Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume VII, Number 1, January 1966

ZUR SEMANTISCHEN BEGRÜNDUNG DER KLASSISCHEN UND DER INTUITIONISTISCHEN LOGIK

FRANZ von KUTSCHERA

Die Arbeit geht aus von der klassischen Semantik nach Bolzano und Tarski, die sich auf den Interpretationsbegriff aufbaut, und vollzieht den Übergang zu einer einfacheren, äquivalenten Fassung der Semantik, die sich auf den Bewertungsbegriff stützt. Die klassische Logik wird formalisiert in einem Kalkül **KP** des natürlichen Schliessens in Sequenzenform und die Adäquatheit dieses Kalküls bzgl. der Bewertungssemantik wird nachgewiesen. Anschliessend wird ein andersartiger Aufbau der Semantik diskutiert, der auf der Linie der Theorien von P. Lorenzen und H. B. Curry liegt. Diese Semantik wird in einer klassischen und einer intuitionistischen Version dargestellt, wobei die klassische Version sich aus der intuitionistischen durch gewisse Zusatzbedingungen gewinnen lässt. Die Adäquatheit von **KP** bzgl. der klassischen Version wird bewiesen und es wird in Entsprechung zu **KP** ein Kalkül **IP** aufgebaut, der sich als adäquat bzgl. der intuitionistischen Version erweist.

1 *Die klassische Semantik der Prädikatenlogik.* In diesem Kapitel soll der Übergang von der Interpretationssemantik nach Tarski [12][1] zur Bewertungssemantik vollzogen werden mithilfe der normalen Interpretationen. Ein solcher Übergang empfiehlt sich wegen der grösseren Einfachheit der Bewertungssemantik sowohl in theoretischer Hinsicht - ein Teil der starken mengentheoretischen Voraussetzungen der Interpretationssemantik entfällt hier - wie in Hinsicht auf den praktischen Vorteil eines einfacheren Vollständigkeitsbeweises für die klassische Logik.

1.1 *Die Sprache* **P**. Die Objektsprache, die den semantischen Untersuchungen im folgenden immer zugrunde gelegt wird, ist die Sprache **P** der reinen Prädikatenlogik erster Stufe, die wir wie folgt bestimmen:

Das *Alphabet* der Sprache **P** umfasst Hilfszeichen (runde Klammern, Kommata), die logischen Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\bigwedge$, $\bigvee$, Gegenstandsvariable (kurz: **GV**) und n-stellige Prädikatvariable (**PV**) ($n = 1,2, \ldots$), und zwar von jeder dieser Kategorien unendlich viele Variablen. Die Menge der **GV** sei $\mathfrak{V}^{\circ}$, die Menge der n-stelligen **PV** sei $\mathfrak{V}^{n}$. $\mathfrak{V}$ sei die Vereinigung der

Received August 29, 1964

Mengen $\mathfrak{B}^i$ für $i = 0,1$, . . . Da wir im folgenden keine konkreten Formeln von **P** angeben, werden die Mengen $\mathfrak{B}^i$ nicht näher spezifiziert. Alle auftretenden Buchstabensymbole sind metasprachliche Symbole.

Die *Formregeln* für **P** lauten:

1) Wenn F eine n-stellige **PV** und $x_1, \ldots, x_n$ **GV** von **P** sind, so ist $F(x_1, \ldots, x_n)$ eine (Atom-) Formel von **P**.
2) Wenn A und B Formeln von **P** sind, so sind auch $\neg(A)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\supset(B)$ Formeln von **P**.
3) Wenn A eine Formel und x eine **GV** von **P** ist, so sind $\wedge x(A)$ und $\vee x(A)$ Formeln von **P**.

Im folgenden lassen wir Klammerzeichen fort, wo der Kontext das erlaubt.

Die Begriffe des freien und gebundenen Vorkommens einer **GV** in einer Formel, der freien Einsetzung und freien Umbenennung einer **GV** seien wie üblich definiert[2]. Um anzudeuten, dass die Formel A die **GV** x frei enthalten kann, schreiben wir auch "$A[x]$" statt "A". Ist y eine **GV**, so soll dann $A[y]$ die Formel sein, die aus $A[x]$ durch freie Einsetzung von y für x entsteht. Dabei sind also ggf. vor der Substitution die gebundenen Variablen y in Quantoren von $A[x]$, in deren Bereich x frei vorkommt, in passender Weise umzubenennen.

Zur Abkürzung verwenden wir im folgenden die Ausdrücke "*non*", "*et*", "*vel*", "*seq*", "*äq*", "*O*", "*E*" für "nicht", "und", "oder", "wenn, dann", "genau dann, wenn", "alle", "einige" und die Symbole "ε", "λ" für Elementschaftsrelation und Klassenabstraktion. $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ sei das geordnete n-tupel aus $a_1, \ldots, a_n$.

1.2 Normale Interpretationen

1.2.1 Als *Interpretation* Θ über dem (nichtleeren) Objektbereich γ bezeichnen wir eine Folge einstelliger Funktionen Θ^1, Θ^2, $\Theta^{3.n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), für die gilt:

a) Θ^2 bildet $\mathfrak{B}^\circ$ ab in γ,
b) $\Theta^{3.n}$ bildet $\mathfrak{B}^n$ ab in die Menge der n-stelligen Relationen über γ,
c) Θ^1 bildet die Menge der Formeln von **P** so in die Menge der Wahrheitswerte $\{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ ab ("$\mathfrak{w}$" stehe für das Wahre, "$\mathfrak{f}$" für das Falsche), dass gilt:
   c1) $\Theta^1(F(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w}$ *äq* $\langle \Theta^2(x_1), \ldots, \Theta^2(x_n) \rangle \,\varepsilon\, \Theta^{3.n}(F)$
   c2) $\Theta^1(\neg A) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Theta^1(A) = \mathfrak{f}$
   c3) $\Theta^1(A \wedge B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Theta^1(A) = \mathfrak{w}$ *et* $\Theta^1(B) = \mathfrak{w}$
   c4) $\Theta^1(A \vee B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Theta^1(A) = \mathfrak{w}$ *vel* $\Theta^1(B) = \mathfrak{w}$
   c5) $\Theta^1(A \supset B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Theta^1(A) = \mathfrak{f}$ *vel* $\Theta^1(B) = \mathfrak{w}$
   c6) $\Theta^1(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$ *äq* $O\overline{\Theta}(\overline{\Theta} \underset{x}{=} \Theta$ *seq* $\Theta^1(A[x]) = \mathfrak{w})$
   c7) $\Theta^1(\vee x A[x]) = \mathfrak{w}$ *äq* $E\overline{\Theta}(\overline{\Theta} \underset{x}{=} \Theta$ *et* $\overline{\Theta}^1(A[x]) = \mathfrak{w})$.

Dabei bedeute "$\overline{\Theta} \underset{x}{=} \Theta$", dass die Interpretationen $\overline{\Theta}$, Θ bis auf höchstens die Werte $\overline{\Theta}^2(x)$ und $\Theta^2(x)$ übereinstimmen.

Wir lassen im folgenden die Indices in "Θ^1", "$\Theta^{3.n}$", etc. oft weg.

Man sieht leicht ein: wenn die Funktionen Θ^2, $\Theta^{3.n}$ auf $\mathfrak{B}$ definiert sind, so ist Θ^1 für alle Formeln von **P** definiert durch die Bedingungen (c).

1.2.2 Es sei $\mathfrak{B}_0$ eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Dann nennen wir zwei Interpretationen Θ_1, Θ_2 $\mathfrak{B}_0$-*äquivalent*, wenn für alle Formeln A, die nur freie Variablen aus $\mathfrak{B}_0$ enthalten, gilt: $\Theta_1(A) = \Theta_2(A)$.

1.2.3 Wenn Θ_1, Θ_2 über dem gleichen Objektbereich definiert sind und $\mathfrak{B}_0$ Teilmenge von $\mathfrak{B}$ ist und es gilt: $Ox(x \varepsilon \mathfrak{B}_0 \; seq \; \Theta_1(x) = \Theta_2(x))$, so sind Θ_1, Θ_2 $\mathfrak{B}_0$-äquivalent.

Den Beweis hierzu führt man durch Induktion nach dem Grad der Formeln A. Als *Grad* einer Formel bezeichnet man die Anzahl der Vorkommnisse von logischen Operatoren in A. - Die Induktionsbasis ist nach (c1) trivial. Im Induktionsschritt greifen wir nur einen Fall heraus: Die Behauptung des Satzes sei bewiesen für alle Formeln A vom Grad $< n$ und alle Mengen $\mathfrak{B}_0$. $\wedge xB[x]$ sei eine Formel vom Grad n, die nur freie Variablen aus $\mathfrak{B}_0$ enthält. Dann gilt:

$$\Theta_1(\wedge xB[x]) = \mathfrak{w} \; \ddot{a}q \; O\bar{\Theta}_1(\bar{\Theta}_1 \underset{x}{=} \Theta_1 \; seq \; \bar{\Theta}_1(B[x]) = \mathfrak{w}) \qquad \text{(I}$$
$$\ddot{a}q \; O\bar{\Theta}_2(\bar{\Theta}_2 \underset{x}{=} \Theta_2 \; seq \; \bar{\Theta}_2(B[x]) = \mathfrak{w}) \qquad \text{(II}$$

Aus (I) folgt (II), sonst wäre (I) wahr und es gäbe ein $\bar{\Theta}_2$, so dass $\bar{\Theta}_2 \underset{x}{=} \Theta_2$ und $\bar{\Theta}_2(B[x]) = \mathfrak{f}$. Wir könnten dann ein $\bar{\Theta}_1$ so definieren, dass gilt: $\bar{\Theta}_1 \underset{x}{=} \Theta_1$ *et* $\bar{\Theta}_1(x) = \bar{\Theta}_2(x)$ (III. Dann würde gelten: $\bar{\Theta}_2$ und Θ_2, Θ_2 und Θ_1, Θ_1 und $\bar{\Theta}_1$ ordnen den Variablen aus $\mathfrak{B}_0 - \{x\}$ die gleichen Werte zu ($\{x\}$ sei die Einermenge aus x). Wegen (III) ordnen also $\bar{\Theta}_2$ und $\bar{\Theta}_1$ den Variablen aus $\mathfrak{B}_0 \cup \{x\}$ die gleichen Werte zu (das Zeichen "$-$" symbolisiere die Mengensubtraktion, "$\cup$" die Mengenvereinigung). Nach Induktionsvoraussetzung würde dann gelten: $\bar{\Theta}_1(B[x]) = \bar{\Theta}_2(B[x]) = \mathfrak{f}$ – im Widerspruch zur Annahme, (I) sei wahr. Ebenso sieht man: (II) *seq* (I). Endlich gilt: (II) *äq* $\Theta_2(\wedge xB[x]) = \mathfrak{w}$.

Aus **1.2.3** folgt, dass der Wert $\Theta(A)$ einer Interpretation Θ für eine Formel A nur abhängt von den Werten von Θ für die freien Variablen von A und vom Objektbereich von Θ. Insbesondere ändert sich also durch freie Umbenennung der gebundenen Variablen von A nichts an diesem Wert.

1.2.4 Wir nennen eine Interpretation Θ *normal*, wenn für alle Formeln der Gestalt $\wedge xA[x]$, bzw. $\vee xA[x]$ gilt:

$\Theta(\wedge xA[x]) = \mathfrak{f} \; seq \; Ey(y \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; et \; \Theta(A[y]) = \mathfrak{f})$, bzw.
$\Theta(\vee xA[x]) = \mathfrak{w} \; seq \; Ey(y \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; et \; \Theta(A[y]) = \mathfrak{w})$.[3]

Es gilt nun der Satz:

1.2.5 *Zu jeder Interpretation* Θ *und jeder Menge* $\mathfrak{B}_0$ *von* **GV**, *für die* $\mathfrak{B}^0 - \mathfrak{B}_0$ *unendlich ist, gibt es eine* $\mathfrak{B}_0'$-*äquivalente normale Interpretation* Θ^+, *wo* $\mathfrak{B}_0' = (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^0) \cup \mathfrak{B}_0$ *sei.*

Beweis: Wir definieren Θ^+ über dem gleichen Objektbereich wie Θ und setzen:

1) $\Theta^+(x) = \Theta(x)$ für alle x aus $\mathfrak{B}_0'$. Dann sind Θ, Θ^+ nach **1.2.3** $\mathfrak{B}_0'$-äquivalent.

$\mathfrak{V}_{1.1}$, $\mathfrak{V}_{1.2}$, $\mathfrak{V}_{2.1}$, $\mathfrak{V}_{2.2}$, ... sei eine Zerlegung von $\mathfrak{V}^0$-$\mathfrak{V}_0$ in abzählbar unendlich viele abzählbar unendliche disjunkte Teilklassen. $z^i_{k.l}$ $(i,k=1,2,\ldots;$ $l=1,2)$ durchlaufe für $k=1,2,\ldots$ die Elemente von $\mathfrak{V}_{i.l}$. Es seien $\wedge x^1_{k.1} A^1_{k.1}[x^1_{k.1}]$ für $k=1,2,\ldots$ die Allformeln, die höchstens freie **GV** aus $\mathfrak{V}_0$ enthalten und denen Θ^+ nach der Bestimmung (1) den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet[4]. Und es seien $\vee x^1_{k.2} A^1_{k.2}[x^1_{k.2}]$ die Existenzformeln, die höchstens freie **GV** aus $\mathfrak{V}_0$ enthalten und denen Θ^+ nach (1) den Wert $\mathfrak{w}$ zuordnet. Wenn wir nun $x^1_{k.l}$ frei umbenennen in $z^1_{k.l}$, so ändert sich nach **1.2.3** nichts an dem Wahrheitswert dieser Formeln. Nach **1.2.1** gibt es dann zu jeder dieser Formeln eine Interpretation $\Theta^1_{k.1}$, bzw. $\Theta^1_{k.2}$, so dass gilt $\Theta^1_{k.1}(A^1_{k.1}[z^1_{k.1}])=\mathfrak{f}$, bzw. $\Theta^1_{k.2}(A^1_{k.2}[z^1_{k.2}])=\mathfrak{w}$, wobei $\Theta^1_{k.l}$ mit Θ^+ übereinstimmt für alle freien Variablen in diesen Formeln bis auf höchstens $z^1_{k.l}$. Wir setzen:

2) $\Theta^+(z^1_{k.l})=\Theta^1_{k.1}(z^1_{k.l})$. Dann ist Θ^+ normal bzgl. aller Formeln, die nur freie **GV** aus $\mathfrak{V}_0$ enthalten, da nach **1.2.3** gilt:

$$\Theta^+(A^1_{k.l}[z^1_{k.l}])=\Theta^1_{k.l}(A^1_{k.l}[z^1_{k.l}]).$$

Im $(i+1)$ - ten Schritt der Definition von Θ^+ betrachten wir die Formeln $\wedge x^i_{k.1}A^i_{k.1}[x^i_{k.1}]$, bzw. $\vee x^i_{k.2}A^i_{k.2}[x^i_{k.2}]$, die nur freie **GV** aus den Mengen $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{V}_{1.1}$, $\mathfrak{V}_{1.2}$, ... , $\mathfrak{V}_{i-1.1}$, $\mathfrak{V}_{i-1.2}$ enthalten und mindestens eine freie **GV** aus $\mathfrak{V}_{i-1.1}$ oder $\mathfrak{V}_{i-1.2}$ und denen Θ^+ nach den Bestimmungen (1) bis (i) den Wert $\mathfrak{f}$, bzw. $\mathfrak{w}$ zuordnet. Die $x^i_{k.l}$ werden frei in $z^i_{k.l}$ umbenannt in diesen Formeln. Es gibt dann Interpretationen $\Theta^i_{k.l}$, die mit Θ^+ für alle freien Variablen in $A^i_{k.l}[z^i_{k.l}]$ bis auf höchstens $z^i_{k.l}$ übereinstimmen, und für die gilt:

$$\Theta^i_{k.1}(A^i_{k.1}[z^i_{k.1}])=\mathfrak{f},\ \text{bzw.}\ \Theta^i_{k.2}(A^i_{k.2}[z^i_{k.2}])=\mathfrak{w}.$$

Wir setzen:

i+1) $\Theta^+(z^i_{k.l}) = \Theta^i_{k.1}(z^i_{k.l})$.

