Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XIV, Number 4, October 1973
NDJFAM

LES PROPRIÉTÉS DU FONCTEUR NICOD PAR RAPPORT À LA RÉCIPROCITÉ ET CONJONCTION. I

EUGEN MIHAILESCU

Dans cet article, nous considérons le foncteur introduit par Nicod, comme foncteur définissent pour tous les foncteurs du calcul propositionnel bivalent, que nous notons par: Dpq = non p oû non q. Ce foncteur satisfait la matrice:

D	0	1
0	1	1
1	1	0

et peut être défini encore: $Dpq = R1Kpq$ où R satisfait la matrice:

R	0	1
0	0	1
1	1	0

En vertu de cette définition, nous donnerons une forme normale simple pour toute forme construite à l'aide seulement de ce foncteur. Notons $\mathsf{S}(D)$ l'ensemble de toutes les formes construites avec D.

Les notations utilisé. Nous employons les notations suivants:

(1) Si "F" est un foncteur, alors: $F^n = \underbrace{F \ldots F}_{n}$

(2) $\prod_{i=1}^{m} p_i = p_1 p_2 \ldots p_m$

(3) $\prod_{p_m^h} F^h \alpha(p_1, p_2 \ldots p_m)_h$

signifie chaque forme qu'est obtenue de la forme $F^h \alpha(p_1, p_2 \ldots p_h)$ considerant touts les combinaisons des m lettres $p_1, p_2 \ldots p_m$ prise h â h

(4) $\alpha \sim \beta$ = α est equipolente avec β

(5) $\sum_{i=1}^{m} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_m$

Received June 26, 1969

Théorème 1. *Toute forme*

$$\alpha = D^{n-1}p_1p_2\ldots p_n$$

admet la forme normale

$$\mathbf{N}_1(D) = R^{n-1}1p_nRp_np_{n-1}K^2p_np_{n-1}p_{n-2}\ldots K^{n-3}p_np_{n-1}\ldots p_3K^{n-1}p_1p_2p_3\ldots p_n$$

et:

$$\alpha \sim \mathbf{N}_1(D)$$

Nous démontrerons ce théorème par la méthode de recurrence:

1. $Dp_1p_2 \sim R1Kp_1p_2$
$1p_1/Dp_1p_2, p_2/p_3 * 2$

2. $DDp_1p_2p_3 \sim R1KKp_1p_2p_3 \sim R1KR1Kp_1p_2p_3 \sim R1RK1p_3K^2p_1p_2p_3$
$\sim R^2 1p_3K^2p_1p_2p_3$

parce que:

$$K1p_4 \sim p_4$$

et donc:

3. $DDp_1p_2p_3 \sim R^2 1p_3K^2p_1p_2p_3$
$3p_1/Dp_1p_2, p_2/p_3, p_3/p_4 * 4$

4. $DDDp_1p_2p_3p_4 \sim R^2 1p_4K^2Kp_1p_2p_3p_4 \sim R^2 1p_4K^2R1Kp_1p_2p_3p_4R^2 1p_4KR1Kp_3p_4$
$\sim R^2 1p_4RK1Kp_3p_4K^3p_1p_2p_3p_4$
$\sim R1p_4Kp_4p_3K^3p_1p_2p_3p_4$

parce que:

$$K1Kp_3p_4 \sim Kp_3p_4 \sim Kp_4p_3$$

et donc:

5. $DDDp_1p_2p_3p_4 \sim R^3 1p_4Kp_4p_3K^3p_4p_3p_2p_1$

Nous supposons le théorème vrai pour n variables propositionelles.

6. $D^{n-1}p_1p_2p_3\ldots p_n \sim R^{n-1}1p_nKp_{n-1}p_{n-2}\ldots K^{n-3}p_np_{n-1}p_{n-2}\ldots$
$p_3K^{n-1}p_np_{n-1}\ldots p_3p_2p_1$

