NUEVA DEMOSTRACION DE LA COMPLETICIDAD FUNCIONAL DEL CALCULO PROPOSICIONAL BIVALENTE

LUIS ELPIDIO SANCHIS

1. *Introducción.* Por completicidad funcional del cálculo proposicional bivalente entendemos la posibilidad de expresar en el mismo, por medio de implicación y negación, toda función de verdad; se trata de un resultado bién conocido que permite estudiar en forma sistemática el mismo problema con relación a otros conectivos. La demostración que ofrecemos si bién no difiere esencialmente de las conocidas[1] ofrece un cierto interés en cuanto se utiliza en forma especial la técnica de la lógica combinatoria: en realidad se llega a construir un sistema simbólico perfectamente adecuado para la lógica proposicional por medio de un número finito de constantes y sin utilizar variables. Si bién la definición del sistema es en cierto sentido arbitraria, tiene la ventaja de excluir totalmente las expresiones formales sin significación en la interpretación del cálculo y además refleja en otro nivel la estructura de los sistemas formulados con variables.

Cabe señalar también que extendiendo algunas nociones típicas de la lógica combinatoria se logra integrar dentro del cálculo su interpretación semántica permitiendo definir de manera simple y directa las nociones propias de esta lógica, en especial la de tautología, tarea que si bién no se ha tocado en este trabajo resulta evidente la forma en que ha de ser orientada, así como su posible extensión a cálculos polivalentes.

2. *El Sistema formal* $\mathfrak{S}$. Los signos primitivos de este sistema son los siguientes

$(\,,), I, K, B, R, P, N, V, F$

Los dos primeros son signos auxiliares, y los demás constantes; I, K, B y R son constantes combinatorias, P y N constantes proposicionales, V y F átomos.[2]

De las expresiones que se construyen por concatenación a partir de los signos primitivos distinguimos las combinaciones, que se definen inductivamente en la siguiente forma:

1. Si α es una constante, α es una combinación.
2. Si α y γ son combinaciones, $(\alpha\gamma)$ es una combinación.

Received May 17, 1960

3. Una expresión es una combinación solo por aplicación de las reglas 1 o 2.

Como variables intuitivas para referirse a los elementos del sistema utilizaremos los siguientes signos: las letras del alfabeto griego: α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1, δ_1, . . . , para expresiones en general, y en particular combinaciones; las letras del alfabeto latino: a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1,..., exclusivamente para los átomos V y F. Las letras i y n han de designar enteros no negativos. Como es habitual los signos primitivos de $\mathfrak{S}$ se utilizarán como nombres de si mismos, y las expresiones construidas con ambas clases de signos se interpretarán en la forma corriente.

Se introducen a continuación varias definiciones, es decir abreviaturas de expresiones complejas de $\mathfrak{S}$; la notación $\alpha_1 \to \alpha_2$ indica que α_1 es una forma abreviada de α_2 y que en todo contexto donde aparezca α_1 debe entenderse que aparece α_2.[3]

I^n $(n \geq 1)$	I^1	$\to I$
	I^{n+1}	$\to (KI^n)$
K_n $(n \geq 1)$	K_1	$\to K$
	K_{n+1}	$\to (BK_n)$
I^i_n $(i \geq 1, n \geq i)$	I^i_i	$\to I$
	I^i_{n+1}	$\to (K_{n+1}\ I^i_n)$
P_n $(n \geq 0)$	P_0	$\to P$
	P_{n+1}	$\to (RP_n)$
N_n $(n \geq 0)$	N_0	$\to N$
	N_{n+1}	$\to (BN_n)$

Como regla general se omitirán los paréntesis que no sean indispensables para la correcta interpretación de las expresiones; para su restitución se procederá conforme a las siguientes reglas: a) los paréntesis extremos se omitirán en todos los casos; b) los paréntesis interiores se restituyen asociando por la izquierda.

Las siguientes propiedades de las combinaciones, cuyas demostraciones se omiten, serán presupuestas tácitamente en el resto de la exposición:

I) Si una combinación α es de la forma $(\gamma_1\delta_1)$, lo es de una única manera; por lo tanto si existen combinaciones γ_2, δ_2 tales que α es $(\gamma_2\delta_2)$, entonces γ_1 es la misma combinación que γ_2 y δ_1 es la misma combinación que δ_2.