Legt man Θ^+ in dieser Weise für alle **GV** fest, so ist Θ^+ normal, da es für jede falsche All-,bzw. für jede wahr Existenzformel eine Zahl m gibt, so dass alle freien **GV** der Formel den Mengen $\mathfrak{V}_0$, ... , $\mathfrak{V}_{m-1.2}$ angehören und mindestens eine freie **GV** der Menge $\mathfrak{V}_{m-1.1}$ oder $\mathfrak{V}_{m-1.2}$ angehört. Dann ist aber die Normalität von Θ^+ bzgl. dieser Formeln durch die Bestimmungen (1) bis (m+1) sichergestellt.

Um die Bedeutung des Satzes **1.2.5** zu beleuchten, wollen wir ihn benützen für einen einfachen Beweis des Satzes von Löwenheim in der Form:

1.2.6 *Zu jeder Interpretation Θ und jeder Menge $\mathfrak{V}_0$ von* **GV** *der in* **1.2.5** *angegebenen Art gibt es eine $\mathfrak{V}_0$-äquivalente Interpretation Θ^* über einem abzählbaren Objektbereich.*

Beweis: Nach **1.2.5** gibt es zu Θ eine $\mathfrak{V}_0$-äquivalente normale Interpretation Θ^+. Wir definieren Θ^* über dem Wertevorrat γ der Funktion Θ^{+2} und setzen: $\Theta^*(x) = \Theta^+(x)$ für alle x aus $\mathfrak{V}_0$, und $\Theta^{*3\cdot n}(F) = \Theta^{+3\cdot n}(F)\cap\gamma^n$ (γ^n sei die n-te Cartesische Potenz von γ). Θ^* ist dann über einem abzählbaren Objektbereich definiert und es gilt:

I) $\Theta^*(A) = \Theta^+(A)$ für alle Formeln A, also gilt auch $\Theta^*(A) = \Theta(A)$ für alle Formeln, die nur freie **GV** aus $\mathfrak{V}_0$ enthalten.
Die Behauptung (I) beweist man durch Induktion nach dem Grad der Formeln A. Die Induktionsbasis erhält man direkt aus der Definition von Θ^* und **1.2.1** (c1). Für den Induktionsschritt betrachten wir nur den folgenden Fall: (I) sei bewiesen für alle Formeln vom Grad $<n$, $\wedge xB[x]$ sei vom Grad n. Es gilt:

$$\Theta^+(\wedge xB[x]) = \mathfrak{w} \ \mathit{seq} \ O\overline{\Theta}^+ (\overline{\Theta}^+ \underset{x}{=} \Theta^+ \ \mathit{seq} \ \overline{\Theta}^+ (B[x]) = \mathfrak{w}) \qquad \text{(II}$$
$$\mathit{seq} \ O\,\overline{\Theta}^* (\overline{\Theta}^* \underset{x}{=} \Theta^* \ \mathit{seq} \ \overline{\Theta}^* (B[x]) = \mathfrak{w}) \qquad \text{(III}$$

Andernfalls wäre (II) wahr und es gäbe ein $\overline{\Theta}^*$, so dass $\overline{\Theta}^* \underset{x}{=} \Theta^* \ \mathit{et}$ $\overline{\Theta}^*(B[x]) = \mathfrak{f}$. Nach Festlegung von γ gäbe es dann eine **GV** y, so dass $\Theta^*(y) = \overline{\Theta}^*(x)$. Nach **1.2.3** würde dann gelten $\Theta^*(B[y]) = \mathfrak{f}$, also nach Induktionsvoraussetzung $\Theta^+(B[y]) = \mathfrak{f}$, im Widerspruch zur Annahme, (II) sei wahr. Ferner gilt: (III) *seq* $\Theta^*(\wedge xB[x]) = \mathfrak{w}$, und

$\Theta^+(\wedge xB[x]) = \mathfrak{f}$ *seq* $Ey(y \in \mathfrak{V}^0 \ \mathit{et} \ \Theta^+(B[y]) = \mathfrak{f})$, da Θ^+ normal ist
seq $Ey(y \in \mathfrak{V}^0 \ \mathit{et} \ \Theta^*(B[y]) = \mathfrak{f})$, nach Induktionsvoraussetzung
seq $E\overline{\Theta}^*(\overline{\Theta}^* \underset{y}{=} \Theta^* \ \mathit{et} \ \overline{\Theta}^*(B[y]) = \mathfrak{f})$ (man setze $\overline{\Theta}^* = \Theta^*$)
seq $\Theta^*(\wedge yB[y]) = \mathfrak{f}$
seq $\Theta^*(\wedge xB[x]) = \mathfrak{f}$, nach **1.2.3**[5].

1.3 Bewertungen

1.3.1 Als *Bewertung* bezeichnen wir eine einstellige Funktion Φ, die die Formeln von **P** so in die Menge $\{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ abbildet, dass gilt:

a) $\Phi(\neg A) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Phi(A) = \mathfrak{f}$,
b) $\Phi(A \wedge B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Phi(A) = \mathfrak{w}$ *et* $\Phi(B) = \mathfrak{w}$,
c) $\Phi(A \vee B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Phi(A) = \mathfrak{w}$ *vel* $\Phi(B) = \mathfrak{w}$,
d) $\Phi(A \supset B) = \mathfrak{w}$ *äq* $\Phi(A) = \mathfrak{f}$ *vel* $\Phi(B) = \mathfrak{w}$,
e) $\Phi(\wedge xA[x]) = \mathfrak{w}$ *äq* $Oy(y \in \mathfrak{V}^0 \ \mathit{seq} \ \Phi(A[y]) = \mathfrak{w})$,
f) $\Phi(\vee xA[x]) = \mathfrak{w}$ *äq* $Ey(y \in \mathfrak{V}^0 \ \mathit{et} \ \Phi(A[y]) = \mathfrak{w})$.

Man sieht leicht ein, dass eine Bewertung nach diesen Bedingungen für alle Formeln definiert ist, wenn sie für alle Atomformeln definiert ist, und dass jede beliebige Belegung der Atomformeln mit Wahrheitswerten eine Bewertung definiert. Während durch Interpretationen primär die **GV** (im Sinne von Eigennamen) und die **PV** (im Sinne von Prädikaten) gedeutet wurden, werden durch Bewertungen nur Formeln gedeutet.

Angesichts der Verschiedenheit der Klauseln **1.2.1** (c6), (c7) und **1.3.1** (e), (f) ist eine Entsprechung zwischen Bewertungen und Interpretationen nicht ohne weiteres offenbar. Sie wird durch folgenden Satz hergestellt:

1.3.2 *Zu jeder normalen Interpretation* Θ *gibt es eine äquivalente Bewertung* Φ (dh. eine Bewertung, die allen Formeln den gleichen Wahrheitswert zuordnet wie Θ), *und umgekehrt.*

Beweis: a) Θ sei vorgegeben. Wir definieren Φ durch die Festsetzung:
I) $\Phi(A) = \Theta(A)$ für alle Atomformeln A,
und zeigen durch Induktion nach dem Grad der Formeln A

II) $\Phi(A) = \Theta(A)$ für alle Formeln A.
Der Beweis ist trivial, in den prädikatenlogischen Fällen des Induktionsschrittes muss man die Normalität von Θ benützen.
b) Φ sei vorgegeben. γ sei ein abzählbar unendlicher Objektbereich. Wir wählen für Θ^2 irgendeine eineindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}^0$ auf γ und setzen:

$$\Theta^{3 \cdot n}(F) = \lambda z E x_1, \ldots, x_n(x_1, \ldots, x_n \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; et \; z = \langle \Theta^2(x_1), \ldots, \Theta^2(x_n) \rangle \; et \; \Phi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w})$$

für alle F aus $\mathfrak{B}^n$. Dann gilt wieder (II).
Induktionsbasis:

$$\Theta(F(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w} \; \ddot{a}q \; \langle \Theta(x_1), \ldots, \Theta(x_n) \rangle \varepsilon \Theta(F)$$
$$\ddot{a}q \; E y_1, \ldots, y_n (y_1, \ldots, y_n \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; et \; \langle \Theta(x_1), \ldots, \Theta(x_n) \rangle = \langle \Theta(y_1), \ldots, \Theta(y_n) \rangle \; et \; \Phi(F(y_1, \ldots, y_n)) = \mathfrak{w})$$
$$\ddot{a}q \; \Phi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w}, \text{ da } \Theta^2 \text{ eineindeutig ist.}$$

Es sei (II) bewiesen für alle Formeln A vom Grad $< n$. Wir greifen nur einen Fall heraus: $\wedge x A[x]$ sei vom Grad n. Dann gilt:

$$\Theta(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w} \; \ddot{a}q \; O\overline{\Theta}(\overline{\Theta} \mathrel{\overline{\overline{\scriptstyle x}}} \Theta \; seq \; \overline{\Theta}(A[x]) = \mathfrak{w}) \qquad \text{(III}$$
$$\ddot{a}q \; Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; seq \; \Theta(A[y]) = \mathfrak{w}). \qquad \text{(IV}$$

Aus (III) folgt (IV) trivialerweise. Und sei (IV) wahr, (III) falsch, so gibt es ein $\overline{\Theta}$, so dass gilt: $\overline{\Theta} \mathrel{\overline{\overline{\scriptstyle x}}} \Theta \; et \; \overline{\Theta}(A[x]) = \mathfrak{f}$. Nach Festsetzung von Θ^2 gibt es dann eine **GV** y, so dass gilt $\Theta(y) = \overline{\Theta}(x)$, also nach **1.2.3** $\Theta(A[y]) = \overline{\Theta}(A[x]) = \mathfrak{f}$, im Widerspruch zur Annahme, (IV) sei wahr. Ferner ist

(IV) $\ddot{a}q \; Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0 \; seq \; \Phi(A[y]) = \mathfrak{w})$, nach Induktionsvoraussetzung
$\ddot{a}q \; \Phi(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$.

1.3.3 Als *Sequenz* (**SQ**) bezeichnen wir ein geordnetes Paar von Formelmengen, von denen eine auch leer sein kann. Die erste Menge nennen wir Menge der Vorderformeln (**VF**), die zweite Menge der Hinterformeln (**HF**). Seien $A_1, \ldots, A_m$ die **VF**, $B_1, \ldots, B_n$ die **HF** einer **SQ** Σ, so symbolisieren wir Σ durch den Ausdruck "$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$".

1.3.4 Wir sagen bzgl. einer Interpretation Θ, die **SQ** Σ sei ein *Schluss*, wenn Θ einer **VF** von Σ den Wert $\mathfrak{f}$ oder einer **HF** von Σ den Wert $\mathfrak{w}$ zuordnet. - Wir nennen die **SQ** einen allgemeingültigen Schluss (auch: einen prädikatenlogischen Schluss), wenn Σ bzgl. jeder Interpretation ein Schluss ist.
Es ist dann $\rightarrow B_1, \ldots, B_n$ ein prädikatenlogischer Schluss, wenn jede Interpretation mindestens eine der Formeln $B_1, \ldots, B_n$ wahr macht, und $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ ist ein prädikatenlogischer Schluss, wenn jede Interpretation mindestens eine der Formeln $A_1, \ldots, A_m$ falsch macht.
Es gilt nun der Satz:

1.3.5 Σ *ist ein prädikatenlogischer Schluss genau dann, wenn jede Bewertung, die alle* **VF** *von* Σ *erfüllt* (dh. wahr macht), *auch mindestens eine* **HF** *von* Σ *erfüllt.*

Definiert man also die prädikatenlogischen Schlüsse in Entsprechung zu

1.3.4 unter Bezugnahme auf Bewertungen, so zeichnet man die gleiche Menge von **SQ** aus wie durch **1.3.4**.

Der Beweis für **1.3.5** ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen **1.2.5** und **1.3.2**. Wir können annehmen, dass die **SQ** Σ nur freie **GV** aus einer Menge $\mathfrak{B}_0$ enthält, die der Bedingung des Satzes **1.2.5** genügt. Ist nun Σ kein prädikatenlogischer Schluss, so gibt es eine Interpretation, die alle **VF** von Σ erfüllt, aber keine **HF** von Σ. Dann gibt es nach **1.2.5** eine $\mathfrak{B}_0$-äquivalente normale Interpretation und nach **1.3.2** eine äquivalente Bewertung, die das gleiche leistet. Und gibt es umgekehrt eine Bewertung, die alle **VF** von Σ erfüllt, aber keine **HF**, so gibt es nach **1.3.2** eine Interpretation, die das gleiche leistet.[6]

Im Hinblick auf **1.3.5** kann man also behaupten, dass die Bewertungssemantik bzgl. der überlicherweise als grundlegender angesehenen Interpretationssemantik adäquat ist. Bevor wir im 3. Kapitel eine noch einfachere Version der prädikatenlogischen Semantik angeben, soll im nächsten Kapitel zunächst ein vollständiger und widerspruchsfreier Kalkül der klassischen Logik angegeben werden, an dem sich die Brauchbarkeit der Bewertungssemantik erweist.

2 *Der Kalkül* **KP**. Wir wollen in diesem Kapitel zuerst den Kalkül **KP** aufbauen, dann die Konstruktionsgedanken diskutieren, die ihm zugrunde liegen und ihn endlich als adäquat bzgl. der Bewertungssemantik - und damit wegen **1.3.5** auch als adäquat bzgl. der Interpretationssemantik erweisen.

2.1 Definitionen

2.1.1 Ein *Sequenzen-Satz* (**SS**) ist eine Kollektion von einer oder mehreren **SQ**, die wir als seine *Konstituenten* bezeichnen. Wir notieren **SS**, indem wir ihre Konstituenten durch das Zeichen ";" getrennt anschreiben.

2.1.2 Wir nennen eine **SQ** Σ *geschlossen*, wenn mindestens eine **VF** von Σ auch als **HF** von Σ auftritt. - Ein **SS** ist geschlossen, wenn alle seine Konstituenten geschlossen sind.

2.1.3 Wir sagen, eine Bewertung Φ *erfülle* die **SQ** Σ, wenn Φ alle **VF** von Σ erfüllt, aber keine **HF** von Σ. Φ erfüllt einen **SS** Σ', wenn Φ einen Konstituenten von Σ' erfüllt.