Pour démontrer le théorème pour $n+1$ variables propositionnelles nous faisons la substitution:

$$6\ p_1/Dp_1p_2, p_2/p_3\ldots p_n/p_{n+1} * 7$$

7. $D^np_1p_2p_3\ldots p_np_{n+1}$
$\sim R^{n-1}1p_{n+1}Kp_{n+1}p_nK^2p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots K^{n-3}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots p_5p_4K^{n-1}Dp_1p_2p_3\ldots$
p_np_{n+1}
$\sim R^{n-1}1p_{n+1}Kp_{n+1}p_nK^2p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots K^{n-3}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots p_4KKp_1p_2K_{n-2}p_3p_4\ldots$
p_np_{n+1}
$\sim R^{n-1}1p_{n+1}Kp_{n+1}p_nK^2p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots K^{n-3}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots$
$p_4KR1Kp_1p_2K^{n-2}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots p_3R^{n-1}1p_{n+1}Kp_{n+1}p_nK^2p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots$
$K^{n-3}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots p_4RK1K^{n-2}p_3p_4\ldots p_{n+1}K^np_1p_2\ldots$

$p_{n+1}R^n 1p_{n+1}Kp_{n+1}p_nK^2p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots K^{n-3}p_{n+1}p_n\ldots p_4K^{n-2}p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots$
$p_4p_3K^n p_{n+1}p_np_{n-1}\ldots p_3p_2p_1$

et donc le théorème se maintient pour $n+1$ variables propositionnelles, c'est-à-dire il est démontré.

Théorème 2. *Toute forme du type:*

$$\alpha = Dp_1Dp_2Dp_3\ldots Dp_{n-2}Dp_{n-1}p_n$$

admet la forme normale:

$\mathbf{N}_2(D) = R^{n-1}1p_1Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-3}p_1p_2\ldots p_{n-2}K^{n-1}p_1p_2\ldots p_{n-2}p_{n-1}p_n$

Nous démontrons le théorème par la méthode de récurrence:

8. $Dp_1p_2 \sim R1Kp_1p_2$
$8\,p_2/Kp_2p_3 * 9$
9. $Dp_1Dp_2p_3 \sim R1Kp_1Kp_2p_3 \sim R1KKp_2p_3p_1 \sim R_21K1p_1K^2p_1p_2p_3R^21p_1K^2p_1p_2p_3$

parce que:

$$K1p_1 \sim p_1$$

et donc:

10. $Dp_1Dp_2p_3 \sim R1p_1Kp_1p_2p_3$
$10\,p_3/Dp_3p_4 * 11$
11. $Dp_1Dp_2Dp_3p_4 \sim R^21p_1\,Kp_1p_2\,Kp_3p_4 \sim R^21p_1\,KKp_3p_4\,Kp_1p_2$
$\sim R^21p_1\,KR1Kp_3p_4\,Kp_1p_2$
$\sim R^21p_1\,KK1Kp_1p_2K^3p_1p_2p_3p_4$
$\sim R^31p_1\,Kp_1p_2\,K^3p_1p_2p_3p_4$

parce que:

$$K1Kp_1p_2 \sim Kp_1p_2$$

Supposons le théorème vrai pour n variables propositionnelles:

12. $Dp_1\,Dp_2\,Dp_3\ldots Dp_{n-2}\,Dp_{n-1}p_n$
$\sim R^{n-1}1p_1\,Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-3}p_1p_2p_3\ldots p_{n-2}\,K^{n-1}p_1p_2p_3\ldots p_{n-1}p_n$

Dans la formule *12* nous faisons la substitution:

$$12\,p_n/Dp_np_{n+1} * 13$$

13. $Dp_1\,Dp_2\,Dp_3\ldots Dp_{n-2}\,Dp_{n-1}\,Dp_np_{n+1}$
$\sim R^{n-1}1p_1\,Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-3}p_1p_2p_3\ldots p_{n-2}\,K^{n-1}p_1p_2\ldots p_{n-1}Dp_np_{n+1}$
$\sim R^{n-1}1Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-3}p_1p_2\ldots p_{n-2}KKp_np_{n+1}K^{n-2}p_1p_2\ldots p_{n-1}$
$\sim R^{n-1}1Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-2}p_1p_2\ldots p_{n-2}KR1Kp_np_{n+1}K^{n-2}p_1p_2\ldots p_{n-1}$
$\sim R^{n-1}1Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K^{n-3}p_1p_2p_3\ldots p_{n-2}RK1K^{n-2}p_1p_2\ldots$
$p_{n-1}K^np_1p_2\ldots p_{n-1}p_np_{n+1}$
$\sim R^n1p_1\,Kp_1p_2K^2p_1p_2p_3\ldots K_{n-3}p_1p_2p_3\ldots p_{n-2}K_{n-2}p_1p_2\ldots p_{n-1}K^np_1p_2p_3\ldots$
p_np_{n+1}

Donc, notre théorème se maintient pour $n+1$ variables propositionnelles, c'est-à-dire il est démontré.