II) Si una combinación α es una parte propia de la combinación $(\gamma\delta)$, es decir no idéntica con ella, o bién α es una parte de γ o una parte de δ.

A continuación se enuncian una serie de reglas que asocian a algunas constantes de $\mathfrak{S}$ una o varias transformaciones que en todos los casos elimina la respectiva constante. El cuadro debe interpretarse en la siguiente forma: los signos en la columna de la izquierda son designaciones de reglas que asocian a la expresión que se encuentra en la columna central en la misma linea, la expresión de la columna de la derecha también en la misma linea. Las letras α, γ, δ, γ_1, γ_2 designan combinaciones cualesquieras.

(I)	$I\alpha$	α
(K)	$K\alpha\gamma$	α
(B)	$B\alpha\gamma\delta$	$\alpha\ (\gamma\delta)$
(R)	$R\alpha\gamma_1\gamma_2\delta$	$\alpha\ (\gamma_1\delta)\ (\gamma_2\delta)$
$(P1)$	PVV	V
$(P2)$	PVF	F
$(P3)$	PFF	V
$(P4)$	PFV	V
$(N1)$	NV	F
$(N2)$	NF	V

Dada una combinación α toda parte propia o impropia que sea una combinación y tenga la forma de alguna de las expresiones que aparecen en la columna central se denomina redex de α. Dos redexes de la misma combinación se consideran distintas si son partes distintas, aún cuando sean la misma combinación. Redex principal de una combinación α es una redex tal que no es parte propia de otra redex de α, y además no existenen α otras redexes situadas a su izquierda. De la definición resulta inmediatamente que en toda combinación existe a lo más una redex principal.

Dadas dos combinaciones α_1 y α_2 diremos que α_1 es reducible a α_2, en símbolos que $\alpha_1 \geq \alpha_2$, si y solo si se cumplen las siguientes condiciones: existe una secuencia finita $\gamma_1, \gamma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma_n$ de combinaciones tal que γ_1 es α_1, γ_n es α_2, y para todo i $(1 \leq i < n)$ se verifica que γ_i es la misma combinación que γ_{i+1} o bién γ_{i+1} se obtiene de γ_i sustituyendo la redex principal de γ_i por la expresión que le asocia el cuadro anterior.[4]

En base a la definición anterior se demuestra facilmente que para toda combinación α se cumple que $\alpha \geq \alpha$; y si existe una combinación γ que no contiene redexes y tal que $\alpha \geq \gamma$, luego γ es única. Se pueden demostrar igualmente las reglas derivadas que a continuación se expresan, correspondientes a cada una de las definiciones introducidas anteriormente; se omiten las demostraciones que el lector podrá reconstruir facilmente razonando por inducción en n. Cada regla derivada se denomina con la expresión entre paréntesis que aparece a la izquierda y en esa forma será citada siempre en adelante.

Reglas (I^n): Para todo $n \geq 1$, $I^n\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha_n \geq \alpha\ n$

Regla (K_n): Para todo $n \geq 1$, $K_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \geq K(\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$

Regla(I^i_n): Para todo $i \geq 1$ y todo $n \geq i$, $I^i_n\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \geq \alpha\ i$

Regla(P_n): Para todo $n \geq 0$, $P_n \gamma\delta\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \geq P(\gamma\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)(\delta\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

Regla(N_n): Para todo $n \geq 0$, $N_n\gamma\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \geq N(\gamma\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n)$

3. P–combinaciones y funciones de verdad. Una clase especial de combinaciones, las P-combinaciones se define a continuación por inducción, simultaneamente con el concepto de orden de una P-combinación que es un entero mayor o igual que 0.[5]

1. V y F son P-combinaciones, ambas de orden 0.
2. Para todo $i \geq 1$, y todo $n \geq i$, I_n^i es una P-combinación de orden n.
3. Si α y γ son P-combinaciones de orden n, $P_n\alpha\gamma$ y $N_n\alpha$ son también P-combinaciones de orden n.
4. Una combinación es una P-combinación y es de orden n ($n \geq 0$), solo por aplicación de las reglas 1, 2 y 3.

