Michigan Math. J. 49 (2001)

Fibrés Affines

Aristide Tsemo

Introduction

On étudie les applications affines entre variétés affines, en particulier les fibrés affines: ce sont les applications affines surjectives. La classification des applications affines est envisageable si on suppose que les fibres sont au moins homéomorphes entre elles. C'est par exemple le cas si l'espace source de l'application est une variété affine compacte. Voici un exemple qui montre que la situation peut être beaucoup plus compliquée. Considérons une surjection de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^p$, sur chaque fibre de la surjection, enlevons un sous-ensemble, on obtient ainsi une application affine, telle que les structures topologiques de deux fibres distinctes peuvent être très différentes. Il est donc difficile d'aborder le problème de classification dans toute sa généralité, car on ne peut pas préciser les données à partir desquelles se fera la classification. Dans les cas que nous considérons, les fibres d'un fibré affine sont des variétés différentiables, deux à deux homéomorphes, dont les structures affines peuvent être différentes bien qu'elles aient la même holonomie linéaire.

Si le second groupe d'homotopie de la base d'un fibré affine à espace total compact est nul (c'est le cas si elle est complète), la suite exacte de Serre montre que le groupe fondamental de l'espace total $\pi_1(M)$, est une extension de celui de la base $\pi_1(B)$, par celui de la fibre $\pi_1(F)$.

Posons $\mathbb{R}^{m+l} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, et notons $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ le sous-groupe des automorphismes affines de $\mathbb{R}^{m+l}$ dont la partie linéaire fixe $\mathbb{R}^l$, et s la surjection canonique de $\mathbb{R}^{m+l}$ dans $\mathbb{R}^m$. Il existe une application: $s'\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$, $\gamma \mapsto s'(\gamma)(x) := s(\gamma(x, 0))$. Notons $\mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ qui se projette sur $\mathbb{R}^m$ en l'identité.

On en déduit le problème algébrique suivant analogue au notre: étant donnés deux groupes $\pi_1(B)$ et $\pi_1(F)$, deux représentations affines respectivement de $\pi_1(B)$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$, et de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$. Classifier tous les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(F) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \pi_1(B) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Aff}_I(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

Received October 9, 2000. Revision received May 9, 2001.

où la première suite horizontale est exacte, sous la relation d'équivalence suivante: Soient $1 \to \pi_1(F) \to \pi_1(M_i) \to \pi_1(B) \to 1$, $i = \{1, 2\}$ deux suites exactes associées à deux diagrammes du type précédent. Ces diagrammes sont équivalents si et seulement si les extensions sont isomorphes et il existe une transformation affine de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ qui conjugue la représentation $\pi_1(M_1) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ en la représentation $\pi_1(M_2) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$.

La donnée d'un fibré affine induit une déformation de la structure affine d'une fibre paramétrée par la base. Soient Γ un groupe de type fini, et E un espace vectoriel muni d'une action linéaire de Γ. L'approche de ce problème pose celui de déterminer la structure de l'ensemble (ou d'un de ses ouverts (voir [G3, p. 178])) des orbites des éléments de $H^1(\Gamma, E)$ sous l'action d'un groupe de gauge. Des hypothèses faites sur la structure de cet espace des modules par exemple, qu'il est une variété algébrique rendant algébrique la projection de $H^1(\Gamma, E)$ sur lui, entraine que les fibres sont des variétés affines isomorphes entre elles si la base est une variété affine compacte et complète.

On démontre aussi que les fibres d'un fibré affine dont l'espace total est une variété affine compacte et complète, et le groupe fondamental d'une fibre est nilpotent sont isomorphes entre elles.

On classifie les fibrés affines à espace total compact dont la développante est injective et tels que le fibré relevé sur le revêtement universel de la base est un produit affine, plus généralement, on classifie les fibrés affines à espace total compact et complet. Les invariants déterminés dans le premier cas sont plus intrinsèques à la géométrie affine que ceux du second cas.

Dans [T5] on donne une nouvelle classification des fibrés affines à espace total compact et complet en utilisant la théorie des gerbes.

Une question importante est de savoir dans quelle mesure la classe d'isomorphisme d'un fibré affine peut déterminer celle de son espace total en tant que variété affine. Soient f_1 et f_2 deux fibrés affines d'espace total compact (de même dimension) au-dessus d'une même base (B, ∇_B). On suppose que (B, ∇_B) ne peut avoir de feuilletage affine à feuilles compactes, et en outre que la dimension des fibres de f_1 et f_2 est strictement inférieure à celle de B. Il est facile de prouver que tout isomorphisme affine entre les espaces total de f_1 et f_2, est un isomorphisme de fibrés affines. Les classes d'isomorphismes de ces fibrés affines, déterminent les classes d'isomorphismes de leurs espaces total en tant que variétés affines. Les variétés affines de dimension 3 dont le groupe fondamental n'est pas polycyclique, et les variétés de Hopf ne peuvent avoir de feuilletages affines à feuilles compactes.

1. Généralités

Une variété affine (M, ∇_M) de dimension n, est une variété différentiable M, de dimension n, munie d'une connexion ∇_M dont les tenseurs de courbure et de torsion sont nuls. La connexion ∇_M définit sur M un atlas (affine) dont les fonctions de transitions sont des restrictions d'éléments de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Soient (M, ∇_M) et $(M', \nabla_{M'})$ deux variétés affines dont les structures affines sont respectivement définies par les atlas affines (U_i, ϕ_i) et $(U'_j, \phi'_{j'})$.

Une application différentiable f, de (M, ∇_M) dans $(M', \nabla_{M'})$, est affine si et seulement si $\phi'_{j'} \circ f|_{U_i} \circ \phi_i{}^{-1}$ est affine. On note $\mathrm{App}((M, \nabla_M), (M', \nabla'_{M'}))$ l'ensemble des applications affines de (M, ∇_M) dans $(M', \nabla'_{M'})$, et $\mathrm{Aff}(M, \nabla_M)$ l'ensemble des automorphismes affines de (M, ∇_M).

La structure affine de (M, ∇_M) se relève sur son revêtement universel $\hat{M}$, en une structure affine $(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}})$ pour laquelle la projection revêtement $p_M : (\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \to (M, \nabla_M)$ est une application affine. La structure affine de $\hat{M}$ est définie par un difféomorphisme local affine $D_M : (\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \to (\mathbb{R}^n, \nabla_0)$, où ∇_0 est la connexion standard de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\nabla_X Y = DY(X);$$

X, Y sont deux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et DY la différentielle de Y.

La développante donne lieu à une représentation $A_M : \mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ définie par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} (\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) & \xrightarrow{g} & (\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle D_M} & & \big\downarrow{\scriptstyle D_M} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A_M(g)} & \mathbb{R}^n, \end{array}$$

où g est un élément de $\mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}})$. La restriction de A_M, au groupe fondamental $\pi_1(M)$, de M, est la représentation d'holonomie h_M. La partie linéaire $L(h_M)$, de h_M, est la représentation d'holonomie linéaire de (M, ∇_M).

Soit f un élément de $\mathrm{App}((M, \nabla_M), (M', \nabla'_{M'}))$, f se relève en une application affine $\hat{f} : (\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \to (\hat{M}', \hat{\nabla}'_{\hat{M}'})$. Soit U un ouvert connexe de $\hat{M}$, sur lequel la restriction de la développante est injective, $D_{M'}|_{\hat{f}(U)} \circ \hat{f}|_U \circ D_M^{-1}|_{D_M(U)}$ est une application affine de $D_M(U) \to \mathbb{R}^{n'}$, qui se prolonge en une application affine $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n'}$. Celle-ci vérifie

$$D_{M'} \circ \hat{f} = f_1 \circ D_M.$$

L'application $\hat{f}$ donne lieu à un morphisme de groupes $\hat{f}_\pi : \pi_1(M) \to \pi_1(M')$ défini par la relation d'équivariance

$$\hat{f} \circ \gamma = \hat{f}_\pi(\gamma) \circ \hat{f}.$$

On en déduit un morphisme $f_\pi : h_M(\pi_1(M)) \to h_{M'}(\pi_1(M'))$ tel que

$$f_1 \circ \gamma = f_\pi(\gamma) \circ f_1 \tag{0.1}$$

si h_M est injective. L'application f_1 transforme $D_M(\hat{M})$ en un sous-ensemble de $D_{M'}(\hat{M}')$.

QUESTION. Etant données f_π et f_1 telles que f_1 envoie $D_M(\hat{M})$ dans $D_{M'}(\hat{M}')$, et $f_1 \circ h_M(\gamma) = f_\pi(h_M(\gamma)) \circ f_1$. A quelles conditions peut-on reconstruire f ?

La réponse à la question précédente est positive si $D_{M'}$ est injective.

L'exemple suivant montre que si on se donne f_1 et f_π vérifiant (0.1), il n'existe pas toujours d'application f.

Munissons T^3 de la structure affine de Sullivan et Thurston [STh, p. 22]. L'image de la développante est $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ privé des axes de coordonnées, et l'holonomie est engendrée par deux applications diagonales dans ces axes de coordonnées ayant des valeurs propres strictement positives. Le quotient de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) - \{\mathbb{R}e_1 \cup \mathbb{R}e_2\}$ par la restriction de l'holonomie est la réunion de 4 tores. On peut choisir pour f_1 la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\{e_3\}$, et f_π la restriction de l'holonomie à $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Il n'existe pas d'application f correspondante. Dans ce cas f_1 n'est pas définie sur l'image de la développante de la structure affine de T^3.

DÉFINITION. (1) On appelle fibration affine une application affine surjective.

(2) Un isomorphisme affine entre deux fibrés affines de même base est un isomorphisme affine entre leur espace total qui se projette sur leur base en une transformation affine, autrement dit un isomorphisme qui envoie une fibre sur une fibre.

(3) Un feuilletage affine sur une variété affine (M, ∇_M) de dimension n, est un feuilletage de M dont le relevé sur $\hat{M}$ est l'image réciproque par D_M de la restriction à $D_M(\hat{M})$ d'un feuilletage par sous-espaces affines parallèles de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE. Le produit fibré de deux fibrés affines est un fibré affine.

PROPOSITION 1.1 [T4]. *Soit f une application affine, de source la variété affine compacte et connexe (M, ∇_M), alors la distribution $F_x^f := \{v \in T_xM / df_x(v) = 0\}$ définit sur M un feuilletage $\mathcal{F}^f$, dont les feuilles sont les fibres d'une fibration affine.*

La base de la fibration affine de la proposition précédente n'est pas forcément l'image de l'application. Si la source de f est compacte, l'image de f est une sous-variété affine avec éventuellement des points de self-intersections.

PROPOSITION 1.2. *Supposons que M est compacte, alors l'image de f a des points de self-intersections si et seulement si la fonction qui a un point x de $f(M)$, associe le cardinal des composantes connexes de l'image réciproque de x par f n'est pas constante.*

Preuve. Supposons que $f(M)$ a un point de self-intersection y. Le point y est contenu dans un ouvert de carte affine V', tel que l'ensemble des points de self-intersections de V' est une sous-variété affine. Soit x_i un élément d'une composante connexe C_i, de $f^{-1}(y)$. Il existe un ouvert connexe U_i de M contenant C_i, tel que $f(U_i)$ est inclu dans V', et les ensembles U_i sont deux à deux disjoints. Choisissons un ouvert V inclu dans V' tel que $f^{-1}(V)$ est inclu dans l'union des U_i. Ceci est possible car M est compacte. Puisque y est un point de self-intersection, il existe au moins i, j tels que $\dim(f(U_i) \cap f(U_j)) < \dim f(U_i)$. Les ensembles $f^{-1}\big((f(U_i) - f(U_j)) \cap V\big)$ et $f^{-1}\big((f(U_j) - f(U_i)) \cap V\big)$ sont disjoints. On en déduit que pour tout point y_i de $(f(U_i) - f(U_j)) \cap V$, le cardinal des composantes connexes de $f^{-1}(y_i)$, est strictement inférieur à celui de celles de $f^{-1}(y)$.