Les formes normales $\mathsf{N}_1(D)$ et $\mathsf{N}_2(D)$ sont des formes fondamentales pour établir les formes normales correspondantes d'une forme Nicod quelconque, parce que ces formes font partie d'un des groupes suivants:

Groupe A

$$\alpha = D\alpha_1 D\alpha_2 D\alpha_3 \ldots D\alpha_{v-2} D\alpha_{v-1}\alpha_v$$
$$\alpha_h = Dp_1^h Dp_2^h \ldots Dp_{mh-2}^h Dp_{mh-1}^h p_m^h \qquad (h = 1, 2 \ldots v)$$

Groupe B

$$\alpha = D^{v-1} D^{m_1-1} \prod_{i=1}^{m_1} p_i^1 D^{m_2-1} \prod_{i=1}^{m_2} p_i^2 \ldots D^{m_v-1} \prod_{i=1}^{m_v} p_i^v$$

Groupe C

$$\alpha = D^{v-1}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{v-1}\alpha_v$$
$$\alpha_h = Dp_1^h Dp_2^h \ldots Dp_{mh-2}^h Dp_{mh-1}^h p_{mh}^h \qquad (h = 1, 2 \ldots v)$$

Groupe D

$$\alpha = DD^{m_1-1} \prod_{i=1}^{m_1} p_i^1 DD^{m_2-1} \prod_{i=1}^{m_2} p_i^2 \ldots DD^{m_{v-1}-1} \prod_{i=1}^{m_{v-1}} p_i^{v-1} D^{m_v-1} \prod_{i=1}^{m_v} p_i^v$$

Pour établir la forme normale générale, nous avons donné quatre formes normales correspondantes aux Groupes A-D. Nous démontrerons ces quatre formes pour établir la forme normale pour une forme générale de l'ensemble $\mathsf{S}(D)$.

Théorème 3. *Si*

$$\alpha \in \mathsf{S}(D)$$

est une forme du Groupe A, *alors il admet la forme normale:*

$$\mathsf{N}_3(D) = R^{\mathfrak{N}} (p_1^1)^v (p_1^2)^v \ldots (p_1^{v-1}) p_1^v \Bigg[\prod_{i=1}^{v} \Big(Kp_1^i p_2^i K^2 p_1^i p_2^i p_3^i \ldots K^{m_i-3} p_1^i p_2^i \ldots$$
$$p_{m_i-2}^i K^{m_i-1} p_1^i p_2^i \ldots p_{m_i}^i\Big)^{v-i+1}\Bigg]\Bigg[\prod_{h=2}^{v}\prod_{k=1}^{h}\prod_{i_k=0}^{m_k-3}\Big(K^{\mathfrak{M}}\prod_{j=0}^{i_h} p_{j+1}^h\Big)\Bigg]\Bigg[\prod_{h=2}^{v}\prod_{k=1}^{h}\prod_{i_k=0}^{m_k-3}$$
$$\Big(\prod_{i_k=0}^{m_k-3} K^{\mathfrak{M}}\prod_{j=0}^{i_h} p_{j+1}^h\Big)\Big(\prod_{j=1}\prod_{i_j=0}^{m_j-3} K^{i_j+m_{u(1,2)}}\prod_{k=0}^{i_j} p_{k+1}^j \prod_{k=1}^{m_{t(1,2)}} p_k^{t(1,2)}\Big)$$
$$\Big(\prod_{j=1}^{3}\prod_{i_j=0}^{m_j-3} K^{i_j+m_{u(1,2,3)}}\prod_{k=0}^{i_j} p_{k+1}^j \prod_{k=1}^{m_{t(1,2,3)}} p_k^{t(1,2,3)}\Big)\ldots\prod_{j=1}^{v}\prod_{i_j=0}^{m_j-3} K^{i_j+m_{u(1,2\ldots v)}}$$
$$\prod_{k=0}^{i_j} p_{k+1}^j \prod_{k=1}^{m_{t(1,2\ldots v)}} p_k^{t(1,2\ldots v)}\Big(K^{m_1+m_2-1}\prod_{j=1}^{m_1} p_j^1 \prod_{j=1}^{m_2} p_j^2\Big)\ldots$$
$$\Big(K^{m_1+m_2+\ldots+m_v-1}\prod_{j=1}^{m_1} p_j^1 \prod_{j=1}^{m_2} p_j^2 \ldots \prod_{j=1}^{m_v} p_j^v\Big)\Bigg]$$

