Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume VIII, Number 4, October 1967

L'AXIOME DU CHOIX

WACŁAW SIERPIŃSKI

EDITORIAL REMARK: The Author delivered this lecture at a Mathematical Colloquium of Department of Mathematics at the University of Notre Dame on May 24, 1965.

En 1907 Ernst Zermelo énonça un axiome, appelé l'axiome du choix qui a provoqué un vif échange d'opinions entre les mathématiciens. C'est l'axiome suivant:

F etant une famille d'ensembles non vides sans éléments communs deux à deux, il existe au moin un ensemble N contenant un et un seul élément de chaque ensemble de la famille F. (Voir *Mathematische Annalen* 65 (1908), p. 266, Axiom VI).

Il y avait des mathématiciens, même éminents, qui affirmaient qu'ils ne comprennent pas ce qui exprime cet axiome. La raison des difficultés de comprendre l'axiome de Zermelo est celle que le sens des mots "exister" et "ensemble" n'est pas bien précisé. Pour mieux comprendre les difficultés qu'on y rencontre prenons un simple exemple. Soient donnés trois ensembles de points: E_1, E_2 et E_3 non vides et sans points communs deux à deux. Vu que l'ensemble E_1 n'est pas vide, nous pouvons choisir un élément a_1 de cet ensemble. Pareillement nous pouvons choisir un élément a_2 de l'ensemble E_2 et un élément a_3 de l'ensemble E_3. L'ensemble N formé de ces trois éléments a_1, a_2 et a_3 sera évidemment celui dont il s'agit dans l'axiome de Zermelo. Évidemment, si un au moins des ensembles E_1, E_2, E_3 a plus qu'un élément, il existe plus que un ensemble N satisfaisant à l'axiome de Zermelo. La chose semble donc être si simple qu'on pourrait s'étonner qu'ils peuvent être ici quelques doutes. Or, supposons que au lieu de trois ensembles E_1, E_2, E_3 nous avons une suite infinie d'ensembles E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ non vides et sans éléments communs deux à deux. Comment peut-on obtenir l'ensemble contenant un et un seul élément de chacun des ensembles E_n (où $n = 1, 2, \ldots$)? Pouvons nous dire: choisissons un élément a_1, de l'ensemble E_1, ensuite un élément a_2 de l'ensemble E_2, et ainsi de suite, et l'ensemble N formé de tous les éléments $a_1, a_2, \ldots$ sera celui dont il s'agit dans l'axiome de Zermelo? Est-il possible de repeter un choix une infinité de fois? *N'* exige pas ça un temps

Received May 25, 1965

infiniment long? Certains mathématiciens y repondent: Le choix etant *possible pour tout ensemble E_n, il est aussi possible pour tous les* ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ à la fois, puisque le choix d'un élément d'un ensemble, comme une action mathématique, doit être regardée comme indépendante du temps. Or, il est à remarquer que déjà en 1892 G. Peano ecrivait: "On ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi arbitraire d'après laquelle on fait correspondre aux ensembles un élément de chacun d'eux". Donc tout serait ici en ordre si nous sachions déterminer une loi d'après laquelle à tout ensemble E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ correspondrait un élément a_n de l'ensemble E_n. Malheureusement pas toujours nous savons déterminer une telle loi.

Soit F la famille formée de tous les ensembles infinis de nombres rationnels positifs. Nous savons déterminer une loi d'après laquelle à tout ensemble E de la famille F correspond un élément $f(E)$ de cet ensemble. Les éléments de E étant des nombres rationnels positifis, il existe entre eux tels dont le dénominateur naturel est le plus petit, soit m. Parmi les nombres de E au dénominateur m il existe évidemment un tel dont le nominateur n est le plus petit. Posons $f(E) = n/m$. Pour tout ensemble E de la famille F nous avons ainsi déterminé un élément $f(E)$ de cet ensemble.