Pour tout point y de $f(M)$, on va noter n_y, le cardinal des composantes connexes de l'image réciproque de y par f. Supposons maintenant que la fonction

$y \mapsto n_y$ n'est pas constante, et $f(M)$ n'a pas de point de self-intersection. Soit Z l'ensemble des points z de $f(M)$, tels que n_z est maximal. Si Z ne contient pas un point de self-intersection, alors Z est ouvert dans $f(M)$. Or Z est fermé car M est compact. On en déduit que $Z = f(M)$. Donc la fonction $z \mapsto n_z$ est constante. Il y a contradiction. $\square$

Un classique théorème d'Ehresmann (voir [Gb]), affirme que toute submersion de source une variété différentiable compacte est une fibration différentiable localement triviale. Une fibration affine d'espace total compact M, est donc une fibration localement triviale pour la structure différentiable. On note F sa fibre type. Dans la suite, on supposera que f est localement triviale pour la structure différentiable. Le feuilletage $\mathcal{F}^f$ se relève sur $\hat{M}$, en un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}^f$. Ce dernier est le relevé par D_M, d'un feuilletage $D_M(\hat{\mathcal{F}}^f)$ de $\mathbb{R}^n$ par des sous-espaces affines parallèles.

Ecrivons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^l$, où $\mathbb{R}^m$ est un supplémentaire de la direction $\mathbb{R}^l$, des feuilles de $D_M(\hat{\mathcal{F}}^f)$. Pour tout élément γ de $\pi_1(M)$,

$$h_M(\gamma) = (A_\gamma(x) + a_\gamma, B_\gamma(y) + C_\gamma(x) + d_\gamma).$$

Comme le feuilletage $\mathcal{F}^f$ n'a pas d'holonomie, pour tout élément γ de $\pi_1(F)$, on a

$$h_M(\gamma) = (x, B_\gamma(y) + C_\gamma(x) + d_\gamma).$$

On en déduit que l'holonomie linéaire d'une fibre ne dépend pas de celle-ci.

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^m$, l'application

$$\begin{aligned} \pi_1(F) &\to \mathbb{R}^l \\ \gamma &\mapsto C_\gamma(x) + d_\gamma \end{aligned}$$

est un 1-cocycle pour l'action de l'holonomie linéaire d'une fibre. Notons $r(x)$ sa classe de cohomologie. On en déduit l'existence d'une application affine $r : \mathbb{R}^m \to H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ qui a x associe $r(x)$, $H^*(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ est le $*$ groupe de cohomologie de $\pi_1(F)$ relatif à l'action de l'holonomie linéaire d'une fibre. Si la base est complète, alors l'image de r est un sous-espace affine.

Si les fibres sont compactes et complètes, alors l'image de r est contenue dans la sous-variété algébrique L, de $H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$, définie par $L = \{c \in H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)/\Lambda^l c \neq 0\}$ (voir [FGH, Thm. 2.2]).

Il existe une variété affine (M, ∇_M) compacte, incomplète, et de dimension 3, telle que $\Lambda^3 c_M \neq 0$ (voir [G1]).

L'exemple suivant largement inspiré de [FGH, pp. 510–511], montre que deux fibres distinctes d'un fibré affine dont les fibres sont compactes peuvent être des variétés affines qui ne sont pas isomorphes. Soit s un réel, considérons le sous-groupe G'_s, de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3)$, dont tout élément g est de la forme

$$g_{u,v,t,s}(x, y, z) = (e^{2t}x + uz, y + st + vz, e^t z),$$

où $t, u, v \in \mathbb{R}$. Le groupe G'_s préserve le demi-espace H de $\mathbb{R}^3$ défini par $z > 0$. Il contient un sous-groupe cocompact G_s. Le quotient de H par G_s est une variété affine compacte M_s. Si s désigne un réel non nul, M_s n'est pas radiante, alors que M_0 l'est. Donc les variétés affines M_s et M_0 ne sont pas isomorphes (voir [FGH]). On peut supposer que G_s est l'image de G_0 par l'application $g_s\colon G_0 \to G_s$, $g_{u,v,t,0} \mapsto g_{u,v,t,s}$. Considérons maintenant la variété affine M, de dimension 4, quotient de $\mathbb{R} \times H$ par l'action de G_0 définie par $g_{u,v,t,0}(s, y) = (s, g_s(g_{u,v,t,0})(y))$, la projection de $\mathbb{R} \times H \to \mathbb{R}$, passe au quotient en une projection de M sur $\mathbb{R}$, on obtient ainsi un fibré affine au-dessus de $\mathbb{R}$, dont les fibres ne sont pas isomorphes entre elles.

Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Construisons maintenant un fibré affine au-dessus de $\mathbb{R}_+^*$, dont les fibres sont des tores munis de structures affines deux à deux distinctes.

Soient s un élément de $\mathbb{R}_+^*$, et ϕ_s l'application polynomiale de $\mathbb{R}^2$, définie par $\phi_s(x, y) = \left(x + \frac{1}{s}y^2, y\right)$. Conjuguons le groupe Γ_s engendré par $l_{1,s}(x, y) = (x + 1, y)$ et $l_{2,s}(x, y) = (x, y + s)$ par ϕ_s.

On obtient le groupe Γ_s' engendré par

$$\phi_s l_{1,s} \phi_s^{-1} = l_{1,s},$$

et

$$l_{2,s}' = \phi_s l_{2,s} (\phi_s)^{-1}(x, y) = (x + 2y + s, y + s).$$

Soient s et s' deux réels positifs non nuls, et $g_{s,s'}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ définie par $g_{s,s'}(x, y) = \left(x, \frac{s'}{s} y\right)$.

En conjuguant Γ_s' par $f_{s,s'} = \phi_{s'} g_{s,s'} {\phi_s}^{-1}$, on obtient $\Gamma_{s'}'$. Remarquons que $f_{s,s'}$ n'est pas affine si s est différent de s'. Si les tores affines T_s, et $T_{s'}$, quotients de $\mathbb{R}^2$ par Γ_s', et $\Gamma_{s'}'$, étaient affinement isomorphes, il existerait une transformation affine $A_{s',s}$ qui conjuguerait $\Gamma_{s'}'$ en Γ_s'. La partie linéaire $L(A_{s',s})$ de cette transformation serait de la forme

$$L(A_{s',s}) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

car la partie linéaire du conjugué de $l_{2,s'}'$ par $A_{s',s}$ est celle de $l_{2,s}'$. En effet sans restreindre la généralité, on peut supposer que $l_{2,s'}'$ est conjugué en $l_{2,s}'$, puisqu'il existe un automorphisme affine de T_s qui transforme $l_{2,s}'$ en $(l_{2,s}')^{-1}$.

On en déduit que $a = 1$, car $l_{1,s}$ est conjugué en $l_{1,s}$ par $A_{s',s}$. Il en résulte que la seconde coordonnée du conjugué de $l_{2,s'}$ par $A_{s',s}$ est s' car elle ne peut être négative. Ceci n'est pas possible si s est différent de s'. Les quotients de $\mathbb{R}^2$ par Γ_s' et $\Gamma_{s'}'$ sont des variétés affines qui ne sont pas isomorphes si s est distinct de s'.

Considérons maintenant les transformations affines de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ définies par $\gamma_1(x, y, z) = (x, y + 1, z)$ et $\gamma_2(x, y, z) = (x, y + 2z + x, z + x)$.

Le quotient de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ par le groupe engendré par γ_1 et γ_2, est l'espace total d'un fibré affine au-dessus de $\mathbb{R}_+^*$, dont les fibres ont des structures affines deux à deux distinctes.

Plus tard (Proposition 4.1) on verra que si la base d'un fibré affine dont les fibres sont munies d'une structure affine complète du tore de dimension 2 distincte de la structure riemannienne plate est complète, alors toutes les fibres sont isomorphes entre elles.

QUESTION. Les fibres d'une fibration affine sont-elles isomorphes entre elles si l'espace total est compact?

Supposons que les fibres sont complètes, et soient x_0 et x_1 deux points de la base (B, ∇_B). Les fibres au-dessus de x_0, et x_1, sont isomorphes, si et seulement si leurs holonomies respectives sont conjuguées par une application affine. Les fibres d'un fibré affine sont deux à deux affinement isomorphes, si le groupe des automorphismes affines qui préserve la fibration se projette sur la base en un groupe qui agit transitivement su celle-ci.

REMARQUE. Dans [G1], il est donné des exemples de structures de variétés affines sur une variété différentiable qui sont topologiquement équivalentes sans être différentiablement équivalentes.

De la suite exacte d'homotopie associée à une fibration, on déduit la suite courte suivante: $\pi_2(B) \to \pi_1(F) \to \pi_1(M) \to \pi_1(B) \to 1$. Si $\pi_2(B) = 1$ (c'est le cas si la base est complète), $\pi_1(M)$ est une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$.

PROPOSITION 1.3. *Supposons que les fibres de f sont compactes, et l'espace total du relevé $\hat{f}$, de f sur $\hat{B}$, a un feuilletage transverse aux fibres, alors l'application $g\colon \pi_1(F) \to \pi_1(M)$, de la suite exacte d'homotopie est injective.*

Preuve. S'il existe un feuilletage transverse, aux fibres de $\hat{f}$, alors d'après un théorème d'Ehresmann (voir [Gb]), $\hat{f}$ est une suspension différentiable car ses fibres sont compactes. Il en résulte que $\hat{f}$ est un produit différentiable, car $\hat{B}$ est simplement connexe, et par suite $\pi_1(F)$ s'injecte dans $\pi_1(M)$. □

On déduit que $\pi_1(M)$, est une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$, sous les conditions de la proposition précédente.

Si la développante de l'espace total est injective, $\pi_1(M)$ est une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$ car dans ce cas, $\pi_1(F)$ est le noyau de la restriction de la représentation d'holonomie de l'espace total à $\mathbb{R}^m$.

2. Adhérence de Zariski et Structures des Fibres

Dans ce paragraphe, on va déterminer différentes conditions, sous lesquelles les fibres d'un fibré affine sont deux à deux isomorphes. La majorité de ces conditions s'expriment en fonction d'adhérences de Zariski.

PROPOSITION 2.1. *Soit f un fibré affine de base une variété affine compacte et complète (B, ∇_B). Si f a une fibre radiante, toutes ses fibres sont radiantes. De plus si les fibres sont compactes, alors leurs structures affines sont isomorphes.*

Preuve. S'il existe une fibre radiante, alors il existe un point x_0 de $\mathbb{R}^m$ tel que $r(x_0) = 0$. On a $r(\gamma(x_0)) = 0$, pour tout élément γ de $\pi_1(B)$. L'ensemble $\{\gamma(x_0),\ \gamma \in \pi_1(B)\}$ engendre l'espace affine $\mathbb{R}^m$ (voir [FGH, Thm. 2.2]). On en déduit que $r = 0$, car r est une application affine. Supposons que les fibres sont compactes. Quitte à conjuguer l'holonomie de la fibre au-dessus d'un point x de B par une translation t_x, on peut supposer que les fibres ont même holonomie. L'application $x \mapsto t_x$ peut être choisie continue sur un ouvert contenant x, on en déduit de [G3, p. 178] que les fibres au-dessus des points d'un voisinage de $p_B(x_0)$ sont isomorphes entre elles, et par suite que toutes les fibres sont isomorphes entre elles. □

Le groupe $\mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}})$ est muni d'une topologie de Zariski définie par les fonctions $P \circ A_M$, où P est une fonction polynomiale de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

PROPOSITION 2.2. *Soit f un fibré affine d'espace total la variété affine (M, ∇_M), si $\pi_1(F)$ est normal dans $Z(\pi_1(M))$, l'adhérence de Zariski de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}})$ alors pour tous points $\hat{x}$, et $\hat{y}$ de $\hat{M}$ appartenant à la même orbite de $Z(\pi_1(M))$, les fibres de $f(p_M(\hat{x}))$ et $f(p_M(\hat{y}))$ sont affinement isomorphes.*

Preuve. Tout élément g de $Z(\pi_1(M))$ laisse stable $\hat{\mathcal{F}}^f$. On en déduit que g induit un isomorphisme entre $\hat{\mathcal{F}}^f_{\hat{x}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^f_{g(\hat{x})}$, et par suite un isomorphisme entre les fibres respectives au-dessus de $f(p_M(\hat{x}))$ et $f(p_M(g(\hat{x})))$ car g normalise $\pi_1(F)$. □

REMARQUE. La proposition précédente est vraie si $\pi_1(F)$ est central dans $\pi_1(M)$. En effet, l'application $\mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}}) \to \mathrm{Aff}(\hat{M}, \hat{\nabla}_{\hat{M}})$, $\gamma \mapsto \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$ où α est un élément de $\pi_1(F)$ est algébrique, comme elle est constante sur $\pi_1(M)$, elle l'est aussi sur son adhérence de Zariski.