Demnach ist ein geschlossener **SS** nicht erfüllbar. Und es gilt:

2.1.4 *Eine* **SQ** Σ *ist erfüllbar genau dann, wenn sie kein prädikatenlogischer Schluss ist.*

Das folgt direkt aus **1.3.5** und **2.1.3**.

2.1.5 Ein **SS** Σ heisse *unmittelbare Folge* (**UF**) eines **SS** Σ', wenn Σ durch einmalige Anwendung einer Deduktionsregel von **KP** aus Σ' hervorgeht.

2.1.6 Eine *Herleitung* aus einer **SQ** Σ in **KP** ist eine Folge von **SS**, deren erstes Glied Σ ist und deren sämtliche übrigen Glieder **UF** des ihnen in der Folge unmittelbar vorhergehenden Gliedes sind.

2.1.7 Wir nennen eine Herleitung *geschlossen*, wenn sie einen geschlossenen **SS** enthält. Eine geschlossene Herleitung aus einer **SQ** Σ nennen wir einen *Beweis* für Σ in **KP**.

2.1.8 Ein *Faden* einer Herleitung $\mathfrak{H}$ aus Σ ist eine Folge von **SQ**, die aus jedem **SS** von $\mathfrak{H}$ genau einen Konstituenten enthält, und zwar einen solchen

Konstituenten, dass sämtliche Glieder der Folge ausser dem ersten (Σ) **UF** oder Konstituenten von **UF** des ihnen in der Folge unmittelbar vorhergehenden Gliedes sind - oder aber mit diesem identisch.

2.1.9 Wir nennen eine Herleitung $\mathfrak{H}$ *vollständig*, wenn für alle Fäden $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ gilt: $\mathfrak{F}$ enthält eine geschlossene **SQ** (wir sagen auch: $\mathfrak{F}$ ist geschlossen) oder jede nichtatomare **VF** und jede nichtatomare **HF** einer **SQ** von $\mathfrak{H}$ tritt in einer **SQ** von $\mathfrak{F}$ als Hauptformel auf. (Der Ausdruck "Hauptformel wird in **2.2** erklärt.)

Bei der Beschreibung von Herleitungen ist es meist günstiger, über konkrete Formelvorkommnisse zu sprechen, über **SQ**-Inschriften, Herleitungen als graphische Figuren etc. als über die vorstehend definierten abstrakten Gebilde. Da die genauen Unterscheidungen hierzu aber ebenso terminologisch langwierig wie der Sache nach einfach sind, wollen wir uns von ihnen dispensieren und, wo der Kontext das erlaubt, z.B. unter "Herleitung" einmal eine konkrete Figur, einmal das in **2.1.6** definierte Abstractum verstehen.

2.2 Die Deduktionsregeln von **KP.** Wir geben für jeden logischen Operator eine Regel der vorderen und der hinteren Beseitigung an. In diesem Sinn sind die Abkürzungen **VN** (Regel der vorderen Negationsbeseitigung), **HN** (Regel der hinteren Negationsbeseitigung) etc. zu verstehen.

$$\mathbf{VN}: \frac{\Delta,\ \neg A \to \Gamma;\ \Sigma}{\Delta,\ \underline{\neg A} \to A, \Gamma;\ \Sigma} \qquad \mathbf{HN}: \frac{\Delta \to \neg A, \Gamma;\ \Sigma}{\Delta,\ A \to \underline{\neg A}, \Gamma;\ \Sigma}$$

Erläuterung: Der **SS** über dem Strich stellt die Prämisse, der unter dem die Conclusio dar. Σ steht für einen unspezifizierten **SS**, der auch leer sein kann. Δ, Γ stehen für unspezifizierte Formelreihen, die auch leer sein können. Die spezifizierte **SQ** der Prämisse nennen wir *Haupt*-**SQ** der Regelanwendung, die spezifizierte(n) **SQ**(en) der Conclusio *Neben*-**SQ.** Die spezifizierte Formel der Haupt-**SQ** ist die *Hauptformel*, die von der Hauptformel verschiedenen spezifizierten Formeln der Conclusio sind die *Nebenformeln.* Die Unterstreichung der Hauptformel in der Conclusio soll andeuten, dass auf dieses Formelvorkommnis im weiteren Verlauf der Herleitung Deduktionsregeln nicht mehr angewendet werden sollen[7].

$$\mathbf{VK}: \frac{\Delta,\ A \wedge B \to \Gamma;\ \Sigma}{\Delta,\ \underline{A \wedge B}, A, B \to \Gamma;\ \Sigma} \qquad \mathbf{HK}: \frac{\Delta \to A \wedge B, \Gamma;\ \Sigma}{\Delta \to A, \underline{A \wedge B}, \Gamma;\ \Delta \to B, \underline{A \wedge B}, \Gamma;\ \Sigma}$$

$$\mathbf{VD}: \frac{\Delta, A \vee B \to \Gamma;\ \Sigma}{\Delta, \underline{A \vee B}, A \to \Gamma;\ \Delta, \underline{A \vee B},\ B \to \Gamma; \Sigma} \qquad \mathbf{HD}: \frac{\Delta \to A \vee B,\ \Gamma;\ \Sigma}{\Delta \to A, B, \underline{A \vee B}, \Gamma;\ \Sigma}$$

$$\mathbf{VI}: \frac{\Delta, A \supset B \to \Gamma;\ \Sigma}{\Delta, \underline{A \supset B} \to A, \Gamma;\ \Delta, \underline{A \supset B}, B \to \Gamma;\ \Sigma} \qquad \mathbf{HI}: \frac{\Delta \to A \supset B,\ \Gamma;\ \Sigma}{\Delta, A \to \underline{A \supset B}, B, \Gamma;\ \Sigma}$$

$$\mathbf{VA}: \frac{\Delta,\ \bigwedge x A[x] \to \Gamma;\ \Sigma}{\Delta,\ \underline{\bigwedge x A[x]},\ A[y_1], \ldots, A[y_n] \to \Gamma;\ \Sigma}$$

Dabei seien $y_1, \ldots, y_n$ genau die **GV**, die in den Formeln der Haupt-**SQ** frei vorkommen. Kommt in diesen Formeln keine **GV** frei vor, so ist $n = 1$ und y_1 beliebig zu wählen.

$$\text{HA:}\quad \frac{\Delta \rightarrow \wedge xA[x], \Gamma;\ \Sigma}{\Delta, B_1[y], \ldots, B_s[y] \rightarrow A[y], C_1[y], \ldots, C_t[y], \underline{\wedge xA[x]}, \Gamma;\ \Sigma}$$

Dabei sei y eine **GV**, die in der Haupt-**SQ** nicht frei vorkommt. Die $B_i[y]$ $(i=1, \ldots, s)$ seien diejenigen Formeln, zu denen in Δ eine Formel der Gestalt $\underline{\wedge zB_i[z]}$ auftritt. Die $C_k[y]$ $(k=1, \ldots, t)$ seien diejenigen Formeln, zu denen in Γ eine Formel der Gestalt $\underline{\vee zC_k[z]}$ auftritt. (Es ist dabei wesentlich, dass diese All-, bzw. Existenzformeln in Δ, bzw. Γ unterstrichen sind.)

$$\text{VE:}\quad \frac{\Delta, \vee xA[x] \rightarrow \Gamma;\ \Sigma}{\Delta, \underline{\vee xA[x]}, A[y], B_1[y], \ldots, B_s[y] \rightarrow C_1[y], \ldots, C_t[y], \Gamma;\ \Sigma}$$

Dabei seien die y, B_i, C_k wie für **HA** gewählt.

$$\text{HE:}\quad \frac{\Delta \rightarrow \vee xA[x], \Gamma;\ \Sigma}{\Delta \rightarrow A[y_1], \ldots, A[y_n], \underline{\vee xA[x]}, \Gamma;\ \Sigma}$$

Dabei seien die $y_1, \ldots, y_n$ wie für **VA** gewählt.

2.3 Die Konstruktionsgedanken für den Kalkül **KP**

Der Kalkül **KP**, dessen Deduktionsbegriff durch **2.1** und **2.2** festgelegt ist, ist ein Kalkül des natürlichen Schliessens in Sequenzenform. Solche Kalküle hat zuerst Gentzen in [4] entworfen. Unser Kalkül ist eine Formalisierung der Tableaux-Methode, die Beth zusammenfassend in [1] dargestellt hat. Dass in **KP** nicht wie üblich **SQ** aus **SQ**, sondern **SS** aus **SS** hergeleitet werden, hat den Zweck, die Beschreibung der Herleitungen einfacher zu gestalten: anstatt auf dem Kopf stehende stammbaumartige Gebilde sind Herleitungen in **KP** lineare Folgen.

Der wesentliche Vorzug von **KP** besteht nun in zwei Punkten:

1) Der Kalkül lässt sich auffassen als eine Formalisierung der Bewertungssemantik: Die Bedingungen **1.3.1** lassen sich im Hinblick auf **2.1.3** auch so formulieren, dass man sagt:
Φ erfüllt die **SQ** $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$ genau dann, wenn Φ die **SQ** $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ erfüllt; Φ erfüllt die **SQ** $\Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma$ genau dann, wenn Φ den **SS** $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta \rightarrow B, \Gamma$ erfüllt, usw. (Wir werden diese Überlegungen beim Beweis der Adäquatheit von **KP** genauer ausführen.) Dann sind **UF** im Sinne der Deduktionsregeln auch unmittelbare semantische Folgerungen und es steht so zu erwarten, dass sich die Adäquatheit von **KP** sehr einfach beweisen lässt.

2) Man hätte die Semantik nun auch so formalisieren können, dass man einen Beweis für eine **SQ** Σ so aufbaut, dass man ausgeht von geschlossenen **SQ** als Axiomen und Σ als Endglied der Herleitung gewinnt. Eine Herleitung aus Σ in **KP** stellt sich demgegenüber dar als der systematische Versuch, eine Bewertung zu konstruieren, die Σ erfüllt, die also zeigt, dass Σ kein prädikatenlogischer Schluss ist. In diesem Sinn versucht man bei der Konstruktion einer Herleitung aus Σ mithilfe der rein zerlegenden Regeln eine **SQ** zu gewinnen, die nur Atomformeln enthält und nicht geschlossen ist, und die eine solche Bewertung definiert (vgl. den Vollständigkeitsbeweis für **KP**).

Dieses Vorgehen hat den grossen praktischen Nutzen, dass sich jede

Herleitung rein mechanisch gewinnen lässt: Zu jedem prädikatenlogischen Schluss lässt sich in **KP** auf rein mechanischem Weg ein Beweis finden, so dass man also beim Beweisen der sich oft so hinderlich aufdrängenden Abhängigkeit von der Inspiration enthoben ist. Für die Aussagenlogik hat das Beweisverfahren den Charakter eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens, da hier alle vollständigen Herleitungen endlich sind. Auch im Fall der Prädikatenlogik hat man in der Existenz endlicher offener, vollständiger Herleitungen und in manchen Fällen auch in der Struktur einer unendlichen Herleitung ein Kriterium für die Unbeweisbarkeit von **SQ**.

2.4 Reguläre Herleitungen. Wir wollen nun zeigen, dass es für jede **SQ** Σ eine vollständige Herleitung aus Σ gibt.

2.4.1 Wir nennen die B_i- und C_k-Nebenformeln der Regeln **VE**, **HA** *Sekundärformeln* (**SF**) der betreffenden Hauptformeln. Ist A eine **SF** der Formel B, so nennen wir auch die Teilformeln von A **SF** von B[8]. - Wir sagen ferner, A sei eine **SF** vom Rang 0, wenn A keine **SF** ist, und A sei eine **SF** vom Rang $n+1$, wenn A **SF** einer **SF** vom Rang n ist.

2.4.2 Wir nennen eine Herleitung *regulär*, wenn bei ihrer Konstruktion Deduktionsregeln auf **SF** vom Rang n nur dann angewendet werden, wenn Deduktionsregeln auf **SF** vom Rang $< n$ nicht mehr an wendbar sind.

2.4.3 *Ist $\mathfrak{H}$ eine reguläre Herleitung und bricht $\mathfrak{H}$ nicht ab mit einem* **SS**, *der einen offenen Konstituenten enthält, auf den noch Deduktionsregeln angewendet werden können, so ist $\mathfrak{H}$ vollständig.* Beweis: 1) Der Abschnitt von $\mathfrak{H}$ von der ersten Regelanwendung auf eine **SF** vom Rang $n\,(n \geqslant 0)$ bis zur ersten Regelanwendung auf eine **SF** vom Rang $n+1$ ist endlich.
Σ sei die Zeile von $\mathfrak{H}$, in deren **SQ** nur mehr **SF** vom Rang n zur Regelanwendung offenstehen. Σ' sei eine **SQ** von Σ. Dann ist die Summe der Grade der nichtunterstrichenen Formeln von Σ', die nicht **SF** vom Rang n sind, 0. Sei s die Summe der Grade der nichtunterstrichenen **SF** vom Rang n, so erniedrigt sich s bei der Konstruktion einer Herleitung aus Σ' in jedem Schritt, ausser bei Anwendung von **VA**, **HE**. Da nur endlich viele vordere All- und hintere Existenzformeln als **SF** vom Rang n auftreten Können und da die Anzahl der in der Herleitung aus Σ' auftretenden freien **GV** endlich ist, muss nach endlich vielen Schritten $s=0$ werden, dh. nach endlich vielen Schritten erhalten wir einen **SS**, in dem nur **SF** vom Rang $n+1$ zur weiteren Regelanwendung offenstehen. Die Herleitung aus Σ', in der Deduktionsregeln nur auf **SF** vom Rang n angewendet werden, ist also endlich. Das gleiche gilt für die übrigen **SQ** von Σ. Damit ist (1) bewiesen.
2) Nun gibt es für jede nichtatomare Formel A eines nicht geschlossenen Fadens $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ eine Zahl n, so dass A **SF** vom Rang n ist. A muss dann nach Voraussetzung über $\mathfrak{H}$ wegen (1) nach endlich vielen Deduktionsschritten in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel auftreten, $\mathfrak{H}$ ist vollständig nach **2.1.9**.

Dass nicht jede hinreichend lange Herleitung vollständig ist, zeigt das Beispiel der **SQ** $\rightarrow \bigvee x \bigwedge y(F(x) \vee \neg F(y))$. Wendet man hier zunächst die Regel **HE** an, und dann ausschliesslich die Regel **HA**, so erhält man eine unendlich lange unvollständige Herleitung. Die Konstruktion einer regulären Herleitung aus dieser **SQ** ergibt hingegen nach wenigen Schritten eine geschlossene Herleitung.

