Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XI, Number 1, January 1970

SUR LES AXIOMES DE GÖTLIND

ALBERT SADE

1. INTRODUCTION. Le système de Götlind, ($\mathfrak{G}$),

G1,	*CAxxx*,	$x \vee x \Rightarrow x$,
G2,	*CxAxy*,	$x \Rightarrow x \vee y$,
G3,	*Cxx*,	$x \Rightarrow x$,
G4,	*CCxyCAzxAyz*,	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (z \vee x \Rightarrow y \vee z)$,

a été publié par cet auteur dans [1]. La question de savoir si chacun de ces quatre axiomes est indépendant des trois autres a été étudiée dans [5] et [12], puis dans [11] et enfin dans [2]. L'auteur de la présente note n'étant pas parvenu à avoir accès à ces travaux et n'ayant eu en mains que les analyses [3] et [4], a étudié ce système d'une manière exhaustive au moyen de la représentation algébrique des opérateurs propositionnels bivalents tels qu'il les a définis dans [7] et [8].

Les conclusions que l'on peut tirer à l'égard de l'indépendance d'un système d'axiomes dépendent, en général, de la valence de la logique à laquelle ce système sert de fondement, (Voir, p. ex. [10], où la réponse n'est pas la même suivant qu'il s'agit de logique trivalente ou de logique bivalente).

2. FONCTIONS BINAIRES. La table suivante fournit, pour les 16 fonctions propositionnelles classiques sur deux atomes, x et y, 1°, la notation de Łukasiewicz, 2°, le polynôme, 3°, la matrice, (**a,b,c,d**), définie comme l'application $[x,y \rightarrow f(x,y)] = (00,10,01,11 \rightarrow \mathbf{abcd})$, 4°, la représentation au moyen de régions, en posant $1 = S\backslash(P \cup Q)$, $2 = P\backslash Q$, $3 = Q\backslash P$, $4 = P \cap Q$, où P et Q sont les intérieurs de deux contours fermés, 5°, la représentation ensembliste, 6° les notations autres que la première, 7° les désignations.

Received April 25, 1969

1	2	3	4	5	6	7
A	$xy+x+y$	0111	234	$Q\cup P$	$\vee$	Disjonction non exclusive.
B	$xy+y+1$	1101	124	$(S\setminus Q)\cup P$		Pas à la fois $\neg x$ et y.
C	$xy+x+1$	1011	134	$(S\setminus P)\cup Q$	$\Longrightarrow$	Implication Philonienne.
D	$xy+1$	1110	123	$S\setminus(P\cap Q)$	$\mid$	Négation alternative; pas à la fois x et y.
E	$x+y+1$	1001	14	$S\setminus(P\div Q)$	$\longleftrightarrow$	Equivalence; x et y, ou ni l'un ni l'autre.
F	$x+1$	1010	13	$S\setminus P$	$N,\neg$	Négation ou déni de x.
G	$y+1$	1100	12	$S\setminus Q$		Déni de y.
V	1	1111	1234	S	$\models,\vdash$	Tautologie.
X	$xy+x+y+1$	1000	1	$S\setminus(P\cup Q)$	$\downarrow$	Double négation, ni x ni y.
M	$xy+y$	0010	3	$Q\setminus P$		y, mais pas x.
L	$xy+x$	0100	2	$P\setminus Q$		x, mais pas y.
K	xy	0001	4	$P\cap Q$	$\&,\wedge$	Copule.
J	$x+y$	0110	23	$P\div Q$	$\vee\vee$	Disjonction exclusive, x ou y, mais pas les deux.
I	x	0101	24	P		x, pour tout y.
H	y	0011	34	Q		pour tout x, y.
O	o	0000	$\emptyset$	$\emptyset$		Contradiction.

3. RÉSOLUTION DU SYSTÈME. Contrairement à ce qui s'est produit dans [10], où la prolifération des calculs rendait nécessaire une marche d'attaque plus assouplie, la résolution sur le corps du second ordre, $\{0,1\}$, *des quatre équations fonctionnelles définies par* $\mathfrak{S}$ *ne présente aucune* difficulté.