COROLLAIRE 2.3. *Si (M, ∇_M) est compacte et complète, et $\pi_1(F)$ normal dans $Z(\pi_1(M))$, alors toutes les fibres de f sont affinement isomorphes entre elles.*

Preuve. On sait que $Z(\pi_1(M))$ agit transitivement [GH2, Thm. 2.6]. □

Du corollaire précédent on déduit que si l'espace total d'un fibré affine est le tore de dimension n, T^n muni d'une structure affine complète, toutes ses fibres sont isomorphes. Ceci n'est pas tout à fait gratuit car sur T^2, il existe des structures affines complètes, qui ont la même holonomie linéaire sans être isomorphes (voir paragraphe 1).

THÉORÈME 2.4. *Supposons que l'adhérence de Zariski de l'holonomie de l'espace total (M, ∇_M) d'un fibré affine agisse transitivement sur $\mathbb{R}^n$, $\pi_2(B) = 1$, et ses fibres sont des variétés affines compactes et complètes ayant un groupe fondamental nilpotent, alors toutes les fibres sont isomorphes en tant que variétés affines.*

Preuve. Soient x un point de $\mathbb{R}^m$, γ un élément de $\pi_1(B)$, et $\hat{\gamma}$ un élément de $\pi_1(M)$ au-dessus de γ. Le élément $\hat{\gamma}$ induit par conjugaison un automorphisme de $\pi_1(F)$, $\Phi_{\hat{\gamma}}$. Pour tout point y de $\mathbb{R}^m$, la restriction de $\pi_1(F)$ à $y \times \mathbb{R}^l$, est conjuguée à la restriction de $\pi_1(F)$ à $x \times \mathbb{R}^l$ par un automorphisme polynomial $P_{\hat{\gamma}xy}$ (voir [FG, Thm. 7.1, Prop. 8.3]) induisant $\Phi_{\hat{\gamma}}$ sur $\pi_1(F)$. Les coefficients de l'automorphisme $P_{\hat{\gamma}xy}$ sont des fonctions polynomiales de y, car $\pi_1(F)$ est nilpotent (voir [FG]);

$P_{\hat\gamma x\hat\gamma(x)}$ peut être choisi affine, égal à $\hat\gamma$ quitte à remplacer $P_{\hat\gamma xy}$ par $P_{\hat\gamma xy}P^{-1}_{\hat\gamma x\hat\gamma(x)}\hat\gamma$. Ceci implique que les coefficients des monomes de degrés supérieurs ou égals à 2, de $P_{\hat\gamma xy}$, s'annulent en $\hat\gamma(x)$. Ils s'annulent aussi en $P_{\hat\gamma xg(x)}$, où g est un élément de $Z(\hat\gamma)$ la cloture de Zariski du groupe engendré par $\hat\gamma$, car ces coefficients sont des fonctions polynomiales de y. On en déduit que les fibres au-dessus des points de $p_B(Z(\hat\gamma)x)$ sont isomorphes à la fibre au-dessus de x. Le groupe $\pi_1(B)$ est engendré par un nombre fini d'éléments, $\gamma_1,\dots,\gamma_p$. Le groupe Z engendré par $Z(\pi_1(F)\hat\gamma_1), Z(\pi_1(F)\hat\gamma_2),\dots,Z(\pi_1(F)\hat\gamma_p)$ est Zariski fermé (voir [B, p. 190]), en répétant l'argument précédent, on déduit que les fibres de $p_B(Zx)$ sont isomorphes entre elles. Il en résulte que toutes les fibres sont isomorphes entre elles, car Z contient l'adhérence de Zariski de l'holonomie de l'espace total qui agit transitivement sur $\mathbb{R}^n$. □

L'ensemble $\mathrm{App}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$ est muni d'une structure de $\pi_1(F)$ module défini par $\gamma(D)=B_\gamma D$. Pour tout élément γ_1 de $\pi_1(B)$, considérons l'application $k_{C_{\gamma_1}}$: $\pi_1(F)\to\mathrm{App}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$, $\gamma\mapsto C_\gamma(h_B(\gamma_1))-C_\gamma$ est un 1-cocycle pour la structure de $\pi_1(F)$ module précédente.

PROPOSITION 2.5. *Supposons que pour tout élément γ de $\pi_1(B)$, la classe de cohomologie $[k_{C_\gamma}]$, de k_{C_γ}, est nulle et $Z(\pi_1(B))$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^m$, alors toutes les fibres sont isomorphes entre elles.*

Preuve. Si $[k_{C_\gamma}]$ est nulle, alors pour tout élément γ de $\pi_1(B)$, $r(\gamma)(x)=r(x)$, l'application $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)\to H^1(\pi_1(F),\mathbb{R}^l)$, $g\mapsto r(g(x))-r(x)$ est algébrique et s'annulle sur $\pi_1(B)$, elle s'annulle aussi sur sa cloture de Zariski. Comme $Z(\pi_1(B))$ agit transitivement, on en déduit que r est une constante. Dans ce cas le fibré affine a des trivialisations locales affines (voir paragraphe 4). □

3. Déformation des Structures Affines à Holonomie Linéaire Fixée

Considérons G, le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\pi_1(F)$ vérifiant: pour tout élément $g\in G$, il existe une application linéaire inversible B_g de $\mathbb{R}^l$ telle que

$$L(h_F)(g(\gamma))=B_g\circ L(h_F)(\gamma)\circ B_g^{-1}. \tag{3.1}$$

Soit B'_g une autre application linéaire vérifiant (3.1). L'application linéaire de $B_g\circ B_g'^{-1}$ commute avec l'holonomie linéaire. B_g est déterminée modulo les éléments du groupe $\mathrm{Aut}(L(h_F))$ des automorphismes linéaires qui commutent avec $L(h_F)$. L'ensemble $\{B_g,\ g\in G\}$ sera appelé groupe de gauge des structures affines de F dont l'holonomie linéaire est $L(h_F)$.

L'application: $g\mapsto B_g$ est une représentation de groupes modulo les éléments de $\mathrm{Aut}(L(h_F))$.

A tout 1-cocycle c de $L(h_F)$ et tout élément B_g de G, on associe le 1-cocycle g^*c défini par $g^*c(\gamma)=B_g(c(g^{-1}(\gamma))$. On définit ainsi une action de G sur $H^1(\pi_1(F),\mathbb{R}^l)$.

L'ensemble $E(F, L(h_F))$, des classes d'équivalences des structures affines de F à holonomie linéaire égale à $L(h_F)$, est le quotient d'un ouvert de $H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ par l'action de G.

PROPOSITION 3.1. *S'il existe une structure algébrique de $E(F, L(h_F))$ rendant algébrique la projection canonique t de $H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ dans $E(F, L(h_F))$, et si l'adhérence de Zariski de l'holonomie de (B, ∇_B) agit transitivement sur $\mathbb{R}^m$, alors toutes les fibres sont isomorphes en tant que variétés affines.*

Preuve. Soient x un point de $\mathbb{R}^m$, et $Z(\pi_1(B))$ l'adhérence de Zariski de $h_B(\pi_1(B))$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$. L'application $Z(\pi_1(B)) \to E(F, L(h_F))$, $\gamma \mapsto t(r(\gamma(x))$ est algébrique, car r est algébrique. Cette application est constante, car elle est constante sur $\pi_1(B)$ qui est Zariski dense dans $Z(\pi_1(B))$. On en déduit que toutes les fibres sont isomorphes car $Z(\pi_1(B))$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^m$. □

REMARQUE. Les fibres d'un fibré affine dont la base est compacte et complète, et $E(F, L(h_F))$ est munie d'une structure algébrique rendant algébrique la projection de $H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ sur lui, sont isomorphes car l'adhérence de Zariski de $h_B(\pi_1(B))$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m)$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^m$.

ETUDE LOCALE DE $E(F, L(h_F))$. Pour déterminer 'l'espace tangent' en un point de $E(F, L(h_F))$, il faut étudier les déformations de ses éléments à holonomie linéaire fixée. Dans la suite de cette partie on va supposer que F est compacte et l'image de son holonomie est discrète. Ceci entraine (voir [G3]) que l'ensemble des représentations d'holonomies des structures affines de F est un ouvert dans l'ensemble des représentations de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$.

Soient h l'holonomie d'une structure affine de F dont la partie linéaire est $L(h_F)$, et h_t une famille à un paramètre de représentations de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$, à parties linéaires égales à $L(h_F)$ telles que $h_0 = h$. Il existe une application affine $u(x)$ de $\mathbb{R}^l$ pour tout élément x de $\pi_1(F)$, telle qu'on a:

$$h_t(x) = \exp(tu(x) + 0(t^2))h(x).$$

Posons $u = (B(x), b(x))$, $0(t^2) = \big(L(0(t^2))(x), a(0(t^2))(x)\big)$, et $h(x) = (A_x, a_x)$, la partie linéaire de $h_t(x)$ est $\exp\big(tB(x) + L(0(t^2))(x)\big)A_x = A_x$. En dérivant par rapport à t, on obtient que

$$\exp\big(tB(x) + L(0(t^2))\big)\big(B(x) + L(0'(t^2))(x)\big)A_x = 0,$$

et par suite $B(x) = 0$ et $L(0(t^2)) = 0$.

Ecrivons maintenant le fait que h_t est une représentation: on a $h_t(xy) = h_t(x)h_t(y)$, ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}&\big(A_xA_y, A_x(a_y) + a_x + tb(xy) + ta(0(t^2))(xy)\big)\\ &\quad = \big(A_x, a_x + tb(x) + ta(0(t^2))(x)\big)\big(A_y, a_y + tb(y) + ta(0(t^2))(y)\big)\end{aligned}$$

et par suite on déduit que l'application $\pi_1(F) \to \mathbb{R}^l$, $x \mapsto b(x)$ est un 1-cocycle pour $L(h_F)$.

L'espace tangent à un élément de l'ensemble des représentations de $\pi_1(F)$ dans $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$, à partie linéaire égale à $L(h_F)$, s'identifie à l'ensemble $Z^1(\pi_1(F), L(h_F))$ des 1-cocycles de $\pi_1(F)$ pour la représentation $L(h_F)$.

Déterminons maintenant la structure de l'espace tangent' d'un élément de $E(F, L(h_F))$. Pour ce faire considérons une déformation h_t triviale de h à partie linéaire $L(h_F)$. Il existe une courbe à un paramètre g_t de transformations du groupe de gauge, telle que $h_t(x) = g_{-t}h(x)g_t$.

L'application g_t est associée à l'identité car on a supposé que l'image de l'holonomie est discrète. Posons $g_t = \exp(tu + 0(t^2))$, $u = (C, c)$.