2.5 Die Adäquatheit von **KP**. Wir wollen nun zeigen, dass der Kalkül **KP** adäquat ist bzgl. der Bewertungssemantik, dh. dass **KP** widerspruchsfrei and vollständig ist in folgendem Sinn:

2.5.1 *Wenn die* **SQ** Σ *in* **KP** *beweisbar ist, so ist* Σ *ein prädikatenlogischer Schluss.*
Beweis: 1) Wenn die Prämisse einer Deduktionsregel von **KP** erfüllbar ist, so auch die Conclusio.
Es ist zu zeigen: Wenn die Haupt-**SQ** einer Deduktionsregel erfüllbar ist, so auch eine der Neben-**SQ**. Das ergibt sich für alle Regeln ausser **VE, HA** unmittelbar aus den Bedingungen **1.3.1**. Greifen wir einen Fall heraus: Φ erfülle die Haupt-**SQ** von **HK**. Dann gilt $\Phi(A \wedge B) = \mathfrak{f}$, also $\Phi(A) = \mathfrak{f}$ vel $\Phi(B) = \mathfrak{f}$ nach **1.3.1** (b). Also erfüllt Φ eine der beiden Neben-**SQ** von **HK.**
Betrachten wir nun die Regel **HA:** Φ erfülle die Haupt-**SQ,** dh. es gelte $\Phi(\wedge xA[x]) = \mathfrak{f}$. Nach **1.3.1** (e) gibt es also eine **GV** z, so dass gilt $\Phi(A[z]) = \mathfrak{f}$. Ist z mit der **GV** y in der Neben-**SQ** von **HA** identisch, so gilt auch $\Phi(A[y]) = \mathfrak{f}$. Andernfalls wählen wir eine eineindeutige Abbildung ρ von $\mathfrak{V}^0$ auf sich selbst, die die Menge $\mathfrak{V}_0$ der in den Formeln der Haupt-**SQ** auftretenden freien **GV** identisch auf sich abbildet, und für die gilt $\rho(y) = z$. Wir definieren dann eine Bewertung Φ' durch die Festsetzung: $\Phi'(F(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(F(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)))$, die Φ' für alle Atomformeln fixiert. Man beweist durch Induktion nach dem Grad der Formeln leicht, dass für alle Formeln A gilt: $\Phi'(A[x_1, \ldots, x_n]) = \Phi(A[\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)])$, wo $x_1, \ldots, x_n$ die freien **GV** von A sind. Danach erfüllt auch Φ' die Haupt-**SQ** und es gilt: $\Phi'(A[y]) = \Phi(A[\rho(y)]) = \Phi(A[z]) = \mathfrak{f}$. Ferner gilt $\Phi'(\wedge zB_i[z]) = \mathfrak{w}$, da die Formel $\wedge zB_i[z]$ **VF** der Haupt-**SQ** ist, also nach **1.3.1** (e) $\Phi'(B_i[y]) = \mathfrak{w}$. Und $\Phi'(\vee zC_k[z]) = \mathfrak{f}$, da die Formel $\vee zC_k[z]$ **HF** der Haupt-**SQ** ist, also nach **1.3.1** (f) $\Phi'(C_k[y]) = \mathfrak{f}$. Φ', bzw. im Fall $z = y$ Φ, erfüllt also die Neben-**SQ** von **HA.**
Ebenso argumentiert man für die Regel **VE.**
2) Wäre nun Σ kein prädikatenlogischer Schluss, so wäre Σ nach **2.1.4** erfüllbar. Nach (1) wäre dann auch jeder **SS** einer Herleitung aus Σ erfüllbar. Nun gibt es aber nach Voraussetzung eine geschlossene Herleitung aus Σ, die also einen nicht erfüllbaren **SS** enthält. Also muss Σ ein prädikatenlogischer Schluss sein.

2.5.2 *Wenn* Σ *ein prädikatenlogischer Schluss ist, so ist* Σ *in* **KP** *beweisbar.*
Wir zeigen: Wenn Σ nicht beweisbar ist, so ist Σ erfüllbar. Daraus folgt mit **2.1.4** und Kontraposition unsere Behauptung.
Σ sei nicht beweisbar, dh. alle Herleitungen aus Σ sind offen. Nach **2.4** gibt es nun eine vollständige Herleitung $\mathfrak{H}$ aus Σ, die offen ist. $\mathfrak{F}$ sei ein offener Faden von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{V}_0$ sei die Menge der **GV**, die in Atomformeln von $\mathfrak{F}$ auftreten. ρ sei eine Abbildung von $\mathfrak{V}^0$ auf $\mathfrak{V}_0$, die $\mathfrak{V}_0$ identisch auf $\mathfrak{V}_0$ abbildet. Dann definieren wir eine Bewertung Φ durch folgende Festsetzungen:

a) $\Phi(A) = \mathfrak{w}$, wenn A eine Atomformel ist, die in $\mathfrak{F}$ als **VF** auftritt,
b) $\Phi(A) = \mathfrak{f}$, wenn A eine Atomformel ist, die in $\mathfrak{F}$ als **HF** auftritt,

c) $\Phi(A)$ beliebig, wenn A eine Atomformel mit **GV** nur aus $\mathfrak{V}_0$ ist, die in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt,

d) $\Phi(F(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(F(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)))$ für alle **PV** F und alle $x_1, \ldots, x_n$ aus $\mathfrak{V}^0$:

Wie man leicht durch Induktion nach dem Formelgrad verifiziert, gilt dann für alle Formeln A:I) $\Phi(A[x_1, \ldots, x_n]) = \Phi\ (A[\rho(x_1), \ldots, \rho(x_n)])$.

Wir nennen eine Formel A von $\mathfrak{F}$ *richtig plaziert*, wenn A **VF** von ist und es gilt $\Phi(A) = \mathfrak{w}$, oder wenn A **HF** von $\mathfrak{F}$ ist und es gilt $\Phi(A) = \mathfrak{f}$. Es gilt: II) Wenn eine Formel von Grad n $(n > 0)$ von $\mathfrak{F}$ falsch plaziert ist, so ist auch eine Formel vom Grad $< n$ von $\mathfrak{F}$ falsch plaziert. Das ergibt sich wieder in einfacher Weise aus den Bedingungen **1.3.1**. Wir greifen nur zwei Fälle heraus:

HK: $A \wedge B$ sei **HF** von $\mathfrak{F}$ und es gelte $\Phi(A \wedge B) = \mathfrak{w}$. Dann gilt nach **1.3.1** (b) auch $\Phi(A) = \Phi(B) = \mathfrak{w}$. Da $\mathfrak{H}$ vollständig ist, tritt $A \wedge B$ in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel der Regel **HK** auf, also tritt A oder B in $\mathfrak{F}$ als **HF** auf und ist dann in $\mathfrak{F}$ falsch plaziert.

VA: $\bigwedge x A[x]$ sei **VF** von $\mathfrak{F}$ und es gelte $\Phi(\bigwedge x A[x]) = \mathfrak{f}$. Dann gibt es nach **1.3.1** (e) eine **GV** z, so dass gilt $\Phi(A[z]) = \mathfrak{f}$. Nach (I) gilt dann auch $\Phi(A[\rho(z)]) = \mathfrak{f}$, wo $\rho(z)$ nun eine **GV** ist, die in Formeln von $\mathfrak{F}$ frei vorkommt. $\mathfrak{H}$ ist vollständig, also tritt $\bigwedge x A[x]$ in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel von **VA** auf, so dass in $\mathfrak{F}$ für jede **GV** y aus $\mathfrak{V}_0$ die Formel $A[y]$ in $\mathfrak{F}$ als **VF** auftritt (das wird durch die **SF** $B_i[y]$ in **HA, VE** sichergestellt). Also tritt auch $A[\rho(z)]$ in $\mathfrak{F}$ als **VF** auf und ist also in $\mathfrak{F}$ falsch plaziert.

Wäre nun eine Formel Grad $n > 0$ von $\mathfrak{F}$ falsch plaziert, so nach (II) auch eine Atomformel von $\mathfrak{F}$. Nun sind aber nach Definition von Φ alle Atomformeln von $\mathfrak{F}$ richtig plaziert, also sind alle Formeln von $\mathfrak{F}$ richtig plaziert. Daher erfüllt Φ alle **SQ** von $\mathfrak{F}$, insbesondere also auch die Anfangs-**SQ** Σ von $\mathfrak{H}$.

Damit ist der Satz **2.5.2** bewiesen. Aus ihm ergeben sich nun sofort die Sätze:

2.5.3 *Wenn eine Herleitung aus einer* **SQ** Σ *geschlossen ist, so sind alle vollständigen Herleitungen aus* Σ *geschlossen.*

Andernfalls wäre Σ nach **2.5.2** erfüllbar, nach **2.5.1** also nicht beweisbar. Durch Kontraposition erhält man:

2.5.4 *Wenn eine vollständige Herleitung aus einer* **SQ** Σ *offen ist, so sind alle Herleitungen aus* Σ *offen.*

Es kommt also bei der Konstruktion von Herleitungen auf die Reihenfolge der Regelanwendungen nicht an, solange man vollständige Herleitungen erzeugt. Bleibt man im Rahmen der regulären Herleitungen, so kann man also, wie wir oben behauptet haben, für jeden prädikatenlogischen Schluss auf rein mechanischem Weg einen Beweis finden.

3 *Die Interpretation von Sequenzen.* Während sich eine adäquate Interpretation der intuitionistischen Logik mit der Semantik, die im 1. Kapitel dieser Arbeit skizziert wurde, nicht durchführen lässt, soll in diesem Kapitel eine Semantik aufgebaut werden, in deren Rahmen sich klassische und intuitionistische Logik vergleichen lassen. Die folgenden Überlegungen liegen auf der Linie der Theorien, die von P. Lorenzen in [10] und von H. B. Curry in [3] entwickelt worden sind.

3.1 Folgebeziehungen und Systeme. In der Semantik nach 1.2 wurden primär **GV** (im Sinne von Eigennamen) und **PV** (im Sinne von Prädikaten) gedeutet. Die Deutung der Formeln ergab sich daraus. In der Bewertungssemantik nach **1.3** wurden nur Formeln (im Sinne von Sätzen) interpretiert. Aus der Interpretation der Sätze ergab sich dann die Charakterisierung der gültigen Schlüsse. Wir treiben die Abstraktion nun noch einen Schritt weiter, wenn wir im folgenden nicht Formeln, sondern nur **SQ** interpretieren. **SQ** sollen als Folgebeziehungen gedeutet werden und Formeln sollen nur im Kontext von Folgebeziehungen bedeutungsvoll sein. Dieser semantische Ansatz liegt nahe, sofern man sich auf die Betrachtung von Theorien beschränkt: hier interessiert in erster Linie nicht die Wahrheit oder Falschheit eines Satzes, sondern die Beweisbarkeit oder Widerlegbarkeit eines Satzes in der Theorie und das Bestehen oder Nichtbestehen deduktiver Zusammenhänge zwischen den Sätzen der Theorie. Wir wollen nicht nur formalisierte Theorien ins Auge fassen und daher zunächst davon absehen, welcher Art die Folgebeziehungen zwischen den Sätzen der Theorie im einzelnen sind, ob es sich um syntaktische, semantische oder etwa kausale Relationen handelt.

Wenn wir eine **SQ** semantisch als gültig auszeichnen, so soll das besagen, dass zwischen der Menge der **VF** und der Menge der **HF** dieser **SQ** eine Folgebeziehung besteht. Es soll nun der Rahmen der zur Interpretation von **SQ** zugelassenen Folgebeziehungen abgegrenzt werden.

3.1.1 Eine Folgebeziehung (**FB**) ist eine Relation zwischen zwei Satzmengen, von denen eine auch leer sein kann. Wir sprechen wieder von der Menge der **VF** und der Menge der **HF** und symbolisieren eine Aussage des Inhalts, dass zwischen den Formeln $A_1, \ldots, A_m$ und den Formeln $B_1, \ldots, B_n$ eine Beziehung der Folge besteht, durch den Ausdruck "$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$". Für jede **FB** soll ferner gelten:

RF) $\Delta, A \rightarrow A, \Gamma$ (Prinzip der Reflexivität),
VV) $\Delta \rightarrow \Gamma$ *seq* $\Delta, A \rightarrow \Gamma$ (Prinzip der vorderen Verdünnung),
HV) $\Delta \rightarrow \Gamma$ *seq* $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ (Prinzip der hinteren Verdünnung),
TR) $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ et $\Delta, A \rightarrow \Gamma'$ *seq* $\Delta \rightarrow \Gamma, \Gamma'$ (Prinzip der Transitivität).

Dabei seien Δ, Γ, Γ' Formelreihen, die auch leer sein können.

3.1.2 Von einer *Folgebeziehung i.e.S.* sprechen wir, wenn die **FB** nur für solche Mengen von **HF** definiert ist, die höchstens ein Element enthalten.

Sei Ω eine Formelreihe, die höchstens ein Element enthält, so lauten die Bedingungen **RF** bis **TR** für **FB** i.e.S. wie folgt:

RF) $\Delta, A \rightarrow A$,
VV) $\Delta \rightarrow \Omega$ *seq* $\Delta, A \rightarrow \Omega$,
HV) $\Delta \rightarrow$ *seq* $\Delta \rightarrow A$,
TR) $\Delta \rightarrow A$ *et* $\Delta, A \rightarrow \Omega$ *seq* $\Delta \rightarrow \Omega$.

Diese Bedingungen stellen die üblichen Forderungen an eine Konsequenzrelation dar, die man, wenn $K(\Delta)$ die Konsequenzmenge der Formeln aus Δ ist, oft auch so formuliert: $A \varepsilon K(A)$, $\Delta \subset \Delta'$ *seq* $K(\Delta) \subset K(\Delta')$, $K(K(\Delta)) \subset K(\Delta)$. **HV** enthält zusätzlich noch das Prinzip ex falso quodlibet.

Man kann den Ausdruck "$A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$". Wir lesen als "Aus den Formeln $A_1, \ldots, A_m$ folgt die Formel B", "$\rightarrow B$" als "B ist gültig", "$A \rightarrow$" als "A ist widergültig", "$A_1, \ldots, A_m \rightarrow$" als "Die Formeln $A_1, \ldots, A_m$ sind unverträglich".

Wenn man den Satz "$\Delta \rightarrow B_1, \ldots, B_n$" als synonym versteht mit dem Satz "$\Delta \rightarrow B_1$ vel ... vel $\Delta \rightarrow B_n$" - wir sprechen dann von einer *disjunktiven Deutung* der **FB** mit mehreren **HF** - dann kann man die Bedingungen **RF** bis **TR** in **3.1.1** rechtfertigen mithilfe der Bedingungen **RF** bis **TR** für **FB** i.e.S., die wir oben intuitiv begründet haben.

Wie man allgemein zweistellige Relationen auffassen kann als Mengen von geordneten Paaren, so können wir auch **FB** definieren durch Mengen von **SQ**.

3.1.3 Als *System* bezeichnen wir eine Menge von **SQ**, die eine **FB** definiert.
Ist **T** eine System, so muss also gelten:

1) Jede **SQ** der Gestalt $\Delta, A \rightarrow A, \Gamma$ ist Element von **T**,
2) $\Delta \rightarrow \Gamma \varepsilon \mathbf{T}$ *seq* $\Delta, A \rightarrow \Gamma \varepsilon \mathbf{T}$,
3) $\Delta \rightarrow \Gamma \varepsilon \mathbf{T}$ *seq* $\Delta \rightarrow A, \Gamma \varepsilon \mathbf{T}$,
4) $\Delta \rightarrow A, \Gamma \varepsilon \mathbf{T}$ *et* $\Delta, A \rightarrow \Gamma' \varepsilon \mathbf{T}$ *seq* $\Delta \rightarrow \Gamma, \Gamma' \varepsilon \mathbf{T}$.

