugué à un sous-groupe abélian de $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ pour un $p \in \mathbb{P}^2$.*

Preuve du Théorème 1.6. Supposons $\mathcal{I}(C) \neq \{\mathrm{id}\}$. D'après le Théorème 4.1 le groupe d'inertie $\mathcal{I}(C)$ est ou bien cyclique d'ordre 2 ou 3 ou bien il est conjugué à un sous-groupe abélian de $\mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$, pour un $p \in \mathbb{P}^2$; dans le dernier cas, lorsque $|\mathcal{I}(C)| > 1$ la courbe C est à normalisation hyperelliptique. Le raisonnement de la preuve de [BaBe, Thm. 2.6] montre aussi que $(\mathbb{P}^2, C)$ est birationnellement équivalente à $(\mathbb{P}^2, C_{g+2})$ où $g = g(C)$ et les assertions (a) et (b1) suivent des Exemples 1.2 et 1.9(b) (comparer aussi avec [BPV, Lemme 3.1]). Pour finir la preuve, supposons que la normalisation de C n'est pas hyperelliptique; dans ce cas les assertions (b2) et (b3) suivent de [F, Thm. F] en tenant compte du fait que $\mathcal{I}(C_{g+2}) > 2$ (voir Exemples 1.2 et 1.9(b)). □

Remarque 4.2. Si on utilise la version classique du théorème de Castelnuovo [C1], lorsque $|\mathcal{I}(C)| > 4$, le raisonnement suivi dans la preuve ci-dessus fonctionne aussi et on obtient une preuve du Théorème 1.6, à l'ordre 4 près; l'assertion référente à la commutativité de $\mathcal{I}(C)$ se démontre à la main, après avoir explicité les éléments de ce groupe, comme suggéré dans l'Exemple 1.9.

Preuve du Théorème 1.7. Si F stabilise $C = C_{g+2}$, elle stabilise aussi le système adjoint $\mathrm{Adj}(C)$. Le résultat suit des Exemples 3.3(a), 1.2, et 1.9(b). □

Exemple 4.3. Soit C une sextique plane avec 8 points doubles ordinaires $p_1, \ldots, p_8$ (donc à normalisation hyperelliptique). Soit $q \in \mathbb{P}^2$ un point en position générale. Il existe une unique cubique plane (lisse) C_q passant par $p_1, \ldots, p_8, q$; on a

$$C \cap C_q = \{p_1, \ldots, p_8, q, q'\} \quad \text{avec} \quad q \neq q'.$$

L'application qui à q associe q' définit une involution de chaque courbe elliptique du pinceau constitué par celles qui passent par $p_1, \ldots, p_8$; on a donc une involution de Cremona $I : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ [C2] qui appartient au groupe de décomposition de C par construction. Observons que la paire $(\mathbb{P}^2, C)$ n'est pas birationnellement équivalente à $(\mathbb{P}^2, C_{g+2})$ pour $g = 2$, car le système adjoint de C est un pinceau de courbes elliptiques et celui de C_{g+2} est un pinceau de droites; donc $I \notin \mathrm{Jon}_p(\mathbb{P}^2)$ pour aucun $p \in \mathbb{P}^2$.

Preuve du Théorème 1.8. Soit $C_i \in \Lambda_i$ irréductible et à singularités ordinaires. Pour démontrer (a) et (b) il suffit de montrer que toute application birationnelle $\phi_i : S_i \dashrightarrow S_i$ qui stabilise $\widetilde{C_i}$ est un automorphisme, pour $i = 1, 2$, car tout automorphisme de S_i stabilise $\widetilde{D_i}$.

Pour ce faire, commençons par observer que, en tant que classe d'équivalence linéaire de diviseurs, une désingularisation plongée de C_i est

$$\widetilde{C_i} = \begin{cases} 6L - \sum_{k=1}^{7} 2E_k & \text{si } i = 2, \\ 9L - \sum_{k=1}^{8} 3E_k & \text{si } i = 1, \end{cases}$$

où L désigne l'image inverse par π_i d'une droite générale et les E_k les diviseurs exceptionnels de π_i $(i = 1, 2)$. Donc $\operatorname{Adj}(\widetilde{C_2}) = |-K_{S_2}|$ et $\operatorname{Adj}(\widetilde{C_1}) = |-2K_{S_1}|$.