Comme la partie linéaire de $h_t(x)$ est celle de $h(x)$, C commute avec $L(h_F)$. En dérivant $\exp(-t(u + 0(t^2)))h(x)\exp(tu + 0(t^2))$ par rapport à t, on obtient $(0, -C(a_x) - c + A_x(c))$.

"L'espace tangent" de $E(\pi_1(F), L(h_F))$ en h s'identifie au quotient T_h de $Z^1(\pi_1(F), L(h_F))$ par l'ensemble des $x \mapsto (-C(a_x) - c + A_x(c))$, ou au quotient de $H^1(\pi_1(F), L(h_F))$ par $\{x \to [C(a_x)]\}$.

Proposition 3.2 (Rigidité). *Si $T_{h_{x_0}}$, l'espace tangent en la fibre passant par x_0 est nul, alors toutes les fibres sont isomorphes entre elles.*

Preuve. En effet l'ensemble des éléments x de B tels que la fibre au-dessus de x, est isomorphe à celle au-dessus de x_0, est un fermé. Si $T_{h_{x_0}} = 0$, il est aussi un ouvert, d'où le résultat. □

Donnons maintenant des exemples de $E(F, L(h_F))$.

Si F est une variété compacte munie d'une métrique plate, d'après les théorèmes de Bieberbach, $E(F, L(h_F))$ est un point.

Proposition 3.3. *Si (F, ∇_F) est une variété affine compacte, radiante, telle que $\pi_1(F)$ est nilpotent, alors $E(F, L(h_F))$ est un point.*

Preuve. En effet si $\pi_1(M)$ est nilpotent d'après [FGH] toute structure affine voisine de celle définie par h_F est radiante, il résulte de [G3] qu'elle lui est isomorphe, car quitte à conjuguer par une translation "assez petite", on peut supposer qu'elles ont mêmes holonomies. □

Considérons maintenant le tore T^2 muni d'une structure affine complète distincte de la structure riemannienne plate standard. Elle s'obtient en conjuguant le groupe $\Gamma_{s,t}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ engendré par $\gamma_{1,s}(x, y) = (x + s, y)$ et

$$\gamma_{2,t}(x, y) = (x, y + t)$$

par une application polynomiale $\phi_r(x, y) = (x + ry^2, y)$, $r \in \mathbb{R}$, on obtient le groupe $\Gamma_{r,s,t}$ engendré par

$$\alpha_{1,s}(x, y) = (x + s, y) \quad \text{et} \quad \alpha_{2,s,t}(x, y) = (x + 2rty + rt^2, y + t).$$

Si on étudie les déformations de la structure plate en fixant l'holonomie linéaire, alors rt est une constante a; $\alpha_{2,s,t}$ s'écrit alors $\alpha_{2,s,t}(x, y) = (x+2ay+at, y+t)$.

Le réel a étant donné, pour tout couple (t, t') de réels non nuls, un automorphisme polynomial qui conjugue $\Gamma_{r,s,t}$ en $\Gamma_{r',s',t'}$ est $f' = \phi_{a/t'} m \phi_{-a/t}$, où m est l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ définit par $m(x, y) = \left(\frac{s'}{s}x, \frac{t'}{t}y\right)$. On a

$$f'(x, y) = \left(\frac{s'}{s}x + a\left(\frac{st' - s't}{st^2}\right)y^2, \frac{t'}{t}y\right).$$

PROPOSITION 3.4. *Les variétés affines quotients de $\mathbb{R}^2$ respectivement par $\Gamma_{a/t,s,t}$ et $\Gamma_{a/t',s',t'}$ sont affinement isomorphes si et seulement si $st' - s't = 0$.*

Preuve. Supposons que $st' - s't \neq 0$ et les structures affines définies par $\Gamma_{a/t,s,t}$ et $\Gamma_{a/t',s',t'}$ sont isomorphes, alors il existe une application affine B' qui conjugue $\Gamma_{a/t',s',t'}$ en $\Gamma_{a/t,s,t}$. La partie linéaire de B' est triangulaire supérieure car elle préserve le groupe engendrée la partie linéaire de $\alpha_{2,s,t}$. Aussi sans restreindre la généralité on peut supposer que B' conjugue $\alpha_{1,s'}$ en $\alpha_{1,s}$. L'automorphisme $g = B' \circ f'$ est un automorphisme polynomial qui normalise $\Gamma_{r,s,t}$, l'action induite fixant $\alpha_{1,s}$, et quitte à remplacer g par son carré, on peut supposer qu'il existe un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que $g(\alpha_{2,s,t}) = \alpha_{2,s,t} + p\alpha_{1,s,t}$. L'automorphisme de groupe résultant de l'action de B' sur $\Gamma_{a/t,s,t}$ peut s'exprimer sous la forme de la matrice $C' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. L'automorphisme C de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & ps/t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, normalise $\Gamma_{a/t,s,t}$ et induit C' sur $\Gamma_{a/t,s,t}$; $C^{-1}g$ commute avec $\Gamma_{r,s,t}$. Il est montré dans [T2] que l'ensemble des automorphismes polynomiaux qui commute avec l'holonomie d'une variété affine compacte et complète agit librement. Or on sait que l'ensemble des automorphismes affines qui commute avec l'holonomie d'une structure affine complète du tore agit transitivement car une structure affine complète de T^2, se relève en une structure associative de $\mathbb{R}^2$, sous-jacente à sa structure de groupe commutatif. Il en résulte que $C^{-1}g$ est affine. Il y a contradiction. □

Comme s et t ne sont pas nuls, on en déduit que l'ensemble des orbites des représentations affines du tore T^2, dont la partie linéaire est l'holonomie linéaire d'une structure affine (fixée) complète distincte de la structure plate standard sous l'action du groupe de gauge est le projectif réel privé de deux points. On remarque que la projection de $H^1(\pi_1(F), L(h_F)) - \{0\}$ dans le projectif réel est algébrique. On en déduit une proposition, qui donne un critère, pour que les fibres d'un fibré affine isomorphes à des tores munis de structures affines complètes soient isomorphes.

PROPOSITION 3.5. *Soit f un fibré affine dont les fibres sont des tores munies d'une structure affine complète, alors si $Z(\pi_1(B))$, l'adhérence de Zariski de $\pi_1(B)$ dans* $\mathrm{Aff}(\hat{B}, \nabla_{\hat{B}})$ *agit transivement sur $D_B(\hat{B})$, alors toutes les fibres sont isomorphes entre elles.*

Preuve. Si $L(h_F)$ est la représentation triviale, le résultat provient du fait que $E(T^2, L(h_F))$ est un point. L'application $r' \colon Z(\pi_1(M)) \to E(T^2, L(h_F))$ qui à g associe la classe d'équivalence de $r(gx_0)$ dans $E(T^2, L(h_F))$ est algébrique on conclut grace à (3.1). □

L'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, L)$ des représentations d'un groupe Γ dans un groupe de Lie L est étudié par plusieurs auteurs, notamment lorsque Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte. Si Γ est de présentation fini, $\mathrm{Hom}(\Gamma, L)$ a une structure de variété algébrique sur laquelle L agit en composant une représentation par un automorphisme intérieur, le quotient $\mathrm{Hom}(\Gamma, L)/L$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma, L)$ par L n'est pas en général une variété algébrique [G3].

Dans l'étude de l'espace de Teichmuller d'une surface S de genre $g > 1$, on est amené à considérer les représentations de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Supposons que F soit compacte. L'ensemble des représentations d'holonomies des structures affines de F s'identifie à un ouvert de $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l))$ [G3], et l'ensemble des structures affines de F au quotient de cet ouvert par $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$. Si $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l))/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$ est une munie d'une structure de variété algébrique rendant algébrique la projection de $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l))$ dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l))/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$, alors toutes les fibres d'un fibré affine dont les fibres sont difféomorphes à F et de base compacte et complète sont isomorphes entre elles.

Soit $\mathrm{Ad}(\pi_1(F))\colon \pi_1(F) \to \mathrm{aff}(\mathbb{R}^l)$, la compostion de l'holonomie et de la représentation adjointe de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$, $H^0(\pi_1(F), \mathrm{aff}(\mathbb{R}^l))$ est l'ensemble des champs affines de (F, ∇_F). Les éléments de $H^1(\pi_1(F), \mathrm{aff}(\mathbb{R}^l))$ dont le cup produit est nul sont les éléments tangents à $\mathrm{Hom}(\pi_1(F), \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l))/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$ (voir [G2]), il ne nous est pas connu si les groupes de cohomologies supérieurs $H^*(\pi_1(F), \mathrm{aff}(\mathbb{R}^l))$ ont une interprétation géométrique.

4. Fibrés Affines Affinement Localement Triviaux

DÉFINITIONS. On dira qu'un fibré affine est un fibré affine trivial, s'il est le produit affine de sa base par une de ses fibres.

On dira qu'un fibré affine est affinement localement trivial (f.a.l.t.), si et seulement si son relevé sur le revêtement universel de sa base est un fibré affine trivial.

REMARQUE. Si le fibré affine f est un f.a.l.t. alors il existe un système de coordonnées affines telles que pour tout élément γ de $\pi_1(M)$ préservant une fibre, $h_M(\gamma)(x, y) = (x, B_\gamma(y) + d_\gamma)$; ceci équivaut à dire que r est constante. Réciproquement si le groupe des transformations affines du revêtement universel de la base agit transitivement sur celle-ci et $r = 0$, le fibré affine est un f.a.l.t.

Dans la suite de cette partie, on supposera que la développante de l'espace total est injective et 0 appartient à son image.

PROPOSITION 4.1. *Soit f un fibré affine d'espace total une variété affine complète, dont l'holonomie linéaire des fibres est celle d'une structure complète du tore T^2 distincte de la structure riemannienne plate, alors, f est un f.a.l.t.*

Preuve. Ecrivons $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$, l'holonomie de la structure affine des fibres de f est engendrée par deux éléments γ_1 et γ_2 de la forme:

$$\gamma_1(z,x,y) = (z, x + ry + \alpha_1(z), y + \beta_1(z)),$$
$$\gamma_2(z,x,y) = (z, x + \alpha_2(z), y + \beta_2(z)).$$

Où, z et (x, y) désignent respectivement des éléments de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^2$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ des formes affines de $\mathbb{R}^m$ et r un réel non nul. Comme γ_1 et γ_2 commutent, on a:

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 = (z, x + \alpha_2(z) + r(y + \beta_2(z)) + \alpha_1(z), y + \beta_1(z) + \beta_2(z))$$

égal à

$$\gamma_2 \circ \gamma_1 = (z, x + ry + \alpha_1(z) + \alpha_2(z), y + \beta_1(z) + \beta_2(z)).$$

On en déduit que $\alpha_2(z) + r\beta_2(z) + \alpha_1(z) = \alpha_1(z) + \alpha_2(z)$. Ceci implique que $\beta_2(z) = 0$. Comme l'action de γ_2 sur $\mathbb{R}^n$ est libre, on en déduit que α_2 est une constante a_2. Aussi $\beta_1(z)$ ne peut s'annuler en un point z_0, sinon la fibre au-dessus de $f(z_0)$ ne serait pas compacte. On en déduit que β_1 est une constante b_1.

Conjuguons maintenant par

$$\phi(z,x,y) = \left(z, x, y - \frac{1}{r}\alpha_1(z)\right),$$
$$\phi^{-1}(z,x,y) = \left(z, x, y + \frac{1}{r}\alpha_1(z)\right);$$
$$\phi^{-1} \circ \gamma_2 \circ \phi = \gamma_2;$$
$$\phi^{-1} \circ \gamma_1 \circ \phi(z,x,y) = (z, x + ry, y + b_1). \qquad \square$$

La proposition précédente n'est pas valable si on ne suppose pas que la base est complète comme le montre le paragraphe 1.