Teorema 1: Si α es una P-combinación de orden n ($n \geq 0$), y $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n$ son átomos, se cumple que $\alpha\ a_1a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \geq V$ o bien que $\alpha\ a_1a_2 \ldots\ldots a_n \geq F$ y solo una de esas dos posibilidades.

Siendo V y F combinaciones que no contienen redexes, la unicidad quedó establecida en §2. El teorema se demuestra por inducción en el número de constantes proposicionales que aparecen en α. Si no hay constantes proposicionales α es V o es F o es un cierto I_n^i ($i \leq n$); en los dos primeros casos el teorema es inmediato pués $\alpha \geq \alpha$; el tercer caso resulta de la regla (I_n^i). Si en α hay constantes proposicionales es de la forma $P_n\gamma\delta$ o $N_n\gamma$ donde γ y δ son P-combinaciones también de orden n. El teorema resulta entonces por aplicación de las reglas (P_n), (N_n) y la hipótesis inductiva.

Existe relación estrecha entre las P-combinaciones y las llamadas funciones de verdad que se definen en la siguiente forma: sea un conjunto $\{v,f\}$ integrado por 2 elementos distintos, llamados elemento verdad y elemento falsedad; las funciones n-ádicas ($n \geq 0$), cuyo dominio y codominio son dicho conjunto se denominan funciones de verdad.

Es fácil asociar a todo P-combinación α de orden n una función de verdad n-ádica; si designamos $\phi(x_1x_2 \ldots\ldots x_n)$ dicha función asociada la misma queda caracterizada por la siguiente regla:

Si $\alpha\ a_1a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \geq V$, entonces es $\phi\ (x_1x_2 \ldots\ldots x_n) = v$ y si $\alpha\ a_1a_2 \ldots\ldots a_n \geq F$ entonces $\phi\ (x_1x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) = f$, donde $a_i = V$ si $x_i = v$ y $a_i = F$ si $x_i = f$ ($1 \leq i \leq n$). Del teorema 1 resulta que esta regla define en forma unívoca una función de verdad. La recíproca es también cierta como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2: Si $\phi\ (x_1x_2 \ldots\ldots x_n)$ es una función de verdad n-ádica, existe una P-combinación α de orden n tal que esa función es la asociada a α por la regla anterior. ($n \geq 0$).

Procedemos por inducción en n; si $n = 0$, ϕ solo puede ser la función constante v, o la función constante f; en el primer caso α es V y en el segundo es F. Sea ϕ una función de verdad n-ádica ($n > 0$), y supongamos que para toda función de verdad (n–1)-ádica el teorema se cumpla. Definamos a partir de ϕ dos funciones (n–1)-ádicas ϕ_v y ϕ_f en la siguiente forma:

(1) $\quad \phi_v(x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = v \quad$ si y solo si $\phi(x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}v) = v$

(2) $\quad \phi_f(x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = v \quad$ si y solo si $\phi(x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}f) = v$

Por la hipótesis inductiva existen P-combinaciones α_v y α_f de orden n-1, tales que ϕ_v es la función asociada a α_v y ϕ_f es la función asociada a α_f. Sea α^1_v la P-combinación obtenida a partir de α_v en la siguiente forma: se reemplazan todas las partes de α_v de la forma I^i_{n-1}, P_{n-1} y N_{n-1} por I^i_n, P_n y N_n respectivamente. Sea α^1_f la P-combinación obtenida a partir de α_f en la misma forma.

Por inducción en el número de constantes proposicionales puede demostrarse que α^1_v y α^1_f son P-combinaciones de orden n, y se cumple además que:

(3) $\alpha^1_v\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_{n-1} a_n \geq V$ si y solo si $\alpha_v\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_{n-1} \geq V$

(4) $\alpha^1_f\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_{n-1} a_n \geq V$ si y solo si $\alpha_f\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_{n-1} \geq V$

Sea α la siguiente P-combinación: $P_n (P_n\, \alpha^1_f\, I^n_n)\, (N_n (Pn\, \alpha^1_v (N_n\, I^n_n)))$; sean ademas $a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$ átomos cualesquieras, y b_1 y b_2 los atómos definidos en la siguiente forma:

$$\alpha^1_v\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \geq b_1 \quad \text{y} \quad \alpha^1_f\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \geq b_2$$

Por último sea γ la combinación $\alpha\, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n$.