D'après la théorie des surfaces de del Pezzo (voir [D]), ces deux systèmes linéaires définissent sur S_1 et S_2 des revêtements doubles: plus precisément, on a des morphismes de degré 2

$$\varphi_2 \colon S_2 \to \mathbb{P}^2, \qquad \varphi_1 \colon S_1 \to Q,$$

où Q est un cône quadratique dans $\mathbb{P}^3$, ramifiés le long d'une quartique lisse et d'une intersection complète de Q avec une surface cubique plus le sommet du cône, respectivement.

D'après le Théorème 3.4 toute transformation birationnelle $\phi_i \colon S_i \dashrightarrow S_i$ qui stabilise $\widetilde{C_i}$ stabilise $\operatorname{Adj}(\widetilde{C_i})$ et décend donc à un automorphisme, d'où suit l'assertion (Remarque 3.5). □

Pour finir, on considère encore trois exemples (cf. les Théorèmes 1.6(b) et 1.8).

EXEMPLE 4.4. Considérons une quartique $C \subset \mathbb{P}^2$, lisse et irréductible, d'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Un revêtement du plan le long de C, c'est-à-dire une surface de del Pezzo de degré 2, peut être réalisé dans un espace projectif pondéré $\mathbb{P}^3(1, 1, 1, 2)$, de coordonées homogènes x, y, z, w, comme étant la surface S_2 d'équation

$$w^2 = f(x, y, z).$$

Si $\gamma \colon C \to C$ est un automorphisme de la quartique, il se relève à un automorphisme de S_2 de deux manières:

$$(x : y : z : w) \mapsto (\gamma(x, y, z) : \pm w).$$

EXEMPLE 4.5. Soit C une courbe lisse de genre 4 avec modèle canonique sur un cône quadratique $Q \subset \mathbb{P}^3$ de sommet p. On va trouver une réalisation birationnelle plane de cette courbe: quitte à éclater p on peut substituer Q par une surface de Hirzebruch $\mathbb{F}_2$ avec une (-2)-section minimale correspondant au point p et la courbe C par une courbe, disons C'. Après effectuer une transformation élémentaire adéquate on peut substituer $\mathbb{F}_2$ par $\mathbb{F}_1$ et C' par une courbe C''. Finalement, si on contracte la (-1)-courbe de $\mathbb{F}_1$ on arrive à $\mathbb{P}^2$ avec une sextique D qui possède maintenant un point triple, disons q, avec une seule branche, et un point triple ordinaire au-dessus de celui-ci. On observe qu'un automorphisme de D provient d'un automorphisme affine qui fixe q.

Un exemple de courbe sextique $D = D_0$ comme ci-dessus, qui m'a été suggéré par F. Ronga, est celui de la courbe affine D_0 d'équation

$$(y - x^2)(y - \omega x^2)(y - \omega^2 x^2) + y^6 = y^3 - x^6 + y^6 = 0,$$

avec ω la racine cubique primitive de l'unité. On a

$$\mathrm{Aut}(D_0) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Les automorphismes de D_0 se relèvent à des automorphismes du revêtement de Q le long de C et p. Ceci permet de construire explicitement des automorphismes de la surface de del Pezzo S_1 correspondante, ce qui, d'après le Théorème 1.8, fournit un exemple de groupe de décomposition d'une certaine nonique plane avec 8 points triples.

Exemple 4.6. Considérons une sextique $D \subset \mathbb{P}^2$ comme dans l'exemple precédent, $q \in D$ son point triple. D'après l'Exemple 3.3(d) le système adjoint $\mathrm{Adj}(D)$ est le système des coniques à tangente fixe en un point. On en déduit que $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_D$ est constitué de transformations de de Jonquières, centrées en q, qui stabilisent D: en effet, une transformation $F \in \mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_D$ qui stabilise ces coniques doit forcément stabiliser les droites par le point q. Comme ces droites découpent sur D le système linéaire g_3^1 de sa normalisation $\widetilde{D}$, on en déduit $\mathrm{Cr}(\mathbb{P}^2)_D = \mathrm{Aut}(\widetilde{D})$.