Soient (F, ∇_F) et (B, ∇_B) deux variétés affines compactes, on va classifier tous les fibrés affines affinement localement triviaux de base (B, ∇_B) et de fibre (F, ∇_F) tels que la développante de l'espace total est injective.

Soit (M, ∇_M) l'espace total d'un tel fibré. On sait que $\pi_1(F)$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$, c'est le noyau de la restriction de h_M à $\mathbb{R}^m$. Considérons γ et γ_1 deux éléments quelconques de $\pi_1(F)$ et de $\pi_1(M)$, on a:

$$h_M(\gamma)(x,y) = (x, B_\gamma(y) + d_\gamma)$$

et

$$h_M(\gamma_1)(x,y) = (A_{\gamma_1}(x) + a_{\gamma_1}, B_{\gamma_1}(y) + C_{\gamma_1}(x) + d_{\gamma_1}),$$

où A_{γ_1} désigne un automorphisme de $\mathbb{R}^m$, B_γ, B_{γ_1} des automorphismes de $\mathbb{R}^l$, C_{γ_1} une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^l$, a_{γ_1} un élément de $\mathbb{R}^m$, et d_γ, d_{γ_1} des éléments de $\mathbb{R}^l$.

$$\begin{aligned} h_M(\gamma_1)^{-1}(x,y) = \big(&A_{\gamma_1}^{-1}(x) - A_{\gamma_1}^{-1}(a_{\gamma_1}), \\ &B_{\gamma_1}^{-1}(y) - B_{\gamma_1}^{-1}(d_{\gamma_1}) - B_{\gamma_1}^{-1}C_{\gamma_1}(A_{\gamma_1}^{-1}(x) - A_{\gamma_1}^{-1}(a_{\gamma_1}))\big). \end{aligned}$$

Ecrivons que $h_M(\pi_1(F))$ est un sous-groupe normal de $h_M(\pi_1(M))$, on a

$$\begin{aligned} h_M(\gamma_1^{-1}) \circ h_M(\gamma) \circ h_M(\gamma_1)(x, y) \\ &= \big(x, B_{\gamma_1}^{-1} B_\gamma B_{\gamma_1}(y) + B_{\gamma_1}^{-1} B_\gamma C_{\gamma_1}(x) + B_{\gamma_1}^{-1} B_\gamma(d_{\gamma_1}) \\ &\quad + B_{\gamma_1}^{-1}(d_\gamma) - B_{\gamma_1}^{-1} C_{\gamma_1}(x) - B_{\gamma_1}^{-1}(d_{\gamma_1})\big) \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$B_{\gamma_1}^{-1} B_\gamma C_{\gamma_1}(x) - B_{\gamma_1}^{-1} C_{\gamma_1}(x) = 0,$$

et par suite, $C_{\gamma_1}(x) \in H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$.

L'espace vectoriel Applin$(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$, des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$, est muni d'une structure de $\pi_1(B)$ module à gauche définie par $\gamma_1'(D) = B_{\gamma_1} \circ D$, et d'une structure de $\pi_1(B)$ module à droite définie par $\gamma_1'(D) = D \circ A_{\gamma_1}$. Où γ_1 est un élément de $\pi_1(M)$ au-dessus de γ_1'.

Notons T_F la composante connexe de l'ensemble des transformations affines de (F, ∇_F) qui se relèvent sur $\mathbb{R}^l$ en des translations. L'application linéaire de $H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ $t \mapsto B_{\gamma_1} t$ induit sur Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$ une structure de $\pi_1(B)$ module à gauche. La structure de module à droite de Applin$(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$, induit sur Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$ une structure de $\pi_1(B)$ module à droite. Soit $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ l'algèbre de groupe de $\pi_1(B)$. L'espace vectoriel Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$ est donc muni d'une structure de $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ bi-module.

Considérons l'application $C' \colon \pi_1(B) \to$ Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$, $\gamma_1' \mapsto p_F(C_{\gamma_1})$, où $p_F(C_{\gamma_1}(x))$ est l'élément de T_F induit par $C_{\gamma_1}(x)$. Vérifions que C' est bien définie: Pour tout élément $\gamma(x, y) = (x, B_\gamma(y) + d_\gamma)$ de $\pi_1(F)$, on a

$$\gamma \circ \gamma_1(x, y) = (A_{\gamma_1}(x) + a_{\gamma_1}, B_\gamma B_{\gamma_1}(y) + B_\gamma C_{\gamma_1}(x) + B_\gamma(d_{\gamma_1}) + d_\gamma),$$

comme $C_{\gamma_1}(x) \in H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$, on en déduit que C' est bien définie.

Soit $\gamma_2(x, y) = (A_{\gamma_2}(x) + a_{\gamma_2}, B_{\gamma_2}(y) + C_{\gamma_2}(x) + d_{\gamma_2})$ un autre élément de $h_M(\pi_1(M))$,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \circ \gamma_2(x, y) \\ &= \big(A_{\gamma_1} A_{\gamma_2}(x) + A_{\gamma_1}(a_{\gamma_2}) + a_{\gamma_1}, \\ &\quad B_{\gamma_1} B_{\gamma_2}(y) + B_{\gamma_1} C_{\gamma_2}(x) + B_{\gamma_1}(d_{\gamma_2}) + C_{\gamma_1}(A_{\gamma_2}(x) + a_{\gamma_2}) + d_{\gamma_1}\big). \end{aligned}$$

Soient γ_1' et γ_2', les images respectives de γ_1 et γ_2 dans $\pi_1(B)$. On a $C'(\gamma_1' \circ \gamma_2') = p_F(B_{\gamma_1} C_{\gamma_2}(x) + C_{\gamma_1} A_{\gamma_2}(x))$, on en déduit que C' se prolonge en 1-cocycle C de $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ module pour la cohomologie de Hochschild définit par les actions à droite et à gauche précédentes. Notons $[C]$ sa classe de cohomologie.

L'application de

$$\begin{aligned} C_2^f \colon \pi_1(B) \times \pi_1(B) &\to T_F, \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\mapsto p_F(C_{\gamma_1}(A_{\gamma_2}) - C_{\gamma_1})) \end{aligned}$$

est un 2-cocycle pour l'action à gauche de $\pi_1(B)$.

PROPOSITION 4.2. *Supposons que la classe de cohomologie de Hochschild $[C]$ associée à f, qu'on vient de définir s'annulle, alors f est affinement isomorphe à un fibré affine plat.*

Preuve. Supposons que $[C] = 0$, alors il existe une application D' appartenant à $\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, T_F)$ telle que $C'(\gamma_1') = B_{\gamma_1} D' - D' A_{\gamma_1}$. On en déduit que $C_{\gamma_1} = B_{\gamma_1} \circ D - D \circ A_{\gamma_1} + E$, où D et E sont des éléments de $\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$, tels que $p_F(D) = D'$ et $E(x)$ se projette en l'application identité de F. Comme $h_M(\pi_1(F))$ est discret car la développante de (M, ∇_M) est injective, il en résulte que $E = 0$. En conjuguant l'holonomie de (M, ∇_M) par $(x, y) \mapsto (x, y + D(x))$, on en déduit que f est isomorphe à fibré affine plat. $\square$

La donnée de $[C]$ ne détermine pas complètement la classe d'isomorphisme du fibré affine f, car elle suppose la connaissance de l'action de $\pi_1(B)$ sur T_F. Pour tout élément γ_1' de $\pi_1(B)$, l'application $(x, y) \mapsto (x, B_{\gamma_1}(y) + d_{\gamma_1})$ normalise $h_M(\pi_1(F))$, elle définit donc un élément $g(\gamma_1')$ de $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$.

On a

$$(C'_{\gamma_1' \circ \gamma_2'}) g(\gamma_1' \circ \gamma_2') = (C'_{\gamma_1'} \gamma_2' - C'_{\gamma_1'})(C'_{\gamma_1'}) g(\gamma_1') \circ (C'_{\gamma_2'}) g(\gamma_2').$$

On dira que g est compatible avec l'action de $\pi_1(B)$.

Soit $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ le quotient de $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ par T_F, $g(\gamma_1')$ se projette sur $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ en $\bar{g}(\gamma_1')$. L'application $\gamma_1' \mapsto \bar{g}(\gamma_1')$ est une représentation.

Réciproquement, si on se donne une représentation $\bar{g} \colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$, pour tout élément α de $\pi_1(B)$, considérons un élément $g(\alpha)$ de $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ au-dessus de $\bar{g}(\alpha)$. L'application $T_F \to T_F$, $t \mapsto g(\alpha) \circ t \circ g(\alpha)^{-1}$ ne dépend que de $\bar{g}(\alpha)$. On en déduit une représentation $\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(T_F)$, $t \mapsto B_\alpha(t)$. L'espace vectoriel $\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, T_F)$ est muni d'une structure de $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ bimodule, la structure de module à gauche est définie par $(\alpha \cdot C)(x) = B_\alpha C(x)$, et celle de module à droite est définie par $(C \cdot \alpha)(x) = C(L(h_B(\alpha))(x))$. Si de plus on se donne un 1-cocycle de Hochschild C pour cette structure de bimodule, telle que l'application de $g \colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ au-dessus de $\bar{g}$ vérifie

$$C_{\alpha_1 \circ \alpha_2} g(\alpha_1 \circ \alpha_2) = (C_{\alpha_1} \alpha_2 - C_{\alpha_1}) C_{\alpha_1} g(\alpha_1) \circ C_{\alpha_2} g(\alpha_2),$$

on définit un fibré affine, en quotientant $\mathbb{R}^m \times (F, \nabla_F)$ par l'action de $\pi_1(B)$ définie par $\alpha(x, y) = (\alpha \cdot x, C_\alpha(x) g(\alpha) \cdot (y))$.

Soient (F, ∇_F), (B, ∇_B) deux variétés affines et f_1 f_2 deux f.a.l.t. de base (B, ∇_B) et de fibre (F, ∇_F). A f_1 et f_2 on associe des représentations $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ de $\pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$, induisant des structures de $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ bimodules sur $\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, T_F)$, deux 1-cocycles C_1, C_2 pour la cohomologie de Hochschild de ces structures de bimodules, et enfin deux applications $g_1, g_2 \colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ au-dessus de $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ telles que $C_{i_{\alpha \circ \beta}} g_i(\alpha \circ \beta) = (C_{i_\alpha}(\beta) - C_{i_\alpha}) C_{i_\alpha} g_i(\alpha) C_{i_\beta} g_i(\beta)$, $i \in \{1, 2\}$.

THÉORÈME 4.3. *Soient f_1 et f_2 deux fibrés affines isomorphes, alors il existe un automorphisme affine de (B, ∇_B) qui se relève sur $\hat{B} \times (F, \nabla_F)$ en un automorphisme qui préserve les fibres de $\hat{f}_1 = \hat{B} \times (F, \nabla_F)$, conjugue la représentation $\bar{g}_1$ en $\bar{g}_2$ et transforme $[C_1]$ en $[C_2]$. Réciroquement, s'il existe un automorphisme affine de (B, ∇_B) qui se relève en un automorphisme de $\hat{f}_1$ préservant ses fibres, conjuguant $\bar{g}_1$ en $\bar{g}_2$, envoyant $[C_1]$ en $[C_2]$, alors il existe un 1-cocycle*

$c \in H^1(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$ tel que le fibré affine dont l'holonomie est définie par $\pi_1(M) \colon \gamma \mapsto c(\gamma)h_{M_1}(\gamma)$ est isomorphe à f_2.