où nous avons

$$\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{j} m_i + v - 1 \text{ et } \mathfrak{M} = \sum_{u=1}^{h_i+h-1} u$$

et où

si $j = 1$, alors $m_{u(1,2\ldots h)} = m_2 + m_3 + \ldots + m_h$
si $j = 2$, alors $m_{u(1,2\ldots h)} = m_1 + m_3 + m_4 + \ldots + m_h$
si $j = h$, alors $m_{u(1,2\ldots h)} = m_1 + m_2 + \ldots + m_{h-2} + m_{h-1}$

si $j = 1$, alors $\prod_{k=1}^{m_{t(1,2\ldots h)}} p_k^{t(1,2\ldots h)} = \prod_{k=1}^{m_2} p_k^2 \prod_{k=1}^{m_3} p_k^3 \ldots \prod_{k=1}^{m_h} p_k^h$

si $j = 2$, alors $\prod_{k=1}^{m_{t(1,2\ldots h)}} p_k^{t(1,2\ldots h)} = \prod_{k=1}^{m_1} p_k^1 \prod_{k=1}^{m_3} p_k^3 \ldots \prod_{k=1}^{m_h} p_k^h$

si $j = h$, alors $\prod_{k=1}^{m_{t(1,2\ldots h)}} p_k^{t(1,2\ldots h)} = \prod_{k=1}^{m_1} p_k^1 \prod_{k=1}^{m_2} p_k^2 \ldots \prod_{k=1}^{m_{h-2}} p_k^{h-2} \prod_{k=1}^{m_{h-1}} p_l^{h-1}$

Nous démontrerons le lemme suivant:

$$(F)\ K^h R^{t_1-1} \prod_{i=1}^{t} q_1^{i_1} R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} q_2^{i_2} \ldots R^{t_{h+1}-1} \prod_{i_{h+1}=1}^{t_{h+1}} q_{h+1}^{i_{h+1}}$$

$$\sim R^{t_1 t_2 \ldots t_{h+1}-1} \prod_{i_1=1}^{t_1} \prod_{i_2=1}^{t_2} \ldots \prod_{i_{h+1}=1}^{t_{h+1}} K^h q_1^{i_1} q_2^{i_2} \ldots q_{h+1}^{i_{h+1}}$$

Nous démontrerons le lemme par la méthode de recurrence: pour $h = 1$ nous avons:

$$KR^{t_1-1} \prod_{i_1=1}^{t_1} q_1^{i_1} R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} q_2^{i_2}$$

$$\sim R^{t_1-1} \left(Kq_1^1 R^{t_2-1} q_2^1 q_2^3 \ldots q_2^t\right) \left(Kq_1^2 R^{t_2-1} q_2^1 q_2^2 \ldots q_2^{t_2}\right) \left(Kq_1^3 R^{t_2-1} q_2^1 q_2^2 \ldots q_2^{t_2}\right)$$
$$\ldots \left(Kq_1^t R^{t_2-1} q_2^1 q_2^2 \ldots q_2^{t_2}\right)$$

$$\sim R^{t_1-1} \left(R^{t_1-1} R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^{t_1} q_2^{i_2}\right) \left(R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} q_1^2 q_2^{i_2}\right) \left(R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^2 q_2^{i_2}\right)$$
$$\left(R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^3 q_2^{i_2}\right) \ldots \left(R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^{t_1} q_2^{i_2}\right)$$

$$\sim R^{t_1-1+t_1(t_2-1)} \prod_{i_1=1}^{t_1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^{i_1} q_2^{i_2}$$