Ist eine **SQ** Σ Element von **T**, so nennen wir Σ gültig in **T**. In Analogie zu **FB** i.e.S. kann man auch Systeme i.e.S. betrachten. Enthält eine System **T** nur atomare **SQ**, dh. **SQ**, deren **VF** und **HF** sämtlich Atomformeln sind, so nennen wir **T** eine *Atomsystem*. Eine Sonderfall eines Atomsystems ist das Minimalsystem **M**, das nur die atomaren **SQ** der Gestalt, $\Delta, A \rightarrow A, \Gamma$ enthält. Entsprechend sei **M*** das Minimalsystem i.e.S. das nur atomare **SQ** der Gestalt $\Delta, A \rightarrow A$ enthält.

3.1.4 Wir nennen ein System **T** *S-widerspruchsfrei* wenn es keine Formel A gibt, die in **T** zugleich gültig und widergültig ist.

3.1.5 Wir nennen eine (Atom-) System **T** *S-vollständig,* wenn für alle (Atom-) Formeln A gilt: A ist gültig in **T** oder A ist widergültig in **T**.
Das Präfix "*S*" soll dabei den Unterschied zu den semantischen Begriffen der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit, die wir bei dem Beweis der Adäquatheit von **KP** verwendet haben, hervorheben.

Beispiele von Systemen sind: 1) Eine empirische Theorie, in der die **FB** nicht rein logischer Natur ist, sondern zum Ausdruck von Gesetzen und Bedeutungspostulaten verwendet wird. 2) Eine formaler oder halbformaler Kalkül, in dem die **FB** die Beziehung der Ableitbarkeit $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ ist.

3.2 Klassische Gültigkeitsbedingungen. Der Grundgedanke der semantischen Interpretation von **SQ** als **FB** besteht nun darin, dass man atomare **SQ** als gültig auszeichnet durch Angabe eines Atomsystems **T**. Dann definiert man durch Hinzunahme prädikatenlogischer Gültigkeitsbedingungen zu jedem Atomsystem **T** eine Erweiterung **T'**, die nun auch nichtatomare **SQ** enthält. Mit diesen Gültigkeitsbedingungen kann man aus der Gültigkeit von **SQ**, die Teilformeln einer komplexen Formel A enthalten, auf die Gültigkeit einer **SQ** schliessen, die A als **VF**, bzw. **HF** enthält.

Wir geben zunächst klassische Gültigkeitsbedingungen an:

3.2.1 Ist **T** ein Atomsystem über der Sprache **P**, so gelten in **T'** folgende Bedingungen (dabei sind die Ausdrücke der Gestalt "$\Delta \rightarrow \Gamma$" zu lesen als Aussagen über das Bestehen einer **FB** in **T'**):

E) Jede in **T** gültige **SQ** ist auch in **T'** gültig, **T'** ist ein System
Vn) $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ *äq* $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$
Hn) $\Delta, A \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$
Vk) $\Delta, A, B \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta, A \wedge B \rightarrow \Gamma$
Hk) $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ *et* $\Delta \rightarrow B, \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma$
Vd) $\Delta, A \rightarrow \Gamma$ *et* $\Delta, B \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$
Hd) $\Delta \rightarrow A, B, \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow A \vee B, \Gamma$
Vi) $\Delta, B \rightarrow \Gamma$ *et* $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ *äq* $\Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$
Hi) $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$
Va) $\Delta, A[y_1], A[y_2], \ldots \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$, wo y_i für $i=1,2, \ldots$ alle **GV** aus $\mathfrak{B}^0$ durchlaufen soll,
Ha) $Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0$ *seq* $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma)$ *äq* $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$
Ve) $Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0$ *seq* $\Delta, A[y] \rightarrow \Gamma)$ *äq* $\Delta, \vee x A[x] \rightarrow \Gamma$
He) $\Delta \rightarrow A[y_1], A[y_2], \ldots, \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow \vee x A[x], \Gamma$, wo y_i wieder alle **GV** aus $\mathfrak{B}^0$ durchlaufe.

Da es sich bei diesen Bedingungen um kontextuale Gültigkeitsdefinitionen handelt, muss ihre Berechtigung nachgewiesen werden. Zunächst ist ohne weiteres klar, dass die Abschwächung des "*äq*" zu einem "*seq*" in den Bedingungen **3.2.1** zu Gültigkeitsbedingungen führt, die untereinander und mit den Gültigkeitsbedingungen für **T** verträglich sind. Die Umkehrungen dieser abgeschwächten Bedingungen sind aber beweisbar. Wir illustrieren die Beweismethode an drei Fällen:

Vn: In **T'** gelte $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$. Wegen $\Delta, A \rightarrow A$ gilt nach **Hn** $\Delta \rightarrow A, \neg A$. Mit **TR** erhalten wir daraus $\Delta \rightarrow A, \Gamma$.
Hn: Es gelte $\Delta \rightarrow A, \Gamma$, also nach **VV** $\Delta, A \rightarrow \neg A, \Gamma$. Aus $\Delta, A \rightarrow A$ erhalten wir mit **Vn** $\Delta, A, \neg A \rightarrow$, mit **HV** also $\Delta, A, \neg A \rightarrow \Gamma$. Mit **TR** folgt dann $\Delta, A \rightarrow \Gamma$.
Vi: Es gelte $\Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$. Wegen $\Delta, A, B \rightarrow B, \Gamma$ gilt nach **Hi** $\Delta, B \rightarrow A \supset B, \Gamma$, also mit **VV** und **TR** $\Delta, B \rightarrow \Gamma$. Aus $\Delta, A \rightarrow A, B$ erhalten wir mit **Hi** $\Delta \rightarrow A \supset B, A$ und mit **TR** $\Delta \rightarrow A, \Gamma$.

Durch diese Gültigkeitsbedingungen ist das System **T'** festgelegt, wenn **T** vorgegeben ist. Nennt man eine **SQ** *allgemeingültig*, wenn sie der Erweiterung **T'** jedes Atomsystems **T** angehört, so gilt der Satz:

3.2.2 *Eine* **SQ** *ist allgemeingültig genau dann, wenn sie gültig ist in* **M'**.
Das ergibt sich einfach daraus, dass **M** in jedem Atomsystem enthalten ist. Also ist **M'** in jedem erweiterten System **T'** enthalten.

Dem System **M'** kommt also für den Aufbau der Prädikatenlogik besondere Bedeutung zu, in der es uns um die Auszeichnung der allgemeingültigen **SQ** geht. Man sieht aus **3.3.2** auch, dass die Menge der allgemeingültigen **SQ** invariant ist gegenüber einer Einengung des Atomsystembegriffes auf aufzählbare, oder gar entscheidbare Mengen von atomaren, **SQ**, da **M** entscheidbar ist.

Für **M'** kann man nun die prädikatenlogischen Gültigkeitsbedingungen wie folgt vereinfachen:

Va') $\Delta, A[y_1], \ldots, A[y_n] \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$, wo $y_1, \ldots, y_n$

die **GV** seien, die in der letzteren **SQ** frei vorkommen. Falls dort keine **GV** frei vorkommt, ist $n=1$ und y_1 beliebig zu wählen.

Ha') $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$, wo y eine **GV** sei, die in der letzteren **SQ** nicht frei vorkommt.

Ve') $\Delta, A[y] \rightarrow \Gamma$ *äq* $\Delta, \vee x A[x] \rightarrow \Gamma$, wo y wie für **Ha'** gewählt sei.

He') $\Delta \rightarrow A[y_1], \ldots, A[y_n], \Gamma$ *äq* $\Delta \rightarrow \vee x A[x], \Gamma$, wo $y_1, \ldots, y_n$ wie für **Va'** gewählt seien.

Die Rechtfertigung dieser Bedingungen erfolgt über den Hilfssatz:
3.2.3 *Die freie Umbenennung einer freien* **GV** *in einer* **M'**-*gültigen* **SQ** *ergibt wieder eine* **M'**-*gültige* **SQ**.
Dieser Satz gilt, weil in **M**, also auch in **M'** keine **GV** ausgezeichnet ist. Formal beweist man den Satz durch Induktion nach dem grössten Grad einer Formel in einer **SQ**. Die Induktionsbasis ergibt sich wie folgt: Eine atomare **SQ** von **M** hat die Gestalt $\Delta, A \rightarrow A, \Gamma$. Wird durch die Umbenennung A nicht tangiert, so erhält man eine **SQ** der gleichen Gestalt, die wiederum Element von **M** sein muss. Geht A durch die Umbenennung in B über, so erhält man eine **SQ** von **M** der Gestalt $\Delta', B \rightarrow B, \Gamma'$. Im Induktionsschritt geht man mit Hilfe der Bedingungen **3.2.1** von einer **SQ** mit Formeln vom Grad $\leq n$ zu **SQ** mit Formeln vom Grad $<n$ über, nimmt darin unter Benützung der Induktionsannahme die Umbenennung vor und geht mit Hilfe der Bedingungen **3.2.1** wieder zu der **SQ** mit Formeln vom Grad $\leq n$ zurück.

Es gilt nun:
Va') Ist $\Delta, A[y_1], \ldots, A[y_n] \rightarrow \Gamma$ **M'**-gültig, so wegen **VV** auch $\Delta, A[y_1], A[y_2], \ldots \rightarrow \Gamma$, also nach **Va** auch $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$. Ist umgekehrt $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$ **M'**-gültig, so nach **Va** auch $\Delta, A[y_1], A[y_2], \ldots \rightarrow \Gamma$; benennt man nun alle von $y_1, \ldots y_n$ verschiedenen **GV** in dieser **SQ** in y_1 um, so erhält man nach **3.2.3** wieder eine **M'**-gültige **SQ**, nämlich $\Delta, A[y_1], \ldots, A[y_n] \rightarrow \Gamma$.
Ha') Ist $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma$ **M'**-gültig, so sind nach **3.2.3** auch alle durch freie Umbenennungen von y daraus entstehenden **SQ** **M'**-gültig also gilt für **M'** $Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0$ seq $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma)$, also ist $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$ nach **Ha** **M'**-gültig. Ist umgekehrt diese letztere **SQ** **M'**-gültig, so nach **Ha** auch $Oy(y \varepsilon \mathfrak{B}^0$ seq $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma)$ in **M'**, und daraus erhält man durch Spezialisierung die **M'**-gültige **SQ** $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma$.

Ebenso argumentiert man für die Bedingungen **Ve'** und **He'**.[9]

3.3 Die Adäquatheit von **KP**. Wir beweisen nun, dass der Kalkül **KP**, der, wie wir in **2.5** gesehen haben, eine Formalisierung der klassischen Logik ist, adäquat ist auch bzgl. der in **3.2** definierten Semantik. Damit ergibt sich dann auch, dass die oben als allgemeingültig ausgezeichneten **SQ** genau die prädikatenlogischen Schlüsse im Sinne von **1.3.4** sind.[10]

Man kann den Kalkül **KP** auch auffassen als eine direkte Formalisierung der Gültigkeitsbedingungen **3.2.1**. Das geht aus den folgenden Beweisen hervor.

3.3.1 *Ist die* **SQ** Σ *in* **KP** *beweisbar, so ist sie allgemeingültig.* Beweis: $\mathfrak{H}$ sei ein Beweis für Σ in **KP**. Dann enthält $\mathfrak{H}$ einen geschlossenen **SS** Σ', dessen sämtliche Konstituenten also **M'**-gültig sind. Es gilt nun: I) Sind alle Konstituenten der Conclusio einer Deduktionsregel von **KP** **M'**-gültig, so auch alle Konstituenten der Prämisse. Es ist zu zeigen: Sind alle Neben-**SQ** einer Deduktionsregel **M'**-gültig, so ist auch die Haupt-**SQ** **M'**-gültig. Das ergibt sich für alle Regeln ausser **HA** and **VE** sofort aus den Bedingungen **3.2.1**. Betrachten wir den Fall **HA**: Die Neben-**SQ** $\Delta, B_1[y], \ldots, B_s[y] \rightarrow A[y], C_1[y], \ldots, C_t[y], \underline{\wedge x A[x]}, \Gamma$ sei **M'**-gültig. Nun treten in Δ die Formeln $B_1[z]$ für alle **GV** z, die in der Haupt-**SQ** frei vorkommen, auf. Das ergibt sich daraus, dass $\underline{\wedge x B_1[x]}$ in Δ vorkommt, und aus der Struktur der Regeln **VA, HA, VE.** Man kann dann mit **Va'** und nachfolgender Anwendung von **VV** auf die **M'**-Gültigkeit der **SQ** Δ, $B_2[y], \ldots, B_s[y] \rightarrow A[y], C_1[y], \ldots, C_t[y], \underline{\wedge x A[x]}, \Gamma$ schliessen. Durch gleichartige Elimination der Formeln $B_2[y], \ldots, B_s[y]$ und entsprechende Elimination der Formeln $C_1[y], \ldots, C_t[y]$ erhält man die **M'**-gültige **SQ** $\Delta \rightarrow A[y], \underline{\wedge x A[x]}, \Gamma$. Mit **Ha'** ergibt sich daraus, dass auch die **SQ** $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \underline{\wedge x A[x]}, \Gamma$ **M'**-gültig ist, die mit der Haupt-**SQ** $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$ identisch ist.
Mit (I) folgt aus der **M'**-Gültigkeit aller Konstituenten von Σ' die **M'**-Gültigkeit von Σ, und mit **3.2.2** die Allgemeingültigkeit von Σ.