De las relaciones (3) y (4), siendo ϕ_v y ϕ_f las funciones asociadas de α_v y α_f, respectivamente, resulta que:

(5) $\phi_v (x_1 x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = v$ si y solo si b_1 es V

(6) $\phi_f (x_1 x_2 \ldots\ldots x_{n-1}) = v$ si y solo si b_2 es V

donde x_i es v si a_i es V, y x_i es f si a_i es F $(1 \leq i \leq n)$

Aplicando las reglas (P_n), (N_n) y (I^i_n) se demuestra facilmente que

$$\gamma \geq P (P b_2 a_n)\, (N (P b_1 (N a_n))$$

Supongamos en primer lugar que a_n sea V; razonando para el caso que b_1 es V y b_1 es F se demuestra que $\gamma \geq b_1$. Supongamos que a_n sea F; razonando en la misma forma con respecto a b_2 se demuestra que $\gamma \geq b_2$.

Del resultado precedente combinado con (1), (2), (5) y (6) resulta por lo tanto que ϕ es la función asociada a la P-combinación α, con lo que queda demostrado el teorema.

4. *El cálculo proposicional clasico.* Si bién el sistema $\mathfrak{S}$ ofrece una formalización rigurosa y completa de los procesos que habitualmente se incluyen en el cálculo proposicional bivalente, es conveniente precisar claramente la relación entre ambos sistemas. Para ello introducimos en $\mathfrak{S}$ como nuevos signos primitivos, una cantidad infinita denumerable de signos Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots\ldots\ldots$ que denominaremos variables proposicionales y también átomos como a los signos V y F. La definición de combinación se modifica reemplazando la claúsula 1 por la siguiente:

1'. Si α es una constante o una variable proposicional α es una combinación.

Se mantienen las convenciones relativas al uso de variables intuitivas, omisión de paréntesis y las definiciones introducidas hasta este momento.

El sistema así extendido lo denominamos $\mathfrak{S}'$ y es evidente que en el mismo siguen siendo válides las reglas y teoremas demostrados.

Definimos a continuación por inducción la noción de V-combinación que es una forma especial de combinación, así como la de tipo nulo y tipo positivo asociado.

1. Si α es V o F, α es una V-combinación de tipo nulo.
2. Si α es una variable proposicional α es una V-combinación de tipo positivo.
3. Si γ_1 y γ_2 son V-combinaciones de tipo nulo, $P\gamma_1\gamma_2$ y $N\gamma_1$ son V-combinaciones de tipo nulo.
4. Si γ_1 y γ_2 son V-combinaciones de tipo positivo, $P\gamma_1\gamma_2$ y $N\gamma_1$ son V-combinaciones de tipo positivo.
5. Una combinación es una V-combinación solo por aplicación de las reglas 1, 2, 3 y 4.

Sea α una V-combinación, y $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$ una secuencia de n variables proposicionales todas distintas ($n = 0$ si α es de tipo nulo, y $n > 0$ si α es de tipo positivo), tal que todas las variables proposicionales que aparecen en α aparecen también en la secuencia. Definimos la abstracción de α en $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$, en símbolos $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots b_n\ \alpha$ como la combinación obtenida a partir de α en la siguiente forma:

1. Si α es una V-combinación de tipo nulo, $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$ es α.
2. Si α es una variable proposicional y para un cierto i $(1 \leq i \leq n)$, b_i es α, luego $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$ es I^i_n.
3. Si α es una V-combinación de tipo positivo de la forma $P\alpha_1\alpha_2$ o $N\alpha_1$, $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$ es $P_n(\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha_1)(\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha_2)$ o $N_n(\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha_1)$, respectivamente.

Es fácil comprobar que si α es una V-combinación, $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$ es una P-combinación de orden n y que $(\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha)\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n \geq \alpha$.

Teorema 3: Sea γ una P-combinación de orden $n (n \geq 0)$ y $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$ una secuencia de n variables proposicionales todas distintas; luego existe una V-combinación α tal que γ es $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$.