Or, si F était la famille de tous les ensembles infinis de nombres réels positifs, nous ne saurions pas déterminer une loi d'après laquelle à tout ensemble E de la famille F correspondrait un élément $f(E)$ de l'ensemble E. Considérons maintenant toutes les fonctions réelles d'une variable réelle x définies dans l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$ et n'étant pas constamment nulles dans cet intervalle. Divisons ces fonctions en paires, en rangeant dans une même paire deux fonctions qui ne diffèrent que par leur signe (c'est-à-dire les fonctions $f(x)$ et $-f(x)$). D'après l'axiome de Zermelo il existe un ensemble N contenant une et une seule fonction de chaque paire. Or, nous ne savons pas définir aucun tel ensemble N. Nous ne savons pas donc choisir un élément de chacun des ensembles d'une certaine famille F, quoique chacun de ces ensembles contient seulement deux éléments. On peut démontrer que si l'on saurait le faire, on saurait définir un ensemble linéaire non mesurable au sens de Lebesgue, ce qui est regardé comme un problème dont la solution dépasse les limites de la science actuelle.[1]

Divisons maintenant tous les nombres réels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans ce et seulement dans ce cas si leur différence est rationnelle. On obtient ainsi une famille F de classes telle que: 1° tout nombre réel appartient à une et une seule de classes, 2° la différence de deux nombres de la même classe est toujours rationnelle, et 3° la différence de deux nombres appartenants aux classes différentes est toujours irrationnelle. D'après l'axiome de Zermelo il existe un ensemble N contenant un et un seul élément de chacune de nos classes. Or, nous ne savons pas définir aucun tel ensemble. Ici encore on pourrait démontrer que si l'on pourrait définir effectivement un tel

1. Voir W. Sierpiński, *Fundamenta Mathematicae* 10, p. 177-179.

ensemble, on pourrait donner un exemple effectif d'un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue.

Divisons maintenant en classes toutes les suites infinies convergentes de nombres réels distincts, en rangeant dans une même classe deux suites dans ce et seulement dans ce cas s'ils ont même limite. Nous savons définir un ensemble N contenant une et seulement une suite de toute classe. Tel est, par exemple, l'ensemble N formé de toutes les suites infinies $x + \frac{1}{1}, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{3}, \ldots$, où x est un nombre réel quelconque.

Or, divisons en classes toutes les suites infinies de polynômes entiers en x convergentes pour $0 \leq x \leq 1$, en rangeant dans la même classe toutes les suites convergeantes vers la même fonction limite. Dans ce cas la determination d'un ensemble N contenant une et une seule suite de chacune de nos classes est possible, mais difficile. Le problème ne serait pas plus facile si l'on se bornerait aux polynômes à coefficients rationnels.

Divisons ensuite en classes toutes les suites infinies doubles de polynômes d'une variable réelle x, convergentes pour $0 \leq x \leq 1$, en rangeant en une même classe toutes les suites doubles convergeantes vers une même fonction limite. D'après l'axiome de Zermelo il existe un ensemble N contenant une et une seule suite de chacune de nos classes, mais nous ne savons pas définir un tel ensemble.

Ainsi l'acceptation de l'axiome de Zermelo est autre chose que nous savons le réaliser dans tout cas particulier. Quant à l'un axiome qui est conformé à notre intuition et n'est pas en contradiction avec les autres axiomes que nous avons déjà acceptés, on peut prendre deux positions: on peut accepter cet axiome ou bien le réjeter. Naturellement si l'on réjette un axiome, c'est-à-dire si l'on ne l'accepte pas, cela ne signifie pas qu'on accepte sa négation. Or, en 1938 M. K. Gödel a démontré que l'axiome du choix est compatible avec les autres axiomes habituellement acceptés de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires. Or, P. J. Cohen a démontré que la négation de l'axiome du choix (même pour une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun a deux éléments) est compatible avec les axiomes de la théorie des ensembles habituellement admis. Il en résulte que l'axiome du choix est indépendant de ces axiomes (voir P. J. Cohen *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 50 (1963), p. 1143-1148 et 57 (1964), p. 105-110:, cf. aussi A. Mostowski, *Elemente der Mathematik* XIX (1964), p. 124, II).