3.3.2 *Ist die* **SQ** Σ *allgemeingültig, so ist* Σ *in* **KP** *beweisbar.* Beweis: Ist $\mathfrak{H}$ eine vollständige Herleitung aus Σ in **KP** - die Existenz einer solchen Herleitung folgt aus **2.4.3** - und $\mathfrak{F}$ ein Faden von $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{F}$ geschlossen, oder jede nichtatomare Formel einer **SQ** von $\mathfrak{F}$ tritt in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel auf. Im letzteren Fall bilden wir die **SQ** Σ^*, die als **VF** alle **VF** von **SQ** von $\mathfrak{F}$, als **HF** alle **HF** von **SQ** von $\mathfrak{F}$ enthält, wobei die Formelunterstreichungen fortgelassen werden. Σ^* ist nun **M'**-gültig. Denn Σ ist allgemeingültig, also **M'**-gültig und Σ^* enthält alle **VF** von Σ als **VF**, alle **HF** von Σ als **HF**, Es gilt nun: Wenn man in Σ^* alle Formeln vom Grad>0 streicht, indem man mit den Formeln vom höchsten Grad beginnt und die Formeln vom Grad n vor den Formeln vom Grad n-1 streicht, so erhält man eine atomare **SQ** Σ^{**}, die **M'**-gültig ist.
Das ergibt sich direkt aus den Bedingungen **Vn** bis **Hi** und **Ha, Ve** aus **3.2.1**, sowie den Bedingungen **Va'** und **He'**. Greifen wir einen Fall heraus: Σ^{*1} sei aus Σ^* entstanden durch Streichung aller Formeln vom Grad $> m$ und einigen Formeln vom Grad m. Σ^{*1} habe die Gestalt $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$ und sei **M'**-gültig. $\wedge x A[x]$ sei vom Grad m. Dann ist nach **Va'** auch die **SQ** $\Delta, A[y_1], \ldots, A[y_n] \rightarrow \Gamma$ **M'**-gültig, wo $y_1, \ldots, y_n$ die **GV** seien, die frei in den Formeln aus $\Delta, \wedge x A[x], \Gamma$ vorkommen. Nach der Voraussetzung über $\mathfrak{F}$ tritt $\wedge x A[x]$ in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel der Regel **VA** auf. In $\mathfrak{F}$ treten dann

alle Formeln $A[y_1], \ldots, A[y_n]$ als **VF** auf. Das geht aus der Struktur der Regeln **VA, HA, VE** hervor. Also kommen diese Formeln als **VF** von Σ^* und also in Δ vor, da sie vom Grad m-1 und also in Σ^{*1} noch nicht gestrichen sind. Also ist die **M'**-gültige **SQ** $\Delta, A[y_1], \ldots, A[y_n] \rightarrow \Gamma$ mit $\Delta \rightarrow \Gamma$ identisch. Da Σ^{**} **M'**-gültig ist und atomar, gibt es eine Atomformel A, die in Σ^{**} zugleich als **VF** und als **HF** auftritt. Das ergibt sich aus der Definition von **M.** A muss also in $\mathfrak{F}$ als **VF** und als **HF** auftreten. Trete A zuerst in der Zeile m von $\mathfrak{F}$ als **VF**, in der Zeile n von $\mathfrak{F}$ zuerst als **HF** auf, so ist die Zeile mit der Nummer Maximum (m,n) von $\mathfrak{F}$ bzgl. A geschlossen.
Also sind alle Fäden von $\mathfrak{H}$ geschlossen, und damit auch $\mathfrak{H}$ selbst. $\mathfrak{H}$ ist also ein Beweis für Σ in **KP.**

Da der Adäquatheitsbeweis für KP besonders einfach ist, ist er ein Argument für die semantische Begründung der klassischen Logik nach **3.2.** Ein weiteres Argument ist die Vergleichbarkeit der klassischen mit der intuitionistischen Logik im Rahmen dieser Semantik, auf die wir im nächsten Abschnitt zu sprechen kommen. Endlich ist die angegebene semantische Theorie frei von einer Reihe von problematischen mengentheoretischen Voraussetzungen. Während sich in der Bewertungssemantik die Definition der allgemeingültigen Schlüsse auf die Menge aller Bewertungen bezog, die im klassischen Sinn verstanden überabzählbar ist und Funktionen enthält, die sich konstruktiv auf keine Weise erzeugen lassen, wird hier die Allgemeingültigkeit einer **SQ** fixiert durch die **M'**-Gültigkeit, die Gültigkeit in einem rekursiv aufzählbaren System.

Zu bemerken ist aber, dass die klassischen Gültigkeitsbedingungen nach **3.2.1** unverträglich sind mit der disjunktiven Deutung der **SQ** mit mehreren **HF.** So ist z.B. sind **SQ** $A \rightarrow A$ (A sei eine Atomformel) also nach **Hn** auch $\rightarrow \neg A, A$ allgemeingültig, während in **M'** weder $A \rightarrow$ noch $\rightarrow A$, also nach **Hn** auch nicht $\rightarrow \neg A$ *vel* $\rightarrow A$ gilt. Wir werden aber im nächsten Abschnitt sehen, dass eine Verträglichkeit der klassischen Gültigkeitsbedingungen mit der disjunktiven Deutung erreicht wird, wenn man sich auf die Betrachtung von S-vollständigen Systemen beschränkt.

3.4 Die konstruktive Semantik. Nach der klassischen Auffassung der Logik, wie sie exemplarisch von Frege vertreten wurde, drücken die logischen Aussagen Sachverhalte einer idealen Wirklichkeit aus. Sie sind wahr oder falsch, je nachdem diese Sachverhalte in dieser idealen Wirklichkeit realisiert sind oder nicht. Logische Wahrheit ist also eine Sache objektiver Tatbestände, sie besteht unabhängig davon, ob es der menschlichen Intelligenz gelingt, oder auch nur gelingen kann, diese Wahrheit festzustellen. Von daher versteht sich das Postulat der Wahrheitsdefinitheit der Sätze, auf dem die klassische Logik aufbaut.

Nach der konstruktiven Auffassung, die wir hier zugrunde legen wollen, ist Wahrheit im logischen Bereich hingegen eine Sache der Festlegung. Ein logischer Satz ist wahr genau dann, wenn er als wahr festgesetzt worden ist. Die Festsetzung der Wahrheit und Falschheit von Sätzen geschieht üblicherweise durch die Angabe eines axiomatischen Kalküls **K**, in dem die beweisbaren Sätze als wahr, die widerlegbaren Sätze als falsch ausgezeichnet werden. Da nicht alle Kalküle S-vollständig sind, entfällt für die konstruktive Logik das Postulat der Wahrheitsdefinitheit. Axiomatischen Kalkülen kann man die Gestalt von **SQ**-Kalkülen geben: Schreibt man die Axiome A von **K** in der Gestalt $\rightarrow A$, die Deduktionsregeln von **K** in der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$, so wird der Herleitungsbegriff (und als Spezialisierung der Beweisbegriff) von **K** vermittels dieser **SQ** definiert durch Hinzunahme der **SQ** der Gestalt

RF) $\Delta, A \rightarrow A$ und durch die Regeln:
VV) $\Delta \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \rightarrow \Omega$
TR) $\Delta \rightarrow A; \Delta, A \rightarrow \Omega \vdash \Delta \rightarrow \Omega$.

Der Widerlegungsbegriff wird vermittels des Prinzips ex falso quodlibet definiert: Ein Satz A ist in **K** widerlegbar - allgemein: A ist mit den Sätzen aus Δ unverträglich - wenn aus A, bzw. aus Δ, A jeder beliebige Satz der **K** zugrunde liegenden Sprache herleitbar ist. Schreibt man "$\Delta, A \rightarrow$" für "die Sätze Δ, A sind unverträglich", so erhält man die Regel

HV) $\Delta, A \rightarrow \ \vdash \Delta, A \rightarrow \Omega$

Wir können also axiomatische Kalküle als Definitionssysteme für die Wahrheit und Falschheit von Sätzen darstellen als axiomatische SQ-Kalküle oder *axiomatische Systeme*, wie wir auch sagen wollen. Die konstruktive Semantik wird also von der Betrachtung axiomatischer Systeme ausgehen. Damit ist auch der Weg zu ihrem Aufbau vorgezeichnet, den zuerst P. Lorenzen [10] und H. B. Curry [3] beschritten haben: Man setzt in der Semantik fest, welche logisch komplexen Sätze wahr und welche falsch sein sollen. Diese Festsetzung erfolgt wieder durch Angabe eines axiomatischen Systems. Da die Festsetzung des Wahrheitswerts der komplexen Sätze in Abhängigkeit vom Wahrheitswert ihrer Teilsätze vorgenommen werden soll, stellt sich dieses semantische System dar als Erweiterung $\mathbf{T}^+$ eines zugrunde gelegten axiomatischen Atomsystems **T**.

Die semantischen Wahrheitsbedingungen werden also als Beweisbedingungen formuliert und damit nimmt die konstruktive Semantik selbst schon die Gestalt eines Kalküls an.

3.4.1 Sei **T** ein axiomatisches Atomsystem, so definieren wir $\mathbf{T}^+$ als Erweiterung von **T** durch Hinzunahme folgender Regeln:

vn) $\Delta \rightarrow A \vdash \Delta, \neg A \rightarrow$ **hn)** $\Delta, A \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow \neg A$
vk) $\Delta, A, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Omega$ **hk)** $\Delta \rightarrow A; \Delta \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \wedge B$
vd) $\Delta, A \rightarrow \Omega; \Delta, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Omega$ **hd)** $\Delta \rightarrow A \vdash \Delta \rightarrow A \vee B$
$\Delta \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \vee B$
vi) $\Delta \rightarrow A; \Delta, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Omega$ **hi)** $\Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B$
va) $\Delta, A[y] \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Omega$ - dabei sei y eine beliebige **GV.**
ha) $\Delta \rightarrow A[y] \vdash \Delta \rightarrow \wedge x A[x]$ - dabei sei y eine **GV**, die nicht frei in den Sätzen aus $\Delta, \wedge x A[x]$ vorkommt und die nur in solchen Axiomen von $\mathbf{T}^+$ frei vorkommt, die durch Umbenennung aller freien Vorkommnisse von y in eine beliebige andere **GV** stets wieder in Axiome von $\mathbf{T}^+$ übergehen.

ve) $\Delta, A[y] \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \vee x A[x] \rightarrow \Omega$ - dabei sei y wie für **ha** gewählt.
he) $\Delta \rightarrow A[y] \vdash \Delta \rightarrow \vee x A[x]$ - dabei sei y eine beliebige **GV.**

In $\mathbf{T}^+$ gelten nun die Schemata **RF**, **VV**, **HV** und **TR** auch für komplexe Sätze.

Zur intuitiven Begründung der Regeln **ha** und **ve** ist folgendes zu sagen: Man strebt eine Regel etwa der hinteren Alleinführung an, für die gilt: Wenn beweisbar ist, dass für alle **GV** z die **SQ** $\Delta \rightarrow A[z]$ in $\mathbf{T}^+$ beweisbar sind, so ist in $\mathbf{T}^+$ auch $\Delta \rightarrow \wedge x A[x]$ beweisbar. Wenn nun ein Beweis für $\Delta \rightarrow A[y]$ vorliegt, wo y die Bedingung von **ha** erfüllt, so kann man diesen Beweis in einen Beweis für $\Delta \rightarrow A[z]$ umformen, indem man y in z umbenennt in den Formeln dieses Beweises und, wofern durch diese Umbenennung die Variablenbedingungen von **ha**, bzw. **ve** für eine andere Variable verletzt wird, auch diese in passender Weise umbenennt. Durch die Angabe eines Beweises für $\Delta \rightarrow A[y]$ ist also gezeigt, dass für alle **GV** z die **SQ** $\Delta \rightarrow A[z]$ in $\mathbf{T}^+$ beweisbar sind. Die Beweisbarkeit von $\Delta \rightarrow A[y]$ ist also hinreichend für die Beweisbarkeit von $\Delta \rightarrow \wedge x A[x]$ im angestrebten Sinn. Die Regeln **ha** und **ve** sind aber u.U. zu schwach. Eine stärkere Version dieser Regeln ist jedoch für unseren Zusammenhang uninteressant. Denn wir zielen hier ab auf die allgemeingültigen **SQ**, d.h. auf die **SQ**, die in allen Erweiterungen axiomatischer Atomsysteme beweisbar sind. Das sind aber genau die SQ, die in der Erweiterung $\mathbf{M}^{*+}$ des Minimalsystems $\mathbf{M}^*$ beweisbar sind. Daher ist das konstruktive Logiksystem, das wir **IS** nennen wollen, mit $\mathbf{M}^{*+}$ identisch. Da nun **IS** nur Axiome nach dem Schema **RF** enthält, so ist der zweite Teil der Variablenbedingung für **ha** und **ve** überflüssig und wir können diese Bedingung ersetzen durch: Dabei sei y eine **GV**, die in den Sätzen aus Δ, $\wedge x A[x]$ nicht frei vorkommt. Wenn nun für alle **GV** z die **SQ** $\Delta \rightarrow A[z]$ in **IS** beweisbar sind, so ist auch $\Delta \rightarrow A[y]$ beweisbar, wo y eine Variable nach dieser Bedingung ist. Für **IS** sind also die Regeln **ha** und **ve** hinreichend stark.

Um zu zeigen, dass die oben formulierte konstruktive Semantik eine adäquate Semantik der intuitionistischen Logik ist, beweisen wir die Äquivalenz von **IS** mit dem intuitionistischen **SQ**-Kalkül **G1**, den S. C. Kleene in [8], S. 442f. angegeben hat. Dem Kalkül **G1** liegt ein streng syntakischer **SQ**-Begriff zugrunde, der sich aber im Hinblick auf die Vertauschungs - und Kontraktionsregeln in unseren **SQ**-Begriff überführen lässt.

3.4.2 *Jeder Beweis einer* **SQ** Σ *in* **G1** *lässt sich in einen Beweis für* Σ *in* **IS** *umformen und umgekehrt.*

Um aus einem Beweis in **G1** einen Beweis in **IS** zu erhalten, stellt man den Anwendungen von **vi**, **vk** und **TR** Anwendungen von **VV** voraus. Aus einem Beweis in **IS** erhält man einen Beweis in **G1**, wenn man eine Anwendung von **vk** ersetzt durch eine zweimalige Anwendung von $\& \rightarrow$ mit nachfolgender Kontraktion, und wenn man die Axiome von **IS** aus denen von **G1** mithilfe der Regel **VV** ableitet.

Diese Überlegung ergibt, dass zu jedem Beweis in **G1** ein Beweis in **IS** existiert mit der gleichen End-**SQ**, der, abgesehen von zusätzlichen Anwendungen von **VV**, nur Anwendungen gleichnamiger Regeln enthält.

Wegen der Gültigkeit des Gentzenschen Hauptsatzes für **G1** (vgl. [8], S. 453ff) gilt also der Satz

3.4.3 *Die Regel* **TR** *ist im Kalkül* **IS** *entbehrlich.* Ferner gilt:

3.4.4 *Die Regel* **VV** *ist in* **IS** *entbehrlich.*

Denn wenn in einem vorgegebenen Beweis in **IS** die Regel **VV** angewendet wird, um aus einer **SQ** $\Delta \rightarrow \Omega$ die **SQ** $\Delta, A \rightarrow \Omega$ abzuleiten, so kann man im Beweis für $\Delta \rightarrow \Omega$ in allen **SQ** die **VF** A einführen und erhält so einen Beweis für $\Delta, A \rightarrow \Omega$ ohne die fragliche Anwendung von **VV**, da die Axiome von **IS** durch Hinzufügung neuer **VF** wieder in Axiome übergehen. Dabei ist bei einer Verletzung der Variablenbedingung für **ve** oder **ha** für eine **GV** diese **GV** wieder in passender Weise umzubenennen.

3.4.5 *Die Regel* **HV** *ist in* **IS** *entbehrlich, wenn man die Regel* **vn** *durch die Regel* **vn'**: $\Delta \rightarrow A \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \Omega$ *ersetzt.*

Denn die Regel **HV** ist nur auf **SQ** der Gestalt $\Delta \rightarrow$ anwendbar, die in **IS** nur durch Anwendung von **vn** beweisbar sind. Ersetzt man also **vn** durch **vn'** und setzt für Ω die durch **HV** einzuführende **HF**, so erhält man einen Beweis ohne Anwendungen von **HV**. Da **vn'** in **IS** zulässig ist, erweitert man durch die Ersetzung von **vn** durch **vn'** den Beweisbegriff von **IS** nicht. Den Kalkül, der aus **IS** durch Streichung der Regeln **VV,HV,TR** und Ersetzung von **vn** durch **vn'** entsteht, wollen wir **IS'** nennen. **IS'** ist also mit **IS** äquivalent.