Une fonction propositionnelle monadique est dite *cancellable* si elle ne se réduit pas à une constante. Une fonction dyadique est cancellable si elle ne se réduit pas à une fonction monadique ou à une constante. Soit *Gc* l'axiome de cancellation.

Si l'on pose

$$x \vee y = Axy = \mathbf{a}xy + \mathbf{b}x + \mathbf{c}y + \mathbf{d},$$
$$x \Longrightarrow y = Cxy = \mathbf{p}xy + \mathbf{q}x + \mathbf{r}y + \mathbf{s},$$

la résolution du système $\mathfrak{S}$ se fait par les méthodes usuelles de l'algèbre. On commence par chercher la solution générale de chacune des quatre *equations. Il est alors facile d'en déduire* l'ensemble des solutions de chacun des systèmes formés par trois équations seulement. On obtient ainsi les expressions de *Axy* et de *Cxy* qui satisfont tous les axiomes, sauf un. Les calculs, qui n'exigent que de l'attention, sont sans intérêt en eux-mêmes et ne seront pas reportés ici. Voici les résultats qu'ils fournissent.

4. TABLE DES SOLUTIONS DE G1.

Axy	*Cxy*
$\mathbf{a}xy+\mathbf{b}x+\mathbf{c}y+\mathbf{d}$,	1,
$\mathbf{a}xy+\mathbf{b}x+\mathbf{c}y+\mathbf{d}$,	$xy+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})y+1$,
$\mathbf{a}xy+\mathbf{b}x+\mathbf{c}y+\mathbf{d}$,	$x+(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})y+\mathbf{d}+1$,
$\mathbf{a}xy+\mathbf{b}x+\mathbf{c}y+\mathbf{d}$,	$xy+x+\mathbf{d}y+\mathbf{d}+1$,

5. SOLUTION GÉNÉRALE DE G2.

Axy	Cxy
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	1,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{a}y + \mathsf{d}$,	$xy + (\mathsf{b} + \mathsf{d})\,x + 1$,
$\mathsf{b}x + \mathsf{d}$,	$\mathsf{b}x + y + \mathsf{d} + 1$,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{d}$,	$xy + \mathsf{d}x + y + \mathsf{d} + 1$.

6. SOLUTION GÉNÉRALE DE G3.

Axy	Cxy
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	$xy + y + 1$,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	$xy + x + 1$,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	$x + y + 1$,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	1.

7. SOLUTION GÉNÉRALE DE G4.

Axy	Cxy
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	1,
$x + y$	$x + y + 1$,
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,
1,	y,
$\mathsf{a}xy + 1$,	$xy + x + y$,
$xy + y + 1$,	$xy + x + y$,
$xy + x + 1$,	$xy + x + y$,
1,	$y + 1$,
$x + y + 1$,	$x + y + 1$,
$y + 1$,	$xy + x + y$,
1,	$xy + x + 1$,
$x + 1$,	$xy + x + y$,
$\mathsf{a}xy$,	$xy + x + 1$,
1,	$xy + 1$.

8. SOLUTION GÉNÉRALE DE G1, G2, G3.

Axy	Cxy
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	1,
xy,	$xy + y + 1$,
x,	$xy + y + 1$,
x,	$x + y + 1$,
x,	$xy + x + 1$,
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$.

9. SOLUTION GÉNÉRALE DE G1, G2, G4.

Axy	Cxy
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + \mathsf{c}y + \mathsf{d}$,	1,
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,
$\mathsf{a}xy + \mathsf{b}x + 1$,	$xy + x + y$.

10. SOLUTION GÉNÉRALE DE G1, G3, G4.

Axy	Cxy
$\mathbf{a}xy + \mathbf{b}x + \mathbf{c}y + \mathbf{d}$,	1,
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,
$\mathbf{a}xy$,	$xy + x + 1$.