En ce qui concerne l'axiome de Zermelo, il faut encore prendre en regard les circonstances suivantes: 1° On a démontré plusieurs conséquences de l'axiome de Zermelo sans fair appel à cet axiome, 2° On a tiré un grand nombre de conséquences de l'axiome de Zermelo dont aucune n'a aboutit à une contradiction, 3° A l'état actuel de la science l'axiome de Zermelo est indispensable pour démontrer plusieurs théorèmes importants de la théorie des ensembles et d'analyse et il simplifie considérablement plusieurs parties de ces sciences.

Or, vu que l'axiome de Zermelo est questionné par plusieurs mathématiciens, il est important de savoir quels sont les théorèmes qu'on a démontré à l'aide de cet axiome, dans quel point de la démonstration il est utilisé et s'il n'existe pas d'autres démonstrations de ces théorèmes n'utilisant pas l'axiome de Zermelo.

Nous ne savons pas démontrer plusieurs conséquences importantes de l'axiome de Zermelo sans faire appel à cet axiome. Voici un exemple.

Lorsqu'on a un ensemble fini et si l'on joint ses éléments en paires d'une façon quelconque, alors ou bien tous les éléments de notre ensemble pourrons être divisés en paires, ou bien il restera un élément sans paire. Le premier cas a lieu évidemment si le nombre des éléments de notre ensemble est pair, le second -s'il est impair. On pourrait donc penser que si l'on a un ensemble infini et si l'on joint ses éléments en paires d'une façon quelconque, alors un et seulement un de deux cas suivants aura lieu: ou bien tous les éléments de notre ensembles seront rangés en paires, ou bien il restera un élément sans paire. Or, l'exemple suivant montre qu'il peut être autrement. Soit E l'ensemble de tous les nombres naturels 1, 2, 3, . . . Si l'on joint en paire tout nombre impair avec le nombre pair qui le suit, tous les éléments de l'ensemble E seront évidemment rangés en paires. Mais si l'on joint en paire tout nombre pair avec le nombre impair qui le suit, il restera évidemment un élément de l'ensemble E, notamment le nombre 1, sans paire. Il se pose le problème s'il est ainsi pour tout ensemble infini. Nous ne savons pas le démontrer sans faire appel à l'axiome de Zermelo. Sans l'aide de cet axiome nous ne savons pas démontrer même la proposition suivante qui semble être évidente: pour tout ensemble on a au moins un de deux cas suivants: ou bien tous les éléments de notre ensemble peuvent être rangés en paires, ou bien il restera un élément sans paire. Il est à remarquer qu'il n'est pas d'ailleurs facile déduire cette proposition de l'axiome de Zermelo.

En 1914 S. Mazurkiewicz a démontré à l'aide de l'axiome de Zermelo l'existence d'un ensemble de points sur le plan tel que toute droite situé sur ce plan le rencontre précisément en deux points. Or, nous ne savons pas définir effectivement aucun tel ensemble.

Le cas le plus simple de l'axiome du choix est celui où la famille F est formée d'un seul ensemble non vide, E. Dans ce cas l'axiome de Zermelo se réduit à l'assertion que si l'ensemble E n'est pas vide, il existe au moins un objet qui est élément de l'ensemble E. Cette assertion est évidemment vraie, puisque les propositions: "l'ensemble E n'est pas vide" et "il existe au moins un objet qui est un élément de l'ensemble E" sont équivalentes. Or, en constatant cela, nous n'affirmons pas que dans tout ensemble non vide nous savons indiquer un de ses éléments. Nous donnerons ici un exemple d'un ensemble dont nous savons démontrer sans recours à l'axiome de Zermelo qu'il n'est pas vide, mais dans lequel nous ne savons pas indiquer aucun de ses éléments. Tel est, par exemple l'ensemble E défini comme il suit. Si toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle qui satisfait pour x et y réels à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ est de la forme $f(x) = ax$ où a est un nombre réel constant, soit E l'ensemble de toutes celles fonctions. Dans le cas contraire soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles $f(x)$ d'une variable réelle qui satisfont à notre équation fonctionnelle mais ne sont pas de la forme ax, où