3.5 Das Verhältnis von klassischer und intuitionistischer Logik. Wenn man von der konstruktiven Semantik in **3.4** ausgeht, kann man die klassische Logik begründen, indem man sich auf die Betrachtung **S**-vollständiger axiomatischer Atomsysteme beschränkt. Um das zu zeigen, müssen wir zunächst einen Beweisbegriff für **SQ** mit mehreren **HF** für die Systeme $\mathbf{T}^+$ und speziell für **IS** definieren. Wir wählen dazu die disjunktive Deutung und können dann zu $\mathbf{T}^+$ die Regel **HV** in der Gestalt $\Delta \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma, A$ hinzunehmen. Es gilt dann in $\mathbf{T}^+$ auch: Wenn eine **SQ** $\Delta \rightarrow C_1, \ldots, C_n$ beweisbar ist, so ist auch eine **SQ** $\Delta \rightarrow C_i$ beweisbar für ein i aus $1, \ldots, n$. Dann sind auch die Regeln **TR** in der verallgemeinerten Form nach **3.1.1** und

Vn$^+$) $\Delta \rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$ **Vk**$^+$) $\Delta, A, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Gamma$
Hk$^+$) $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma$
Hd$^+$) $\Delta \rightarrow A, B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \vee B, \Gamma$ **Vi**$^+$) $\Delta \rightarrow A, \Gamma;\ \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$
Va$^+$) $\Delta, A[y] \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$, wo y eine beliebige **GV** ist -
Ha$^+$) $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$, wo y eine **GV** ist, die nicht frei in den Sätzen aus Δ, Γ, $\wedge x A[x]$ vorkommt -
Ve$^+$) $\Delta, A[y] \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \vee x A[x] \rightarrow \Gamma$, wo y wie für **Ha**$^+$ gewählt wird -
He$^+$) $\Delta \rightarrow A[y], \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \vee x A[x], \Gamma$, wo y eine beliebige **GV** ist -

in **IS** zulässig.

Das sieht man für die Regel **Vn**$^+$ z.B. so ein: Wenn $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ in **IS** beweisbar ist, so ist $\Delta \rightarrow \Gamma$ in **IS** beweisbar, also mit **VV** auch $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$, oder es ist $\Delta \rightarrow A$ in **IS** beweisbar, also $\Delta, \neg A \rightarrow$ und mit **HV** daher auch $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$.

Betrachten wir nun die **SQ**, die in den Erweiterungen $\mathbf{T}^+$ aller **S**-vollständigen Systeme **T** beweisbar sind, so sind das diejenigen **SQ**, die in **IS** beweisbar sind, wenn man folgendes Beweisschema hinzunimmt:

D) Wenn Σ eine **SQ**, Σ' ein *SS* und A eine Atomformel ist und es gilt $\rightarrow A; \Sigma' \vdash \Sigma$ und $A \rightarrow; \Sigma' \vdash \Sigma$, so gilt $\Sigma' \vdash \Sigma$.

In dem so erweiterten System **IS** kann man das Schema **D** auch für nichtatomare Formeln A verwenden. Das kann man durch Induktion nach dem Grad der Formel A beweisen. Wir greifen nur zwei Fälle heraus:

a) Wenn gilt $\rightarrow \neg A \vdash \Sigma$ und $\neg A \rightarrow \vdash \Sigma$, so gilt wegen $\rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow$ und $A \rightarrow \vdash \rightarrow \neg A$ auch $A \rightarrow \vdash \Sigma$ und $\rightarrow A \vdash \Sigma$.

b) Wenn gilt $A \wedge B \rightarrow \vdash \Sigma$ und $\rightarrow A \wedge B \vdash \Sigma$, so gilt wegen $A \rightarrow \vdash A, B \rightarrow \vdash A \wedge B \rightarrow$ auch $A \rightarrow \vdash \Sigma$ und wegen $B \rightarrow \vdash A, B \rightarrow \vdash A \wedge B \rightarrow$ und $\rightarrow A; \rightarrow B \vdash \rightarrow A \wedge B$ auch $\rightarrow A \vdash \Sigma$.[11]

Das erweiterte System **IS** ist nun mit dem System **ISK** äquivalent, das die Axiome $\Delta, A \rightarrow A, \Gamma$ enthält und die Deduktionsregeln **VV**, **HV**, **TR** (in der Form **3.1.1**), die oben angeführten Regeln $\mathbf{Vn}^+$ bis $\mathbf{He}^+$, sowie die Regeln:

$\mathbf{Hn}^+$) $\Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$

$\mathbf{Vd}^+$) $\Delta, A \rightarrow \Gamma; \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$

$\mathbf{Hi}^+$) $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$

Denn es gilt:

A) Alle Axiome von **ISK** sind in **IS** beweisbar mit **HV**. Und alle Deduktionsregeln von **ISK** sind im erweiterten Systems **IS** zulässig. Das ist für die Regeln $\mathbf{Hn}^+$, $\mathbf{Vd}^+$, $\mathbf{Hi}^+$ noch zu beweisen:

$\mathbf{Hn}^+$) $\rightarrow A; \Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ (mit **TR**) $\vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$ (mit **HV**)
$A \rightarrow \vdash \rightarrow \neg A \vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$ (**HV**,**VV**)

Mit **D** erhält man also $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$.

$\mathbf{Vd}^+$) $\rightarrow A; \Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ (**TR**) $\vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$ (**VV**)
$A \rightarrow; B \rightarrow \vdash A \vee B \rightarrow \vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$ (**VV**,**HV**)
$\rightarrow B; \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ (**TR**) $\vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$ (**VV**).

Mit **D** also $\Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$.

$\mathbf{Hi}^+$) $\Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ (**HV**)
$\rightarrow A; \Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$ (**TR**) $\vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ (**HV**)
$A \rightarrow \vdash A \rightarrow B$ (**HV**) $\vdash \rightarrow A \supset B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ (**VV**,**HV**)

Nun gilt wegen $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma$ aber $\Delta, A \rightarrow B$ oder $\Delta, A \rightarrow \Gamma$. Also erhalten wir mit **D** $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$.

B) Ist die **SQ** Σ in **IS** beweisbar ohne Benützung des Schemas **D**, so ist Σ auch in **ISK** beweisbar, da die Axiome und Deduktionsregeln von **IS** (bei Anwendung von **HV** für $\mathbf{Hd}^+$ und $\mathbf{Vi}^+$) Spezialisierungen der Axiome und Deduktionsregeln von **ISK** sind. Ist die **SQ** $\Delta \rightarrow \Gamma$ im erweiterten System **IS** mit n Anwendungen des Schemas **D** beweisbar und ist bereits bewiesen, dass jede mit $m\,(m < n)$ Anwendungen von **D** in erweiterten System **IS** beweisbare **SQ** auch in **ISK** beweisbar ist, so ist $\Delta \rightarrow \Gamma$ auch in **ISK** beweisbar: Denn sei im vorliegenden Beweis die erste Anwendung von **D** vorgenommen bzgl. der Formel B, so dass zwei Beweise für $\Delta \rightarrow \Gamma$ im erweiterten System **IS** vorliegen, von denen einer die **SQ** $\rightarrow B$, der andere die **SQ** $B \rightarrow$ erhält, so fügen wir der ersteren **SQ** und allen im ersten Beweis auf sie folgenden **SQ** die **VF** B hinzu, der letzteren **SQ** und allen auf sie folgenden **SQ** im zweiten Beweis die **HF** B. Ferner sorgen wir dafür, dass in den beiden so entstehenden Beweisen die Variablenbedingungen für **Ha**$^+$ und **Ve**$^+$ nicht verletzt sind. Dann erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung daraus Beweise für $\Delta, B \rightarrow \Gamma$ und für $\Delta \rightarrow B, \Gamma$ in **ISK**, und daraus mit **TR** einen Beweis für $\Delta \rightarrow \Gamma$ in **ISK**.

Der Kalkül **ISK** ist nun eine Formalisierung der klassischen Logik. Das sieht man sofort durch einen Vergleich von **ISK** mit der klassischen Version des Kalküls **G1** in [8], S.442.[12]

Wenn im konzeptuellen Rahmen der konstruktiven Logik das Postulat der Wahrheitsdefinitheit zu übersetzen ist in die Forderung nach einer Beschränkung auf S-vollständige Systeme, so lässt sich also in dieser Beschränkung auch innerhalb des konstruktiven Ansatzes die klassische Logik begründen.

4 *Der Kalkül* **IP**. Wir wollen nun einen intuitionistischen Logikkalkül angeben, der den gleichen Vorteil bietet wie der klassische Kalkül **KP**, in dem also die Beweisbarkeit von **SQ** mit nur aussagenlogischen Formeln entscheidbar ist und in dem sich für jede beweisbare **SQ** mit Formeln der Prädikatenlogik auf rein mechanischem Wege ein Beweis finden lässt.

4.1 Definitionen

4.1.1 Als *Sequenzenbund* (**SB**) bezeichnen wir eine Kollektion von **SS**, die auch *B-Konstituenten* des **SB** genannt werden. Wir symbolisieren **SB**, indem wir die Ausdrücke für die B-Konstituenten durch das Zeichen ";;" getrennt anschreiben.

4.1.2 Wir nennen einen **SB** *geschlossen*, wenn einer seiner B-Konstituenten geschlossen ist.

4.1.3 Ein **SB** Σ heisse *unmittelbare Folge* eines **SB** Σ', wenn Σ durch einmalige Anwendung einer Deduktionsregel von **IP** aus Σ' hervorgeht.

4.1.4 Eine *Herleitung* aus einer **SQ** Σ in **IP** ist eine Folge von **SB**, deren erstes Glied Σ ist und deren sämtliche übrigen Glieder unmittelbare Folgen der ihnen in der Folge unmittelbar vorhergehenden Glieder sind.

4.1.5 Wir nennen eine Herleitung *geschlossen*, wenn sie einen geschlossenen **SB** enthält. Eine geschlossene Herleitung aus einer **SQ** Σ in **IP** nennen wir einen *Beweis* für Σ in **IP**.

4.1.6 Eine *Teilherleitung* einer Herleitung $\mathfrak{H}$ in **IP** ist eine Folge von **SS**, die aus jedem **SB** von $\mathfrak{H}$ genau einen B-Konstituenten enthält, und zwar solche B-Konstituenten, dass sämtliche Glieder der Folge ausser dem ersten unmittelbare Folgen oder B-Konstituenten unmittelbarer Folgen des ihnen in der Folge unmittelbar vorhergehenden Gliedes sind, oder aber mit diesem identisch.

Der Begriff des Herleitungsfadens sei wie in **2.1.8** bzgl. Teilherleitungen definiert.

4.2 Die Deduktionsregeln von **IP**

vN: $\dfrac{\Delta, \neg A \rightarrow \Omega\,; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, \neg A \rightarrow A;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$ **hN:** $\dfrac{\Delta \rightarrow \neg A;\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, A \rightarrow\,;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$

vK: $\dfrac{\Delta, A \wedge B \rightarrow \Omega\,; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, A \wedge B, A, B \rightarrow \Omega\,; \Sigma;;\, \Sigma'}$ **hK:** $\dfrac{\Delta \rightarrow A \wedge B;\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta \rightarrow A;\, \Delta \rightarrow B;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$

vD: $\dfrac{\Delta, A \vee B \rightarrow \Omega;\; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, A \vee B, A \rightarrow \Omega\,;\, \Delta, A \vee B, B \rightarrow \Omega; \Sigma;;\, \Sigma'}$ **hD:** $\dfrac{\Delta \rightarrow A \vee B;\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta \rightarrow A; \Sigma;;\, \Delta \rightarrow B;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$

vI: $\dfrac{\Delta, A \supset B \rightarrow \Omega;\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, A \supset B \rightarrow A;\, \Delta, A \supset B, B \rightarrow \Omega;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$ **hI:** $\dfrac{\Delta \rightarrow A \supset B;\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, A \rightarrow B;\, \Sigma;; \Sigma'}$

vA: $\dfrac{\Delta, \bigwedge x A[x] \rightarrow \Omega\,; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, \bigwedge x A[x], A[y] \rightarrow \Omega;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$ Dabei sei y eine beliebige **GV**.

hA: $\dfrac{\Delta \rightarrow \bigwedge x A[x]; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta \rightarrow A[y];\, \Sigma;;\, \Sigma'}$ Dabei sei y eine **GV**, die in der Formeln der Haupt-SQ nicht frei vorkommt.

vE: $\dfrac{\Delta, \bigvee x A[x] \rightarrow \Omega\,;\; \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta, \bigvee x A[x], A[y] \rightarrow \Omega;\, \Sigma;;\, \Sigma'}$ Dabei sei y wie für **hA** gewählt.

hE: $\dfrac{\Delta \rightarrow \bigvee x A[x];\, \Sigma;;\, \Sigma'}{\Delta \rightarrow A[y];\; \Sigma;;\, \Sigma'}$ Dabei sei y eine beliebige **GV**.

Die Termini "Haupt-**SQ**", "Hauptformel", "Neben-**SQ**" und "Nebenformel" übernehmen wir aus **2.2.** In den Regeln stehe Σ jeweils für einen (ev. leeren) **SS**, der zusammen mit der Haupt-**SQ** den *Haupt*-**SS** ausmacht, Σ' stehe für einen (ev. leeren) **SB**. Die näher spezifizierten **SS** der Conclusio nennen wir *Neben*-**SS.** Δ, Ω sind wieder Formelreihen, die auch leer sein können, Ω enthalte höchstens eine Formel.

Es gilt nun der Satz:

4.2.1 *Der Kalkül* **IP** *ist mit* **IS'** (und also mit **IS**) *äquivalent.*

Sei $\mathfrak{H}$ ein Beweis für Σ in **IP**, dann enthält $\mathfrak{H}$ eine Teilherleitung $\mathfrak{T}$, die mit einem geschlossenen **SS** endet. Wir können dann $\mathfrak{T}$ von unten nach oben als Beweis für Σ in **IS'** lesen. Das ergibt sich unmittelbar aus einem Vergleich der Regeln von **IS'** und **IP.** Einen Beweis für Σ in **IS'** kann man so umformen, dass die vordere Hauptformel einer Regelanwendung auch in den Prämissen auftritt. Den so entstehenden Beweis für Σ in **IS'** kann man von unten nach oben lesen als Teilherleitung aus Σ in **IP,** die man dann zu einer Herleitung aus Σ in **IP** vervollständigen kann.[13]

4.3 Mechanische Beweiskonstruktionen. **IP** ist nun noch nicht ein Kalkül, in dem man zu beweisbaren **SQ** auf rein mechanischem Weg einen Beweis konstruieren kann.[14] Vielmehr ist eine geschickte Auswahl in der Reihenfolge der Regelanwendungen in vielen Fällen entscheidend, wie das folgende

Beispiel zeigt: Die Konstruktion $\dfrac{\neg A \rightarrow \neg A \vee B}{\neg A \rightarrow A}$ ergibt im Gegensatz zu

$\dfrac{\neg A \rightarrow \neg A \vee B}{\neg A \rightarrow \neg A;;\neg A \rightarrow B}$ keine geschlossene Herleitung, wenn A eine Atomformel ist.

Wenn die Prämisse einer Regelanwendung die Gestalt $\Delta \rightarrow \Omega;\Sigma;;\Sigma'$ hat und die Formelreihe Δ,Ω enthält n nichtatomare Formeln, so gibt es in **IP** n Möglichkeiten einer Regelanwendung auf die Haupt-**SQ** $\Delta \rightarrow \Omega$. Es seien $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ $(m \geqslant n)$ die Neben-**SS** dieser n Regelanwendungen. Man kann nun zu einem mechanischen Beweisverfahren gelangen, wenn man zu einem Kalkül **IP'** übergeht, dessen Deduktionsregeln so geartet sind, dass sie die Prämisse $\Delta \rightarrow \Omega;\Sigma;;\Sigma'$ mit der Haupt-**SQ** $\Delta \rightarrow \Omega$ überführen in die Conclusio $\Sigma_1;; \ldots ;; \Sigma_m ;;\Sigma'$.