11. SOLUTION GÉNÉRALE DE G2, G3, G4.

Axy,	Cxy
$\mathbf{a}xy + \mathbf{b}x + \mathbf{c}y + \mathbf{d}$,	1,
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,
1,	$xy + x + 1$

12. RÉCAPITULATION. Le trait, dans une colonne, indique que l'axiome placé en tête de cette colonne n'est pas obéi.

Axy	Cxy	$G1$	$G2$	$G3$	$G4$
$\mathbf{a}xy + \mathbf{b}x + \mathbf{c}y + 1$,	1,				
xy,	$xy + y + 1$,				-
x,	$xy + y + 1$,				-
x,	$x + y + 1$,				-
x,	$xy + x + 1$,				-
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,				
$\mathbf{a}xy + \mathbf{b}x + 1$,	$xy + x + y$,			—	
$\mathbf{a}xy$,	$xy + x + 1$,		—		
1,	$xy + x + 1$.	—			

L'examen de ces tables montre que $\mathfrak{G}$ admet 17 solutions et qu'il existe, pour chaque axiome, au moins une solution vérifiant les trois autres qui ne le satisfait pas.

En logique bivalente, chacun des axiomes de $\mathfrak{G}$ est indépendant des trois autres. Le système admet 17 solutions, dont 16 sont de la forme $Cxy = 1$. Si l'on adjoint à $\mathfrak{G}$ l'axiome de cancellation, le systeme $\mathfrak{G} \cup Gc$ admet la solution unique $Cxy = x(y + 1) + 1$, $Axy = (x + 1)(y + 1) + 1$.

13. CAS DE LA LOGIQUE TRIVALENTE. Conduits manuellement, sur le corps du 3 ordre, les calculs nécessaires pour résourdre complètement le système formel et donner la réponse en logique trivalente, entraîneraient des développement d'une ampleur à briser le courage le plus intrépide. Mais, s'inspirant des résultats précédents, et usant de matrices voisines de celles de Łukasiewicz, on trouve, en appelant E l'ensemble ordonné $E = (00{,}01{,}02;\ 10{,}11{,}12;\ 20{,}21{,}22)$ et en posant $X = (111,\ 012,\ 111)$, $Y = (012,\ 111,\ 212)$, que les opérateurs A et C, de matrices $A = E \to X$, $C = E \to Y$, respectivement représentés par le polynômes $f = 1 + x + 2xy + x^2 + 2x^2y$ et $g = x + y + xy + x^2y + xy^2 + 2x^2y^2$ vérifient tous les axiomes, sauf $G3$. Au contraire, $A = E \to Y = g$ et $C = E \to X = f$ satisfait aux quatre axiomes.

14. INTRODUCTION DE LA CONDITION SUPPLÉMENTAIRE *G5*: $Cxy = ANxy$. Si l'on considère, par définition, que Cxy est une abréviation pour $Nx \vee y$, alors, les foncteurs fondamentaux sont A et N. La solution du système $\mathfrak{G} \cup G5$ peut être trouvée directement en posant

$$Nx = \mathsf{p}x + \mathsf{q}$$

et en résolvant les cinq équations fonctionnelles définies par $G1, \ldots, G5$. On peut aussi, un procédé servant de contrôle à l'autre, reprendre les tables des N°4 à 12 et en écarter les valeurs de Cxy qui ne satisfont pas *G5*. On arrive ainsi à la table suivante:

15. TABLE DES SOLUTIONS DE G1, G2, G3, G4, G5.

Axy	Nx	Cxy	$G1$	$G2$	$G3$	$G4$	$G5$	Gc	Rang.
1	0	1						-	S1
1	1	1						-	S2
1	x	1						-	S3
1	$x+1$	1						-	S4
$xy+y+1$	1	1						-	S5
$xy+y+1$	x	$xy+y+1$		-		-			S6
$xy+1$	0	1						-	S7
$xy+1$	x	$xy+1$		-	-	-			S8
$x+1$	0	1						-	S9
$xy+x+1$	0	1						-	S10
x	1	1						-	S11
$xy+x+y$	1	1						-	S12
$xy+x+1$	$x+1$	$xy+x+y$			-				S13
$xy+x+y$	$x+1$	$xy+x+1$							S14
$x+y$	$x+1$	$x+y+1$	-	-					S15
$x+y+1$	x	$x+y+1$	-	-					S16
$xy+1$	$x+1$	$xy+y+1$	-	-		-			S17
$xy+x+1$	x	$xy+x+1$	-	-		-			S18.