a est une constante. L'ensemble E est évidemment non vide ce qui résulte de sa définition sans recours à l'axiome de Zermelo. Or, nous ne savons pas définir aucune fonction dont nous s a c h i o n s démontrer qu'elle appartient a l'ensemble E. Il serait plus difficile de nommer un ensemble de nombres réels, dont on saurait démontrer sans l'aide de l'axiome du choix qu'il est non vide, mais dans lequel on ne saurait indiquer aucun élément.

En 1923 D. Hilbert enonça l'axiome logique suivant:

L'axiome de Hilbert. *Il existe une fonction σ faisant correspondre à toute propriété P pour laquelle il existe au moins un objet jouissant de la propriété P, un objet $\sigma(P)$ ayant la propriété P.*

Acceptons cet axiome et désignons, pour tout ensemble E, par $P_E(p)$ la propriété suivante de l'objet p: p est un élément de l'ensemble E. Donc, pour tout ensemble E et tout objet p, $P_E(p)$ signifie le même que la formule $p \in E$ (c'est-à-dire: p est un élément de E). Si l'ensemble E n'est pas vide, il existe un objet p tel que $p \in E$, donc un objet ayant la propriété P. Il résulte donc le l'axiome de Hilbert que l'objet $E(P_E)$ a la propriété P_E, c'est-à-dire est un élément de E. La fonction $\tau(E) = E(P_E)$ fait donc correspondre à tout ensemble non vide E un élément de cet ensemble. Il résulte donc de l'axiome de Hilbert qu'il existe une fonction qui fait correspondre à tout ensemble non vide un élément de cet ensemble. En admettant l'existence d'une telle fonction nous n'affirmons pas que nous savons la définir. En particulier il résulte de l'axiome de Hilbert la proposition suivante:

Théorème T. *Pour tout ensemble il existe une correspondance d'après laquelle à tout sous-ensemble non vide de cet ensemble correspond un élément de ce sous-ensemble.*

Le théorème T a été énoncé par Zermelo déjà en 1904 (dans les *Mathematische Annalen* 59 (1904) à la p. 514). Nous démontrerons que le théorème T est équivalent à l'axiome de Zermelo. Supposons que l'axiome de Zermelo est vrai et soit M un ensemble donné quelconque. Pour tout sous-ensemble N de M désignons par P_N l'ensemble de toutes les paires ordonnées (p,N), où $p \in N$, et soit F la famille de tous les ensembles P_N, où $0 \neq N \subset M$. Les ensembles P_N qui forment la famille F sont évidemment non vides et sans éléments communs deux à deux. D'après l'axiome de Zermelo il existe donc un ensemble Q qui contient un et seulement un élément de chacun des ensembles de la famille F. Il en résulte que pour tout ensemble Q qui contient un et seulement un élément de chacun des ensembles de la famille F. Il en résulte que pour tout ensemble N tel que $0 \neq N \subset M$, l'ensemble $P_N \cap Q$ a un et un seul élément que nous désignerons par (p_N,N). Soit, pour $0 \neq N \subset M$, $\tau(N) = p_N$. Il est clair que la fonction τ fait correspondre à tout sous-ensemble non vide N de M un élément $\tau(N)$ de ce sous-ensemble. Le théorème T est donc vrai. Nous avons ainsi démontré qu'il résulte de l'axiome de Zermelo le théorème T. Supposons maintenant que le théorème T est vrai et soit F une famille des ensembles non vides E sans éléments communs deux à deux. Soit S la réunion de tous les ensembles E qui appartiennent à la famille F. D'après le théorème T il existe une fonction τ telle que pour $0 \neq E \subset S$ on a $\tau(E) \in E$. Vu que pour tout ensemble E de la famille F on a $0 \neq E \subset S$, la formule $\tau(E) \in E$ a lieu pour tout ensemble E de la famille F. Soit N l'ensemble de tous les éléments $\tau(E)$, où E est un ensemble de la famille F. Les ensembles de la famille F étant sans éléments communs deux à deux on voit que l'ensemble N contient un et un seul élément $\tau(E)$ de chaque ensemble E de la famille F. L'axiome de Zermelo est donc vrai. Nous avons ainsi démontré l'équivalence du théorème T et de l'axiome de Zermelo.