$$\sim R^{t_1 t_2-1} \prod_{i_1=1}^{t_1} \prod_{i_2=1}^{t_2} Kq_1^{i_1} q_2^{i_2}.$$

et donc le lemme est vrai pour $h = 1$. Nous supposons que le lemme est vrai pour $h - 1$, c'est-à-dire

$$K^{h-1} R^{t_1-1} \prod_{i_1=1}^{t_1} q_1^{i_1} R^{t_2-1} \prod_{i_2=1}^{t_2} q_2^{i_2} \ldots R^{t_h-1} \prod_{i_h=1}^{t_h} q_h^{i_h}$$

$$\sim R^{t_1 t_2 \ldots t_h-1} \prod_{i_1=1}^{t_1} \prod_{i_2=1}^{t_2} \ldots \prod_{i_h=1}^{t_h} K^{h-1} q_1^{i_1} q_2^{i_2} \ldots q_h^{i_h}.$$

Nous démontrerons que le lemme est valable pour h.

$$K^h R^{v_1-1} \prod_{i_1=1}^{v_1} q_1^{i_1} R^{v_2-1} \prod_{i_2=1}^{v_2} q^{i_2} R^{v_3-1} \prod_{i_3=1}^{v_3} q_3^{i_3} \dots R^{vh-1} \prod_{ih=1}^{vh} q_h^{ih} R^{vh+1-1} \prod_{i_{h+1}=1}^{vh+1} q_{h+1}^{ih+1}$$

$$\sim KR^{l_{h+1}-1} \prod_{i_{h1}=1}^{l_{h+1}} q_{h+1}^{ih+1} K^{h-1} R^{m_1-1} \prod_{i_1=1}^{v_1} q_1^{i_1} R^{m_2-1} \prod_{i_2=1}^{v_2} q_2^{i_2} R^{m_3-1} \prod_{i_3=1}^{v_3} q_3^{i_3} \dots$$

$$R^{vh-1} \prod_{i_h=1}^{v_h} q_h^{ih}$$

$$= K\omega_1 K^{h-1} R^{l_1-1} \prod_{i_1=1}^{l_1} q^{i_1} R^{l_2-1} \prod_{i_2=1}^{l_2} q_2^{i_2} \dots R^{l_h-1} \prod_{i_h=1}^{l_h} q_h^{ih}$$
$$= \omega_2$$

où

$$\omega_1 = R^{l_{h+1}-1} \prod_{i_{h+1}=1}^{l_{h+1}} q_{h+1}^{ih+1}$$

Mais d'après l'hypothèse, nous avons:

$$\omega_2 \sim K\omega_1 R^{l_1 l_2 \dots l_h - 1} \prod_{i_1=1}^{l_1} \prod_{i_2=1}^{l_2} \dots \prod_{i_h=1}^{l_h} K^{h-1} q^{i_1} q^{i_2} \dots q_h^{ih} = K\omega_1\omega_3$$

où

$$\omega_3 = R^{l_1 l_2 \dots l_h - 1} \prod_{i_1=1}^{l_1} \prod_{i_2=1}^{l_2} \dots \prod_{i_h=1}^{l_h} K^{h-1} q^{i_1} q^{i_2} \dots q_h^{ih}$$

et donc:

$$K\omega_1\omega_3 = KR^{l_{h+1}-1} \prod_{i_{h+1}=1}^{l_{h+1}} q_1^{ih+1} \omega_3 \sim R^{l_{h+1}-1} K q_{h+1}^1 \omega_3 K q_{h+1}^2 \omega_3$$

$$\sim R^{h+1}\left(R^{l_1 l_2 \dots l_h - 1} \prod_{i_1=1}^{l_1} \prod_{i_2=1}^{l_2} \dots \prod_{i_h=1}^{l_h} K^h q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_h^{ih} q_{h+1}^{l}\right)$$

$$\sim \left(R^{l_1 l_2 \dots l_h - 1} \prod_{i_1=1}^{l_1} \prod_{i_2=1}^{l_2} \dots \prod_{i_h=1}^{l_h} K^h q_1^{i_1} q_2^{i_2} \dots q_h^{ih} q_{h+1}^2\right) \dots \left(R^{l_1 l_2 \dots l_h - 1} \prod_{i_1=1}^{l_1} \prod_{i_2=1}^{l_2} \dots\right.$$