L'examen de ce tableau révèle que *toute solution de G2 satisfait G1, qui est donc inutile*. De même, *toute solution de G2 vérifie G4*, et ainsi, *G4 est également inutile. Le système G2, G3, Gc est indépendant car* S13 *vérifie G2 et Gc sans vérifier G3;* S15 *satisfait G3 et Gc sans vérifier G2, et* S12 *satisfait G2 et G3, mais non Gc.*

Le système G2, G3, Gc a une solution et une seule, S14: $Axy = xy + x + y$ (disjonction non exclusive), $Nx = x + 1$ (négation) et, d'après la définition *G5*, $Cxy = xy + x + 1$ (implication philonienne).

Maintenant, il est possible qu'en augmentant la valence de la logique définie par les axiomes, les conclusions précédentes cessent d'être valables. Il n'est pas question d'expliciter toutes les solutions du système *G1, G2, G3, G4, G5* pour des valences supérieures à 2. Toutefois, on peut montrer que, quelle que soit la valence, il existe toujours des solutions du système qui vérifient tous les axiomes sauf *G3*.

16. CAS D'UNE VALENCE SUPÉRIEURE À DEUX. Si $Q = E(\ )$ est un groupoïde sur un ensemble quelconque, E, et ξ, η, ζ trois permutations de E, le groupoïde $R = E(.)$, défini par la condition

$$\forall x, y, z;\ x\epsilon E,\ y\epsilon E,\ z\epsilon E,\ xy = z \longleftrightarrow (x\xi).(y\eta) = z\zeta,$$

est dit *isotope* de Q par *l'isotopie* $(\xi,\eta,\zeta) = T$ ([6], p. 103, No. 26). Si l'une au moins des composantes de T devient une application de E dans E, l'isotopie devient une homotopie.

Les matrices de Axy et de Cxy étant deux groupoïdes sur l'ensemble E des valeurs logiques, $A = E(\mathrm{v})$ et $C = E(\Longrightarrow)$, la condition *G5* exprime que $(N, 1, 1)$ est une homotopie entre A et C.

Cela posé, soit E un ensemble quelconque,

$$\mathrm{Card}(E) = \mu,\ (\mu > 2,\ \mu \text{ fini ou transfini}),$$

soit le groupoïde $A = E(\mathrm{v})$ défini par les conditions suivantes

$$\forall x,y;\ x,y\epsilon E,\quad 0 \vee x = x \vee 0 = 1,\quad 1 \vee x = x \vee 1 = 1,\quad 2 \vee 2 = 0;$$

dans tous les autres cas, $x \vee y = 0$ ou 1.

L'ensemble de tous les groupoïdes ainsi définis a pour cardinal $2^{(\mu-2)^2-1}$ si μ est fini et $\mathrm{Card}\ \mathfrak{P} E^2$ si μ est transfini.

Soit $N0 = 1$, $N1 = 0$, et $Nx = x$ dans les autres cas. Alors l'isotopie $(N,1,1)$ laisse A invariant, donc $C = A$. On vérifie sans peine que les fonctions A, N, C ainsi définies obéissent à *G1, G2, G4* et *G5* et ne satisfont pas *G3*.

Quelle que soit la valence de la logique considérée, il existe des solutions du système de Götlind, (une infinité si la valence est infinie), *qui vérifient tous les axiomes, sauf G3.*

17. INTRODUCTION DES RÈGLES DE DÉDUCTION. Dans tout ce qui précède, on ne suppose l'emploi d'aucune règle de déduction. Si l'on fait intervenir le modus ponens, les conclusions changent encore, car cela revient à admettre tacitement l'axiome *G6*: $C11 = 1$, $C10 \neq 1$.