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 4.4. *Soient $C \colon \mathbb{R}^m \to H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ une application linéaire, et $k = (B, d)$ (resp. $k' = (A, a)$) un élément de $N(\pi_1(F))$ (resp. $N(\pi_1(B))$) le normalisateur de $\pi_1(F)$ (resp. $\pi_1(B)$) dans $\mathrm{Aff}(\hat{F}, \hat{\nabla}_{\hat{F}})$ (resp. $\mathrm{Aff}(\hat{B}, \hat{\nabla}_{\hat{B}})$) l'automorphisme $k_z \colon (x, y) \mapsto (A(x) + a, k(y) + C(z))$ conjugue h_{M_1} en un groupe h'_{M_1}, il induit une nouvelle représentation de $\pi_1(B)$ dans T_F. La classe de cohomologie $[C_1]$ est transformée en une classe $[C'_1]$ pour cette représentation qui ne dépend pas de z.*

Preuve. Soit γ un élément de $h_{M_1}(\pi_1(M))$, posons

$$\gamma(x, y) = (A_\gamma(x) + a_\gamma, B_\gamma(y) + C_\gamma(x) + d_\gamma),$$

on a

$$\begin{aligned} k_z^{-1}\gamma k_z = \big(&k'^{-1}(A_\gamma(x), a_\gamma)k', \\ &B^{-1}(B_\gamma B(y) + B_\gamma C(z) + B_\gamma(d) + C_\gamma(k'(x)) + d_\gamma - d - C(z))\big). \end{aligned}$$

La nouvelle représentation de $\pi_1(B)$ dans T_F est induite par

$$h' \colon \gamma \to B^{-1}B_1B.$$

Le cocycle défini par C_γ est transformé en celui défini par

$$(C'_\gamma)_z(x) = B^{-1}C_\gamma(A(x)). \qquad \square$$

Preuve du Théorème 4.3. Soient f_1 et f_2 deux fibrés affines isomorphes d'espaces total (M_1, ∇_{M_1}) et (M_2, ∇_{M_2}). Il existe un automorphisme affine k de l'espace total de $\hat{f}_1$ respectant les feuilles de $\hat{f}_1$ tel que la restriction de $A_M(k)$ à $\mathbb{R}^m$ normalise $h_B(\pi_1(B))$, et conjugue h_{M_1} en h_{M_2}. Posons

$$A_M(k)(x, y) = (A(x) + a, B(y) + C(x) + d).$$

Pour tout élément z de $\mathbb{R}^m$ tel qu'il existe y dans $\mathbb{R}^l$ vérifiant $(z, y) \in D_M(\hat{M})$, l'automorphisme $A_M(k_z)$ qui $(x, y) \mapsto (x, B(y) + C(z) + d)$ normalise l'holonomie de (F, ∇_F), $A_M(k_z)$ définit un élément k_z de $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ qui se projette sur $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ en un élément g ne dépendant pas de z. g conjugue $\bar{g}_1$ en $\bar{g}_2$ et transforme $[C_1]$ en $[C_2]$.

Réciproquement, supposons que les représentations $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ soient conjuguées par un automorphisme g de $\mathbb{R}^m \times (F, \nabla_F)$ laissant stable l'ensemble des fibres de $\hat{B} \times (F, \nabla_F)$ et dont la restriction à $\mathbb{R}^m$ se restreint sur $\hat{B}$ en un automorphisme qui normalise $\pi_1(B)$ (on a supposé que D_M est injective). Supposons de plus, que g transforme $[C_1]$ en $[C_2]$.

Conjuguons g_1 par g, on obtient une application $g'_1 \colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ telle que pour tout élément γ de $\pi_1(B)$, on a $g'_1(\gamma) = E(x)g_2(\gamma)$. Ou $E \colon \mathbb{R}^m \to T_F$ est une application affine. Comme $[C_1]$ est transformée en $[C_2]$ par g, quitte à conjuguer g'_1 par une application $(x, y) \mapsto (x, y + C(x))$, où $C \colon \mathbb{R}^m \to T_F$ est linéaire, on peut supposer que E est une constante c. L'application $E\colon \pi_1(B) \to T_F$ est un $\pi_1(B)$ 1-cocycle. $\square$

REMARQUE. Etant donné un fibré affine affinement localement trivial au-dessus de (B, ∇_B) de fibre type (F, ∇_F) dont la partie linéaire coincide avec celle de h_{M_2}, sa classe d'isomorphisme est déterminée par l'orbite de c (voir théorème précédent) sous l'action du sous-groupe des automorphismes affines de l'espace total qui préserve les fibres de ce fibré.

Pour classifier les fibrés affines affinement localement triviaux de base (B, ∇_B) et de fibre (F, ∇_F), il faut classifier:

(a) Les classes de conjugaisons des représentations de $\pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$, cet ensemble peut avoir une structure compliquée (voir [G3]).
(b) Une représentation de $\pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ étant donnée, classifier: les orbites des 1-cocycles de Hochschild de $Z\pi_1(B)$ à valeurs dans Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$ sous l'action de $N(\pi_1(B)) \times \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$.
(c) Une représentation de $\pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ et un 1-cocycle étant donnés, classifier les applications g compatibles avec l'action de $\pi_1(B)$.

PROPOSITION 4.5. *Considérons un fibré affine caractérisé par g, B_α et C, les fibrés caractérisés par g', B_α (B_α ne varie pas) sont de la forme $g'(\gamma) = c(\gamma)g(\gamma)$, où $c(\gamma) \in H^1(\mathbb{Z}\pi_1(B), \mathrm{App}(\mathbb{R}^m, T_F))$. L'action à droite de $\pi_1(B)$ sur* Applin$(\mathbb{R}^m, T_F)$ *est induite par la composition à droite avec l'holonomie de (B, ∇_B) et non par la composition avec son holonomie linéaire.*

Preuve. On a $g'(\gamma) = c(\gamma)g(\gamma)$, où $c(\gamma)$ est un élément de $\mathrm{App}(\mathbb{R}, T_F)$. En écrivant le fait que

$$c(\gamma_1\gamma_2)C_{\gamma_1\circ\gamma_2}g(\gamma_1 \circ \gamma_2) = (C_{\gamma_1} + c(\gamma_1))(h_{M_2}(\gamma_2)) - (C_{\gamma_1} + c(\gamma_1))c(\gamma_1)C_{\gamma_1}g(\gamma_1) \circ c(\gamma_2)C_{\gamma_2}g(\gamma_2),$$

on obtient que $c(\gamma_1\gamma_2) = B_{\gamma_1}c(\gamma_2) + c(\gamma_1)\gamma_2$ d'où le résultat. $\square$

REMARQUE. Les cocycles de Hochschild utilisés au résultat précédent sont des applications affines contrairement à ceux utilisés plus tôt qui sont des applications linéaires.

On va faire correspondre à nos 1-cocyles de Hochschild des 1-cocycles de groupes.

A la représentation $\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$, on peut associer un fibré plat BH^0 qui est le quotient de $\hat{B} \times H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ par l'action de $\pi_1(B)$ définie par $(x, y) \mapsto (\gamma(x), B_\gamma(y))$. Il existe sur $\Omega(B, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$, l'ensemble des formes définie sur B et à valeurs dans BH^0, une dérivation d_1 associée à la structure plate de BH^0. L'ensemble PBH^0, des 1-formes d_1 parallèles est un faisceau localement constant au dessus de B. Il s'identifie donc à un fibré vectoriel au-dessus de B, qui est le quotient de $\hat{B} \times \mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$ par l'action de $\pi_1(B)$ définie par $(x, D) \mapsto (\gamma(x), B_\gamma DA_\gamma^{-1})$.

Il existe sur $\Omega(B, PBH^0)$ une dérivation d_2 définie par la structure plate de PBH^0. Notons B': $\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)))$ la représentation définie par $\gamma(D) = B_\gamma D A_\gamma^{-1}$. Les 1-cocycles pour cette représentation sont les applications C': $\pi_1(B) \to \mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$ vérifiant $C'_{\gamma_1\gamma_2} = B_{\gamma_1} C'_{\gamma_2} A_{\gamma_1}^{-1} + C'_{\gamma_1}$. A tout B' 1-cocycle de groupe C', on peut associer le $\mathbb{Z}\pi_1(B)$ 1-cocycle de Hochschild C défini par $C_\gamma = C'_\gamma A_\gamma$. L'application $C' \mapsto C$ est un isomorphisme d'espace vectoriel qui passe au quotient en un isomorphisme en cohomologie.

Supposons que $\hat{B}$ est contractible. Les théorèmes d'isomorphismes de de Rham (voir [Br]) montrent que $H^1(\pi_1(B), \mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l))$ est isomorphe à $H^1(B, PBH^0, d_2)$. Donc à C' associé à un fibré affine de base (B, ∇_B) et de fibre type (F, ∇_F) correspond un élément $\hat{C}$ de $H^1(B, PBH^0, d_2)$. Aussi l'ensemble des 1-formes d_2 fermées définies sur B et à valeurs dans PBH^0 est isomorphe à la somme de l'ensemble $\Omega_s^2(B, BH^0)$ des 2-formes symétriques d_2 fermées (c'est à dire d_2 parallèles), avec celles de l'ensemble des 2-formes alternées d_1 fermées à valeurs dans $H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$. Donc à $\hat{C}$ il correspond une deux forme alternée d_1 fermée $\hat{D}$, et une forme symétrique parallèle D'. Le groupe $H^2(B, BH^0)$, est isomorphe à $H^2(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$ car $\hat{B}$ est contractible. Donc il correspond à la classe de $\hat{D}$ un élément $[D]$ de $H^2(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$.

On le théorème suivant.

THÉORÈME 4.6. *Soient f_1 et f_2 deux fibrés affines affinement localement triviaux au-dessus de (B, ∇_B) de fibre type (F, ∇_F). Supposons que $\hat{B}$ soit contractible. A f_1 et f_2 on associe les représentations $\bar{g}_1, \bar{g}_2$: $\pi_1(B) \to \mathrm{Aff}(F, \nabla_F)/T_F$ et deux éléments $[D_1], [D_2]$ et D'_1, D'_2 appartenant respectivement à $H^2(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^l))$ et à $\Omega_s^2(B, BH^0)$ telles que $d_2(D'_1) = d_2(D'_2) = 0$ comme ci-dessus.*

Alors si f_1 et f_2 sont isomorphes, il existe un automorphisme affine de (B, ∇_B) se relevant en un automorphisme affine du fibré affine trivial $(\hat{B}, \hat{\nabla}_B) \times (F, \nabla_F)$ de $\mathrm{Aff}(F, \nabla_F)$ *qui conjugue $\bar{g}_1$ en $\bar{g}_2$ et transforme $([D_1], D'_1)$ en $([D_2], D'_2)$.*

Réciproquement si $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ sont conjuguées par un automorphisme affine de $(\hat{B}, \hat{\nabla}_B) \times (F, \nabla_F)$ (se projettant sur (B, ∇_B)) qui transforme $([D_1], D'_1)$ en $([D_2], D'_2)$), alors il existe un élément $c \in H^1(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), T_F))$ tel que le fibré affine défini par $g'(\gamma) = c(\gamma) g_1(\gamma)$ est isomorphe à f_2.

PROPOSITION 4.7. *Supposons que l'espace total d'un fibré affine f soit une variété affine (M, ∇_M) compacte et complète et* $\dim H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l) = 1$, *alors f est un f.a.l.t. Si on suppose de plus que la base (B, ∇_B) est le tore T^n muni de sa structure riemannienne plate, et* $\dim H^1(\pi_1(M), \mathbb{R}^n) = 1$ *alors f est un fibré affine plat.*

Preuve. L'application r est constante, sinon elle s'annullerait en un point x et la fibre au-dessus de $p_M(x)$ serait radiante, ceci n'est pas possible car une variété affine compacte et complète ne peut être radiante. On en déduit que f est un f.a.l.t.