$$\left.\prod_{i_h=1}^{l_h} \prod_{i_{h+1}=1}^{l_{h+1}} K^h q_1^{i_2} q_2^{i_2} \dots q_h^{ih} q_{h+1}^{ih+1}\right)$$

et donc le lemme reste valable pour h, c'est-à-dire il est démontré. Nous démontrerons maintenant le théorème. La forme:

$$\alpha = D\alpha_1 D\alpha_2 \dots D\alpha_{v-2} D\alpha_{v-1} \alpha v$$

admet, d'après le Théorème 2, la forme normale:

$$\alpha \sim R^{\nu-1} 1K\alpha_1\alpha_2K^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots K^{\nu-3}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-2}K^{\nu-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu$$
$$\sim R^{\nu-1}1\Big(R^{m_1-1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\Big[K\Big(R^{m_1-1}$$
$$1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1p_3^1\ldots p_{m_1-2}^1K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)$$
$$\Big(R^{m_2-1}1p_1^2KP_1^2p_2^2K^2p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2p_3^2\ldots p_{m_2-2}^2K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2}^2\Big)\Big]$$
$$\Big[K^2\Big(R^{m_1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1-2}^1\ldots p_{m_1-2}^1K^{m_1-1}$$
$$p_1^1p_2^1p_3^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\Big(R^{m_2-1}1p_1^2Kp_1^2p_2^2K^3p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2-2}^2$$
$$K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2}\Big)\Big(R^{m_3-1}1p_1^3Kp_1^3p_2^3K^2p_1^3p_2^3p_3^3\ldots K^{m_3-3}p_1^3p_2^3\ldots p_{m_3-2}^3$$
$$K^{m_3-k}p_1^3p_2^3\ldots p_{m_3}^3\Big)\Big]\ldots\Big[K^{h-1}\Big(R^{m_1-1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots$$
$$p_{m_1-2}^1K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\ldots\Big(R^{m_h-1}1p_1^hKp_1^hp_2^hK^2p_1^hp_2^hp_3^h\ldots K^{m_h-3}p_1^hp_2^h\ldots$$
$$p_{m_h-2}^hK^{m_h-1}p_1^hp_2^h\ldots p_{m_h}^h\Big)\Big]\ldots\Big[K^{\nu-1}\Big(R^{m_1-1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-1}$$
$$1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots RK^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_3-2}^1K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\ldots$$
$$\Big(R^{\nu-1}1p_1^\nu Kp_1^\nu p_2^\nu K^2p_1^\nu p_2^\nu p_3^\nu\ldots K^{m_\nu-3}p_1^\nu p_2^\nu\ldots p_{m_\nu-2}^\nu K^{m_\nu-1}p_1^\nu p_2^\nu\ldots p_{m_\nu}^\nu\Big)\Big]$$
$$=\omega$$

Nous utilisons le lemme et nous avons les formules suivantes:

(a₁)
$$\left\{\begin{aligned}&K\Big(R^{m_1-1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1-2}K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\\&\Big(R^{m_2-1}1p_1^2Kp_1^2p_2^2K^2p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2-2}^2K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2}^2\Big)\\&\sim R^{m_1m_2-1}1p_1^1p_1^2\prod_{i=1}^{2}\Big(Kp_1^ip_2^iK^2p_1^ip_2^ip_3^i\ldots K^{m_i-3}p_1^ip_2^i\ldots p_{m_i-2}^iK^{m_i-1}p_1^ip_2^i\\&\ldots p_{m_i}^u\Big)\Big[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\Big(K^{i_1+i_2+1}\prod_{j=0}^{i_1}p_{j+1}^1\prod_{j=0}^{i_2}p_{j+1}^2\Big)\Big(\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_2}\prod_{j=0}^{i_1}p_{j+1}^1\\&\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\Big)\Big]\Big[\Big(\prod_{i_2=0}^{m_2-3}K^{i_2+m_1}\prod_{j=0}^{i_2}p_{j+1}^2\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\Big)\Big]\Big(K^{m_1+m_2-1}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\Big)\end{aligned}\right.$$