Il est aussi facile à démontrer l'équivalence de l'axiome de Zermelo avec le *principe général du choix* G suivant:

G. *Pour toute famille* F *d'ensembles non vides* (pourtant avoir d'éléments communs) *il existe une correspondence d'après laquelle à tout ensemble* E *de la famille* F *il correspond un élément* $\tau(E)$ *de l'ensemble* E.

Il suffit évidemment de démontrer que le principe G résulte de l'axiome de Zermelo. Soit donc F une famille d'ensembles non vides et soit S la réunion de tous les ensembles de la famille F. Nous avons démontré plus haut que de l'axiome de Zermelo il résulte le théorème T d'après lequel il existe une fonction τ qui fait correspondre à tout sous-ensemble non vide de l'ensemble S un élément de ce sous-ensemble, donc, vu que $0 \neq E \subset S$ pour $E \in F$, a tout ensemble E de la famille F un élément $\tau(E)$ de cet ensemble. C'est la correspondence dont il s'agit dans le principe G. Ce principe résulte donc de l'axiome de Zermelo, c.q.f.d.

Nous donnerons ici encore quelques propositions équivalentes à l'axiome de Zermelo.

L'axiome de Zermelo équivaut à la proposition que, E et H étant deux ensembles non vides quelconques, ou bien il existe une transformation biunivoque de l'ensemble E en un sous-ensemble de l'ensemble H, ou bien il existe une transformation biunivoque de l'ensemble H en un sous-ensemble de l'ensemble E (ou bien l'un et l'autre a lieu). La démonstration de cette équivalence n'est pas facile.[2]

E étant un ensemble donné quelconque, appelons son *carré combinatoire* (ou cartesien) $E \times E$ l'ensemble de toutes les paires ordonnées (x, y), où $x \in E$ et $y \in E$. M. A. Tarski a démontré que l'axiome de Zermelo équivaut à la proposition que si l'ensemble E n'est pas fini, il existe une correspondence biunivoque entre les ensembles E et $E \times E$.[3]

On dit qu'on ensemble E est *bien ordonné* par une relation R entre ses éléments, si elle satisfait aux conditions suivantes: 1° a et b étant deux éléments différents quelconques de E, on a ou bien aRb, ou bien bRa, une de ces deux relations excluant l'autre, et 2°. H étant un sous-ensemble non

2. Voir W. Sierpiński, *Cardinal and Ordinal Numbers*, Varsovie 1958, p. 412, Théorème 6.

3. Voir *Funaamenta Mathematicae* 5 (1924), p. 147-154.

vide quelconque de E, il existe un élément a de H tel que aRb pour tout élément b de H distinct de a. Zermelo a démontré[4] que son axiome équivaut à la proposition que pour tout ensemble non vide E il existe une relation d'après laquelle l'ensemble E devient bien ordonné.

Appelons une famille F d'ensembles *fermée*, si pour toute sous-famille F_1 de F telle que de deux ensembles de F_1 toujours un est contenu dans l'autre, la somme de tous les ensembles de F_1 appartient à la famille F. La proposition suivante est équivalente à l'axiome de Zermelo:

Dans toute famille fermée d'ensembles il existe au moins un ensemble qui n'est pas contenu dans aucun autre ensemble de cette famille.

