Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume VI, Number 3, July 1965

SUR UN THÉOREME ÉQUIVALENT A L'AXIOME DU CHOIX

W. SIERPIŃSKI

Une information du professeur B. Sobociński sur ses résultats concernant les triades de Steiner[1] m'a suggéré le théorème **T** suivant:

T. *L'axiome du choix, A, est équivalent à la proposition P suivante: Pour toute famille F d'ensembles infinis il existe une correspondance d'après laquelle à tout ensemble E de F correspond une décomposition de l'ensemble E en paires disjointes* (c'est-à-dire en sous-ensembles de E sans éléments communs deux à deux, contenant chacun deux éléments).

Il résulte de A qu'il existe pour tout ensemble non vide une relation qui ordonne bien cet ensemble.[2]

Soit F une famille donnée d'ensembles infinis, R - l'ensemble réunion de tous les ensembles de la famille F. Il résulte de A l'existence d'une relation qui ordonne bien l'ensemble R et parsuite aussi tout ensemble E de la famille F. Si l'ensemble infini bien ordonné E a un dernier élément, on peut placer un nombre fini d'éléments de E avant tous les autres éléments de cet ensemble, de sorte qu'il soit bien ordonné et sans élément dernier. L'ensemble E se décompose alors en paires consécutives (formant un ensemble bien ordonné de paires disjointes). Il est ainsi démontré que $A \rightarrow P$ (c'est-a-dire que A implique P).

Nous allons maintenant a démontrer que $P \rightarrow A$.

L'axiome du choix A est, comme on sait, équivalent au *principe général du choix* G suivant:

G. Pour toute famille F d'ensembles non vides (pouvant avoir d'éléments communs) *il existe une correspondance d'après laquelle à tout ensemble E de F correspond un élément $\tau(E)$ de E.*[3]

1. Voir B. Sobociński: A theorem of Sierpiński on triads and the axiom of choice. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. V (1964), pp. 51-58.

2. Pour la démonstration voir, par exemple, mon livre *Cardinal and Ordinal Numbers*, Varsovie 1958, p. 411, Th. 5.

3. Pour la démonstration d'équivalence des propositions A et G voir, par exemple, mon livre cité, pp. 94-95.

Received April 12, 1965

Or, on ne diminue pas la généralité de la proposition G si l'on y suppose que tout ensemble de la famille F est infini. En effet, si l'ensemble E est fini (non vide), il suffit de le remplacer par le produit cartésien $H = E \times N$, où N est l'ensemble de tous les nombres naturels (H est donc l'ensemble, évidenment infini, de toutes les paires ordonées (p, n), où $p \epsilon E$ et $n \epsilon N$) et si $\tau(H) = (p, n)$, de poser $\phi(E) = p$.

Soit maintenant F une famille donnée d'ensembles infinis et S la réunion de tous les ensembles de la famille F. Il est bien connu qu'on sait définir un élément a distinct de tout élément de l'ensemble S. Soit E un ensemble de la famille F et soit E' l'ensemble qu'on obtient en adjoignant à l'ensemble E l'élément a. Soit F' la famille de tous les ensembles E', où $E \epsilon F$, et soit E' un ensemble de la famille F'. D'après la proposition P il existe une correspondance d'après laquelle à tout ensemble E' de F' correspond une décomposition de E' en paires disjointes. Entre ces paires il existe une seule qui contient l'élément a. Soit p l'élément de cette paire distinct de a. Il suffira de poser $\tau(E) = p$ pour avoir la correspondance dont il s'agit dans la proposition P.

On a donc $P \to G$ et, comme $G \to A$, on a $P \to A$.

Le théoreme **T** se trouve ainsi démontré.

Academie Polonaise des Sciences
Warszawa, Poland