Si l'on suppose *G6*, les solutions de *G1, G2, G3, G4* sont

Axy	Cxy	*G1*	*G2*	*G3*	*G4*
x,	$x + y + 1$,				-
x,	$xy + x + 1$,				-
$xy + x + y$,	$xy + x + 1$,				
axy,	$xy + x + 1$,		-		
1,	$xy + x + 1$	-			

Si l'on suppose G6, le système G1, G2, G4 est indépendant, G5 et G3 sont inutiles, en logique bivalente.

Si l'on suppose *G5* et *G6*, les solutions de *G1, G2, G3, G4* sont

Axy	Nx	Cxy	$G1$	$G2$	$G3$	$G4$	Rang.
$xy + x + y$	$x + 1$	$xy + x + 1$					S14
$x + y$	$x + 1$	$x + y + 1$	-	-			S15
$x + y + 1$	x	$x + y + 1$	-	-			S16
$xy + x + 1$	x	$xy + x + 1$	-	-		-	S18.

Si l'on suppose G5 et G6, alors G1 et G2 sont interchangeables et l'on peut supprimer l'un d'eux. G3 et G4 sont inutiles, en logique bivalente.

Les calculs ont été conduits de façon prospective; mais, les calculs les plus longs étant ceux de *G4*, il serait très rapide de voir que le système *G1*, *G5*, *G6* a une solution unique.

Des matrices données au No. 13, seule la dernière satisfait à *G6* et l'indépendance de *G3* disparaît. La matrice du No. 16 ne remplit pas la condition *G6*.

RÉFÉRENCES

[1] Götlind, E., "An axiom system for the calculus of propositions," *Norsk. Mat. Tidsskr.*, vol. 29 (1947), pp. 1-4.

[2] Götlind, E., "A note on an article by R. K. P. Singh and R. Shukla," *Math. Student*, vol. 19 (1951), pp. 120-121.

[3] Hasenjaeger, G., Analyse de [1], *Zentralblatt f. Math.*, vol. 30 (1949), p. 193. Analyse de [5], Id., vol. 40 (1951), p. 146. Analyse de [11], Id., vol. 43 (1952), p. 249.

[4] Jónsson, B., Analyse de [1], *Math. Rev.*, vol. 9, p. 1. Analyse de [2], Id., vol. 14, p. 345. Analyse de [5], Id., vol. 11, p. 303. Analyse de [11], Id., vol. 14, p. 345.

[5] Rasiowa, H., "Sur un certain système d'axiomes du calcul des propositions," *Norsk. Mat. Tidsskr.*, vol. 31 (1949), pp. 1-3.

[6] Sade, A., "Groupoïdes parastrophiques," *Math. Nachr.*, vol. 20 (1959), pp. 73-106.

[7] Sade, A., "Morphismes sur le groupoïde ternaire des opérateurs propositionnels," *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, vol. 83 (1969), pp. 19-33. *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 16 (1969), p. 323, N°69T-E6.

[8] Sade, A., "Morphismes sur le système des opérateurs propositionnels," *Math. Nachr* (1970), *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 16 (1969), p. 425, N°69T-E18.

[9] Sade, A., "Fonctions propositionnelles monadiques dans la logique trivalente," *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, vol. 83 (1969), pp. 202-213. *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 16 (1969), p. 579, N°69T-E32.

[10] Sade, A., "Algèbre de Łukasiewicz dans la logique trivalente," *Publ. Fac. Electr. Univ. Beograd*, (1969), N°265, pp. 123-130. *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 16 (1969), p. 682, N°69T-E35.

[11] Singh, R. K. P., and R. Shukla, "A note on Götlind's axiom system for the calculus of propositions," *Math. Student*, vol. 18 (1950), pp. 108-110.

[12] Skolem, Th., Remark on the articles of H. Rasiowa and A. Rose, in this volume, *Norsk. Mat. Tidsskr.*, vol. 31 (1949), p. 115.

Pertuis, Vaucluse, France