On appelle une famille d'ensembles *disjoints*, si les ensembles de cette famille sont deux à deux sans éléments communs. M. R. Vaught à démontré que l'axiome de Zermelo est équivalent à la proposition suivante:

Dans toute famille F d'ensembles non vides il existe une sous-famille F_1 maximale d'ensembles disjoints (c'est-à-dire qui n'est pas contenu dans aucune autre sous-famille de F d'ensembles disjoints).

Voir W. Sierpiński, *ibidem*, p. 433, Théorème 4. En 1963 H. Rubin et J. E. Rubin ont publié un livre de XXIII +130 pages consacré aux propositions équivalentes à l'axiome de Zermelo.[5]

On a trouvé plusieurs résultats intéressants concernant l'axiome de Zermelo pour les familles F d'ensembles finis. n étant un nombre naturel donné, M. A. Mostowski désigne par $[n]$ le cas particulier suivant du principe général du choix, G:

[n] *Pour toute famille F des ensembles dont chacun a n éléments il existe une correspondance d'après laquelle à tout ensemble E de la famille F correspond un élément $\tau(E)$ de E.*

Pareillement comme nous avons démontré l'équivalence du principe G et de l'axiome de Zermelo, on démontré sans peine que la proposition $[n]$ équivant au cas particulier suivant de l'axiome de Zermelo:

Pour toute famille F des ensembles E dont chacun a n éléments (où n est un nombre naturel) *et qui sont sans éléments communs deux à deux, il existe un ensemble contenant un et un seul élément de chacun ensemble E de la famille F.*

En 1945 A. Mostowski a démontré[6] *que la proposition* [2] *implique la proposition* [4] (ce qu'on écrit: $[2] \rightarrow [4]$) c'est-à-dire que la proposition [4] peut être démontrée si l'on admet la proposition [2] et les axiomes habituellement admis de la théorie des ensembles sauf l'axiome de Zermelo. Voici une démonstration de cette implication.

4. Voir *Math. Annalen* 59 (1904), p. 514–516.
5. H. Rubin and J. E. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Amsterdam 1963.
6. Voir *Fundamenta Mathematicae* 33 (1945), p. 138.

Soit F une famille quelconque formée d'ensembles dont chacun a quatre éléments et soit $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un ensemble quelconque de la famille F et désignons par E^* l'ensemble de tous les sous-ensembles (non ordonnés) de E formés de deux éléments:

$$E^* = \{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\}\}$$

Il résulte de [2] l'existence d'une function ϕ qui fait correspondre à tout ensemble formé de deux éléments $\{x, y\}$ où $x \in E$ et $y \in E$, un de ces éléments x ou y. On a donc $\phi(\{x, y\}) \in \{x, y\}$ pour $x \in E$, $y \in E$, $x \neq y$, $E \in F$. Soit, pour $i = 1, 2, 3, 4$, n_i le nombre de ces paires appartenants a E^* pour lesquelles $\phi(\{x, y\}) = a_i$. Les nombres n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont évidemment des entiers non négatifs et on a $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 6$, d'où il résulte qu'ils ne peuvent pas être tous égaux. Supposons que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$ et soit A l'ensemble de tous les éléments $a_j \in E$, tels que $n_j = n_1$. On voit sans peine que l'ensemble A a au moins un et au plus trois éléments. Si A a un élément, designons le par $\psi(E)$. Si A a deux éléments, posons $\psi(E) = \phi(A)$. Si A a trois éléments, alors, vu que $A \subset E$, il existe dans E un seul élément qui n'appartient pas à A: désignons le par $\psi(E)$. Ainsi la fonction ψ fait correspondre à tout ensemble E de la famille F un élément de cet ensemble. Cela prouve que la proposition [4] est vraie. Nous avons ainsi démontré l'implication $[2] \rightarrow [4]$. Comme l'écrit M. Mostowski, l'idée de cette démonstration est due à M. A. Tarski.