Si la base est le tore T^n muni de sa structure riemannienne plate standard, pour tout x de $\mathbb{R}^m$, $\gamma \mapsto C_\gamma(x)$ est un 1-cocycle pour l'action de $\pi_1(B)$. Notons $[C_\gamma(x)]$ sa classe de cohomologie. La suite exacte de Hochschild–Serre prouve que le groupe $H^1(\pi_1(B), H^0(\pi_1(F), \mathbb{R}^n))$ s'injecte dans $H^1(\pi_1(M), \mathbb{R}^n)$, l'obstruction radiante de (M, ∇_M) ne peut coincider avec un élément de la droite engendrée par $[C_\gamma(x)]$ (s'il est non nul), car l'action affine d'une variété affine compacte et complète est irréductible. On en déduit que $[C_\gamma(x)]$ est nul, et par suite f est isomorphe à un fibré affine plat. □

PROPOSITION 4.8. *Soient f_1 et f_2 deux fibrés affines d'espace total compacts respectifs (M_1, ∇_{M_1}) et (M_2, ∇_{M_2}), de même base (B, ∇_B). On suppose en outre que (B, ∇_B) ne peut pas être muni d'un feuilletage affine à feuilles compactes non trivial et qu'il existe une fibre F_0 de f_2 qui ne peut pas être l'espace total d'un fibré affine de base (B, ∇_B), alors tout isomorphisme g entre les variétés affines (M_1, ∇_{M_1}) et (M_2, ∇_{M_2}) est un isomorphisme entre les fibrés affines f_1 et f_2.*

Preuve. Soit g un isomorphisme entre (M_2, ∇_{M_2}) et (M_1, ∇_{M_1}), $f_1(g(F_0))$ n'est pas B car F_0 n'est pas l'espace total d'un fibré affine au-dessus de (B, ∇_B). Les images des fibres de f_2 par $f_1 \circ g$ définissent sur (B, ∇_B) un feuilletage affine à feuilles compactes. Les feuilles de ce feuilletage affine sont forcément des points. On en déduit que g envoie les fibres de f_2 sur celles de f_1. □

PROPOSITION 4.9. *Supposons que l'espace total (M, ∇_M) d'un fibré affine f, soit une variété affine compacte et complète, alors* $\mathrm{Aff}(M, \nabla_M)_0$ *la composante connexe de* $\mathrm{Aff}(M, \nabla_M)$ *préserve f.*

Preuve. Pour tout élément g de $\mathrm{Aff}(M, \nabla_M)_0$, il existe un élément $\hat{g}$ de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ au-dessus de g, qui commute avec $\pi_1(M)$. Soit 0 l'origine de $\mathbb{R}^n$. Le sous-groupe $\pi_1(F)$ de $\pi_1(M)$ qui laisse stable $\hat{\mathcal{F}}_0^f$, laisse stable $\hat{g}(\hat{\mathcal{F}}_0^f) = \hat{\mathcal{F}}_{\hat{g}(0)}^{fg^{-1}}$, car $\hat{g}$ commute avec $\pi_1(M)$, on en déduit qu'il laisse stable $\hat{\mathcal{F}}_0^{fg^{-1}}$. On sait que l'action affine de $\pi_1(F)$ sur $\hat{\mathcal{F}}_0^f$ et $\hat{\mathcal{F}}_0^{fg^{-1}}$ est irréductible (voir [FGH, Thm. 2.2]). On en déduit que les deux sous-espaces vectoriels $\hat{\mathcal{F}}_0^f$ et $\hat{\mathcal{F}}_0^{fg^{-1}}$ coincident. □

ARITHMÉTICITÉ DE CERTAINES CLASSES D'ISOMORPHISMES DES VARIÉTÉS AFFINES. Considérons la variété de Hopf de dimension 3, H_3: c'est le quotient de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ par une homothétie de rapport strictement positif distinct de 1. Cette variété affine n'a pas de feuilletage affine à feuilles compactes. On va déterminer une classe de fibrés affines plats deux à deux non isomorphes, dont la base de chaque élément est H_3 et la fibre le tore de dimension 2 munie de sa structure riemannienne plate. En vertu de la Proposition 4.8, la classe d'isomorphisme d'un tel fibré affine plat détermine celle de son espace total.

Le groupe des transformations affines de T^2, $\mathrm{Aff}(T^2)$ est isomorphe au produit semi-direct de T^2 par $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z})$. Soient γ le générateur de $\pi_1(H_3)$ et B'_γ un élément de $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z})$ qui détermine une représentation B_π de $\pi_1(H^3)$ dans $\mathrm{Aff}(T^2)$. Soit $c \colon \pi_1(H_3) \to T^2$, $\gamma \mapsto c_\gamma$, un 1-cocycle pour l'action de B_π. L'application

$\pi_1(H_3) \to \mathrm{Aff}(T^2)$, $\gamma \mapsto c_\gamma B_\gamma$ est une représentation qui définit un fibré affine plat au-dessus de H_3. Si les valeurs propres de B'_γ sont différentes de 1, alors $[c]$ est nul et le fibré est isomorphe à celui définit par B_π. Si les valeurs propres de B'_γ sont 1, considérons une base de (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $B'_\gamma(e_1) = e_1$, le cocycle c_1 définit par $c_1(\gamma) = e_2$ n'est pas trivial. Soit c_2 un autre cocycle, si le fibré qu'il définit est isomorphe à celui définit par c_1, alors il existe un élément D de $\mathrm{Aff}(T^2)$ tel que $D[c_1] = [c_2]$, car tout automorphisme affine de H_3 se relève sur l'espace total, le fibré étant plat. Si on choisit $c_2(\gamma) = he_2$ ou h est un réel non algébrique, on obtient des fibrés affines non isomorphes et par suite des variétés affines qui ne sont pas isomorphes. Etudions maintenant une situation plus générale.

A toute application $C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on peut associer un 1-cocycle de Hochschild de $\mathbb{Z}\pi_1(H^3)$. Ce cocycle détermine un fibré affine en faisant le quotient de $\mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R}^2$, par le groupe engendré par $\pi_1(T^2)$ (l'action de $\pi_1(T^2)$ se fait par des translations qui se projettent en l'identité sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$), et le groupe engendré par l'application $(x, y) \mapsto (\lambda x, B_\gamma(y) + C(x))$, où x et y désignent respectivement des éléments de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ et $\mathbb{R}^2$. Ce cocycle est un cobord si et seulement s'il existe une application affine D de $\mathrm{App}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $C = B_\gamma D - D\lambda = (B_\gamma - \lambda)D$. Choisisons C surjective, et supposons que λ est une valeur propre de B_γ, alors le cocycle C' n'est pas exact car C est surjective.

Si on fixe, λ et B_γ, la classe d'isomorphisme du fibré affine obtenu est déterminée par l'image de $[C']$ par $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^3) \times \mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z})$. Ceci implique que les fibrés affines déterminés par les C sont deux à deux isomorphes.

5. Le Cas Général

Soit f un fibré affine d'espace total (M, ∇_M) et de base (B, ∇_B). On suppose ici que (M, ∇_M) est compacte et complète, on a vu que dans ce cas $\pi_1(M)$ est une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$. On va aborder la classification des fibrés affines dans le cas général en utilisant la classification des extensions de groupes.

Rappelons la classification des extensions de groupes (voir [Mc, pp. 124–137]). Soient $\mathrm{Aut}(\pi_1(F))$ le groupe des automorphismes de $\pi_1(F)$, $\mathrm{Int}(\pi_1(F))$ le groupe des automorphismes intérieurs de $\pi_1(F)$, et $\mathrm{Out}(\pi_1(F))$ le quotient de $\mathrm{Aut}(\pi_1(F))$ par $\mathrm{Int}(\pi_1(F))$. Pour tout élément γ de $\pi_1(M)$, l'application $i^f_\gamma\colon \pi_1(F) \to \pi_1(F)$, $\alpha \mapsto \gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$ passe au quotient en une représentation $\Phi\colon \pi_1(B) \to \mathrm{Out}(\pi_1(F))$.

Soient $u\colon \pi_1(B) \to \pi_1(M)$ une section telle que $u(1) = 1$, $v\colon \pi_1(B) \times \pi_1(B) \to \pi_1(M)$ définie par $v(x, y) = u(x)u(y)u(xy)^{-1}$ et $\phi(x) \in \Phi(x)$. En appliquant la relation d'associativité à $u(x)u(y)u(z)$, on obtient que

$$i_{u(x)} v(y, z) v(x, yz) = v(x, y) v(xy, z). \tag{5.1}$$

De plus

$$\phi(x)\phi(y) = i_{v(x,y)}\phi(xy). \tag{5.2}$$

Soient K le centre de $\pi_1(B)$, K est muni d'une structure de $\pi_1(B)$ module. Fixons Φ, et supposons qu'il existe une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$. La donnée d'un 2-cocycle w de $\pi_1(B)$ à valeurs dans K permet de définir une extension de

$\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$ en posant $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1(\phi_1(y_1)(x_2))w(y_1, y_2), y_1y_2)$. Où x_1, x_2 sont des éléments de $\pi_1(F)$ et y_1, y_2 des éléments de $\pi_1(B)$. Pour Φ fixée, les classes d'équivalences d'extensions de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$ sont données par $H^2(\pi_1(B), K)$ s'il existe au moins une extension. La donnée de Φ seul n'implique pas l'existence d'une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$ associée à Φ. L'obstruction à l'existence d'une telle extension est donnée par une famille d'éléments de $H^3(\pi_1(B), K)$.

La classification des fibrés affines dans le cas général va se faire en fonction des données suivantes:

(i) la base (B, ∇_B);

(ii) la structure différentiable de la fibre F et une représentation d'holonomie linéaire d'une de ses structures affines.

Etant donnée une extension $\pi_1(M)$ de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$, qui est le groupe fondamental de l'espace total d'un fibré affine de base (B, ∇_B) dont l'holonomie linéaire des fibres est $L(h_F)$, on a vu que pour tout élément $\gamma \in \pi_1(M)$,

$$h_M(\gamma)(x, y) = (A_\gamma(x) + a_\gamma, B_\gamma(y) + C_\gamma(x) + d_\gamma).$$

On a

$$C_{\gamma\gamma'} = B_\gamma C_{\gamma'} + C_\gamma(A_{\gamma'}).$$

En munissant $\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ d'une structure de $\pi_1(M)$ module à gauche définie par

$$\gamma(C) = B_\gamma C,$$

et d'une structure de $\pi_1(M)$ module à droite définie par

$$C\gamma = CA_\gamma,$$

on remarque que C est un $1 - Z\pi_1(M)$ cocycle pour l'homologie de Hochschild définie par ses actions.

L'application

$$D\colon \pi_1(M) \to \mathbb{R}^l,$$
$$\gamma \mapsto d_\gamma$$

est un 1-cocycle pour l'action à gauche de $\pi_1(M)$.

Le fibré affine f est affinement isomorphe à un fibré affine, affinement localement trivial si la restriction de C à $\pi_1(F)$ a une classe de cohomologie nulle.

Réciproquement si on se donne une représentation B_π de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^l)$ dont la restriction à $\pi_1(F)$ coincide avec $L(h_F)$, un 1-cocycle C pour l'homologie de Hochschild précédente et un $1 - \pi_1(M)$ cocycle D pour l' action à gauche de $\pi_1(M)$ tels que pour tout élément x de $\mathbb{R}^m$, la représentation

$$\pi_1(F) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l)$$
$$\gamma \mapsto (L(h_F)(\gamma), C(x) + d_\gamma)$$

définit une structure affine complète de F, alors on peut définir de manière évidente une action affine de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{R}^n$, dont l'espace quotient est l'espace total d'un fibré affine au-dessus de (B, ∇_B).

Le quotient de $\mathbb{R}^n$ par $\pi_1(F)$ définit un fibré affine au-dessus de $\mathbb{R}^m$ qu'on note $\hat{f}$.