(a₂)
$$\left\{\begin{aligned}&K^2\Big(R^{m_1-1}1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1-2}^1K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots p_{m_1}^1\Big)\\&\Big(R^{m_2-1}1p_1^2Kp_1^2p_2^2K^2p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2-2}K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p_{m_2}^2\Big)\\&\Big(R^{m_3-1}1p_1^3Kp_1^3p_2^3K^2p_1^3p_2^3p_3^3\ldots K^{m_3-3}p_1^3p_2^3\ldots p_{m_3-2}^3K^{m_3-1}p_1^3p_2^3\ldots p_{m_3}^3\Big)\\&\sim R^{m_1m_2m_3-1}p_1^1p_2^2p_3^3\Big[\prod_{i=1}^{3}\Big(Kp_1^ip_2^iK^2p_1^ip_2^ip_3^i\ldots K^{m_i-3}p_1^ip_2^i\ldots p_{m_i-2}^iK^{m_i-1}\\&p_1^ip_2^i\ldots p_{m_i}^i\Big)\Big]\Big[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\prod_{i_3=0}^{m_3-3}K^{i_1+i_2+i_3+2}\prod_{j=0}^{i_1}p_{j+1}^1\prod_{j=0}^{i_2}p_{j+1}^2\prod_{j=0}^{i_3}p_{j+1}^3\\&\Big(\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_2+m_3}\prod_{j=0}^{i_1}p_{j+1}^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\prod_{j=1}^{m_3}p_j^3\Big)\Big(\prod_{i_2=0}^{m_2-3}K^{i_2+m_1+m_3}\prod_{j=0}^{i_2}p_{j+1}^2\prod_{j=1}^{m_3}p_j^3\Big)\\&\Big(\prod_{i_3=0}^{m_3-3}K^{i_3+m_1+m_2}\prod_{j=0}^{i_3}p_{j+1}^3\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\Big)\Big]\Big(K^{m_1+m_2+m_3-3}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\prod_{j=1}^{m_3}p_3^3\Big)\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{a}_3)\left\{
\begin{aligned}
&K^3\left(R^{m_1-1}\,1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p^1_{m_1-2}K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots p^1_{m_1}\right)\\
&\left(R^{m_2-1}\,1p_1^2Kp_1^2p_2^2K^2p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2\ldots p^2_{m_2-2}K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p^2_{m_2}\right)\\
&\left(R^{m_3-1}\,1p_1^3Kp_1^3p_2^3K^2p_1^3p_2^3p_3^3\ldots K^{m_3-3}p_1^3p_2^3\ldots p^3_{m_3-2}K^{m_3-1}p_1^3p_2^3\ldots p^3_{m_3}\right)\\
&\left(R^{m_4-1}\,1p_1^4Kp_1^4p_2^4K^2p_1^4p_2^4p_3^4\ldots K^{m_4-3}p_1^4p_2^4\ldots p^4_{m_4-2}K^{m_4-1}p_1^4p_2^4\ldots p^4_{m_4}\right)\\
&\sim R^{m_1m_2m_3m_4-1}\,1p_1^1p_1^2p_1^3p_1^4\left[\left(\prod_{i=1}^{4}Kp_1^ip_2^iK^2p_1^ip_2^ip_3^i\ldots K^{m_i-3}p_1^ip_2^i\ldots p^i_{m_i}\right)\right]\\
&\left[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\prod_{i_3=0}^{m_3-3}\prod_{i_4=0}^{m_4-3}\left(K^{i_1+i_2+i_3+i_4+3}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=0}^{i_3}p^4_{j+1}\right)\right.\\
&\left(\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_2+m_3+m_4}\prod_{j=1}^{i}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\prod_{j=1}^{m_3}p_j^3\prod_{j=1}^{m_4}p_j^4\right)\left(\prod_{i_2=0}^{m_2-3}K^{i_2+m_1+m_3+m_4}\prod_{j=0}^{i_2}\right.\\
&\left.p^2_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_3}p_j^3\prod_{j=1}^{m_4}p_j^4\right)\left(\prod_{i_3=0}^{m_3-3}K^{i_3+m_1+m_2+m_4}\prod_{j=1}^{i_3}p^3_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\prod_{j=1}^{m_4}p_j^4\right)\\
&\left(\prod_{i_4=0}^{m_4-3}K^{i_4+m_1+m_2+m_3}\prod_{j=0}^{i_4}p^4_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\prod_{j=1}^{m_3}\right)\left(K^{m_1+m_2+m_3+m_4-1}\prod_{j=1}^{m_1}p_j^1\prod_{j=1}^{m_2}\right.\\
&\left.\left.p_j^2\prod_{j=1}^{m_3}p_j^3\prod_{j=1}^{m_4}p_j^4\right)\right]
\end{aligned}\right.
$$