Si γ es de orden 0, α es directamente γ; si el orden de γ es mayor que 0 se procede por inducción en el número de constantes proposicionales de γ: si no hay constantes proposicionales γ es I^i_n para un cierto i $(1 \leq i \leq n)$ y entonces α es b_i; si γ es de la forma $P_n\gamma_1\gamma_2$ o $N_n\gamma_1$, α es $P\alpha_1\alpha_2$ y $N\alpha_1$ respectivamente, donde γ_1 es $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha_1$ y γ_2 es $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha_2$.

Dada una V-combinación α y una secuencia $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$ de n variables proposicionales todas distintas y tal que toda variable proposicional que aparece en α aparece también en la secuencia, sea π una ley que haga corresponder a cada b_i $(1 \leq i \leq n)$ un elemento del conjunto $\{v, f\}$; una tal función será designada una asignación de valores a la secuencia $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$. Fijada π definimos la valuación de α relativa a π en signos $V_\pi(\alpha)$, como una función que toma valores en $\{v, f\}$, en la siguiente forma:

1. Si α es de tipo nulo, $V_\pi(\alpha) = v$ si $\alpha \geq V$, y $V_\pi(\alpha) = f$ si $\alpha \geq F$.
2. Si α es una variable proposicional y si α es b_i, $(1 \leq i \leq n)$, $V_\pi(\alpha) = \pi(b_i)$.
3. Si α es de tipo positivo y forma $P\alpha_1\alpha_2$, $V_\pi(\alpha) = f$ si $V_\pi(\alpha_1) = v$ y $V_\pi(\alpha_2) = f$, y $V_\pi(\alpha) = v$ en todos los demás casos.
4. Si α es de tipo positivo y forma $N\ \alpha_1$, $V_\pi(\alpha) = v$ si $V_\pi(\alpha_1) = f$ y $V_\pi(\alpha) = f$ si $V_\pi(\alpha_1) = v$.

Teorema 4: Sea α, $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$, π y V_π somo en la definición precedente y sea γ la P-combinación $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$; luego se cumple

$$\gamma\ a_1\ a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \geq V \quad \text{si y solo si } V_\pi(\alpha) = v$$

donde a_i es V si $\pi(b_i) = v$ y a_i es F si $\pi(b_i) = f$ $(1 \leq i \leq n)$.

Si α es de tipo nulo el teorema resulta de la propia definición; si es de tipo positivo el resultado se obtiene facilmente razonando por inducción en el número de constantes proposicionales de α.

La definición de valuación permite asociar en forma obvia a toda V-combinación α una función de verdad n-ádica ($n = 0$ si α es de tipo nulo, y $n \geq 0$ si es de tipo positivo), que depende de la secuencia $b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n$. Del teorema 4 resulta que dicha función es la misma función asociada en §3 a la P-combinación $\lambda\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_n\ \alpha$. Por otra parte el teorema 3 permite extender el teorema 2 a las V-combinaciones con lo que queda demostrada la completicidad funcional del cálculo proposicional clásico bivalente.

NOTAS

1. Cf. Church [2].

2. Elegimos formular el sistema en forma simbólica por comodidad, sin desconocer la posibilidad de hacerlo como un sistema abstracto (Cf. Curry [1]); inclusive entendemos que este último procedimiento es mucho más riguroso y que al recurrir a un simbolismo se introducen automaticamente intuiciones que si bién facilitan los razonamientos no son de naturaleza formal.

3. Es importante observar que estas reglas no definen los expresiones I^n, K_n, . . etc, sino las que se obtienen cuando en cada una de ellas los signos i y n son sustituidos por numerales determinados.

4. Si bien el signo $\geq$ es utilizado en este trabajo también para expresar la relación aritmética de mayor o igual, el contexto permite distinguir en todos los casos entre ambos usos.

5. Esta definición tiene los siguientes objetivos: a) definir una clase de combinaciones que tenga siempre significación proposicional; b) asociar en forma efectiva a cada P-combinación un orden determinado; c) que esa clase sea completa en el sentido del teorema 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. B. Curry y R. Feys: Combinatory Logic, Amsterdam (North Holland Publishing Co), 1958.

[2] A. Church: Introduction to Mathematical Logic, Vol. I, Princeton, New Jersey (Princeton University Press), 1956.

[3] J. B. Rosser: A Mathematical Logic without variables, Ann. of Math. (2): 36: 127-150 (1935).

Buenos Aires
Argentina