THÉORÈME 5.1. *Soient f_i $(i \in \{1,2\})$ deux fibrés affines de base (B, ∇_B), dont les fibres sont difféomorphes et ont même holonomie linéaire, et le groupe fondamental de leur espace total respectif est $\pi_1(M)$, alors f_1 est isomorphe à f_2 si et seulement s'il existe un isomorphisme entre $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ au-dessus d'un automorphisme de (B, ∇_B), dont un relevé sur $\mathbb{R}^n$ conjugue l'holonomie linéaire de (M_1, ∇_{M_1}) en (M_2, ∇_{M_2}), transforme $[C_1]$ en $[C_2]$, et $[D_1]$ en $[D_2]$.*

Preuve. Supposons que f_1 est isomorphe à f_2, alors il existe une application affine k qui conjugue h_{M_1} en h_{M_2} en se projetant sur $\mathbb{R}^m$ en un élément de $N(\pi_1(B))$. k conjugue aussi $h_{M_1}(\pi_1(F))$ en $h_{M_2}(\pi_1(F))$ ce qui entraine que $\hat{f}_1$ est isomorphe à $\hat{f}_2$. Bien entendu, $[C_1]$ et $[D_1]$ sont respectivement transformés en $[C_2]$ et $[D_2]$.

Réciproquement s'il existe un isomorphisme entre $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ au-dessus d'un élément de $N(\pi_1(B))$, dont un relevé sur $\mathbb{R}^n$ conjugue l'holonomie linéaire de (M_1, ∇_{M_1}) en celle de (M_2, ∇_{M_2}) et transforme $[C_1]$ (resp. $[D_1]$) en $[C_2]$ (resp. $[D_2]$), alors ce relevé conjugue h_{M_1} en h_{M_2} modulo une transformation affine de la forme $(x, y) \mapsto (x, y + E(x) + e)$. $\square$

Soient (B, ∇_B) une variété affine compacte et complète, et F une variété différentiable compacte munie d'une structure affine complète dont l'holonomie linéaire est $L(h_F)$.

Pour classifier les fibrés affines d'espace total complet au-dessus de (B, ∇_B) de fibre difféomorphe à F dont l'holonomie linéaire est $L(h_F)$ il faut:

(i) Classifier les extensions de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$.

(ii) Une telle extension de $\pi_1(M)$ étant donnée, classifier les représentations linéaires de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ muni d'un $Z\pi_1(M))$ 1-cocycle de Hochschild $C \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, et d'un $\pi_1(M)$ 1-cocycle de groupe D à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ tels que la représentation

$$\pi_1(F) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^l),$$
$$\gamma \mapsto (L(h_F)(\gamma), C(x) + D(\gamma))$$

définisse une structure affine.

Les invariants utilisés pour la classification dans la situation générale sont plus extrinsèques à la géométrie affines que ceux utilisés dans le cas des fibrés affines affinement localement triviaux.

Etant donnée une extension caractérisée par Φ définissant un fibré affine, quelles sont les autres extensions déterminées par Φ donnant lieu à des fibrés affines? On va aborder la classification des fibrés affines de base (B, ∇_B) et de relevé $\hat{f}$ donné.

Considérons $\pi_1(M)$ une extension de $\pi_1(B)$ par $\pi_1(F)$, et supposons qu'il existe un fibré affine f, tel que le groupe fondamental de son espace total soit $\pi_1(M)$. L'application $h_M(\gamma)$ se projette sur $\mathbb{R}^n/\pi_1(F)$ en un automorphisme affine $\bar{h}_M(\gamma')$. L'application $\pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(\hat{f})$, $\gamma' \mapsto \bar{h}_M(\gamma')$ est une représentation.

Soit f' un autre fibré affine de base (B, ∇_B) tel que $\hat{f} = \hat{f}'$. Posons $h_{M'}(\gamma) = h_M(\gamma) \circ g(\gamma)$. L'application $g(\gamma)$ se projette sur $\hat{f}$ en un automorphisme se projettant en l'identité sur $\mathbb{R}^m$. Pour tout élément γ de $\pi_1(B)$, considérons $i^f(\gamma)$ l'application de $\mathrm{Aut}(\pi_1(F)) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(F))$, $\alpha \mapsto \bar{h}_M(\gamma)\alpha\bar{h}_M(\gamma)^{-1}$.

En écrivant le fait que $\bar{h}'_M$ est une représentation, on obtient

$$g(\gamma_1\gamma_2) = i^f_{\gamma_2^{-1}}(g(\gamma_1))g(\gamma_2). \tag{5.3}$$

Réciproquement la donnée d'une application $g\colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(\hat{f})$ vérifiant (5.3) permet de définir un fibré affine au-dessus de (B, ∇_B) en faisant le quotient de $\hat{f}$ par le groupe engendré par: $\bar{h}_{M'}(\gamma) = \bar{h}_M(\gamma)g(\gamma)$.

Spécialisons maintenant au cas où i^f est fixée, $g(\gamma)$ commute avec $\pi_1(F)$ puisque la fibre est compacte, $g(\gamma)$ appartient à la composante connexe de $\mathrm{Aut}(\hat{f})$. La restriction de $g(\gamma)$ à une fibre de $\hat{f}$ appartient à la composante connexe de son groupe de transformations affines voir [T3]). On a

$$g(\gamma_1)g(\gamma_2) = g(\gamma_1\gamma_2). \tag{5.4}$$

Réciproquement la donnée d'une représentation $g\colon \pi_1(B) \to \mathrm{Aut}(\hat{f})$ telle que $g(\gamma)$ appartient à composante connexe de $\mathrm{Aut}(\hat{f})$ détermine un fibré affine f' au-dessus de (B, ∇_B) tel que $i_f = i_{f'}$.

Exprimons maintenant de manière plus géométrique l'application r lorsque l'espace total du fibré affine est compact et complet. Notons $R(x) = r(x) - r(0)$. Fixons la base (B, ∇_B) et l'holonomie de la structure affine de la fibre au-dessus de $p_B(0)$.

Soit γ un élément de $\pi_1(M)$. Ecrivons

$$h_M(\gamma)(x, y) = (A_\gamma(x) + a_\gamma, B_\gamma(y) + C_\gamma(x) + d_\gamma).$$

L'élément γ induit par conjugaison un automorphisme g_γ de $\pi_1(F)$. L'application B_γ est un élément du groupe de gauge de l'holonomie linéaire d'une fibre associé à g_γ. Si γ appartient à $\pi_1(F)$, g_γ laisse invariant $r(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}^m$.

La représentation de $\pi_1(M)$ dans le groupe des automorphismes de

$$\mathrm{Gl}(H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)^{\pi_1(F)})$$

des automorphismes de $H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$, $\gamma \mapsto g_\gamma$, passe au quotient en une représentation $\bar{g}\colon \pi_1(B) \to \mathrm{Gl}(H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)^{\pi_1(F)})$. Il en résulte un fibré plat H_{BF} au-dessus de B, qui est le quotient de $\mathbb{R}^m \times H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)$ par l'action de $\pi_1(B)$ définie par $\gamma(x, y) = (\gamma(x), \bar{g}_\gamma(y))$.

Le fibré H_{BF} est munie d'une connexion plate canonique ∇_{BF}, à laquelle est associée la dérivée covariante d_{BF}. L'application R peut être vue comme une 1-forme d_{BF} parallèle.

Réciproquement, considérons une représentation $\bar{g}$ de $\pi_1(B)$ dans

$$\mathrm{Gl}(H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)^{\pi_1(F)}),$$

telle que pour tout γ appartenant à $\pi_1(B)$, il existe B_γ appartenant au groupe de gauge de l'holonomie linéaire d'une fibre, dont l'action coincide avec g_γ. La représentation $\bar{g}$ définit au-dessus de B un fibré plat H_{BF}.

Pour se donner un fibré affine au-dessus de (B, ∇_B) dont la structure différentiable des fibres est F, et leur holonomie linéaire est $L(h_F)$, donnons nous d'abord une 1-forme d_{BF} parallèle R'' à valeurs dans H_{BF}. La donnée de R'' est équivalente à celle d'un 0-cobord de groupe R' de $\pi_1(B)$ à valeurs dans Applin$(\mathbb{R}^m, H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)^{\pi_1(F)})$ pour la structure de $\pi_1(B)$ module définie par $\gamma(D) = \bar{g}_\gamma DL(h_B)(\gamma^{-1})$.

Cette représentation détermine un fibré plat H'_{BF} de fibre type

$$\mathrm{Applin}(\mathbb{R}^m, H^1(\pi_1(F), \mathbb{R}^l)).$$

A H'_{BF} on peut associer la dérivation d'_{BF}. Le fibré H'_{BF} est isomorphe au faisceau localement constant des 1-formes d'_{BF} parallèles. Considérons un élément R de Applin$(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ au-dessus de R'. Supposons en outre que le 1-cocycle de groupe $\gamma \mapsto R(\gamma)(x) + r(\gamma)(0)$ défini une structure affine de F. Le quotient de $\mathbb{R}^n$ par l'action de $\pi_1(F)$ défini pour tout élément γ de $\pi_1(F)$ par $(x, y) \mapsto (x, B_\gamma(y) + R(\gamma)(x) + r(\gamma)(0))$, est un fibré affine au-dessus de $\mathbb{R}^m$ tel que pour tout élément γ_1 de $\pi_1(B)$ et x de $\mathbb{R}^m$, la fibre au-dessus de $p_B(x)$ est isomorphe à celle au-dessus de $p_B(\gamma(x))$.

Bibliographie

[B] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Benjamin, New York, 1969.

[Br] G. E. Bredon, *Sheaf theory,* McGraw-Hill, New York, 1967.

[C] Y. Carriere, *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines,* Invent. Math. 95 (1989), 615–628.

[Ch] L. S. Charlap, *Bieberbach groups and flat manifolds,* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[F] D. Fried, *Closed similarity manifolds,* Comment. Math. Helv. 55 (1980), 576–582.

[FG] D. Fried and W. Goldman, *Three-dimensional affine crystallographic groups,* Adv. Math. 47 (1983), 1–49.

[FGH] D. Fried, W. Goldman, and M. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy,* Comment. Math. Helv. 56 (1981), 487–523.

[Gb] C. Godbillon, *Feuilletages. Etudes géométriques,* Progr. Math., 98, Birkhäuser, Basel, 1991.

[G1] W. Goldman, *Two examples of affine manifolds,* Pacific J. Math. 94 (1981), 327–330.

[G2] ———, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces,* Adv. Math. 54 (1984), 200–225.

[G3] ———, *Geometric structure on manifolds and varieties of representations,* Contemp. Math. 74 (1988), 169–198.

[GH1] W. Goldman and M. Hirsch, *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 629–949.

[GH2] ———, *Affine manifolds and orbits of algebraic groups,* Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 175–198.

[K1] J.-L. Koszul, *Variétés localement plates et convexité,* Osaka J. Math. 2 (1965), 285–290.

[K2] ———, *Déformation des connexions localement plates,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), 103–114.

[Mc] S. Maclane, *Homology,* Springer-Verlag, New York, 1963.
[M] G. Margulis, *Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group,* J. Soviet. Math. 134 (1987), 129–134.
[Mi] J. W. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds,* Adv. Math. 25 (1977), 178–187.
[STh] D. Sullivan and W. Thurston, *Manifolds with canonical coordinate charts: Some examples,* Enseign. Math. 29 (1983), 15–25.
[T1] A. Tsemo, *Automorphismes des variétés affines,* Thesis, Université de Montpellier II, 1999.
[T2] ———, *Automorphismes polynomiaux des variétés affines,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329 (1999), 997–1002.
[T3] ———, *Décomposition des variétés affines,* Bull. Sci. Math. 125 (2001), 71–83.
[T4] ———, *Dynamique des variétés affines,* J. London Math. Soc. (2) 63 (2001), 469–487.
[T5] ———, *From affine bundles to gerbes,* preprint.

Abdus Salam Centre for Theoretical Physics
Strada Costiera, 11
Trieste
Italy

tsemo@ictp.trieste.it