Références

[A-C] M. Alberich-Carramiñana, *Geometry of the plane Cremona maps,* Lecture Notes in Math., 1769, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[BaBe] L. Bayle and A. Beauville, *Birational involutions of* $\mathbb{P}^2$, Asian J. Math. 4 (2000), 11–18.

[Be] A. Beauville, *p-elementary subgroups of the Cremona group,* J. Algebra (to appear).

[BeB] A. Beauville and J. Blanc, *On Cremona transformations of prime order,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 339 (2004), 257–259.

[BPV] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust, *Sur un théorème de Guido Castelnuovo,* preprint, 2006, www.mat.ufrgs.br/~pan/preprints.

[C1] G. Castelnuovo, *Sulle transformazioni cremoniane del piano che ammetono una curva fisse,* Rend. Accad. Lincei (1892); Memorie scelte, Bologne, Zanichelli (1937).

[C2] ———, *Sulla razionalità delle involuzione piane,* Math. Ann. 44 (1894), 125–154.

[Cob] A. B. Coble, *Algebraic geometry and theta functions,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 10, Amer. Math. Sci., Providence, RI, 1961.

[Com] A. Comessatti, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali del punto de vista reale,* Math. Ann. 73 (1912), 1–72.

[Coo] J. L. Coolidge, *A treatise on algebraic plane curves,* Dover, New York, 1959.

[D] M. Demazure, *Surfaces de Del Pezzo,* Séminaire sur les singularités des surfaces (Palaiseau, 1976–1977), Lecture Notes in Math., 777, pp. 23–69, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[F] T. de Fernex, *On planar Cremona maps of prime order,* Nagoya Math. J. 174 (2004), 1–28.

[FEi] T. de Fernex and L. Ein, *Resolution of indeterminacy of pairs,* Algebraic geometry (M. C. Beltrametti et al., eds.), pp. 165–177, de Gruyter, Berlin, 2002.

[G] G. Gherardelli, *Roma, Academia dei Lincei,* Rendiconti (6) 11 (1930), 173–179.

[Gi] M. H. Gizatullin, *The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry,* Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl', 1992), Aspects Math. E, 25, pp. 39–45, Vieweg, Braunschweig, 1994.

[Go] L. Godeaux, *Géométrie algébrique II, géométrie sur une courbe algébrique, géométrie algébrique du plan,* Masson & Cie, Paris (1950).

[H] H. Hudson, *Cremona transformations in the plane and the space,* Cambridge Univ. Press, 1927.

[dJ] de Jonquières, *De la transformation géométrique des figures planes, et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres,* Nouv. Ann. (2) 3 (1864), 97–111.

[J] B. Jonzon, *Über die Gruppen birationaler Transformationen der elliptischen und der hyperelliptischen Kurven in sich,* Appelbergs, Uppsala, 1930.

[Ka] S. Kantor, *Theorie der endligen Gruppen von eindeutigen transformationen in der Ebene,* Mayer & Müller, Berlin, 1895.

[K] C. Küpper, *Über das Vorkommen von linearen Scharen* $g_n^{(2)}$ *auf Curven* $\mathbf{n}^{\text{ter}}$ *Ordnung* C_p^n, *deren Geschlecht* p *grösser ist als* $p-1$, *das Maximalgeschlecht einer Raumcurve* $\mathbf{R}_{p_1}^n$, Prag. Ber. 18 (1892), 264–272.

[Rep] V. Snyder, A. Coble, A. Emch, S. Lefschetz, F. Sharp, and C. Sizam, *Selected topics in algebraic geometry,* Report of the Committe on rational transformations, Chelsea, New York, 1970.

[So] A. J. Sommese, *Hyperplane sections of projective surfaces I. The adjunction mapping,* Duke Math. J. 46 (1979), 377–401.

[VdV] A. Van de Ven, *On the 2-connectedness of very ample divisors on a surface,* Duke Math. J. 46 (1979), 403–407.

[W] A. Wiman, *Zur theorie der endlichen Gruppen von birationalen transformationen in der Ebene,* Math. Ann. 48 (1896), 195–240.

[Zar] O. Zariski, *Commutative algebra*, vol. 1, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1958.

Instituto de Matemática
UFRGS
Av. Bento Gonçalves 9500
91540-000 Porto Alegre, RS
Brazil

pan@mat.ufrgs.br