On peut démontrer que, quels que soient les nombres naturels k et n, on a $[kn] \rightarrow [n]$.[7] Donc, en particulier (pour $k = n = 2$), $[4] \rightarrow [2]$, et comme plus haut nous avons démontré $[2] \rightarrow [4]$, il en résulte que $[4] \rightleftharpoons [2]$, c'est-à-dire que les propositions [4] et [2] sont équivalentes. Ainsi l'axiome de Zermelo pour les familles des ensembles à quatre éléments équivaut à l'axiome de Zermelo pour les familles des ensembles à deux éléments. Or, il est à remarquer qu'on n'a pas ni $[2] \rightarrow [3]$, ni $[3] \rightarrow [4]$.[8] (D'après A. Mostowski la proposition que "L'implication $[m] \rightarrow [n]$ n'a pas lieu" signifie que la proposition $[n]$ est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles et de la proposition $[m]$.)[9] On peut démontrer que la proposition [6] equivant à l'ensemble des propositions [2] et [3] et qu'on a $[6] \rightarrow [8]$ et $[6] \rightarrow [9]$, et que $[10] \rightarrow [8]$.

Sans recours à l'axiome de Zermelo nous ne savons pas démontrer que tout ensemble non vide qui n'est pas fini contient une suite infinie d'éléments distincts. À l'aide de l'axiome de Zermelo on le démontre de la façon suivante:

Comme nous avons démontré plus haut, il résulte de l'axiome de Zermelo le théorème T d'après lequel pour tout ensemble E il existe une fonction τ qui fait correspondre à tout sous-ensemble non vide H de E un

7. Voir W. Szmielew, *Fundamenta Mathematicae* 34, p. 79; cf. A. Mostowski, *Fundamenta Mathematicae* 33, p. 164 (Lemma 13).
8. Voir A. Mostowski, *l.c.*, p. 164, Théorème VII et p. 138.
9. Voir *ibidem*, p. 151.

élément $\tau(H)$ de H. Si le sous-ensemble H de E n'est pas fini, alors l'ensemble qu'on obtient en supprimant dans H l'élément $\tau(H)$ sera aussi non fini. Définissons maintenant par récurrence les ensembles H_n ($n = 1, 2, \ldots$), en posant $H_1 = E$ et en définissant, pour $n = 1, 2, \ldots$, l'ensemble H_{n+1} comme celui qu'on obtient de H_n en supprimant l'élément $\tau(H_n)$. On démontre sans peine que $\{H_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sera une suite infinie d'éléments distincts de l'ensemble E.

Un point a d'une droite appartenant ou non à un ensemble donné E de points de cette droite et dit *point d'accumulation* de l'ensemble E si tout intervalle qui contient à son intérieur le point a, contient au moins un point de l'ensemble E distinct de a. Or, un point a appartenant à l'ensemble E ou non est dit *point limite* de l'ensemble E, s'il existe une suite infinie de points de E distincts de point a qui converge vers le point a. On peut démontrer sans l'aide de l'axiome de Zermelo qu'un point limite d'un ensemble est toujours un point d'accumulation de cet ensemble. Or, sans l'aide de l'axiome de Zermelo nous ne savons pas démontrer qu'un point d'accumulation d'un ensemble est toujours point limite de cet ensemble. A l'aide de l'axiome de Zermelo on le démontre comme il suit.

Si le point a de l'ensemble E est un point d'accumulation de cet ensemble, alors pour tout nombre naturel n l'ensemble E_n de tous les points x de E autres que a et tels que $a - 1/n < x < a + 1/n$ est non vide. Or, d'après le principe général du choix G, appliqué à la famille de tous les ensembles E_n, où $n = 1, 2, \ldots$, il existe une fonction τ telle que $\tau(E_n) \in E_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Or, comme $a - 1/n < \tau(E_n) < a + 1/n$ et $\tau(E) \neq a$ pour $n = 1, 2, \ldots$, $\tau(E_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) est une suite infinie de points de E distincts de a qui converge vers le point a qui est ainsi point limite de l'ensemble E.