Schwierigkeiten machen dabei zunächst nur die prädikatenlogischen Regeln, bei deren Anwendung für die Wahl der **GV** y unendlich viele Möglichkeiten offenstehen, so dass also in den Conclusionen von **IP'** unendlich viele Neben-**SS** $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ auftreten können. Man kann in **IP** aber die Variablenbedingungen für diese Regeln wie folgt verschärfen:

B1) für **vA** und **hE**: y sei eine **GV**, die in den Formeln der Haupt-**SQ** frei vorkommt. Wenn in diesen Formeln keine **GV** frei vorkommt, ist für y die alphabetisch erste **GV** zu wählen.

B2) für **hA** und **vE**: y sei die alphabetisch erste **GV**, die in den Formeln der Haupt-**SQ** nicht frei vorkommt.

Sei $\mathfrak{H}$ ein Beweis in **IP**, $A[y]$ die Nebenformel einer Anwendung der Regel **vA** oder **hE** in $\mathfrak{H}$ und y entspreche nicht der Bedingung B1. Dann benennen wir y von der zu $A[y]$ gehörigen Neben-**SQ** an in den Beweisfäden von $\mathfrak{H}$, die diese **SQ** enthalten, von oben nach unten fortschreitend in eine **GV** z nach der Bedingung B1 um, wobei wir in einem Beweisfaden $\mathfrak{F}$ die Umbenennung nur so weit durchführen, wie in $\mathfrak{F}$ keine **SQ** auftritt, die y nicht frei enthält. Wenn dadurch die Variablenbedingung für eine **GV** x nach einer der Regeln **hA** oder **vE** verletzt wird, so benennen wir auch x in passender Weise um. Dadurch erhalten wir einen Beweis mit der gleichen Anfangs-**SQ**, da eine solche Umbenennung die Geschlossenheit der **SQ** nicht berührt. Auch die Bedingung B2 kann man für einen vorgelegten Beweis in IP durch einfache Umbenennungen von freien **GV** erfüllen.

Unter Berücksichtigung von B1 und B2 hat man aber auch im Falle der Anwendung von prädikatenlogischen Regeln von **IP** auf die **SQ** $\Delta \rightarrow \Omega$ nur endlich viele Neben-**SS** $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$. Denn die **SQ** $\Delta \rightarrow \Omega$ ist aus der Anfangs-**SQ** der Herleitung, die nur endlich viele freie **GV** enhalten kann, durch endlich viele Regelanwendungen in **IP** entstanden, durch die nur endlich viele neue freie **GV** eingeführt worden sind.

Wir sagen, eine **SQ** sei bzgl. einer Herleitung aus einer **SQ** Σ in **IP'** vom Grad *0*, wenn sie mit Σ identisch ist, sie sei vom Grad $n+1$, wenn sie Neben-**SQ** einer **SQ** vom Grad n ist. Wir sagen ferner, eine Herleitung in **IP'** sei *gleichmässig entwickelt,* wenn in ihr eine **SQ** vom Grad n nur dann als Haupt-**SQ** auftritt, wenn die Prämisse nur geschlossene **SQ** und **SQ** von Grad $\geqslant n$ enthält.

Die gleichmässige Entwicklung einer Herleitung aus einer in **IP** beweisbaren **SQ** Σ in **IP'** ergibt nun auf mechanischem Weg einen Beweis für Σ in **IP'** und zeichnet zugleich einen Beweis für Σ in **IP** von minimaler Länge aus.

Um das Verfahren der Konstruktion einer gleichmässig entwickelten Herleitung als Entscheidungsverfahren im aussagenlogischen Fall verwenden zu können, muss man die Regelanwendungen in **IP** und damit auch in **IP'** folgender Restriktion unterwerfen:

R) Eine von **hD** verschiedene Regel von **IP** darf zur Fortsetzung einer Herleitung $\mathfrak{H}$ auf eine **SQ** Σ nur dann angewendet werden, wenn sie keine Neben-**SQ** ergibt, die in dem Faden von $\mathfrak{H}$, der Σ enthält, bereits vorkommt. Die Regel **hD** darf auf Σ nur dann angewendet werden, wenn nicht beide Neben-**SQ** bereits in dem Faden von $\mathfrak{H}$, der Σ enthält, vorkommen.

Diese Restriktion engt den Beweisbegriff von **IP** nicht ein. Denn wenn man is **IS'** Beweise entbehren kann, die in einem Beweisfaden zwei gleiche **SQ** enthalten, so kann man solche Beweise nach dem Beweis für die Äquivalenz von **IS'** und **IP** auch in **IP** entbehren.

Sei nun Σ eine **SQ**, die nur aussagenlogische Formeln enthält. Dann gibt es nur endlich viele Teilformeln der Formeln aus Σ. Da jede **SQ** einer Herleitung aus Σ in **IP'** nur solche Teilformeln enthält, muss bei Beachtung der Restriktion R jeder Faden dieser Herleitung endlich sein. d.h. aber die Herleitung selbst ist endlich. Lässt sich eine nicht geschlossene Herleitung aus Σ in **IP'** ohne Verletzung der Restriktion R nicht mehr weiter entwickeln, so ist Σ in **IP** nicht beweisbar und also intuitionistisch nicht gültig.

Das Beweisverfahren in **IP'** ist für praktische Zwecke zu unhandlich und liefert im prädikatenlogischen Fall keine übersichtlichen Kriterien für die Unbeweisbarkeit von **SQ**. Deshalb wird man versuchen, durch Normierung der Regelanwendungen in **IP** dieses Verfahren zu vereinfachen. Auf diese Fragen wollen wir hier jedoch nicht mehr eingehen, da sie nur von technischem Interesse sind.

ANMERKUNGEN

1. Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

2. Vgl. etwa [2], S. 170, 192.

3. Vgl. hierzu auch die verwandten Begriffsbildungen in [6], [5] und [1], S. 263ff.

4. Man macht sich leicht klar, dass es zu jeder Interpretation Θ und jeder **GV** unendlich viele All-, bzw. Existenzformeln gibt, die diese **GV** frei enthalten und denen Θ Wert $\mathfrak{t}$, bzw. $\mathfrak{w}$ zuordnet.

5. An diesem Punkt wollen wir einen Blick auf die (reine) Prädikatenlogik höherer Stufe werfen. Ihre Behandlung wird deutlich anhand der Prädikatenlogik 2. Stufe P^2, in deren Ausdrücken nun auch Quantoren für **PV** vorkommen können. Interpretationen sind für P^2 wie in 1.2.1 zu definieren, wobei zusätzlich gilt: $\Theta^1(\wedge fA[f]) = \mathfrak{w}$ *äq* $O\,\overline{\Theta}(\overline{\Theta} \underset{f}{=} \Theta$ *seq* $\overline{\Theta}(A[f]) = \mathfrak{w})$, wo f eine **PV** ist. Daneben definiert man nun auch Sekundärinterpretationen (vgl. [7]): Eine Sekundärinterpretation über den (nichtleeren) Bereichen $\gamma, \pi^1, \pi^2, \ldots$ (wo γ ein Objektbereich ist, π^n für

$n=1,2,\ldots$ eine Teilmenge der Menge aller n-stelligen Relationen über γ) ist eine Interpretation, für die der Wertbereich von $\Theta^{3,n}$ beschränkt ist auf π^n. Die Definitionen und Sätze **1.2.2** bis **1.2.5** übertragen sich in einfacher Weise auf Interpretationen für P^2. Und man erhält das Henkin'sche Analogon zum Satz **1.2.6**, indem man beweist, dass es zu jeder Interpretation Θ von P^2 und jeder Menge $\mathfrak{B}_0$ von Variablen, so dass die Mengen $\mathfrak{B}^i$ - $\mathfrak{B}_0^i$ ($\mathfrak{B}_0^i$ sei Teilmenge von $\mathfrak{B}^i$, $\mathfrak{B}_0$ Vereinigung der Mengen $\mathfrak{B}_0^i$ für $i=0,1,2,\ldots$) sämtlich unendlich sind, eine $\mathfrak{B}_0$-äquivalente Sekundärinterpretation über abzählbaren Bereichen gibt. Der Beweis läuft wie der Beweis für **1.2.6**, wenn man setzt π^n = Wertbereich von $\Theta^{+3,n}$, wo Θ^+ eine normale, $\mathfrak{B}_0$-äquivalente Interpretation zu Θ ist. Henkin hat in [7] diese Betrachtungen verallgemeinert für den Fall einer prädikatenlogischen Typentheorie, die alle endlichen Prädikattypen umfasst.

6. Den zu **1.3.2** analogen Satz für P^2 erhält man, wenn man statt Interpretationen Sekundärinterpretationen betrachtet und die Sekundärinterpretation Θ bzgl. Φ so definiert, dass π^n der Wertbereich von $\Theta^{3,n}$ ist. - Man kann dann auch in strenger Analogie zu **KP** einen Kalkül für P^2 konstruieren, der bzgl. der Bewertungssemantik adäquat ist, wie man in Entsprechung zu **2.5** zeigen kann. Dieser Kalkül ist jedoch sehr schwach, so dass Henkin in [7] die Vollständigkeit stärkerer Kalküle bzgl. engerer Klassen von Sekundärinterpretationen bewiesen hat.

7. Die Mitführung der Hauptformeln in den Conclusionen dient nur praktischen Zwecken. Wie der Adäquatheitsbeweis für **KP** zeigt, erhält man einen mit **KP** äquivalenten Kalkül, wenn man die Hauptformeln in den Conclusionen streicht. Die Variablenbedingungen für die Regeln **VA, HA, VE, HE** sind dann entsprechend abzuändern.

8. A ist Teilformel von A und $\neg A$; A,B sind Teilformeln von $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ und für alle **GV** y ist $A[y]$ Teilformel von $\bigwedge xA[x]$ und $\bigvee xA[x]$. Die Teilformel relation ist transitiv.

9. Man beachte, dass die Bedingung für die Variablen $y_1, \ldots, y_n$ aufrecht zu erhalten ist, wenn aus der **M'**-Gültigkeit einer **SQ** auf die **M'**-Gültigkeit einer anderen **SQ** geschlossen werden soll. Das wird an folgendem Beispiel deutlich:

   $\bigwedge xA[x] \to \bigwedge xA[x]$ ist **M'**-gültig
   $A[y_1] \to \bigwedge xA[x]$ ist **M'**-gültig nach **Va'**
   $A[y_1] \to A[y_2]$ ist hingegen nicht **M'**-gültig. Die Regel **Ha'**

   ergibt hier eine neue **GV** y_2, so dass die **VF** $A[y_2]$ nachgetragen werden muss, wodurch man die **M'**-gültige **SQ** $A[y_1], A[y_2] \to A[y_2]$ erhält.

10. Man hätte die Adäquatheit von **KP** bzgl. der Semantik von **3.2** auch über den Satz beweisen können: Eine **SQ** Σ ist ein prädikatenlogischer Schluss genau dann, wenn Σ allgemeingültig ist. Jedoch geht es uns hier darum zu zeigen, dass der Adäquatheitsbeweis für **KP** mithilfe der Semantik aus **3.2** besonders einfach ist. Deshalb verwenden wir das Ergebnis aus **2.5** nicht.

11. Man beachte aber, dass aus der S-Vollständigkeit eines Atomsystems **T** wegen der schwachen Regeln **ha** und **ve** nicht die S-Vollständigkeit von $\mathbf{T}^+$ folgt.

12. Ein Äquivalenzbeweis von **ISK** und **KP** wäre etwas schwieriger, da wir den Kalkül **KP** mit der Zielsetzung eines mechanischen Beweisverfahrens formuliert haben und deshalb in **KP** gewisse Restriktionen aufgenommen haben, die für **ISK** erst nachzuweisen wären. Insbesondere wäre für **ISK** auch die Gültigkeit des Gentzenschen Hauptsatzes nachzuweisen.

13. Die Idee zum Aufbau eines Kalküls in der Art von **IP** geht auf Gentzen [4] zurück, ebenso wie das Entscheidungsverfahren für die intuitionistische Aussagenlogik. Solche Kalküle sind auch von Beth und Lorenzen angegeben worden in Form der Methode der semantischen tableaux in [1] und der Theorie der Dialogspiele in [11] und [9]. - Man beachte, dass die Mitführung der Hauptformeln in den Conclusionen der Regeln **vN,vI** und **vA** von **IP** im Gegensatz zu **KP** (vgl. Anm. 7) wesentlich ist. Das wird an folgendem Beispiel deutlich:

$$\begin{array}{lll}
 & \rightarrow\ \neg\neg(A \vee \neg A) & \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & & \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & A \vee \neg A & \text{(I} \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & A;;\ \neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A & \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & A;;\ \neg(A \vee \neg A), A \rightarrow & \text{(II} \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & A;;\ \neg(A \vee \neg A), A \rightarrow A \vee \neg A & \\
\neg(A \vee \neg A) \rightarrow & A;;\ \neg(A \vee \neg A), A \rightarrow A;;\ \neg(A \vee \neg A), A \rightarrow \neg A &
\end{array}$$

Hätte man in (I) die **VF** $\neg(A \vee \neg A)$ weggelassen, so würde die Herleitung mit dem **SS** (II) enden, wenn A eine Atomformel ist, und die **SQ** $\rightarrow\ \neg\neg(A \vee \neg A)$ wäre in **IP** nicht beweisbar.

14. Da die Beweise jedes formalen Kalküls rekursiv aufzählbar sind, gibt es zu jedem solchen Kalkül trivialerweise ein mechanisches Verfahren, nach dem sich zu jedem Theorem ein Beweis finden lässt. Diese trivialen Verfahren sind im allgemeinen jedoch viel zu unhandlich für praktische Zwecke. Daher die Bedeutung eines Kalküls wie **KP**. Der im folgenden angegebene Kalkül **IP'** liefert allerdings auch nur ein praktisch noch recht unhandliches Verfahren und enthält nur die ersten Schritte einer praktisch verwendbaren Beweismethode.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. W. Beth: *The Foundations of Mathematics,* Amsterdam 1959.

[2] A. Church: *Introduction to Mathematical Logic* I, Princeton N.J. 1956.

[3] H. B. Curry: *Foundations of Mathematical Logic,* New York 1963.

[4] G. Gentzen: Untersuchungen über das logische Schliessen, *Math. Zeitschrift 39* (1934/35), S. 176-210, 405-431.

[5] G. Hasenjäger: Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, *The Journal of Symbolic Logic* (*JSL*) *18* (1953), S. 42-48.

[6] L. Henkin: The Completeness of the First-order Functional Calculus, *JSL 14* (1949), S. 159-166.

[7] L. Henkin: Completeness in the Theory of Types, *JSL 15* (1950), S. 81-91.

[8] S. C. Kleene: *Introduction to Metamathematics,* Amsterdam 1952.

[9] K. Lorenz: *Arithmetik und Logik als Spiele,* Dissertation Kiel 1961.

[10] P. Lorenzen: *Einführung in die operative Logik und Mathematik,* Berlin 1955.

[11] P. Lorenzen: *Metamathematik,* Mannheim 1962.

[12] A. Tarski: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica 1* (1936), S. 261-405.

Universität München
München, Germany