On peut démontrer sans utiliser l'axiome de Zermelo qu'un point d'accumulation des points d'accumulation d'un ensemble est un point d'accumulation de cet ensemble. Or, nous ne savons pas démontrer sans l'aide de l'axiome de Zermelo qu'un point limite des points limites d'un ensemble est un point limite de cet ensemble.

En prenant pour point de départ soit la notion du point d'accumulation, soit celle du point limite, on obtient deux définitions différentes de l'ensemble fermé:

I. Un ensemble de points est dit fermé a s'il contient tous ses points d'accumulation.
II. Un ensemble de points est dit fermé l, s'il contient tous ses points limites.

On ne sait pas démontrer l'équivalence de ces deux définitions de l'ensemble fermé sans recourir à l'axiome de Zermelo. Sans s'appuyer sur cet axiome nous ne savons pas même démontrer que tout ensemble linéaire borné, contenant tous ses points limites, contient ses deux bornes.[10]

10. Cf. W. Sierpiński, L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, Sciences Mathématiques*, 1918.

Lorsque j'ai parlé de ces deux définitions de l'ensemble fermé dans une conférence que j'ai donné à la Sorbonne le 10 Mars 1931, Emile Borel m'a posé le problème suivant: Peut-on définir effectivement un ensemble de points dont on saurait démontrer sans utiliser l'axiome de Zermelo qu'il est fermé *l*, mais qu'on ne saurait pas démontrer sans recours à cet axiome qu'il est fermé *a*? J'ai démontré que la réponse à ce problème de E. Borel est positive.[11]

On dit qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a,b) est continue au point x_0 de cet intervalle au sens de Cauchy, si pour tout nombre positif ε il existe un nombre positif δ, tel que l'inégalité $|x - x_0| < \delta$ entraîne, pour tout nombre x de l'intervalle (a,b), l'inégalité $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Or, on dit qu'une fonction $f(x)$ défini dans un intervalle (a, b) est continue au point x_0 de cet intervalle au sens de Heine si pour toute suite infinie x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de nombres de l'intervalle (a,b) la formule $\lim_{n=\infty} x_n = x_0$ entraîne la formule $\lim_{n=\infty} f(x\ ) = f(x_0)$.

Sans recours à l'axiome de Zermelo nous ne savons pas démontrer l'équivalence de ces deux définitions. On peut démontrer sans peine sans l'aide de l'axiome de Zermelo que si une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a,b) est continue au point x_0 de cet intervalle au sens de Cauchy, elle est aussi continue au point de x_0 au sens de Heine, mais nous ne savons pas démontrer la proposition réciproque sans l'aide de l'axiome de Zermelo. On peut démontrer que cette proposition réciproque entraîne que tout point d'accumulation d'un ensemble linéaire est son point limite.[12]

L'axiome de Zermelo jouet un rôle important dans la théorie de mesure. .Sans son aide nous ne savons pas démontrer le théorème fondamental que l'ensemble réunion d'une suite infinie d'ensembles linéaires mesurables au sens de Lebesgue est mesurable au sens de Lebesgue. Nous ne savons non plus démontrer sans recours a l'axiome de Zermelo que l'ensemble-réunion d'une suite infinie d'ensembles de mesure (lebesguienne) nulle est de mesure nulle. Sans l'aide de l'axiome de Zermelo nous ne savons pas démontrer qu'il existe des ensembles linéaires qui ne sont pas mésurables au sens de Lebesgue.

Les nombreuses applications de l'axiome de Zermelo dans la théorie des ensembles dans l'analyse et dans la théorie des fonctions et même dans l'algèbre exigeraient une monographie spéciale.

Acadêmie Polonaise des Sciences
Warszawa, Poland

---

11. Voir ma communication du 30 Avril 1931 dans les *Comptes rendus des séances de la Société des sciences et de lettres de Varsovie,* XXIV (1931), Classe III, *Sur deux définitions des ensembles fermés.*

12. Voir mon mémoire du 1918 cité plus haut, p. 130.