En généralement:

$$
(\mathrm{a}_h)\left\{
\begin{aligned}
&K^{h-1}\left(R^{m_1-1}\,1p_1^1Kp_1^1p_2^1K^2p_1^1p_2^1p_3^1\ldots K^{m_1-3}p_1^1p_2^1\ldots p^1_{m_1-2}K^{m_1-1}p_1^1p_2^1\ldots\right.\\
&\left.p^1_{m_1}\right)\left(R^{m_2-1}\,1p_1^2Kp_1^2p_2^2K^2p_1^2p_2^2p_3^2\ldots K^{m_2-3}p_1^2p_2^2\ldots p^2_{m_2-2}K^{m_2-1}p_1^2p_2^2\ldots p^2_{m_2}\right)\\
&\ldots\left(R^{m_h-1}\,1p_1^hKp_1^hp_2^hK^2p_1^hp_2^hp_3^h\ldots K^{m_h-3}p_1^hp_2^h\ldots p^h_{m_h-2}K^{m_h-1}p_1^hp_2^h\ldots p^h_{m_h}\right)\\
&\sim R^{m_1\ldots m_h-1}\,1p_1^1p_1^2\ldots p_1^h\left[\prod_{i=1}^{h}\left(Kp_1^1p_2^1K^2p_1^ip_2^ip_3^i\ldots K^{m_i-3}p_1^ip_2^i\ldots p^i_{m_i-2}\right.\right.\\
&\left.\left.K^{m_i-1}p_1^ip_2^i\ldots p^i_{m_i}\right)\right]\left[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\ldots\left(K^{i_1+i_2+\ldots+i_h+h-1}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\ldots\right.\right.\\
&\left.\left.\prod_{j=0}^{i_h}p^h_{j+1}\right)\left(\prod_{i_1=1}^{m_1-3}K^{i_1+m_2+\ldots+m_h}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\ldots\prod_{j=1}^{m_h}p_j^h\right)\right]\left[\left(\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\right.\right.\\
&\left.\left.K^{i_2+m_1+m_3+\ldots+m_h}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=0}^{m_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{m_3}p_j^3\ldots\prod_{j=1}^{m_h}p_j^h\right)\right]\ldots\left[\prod_{i_h=0}^{m_h-3}\right.\\
&\left.\left(K^{i_h+m_1+\ldots+m_{h-1}-1}\prod_{j=0}^{i_h}p^h_{j+1}\prod_{j=0}^{m_1}p_j^1\ldots\prod_{j=0}^{m_1}p_j^1\ldots\prod_{j=0}^{m_{h-1}}p_j^{h-1}\right)\right]\\
&\left(K^{m_1+m_2+\ldots+m_h-1}\prod_{j=1}^{m_1}p_1^1\prod_{j=1}^{m_2}p_j^2\ldots\prod_{j=1}^{m_4}p_j^h\right)
\end{aligned}\right.
$$

Nous utilisons pour la forme α cette formule et nous avons:

$$
\alpha\sim R^{\mathfrak{N}}\prod_{i=1}^{t}\left[\left(p_1^iKp_1^ip_2^iK^2p_1^ip_2^ip_3^i\ldots K^{m_i-3}p_1^ip_2^i\ldots p_1^ip_2^i\ldots p^i_{m_i}K^{m_i-1}p_1^ip_2^i\ldots\right.\right.
$$

$$p^{i}_{m_t}\Big)^{v-i+1}\Big]\Big[\prod_{i_1=1}^{m_1-3}\prod_{i_2=2}^{m_2-3}\Big(K^{i_1+i_2+1}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{i_2}p^2_{j+1}\Big)\Big(\prod_{i_1=0}^{m_3-3}K^{i_1+i_2+i_3+2}$$

$$\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=0}^{i_3}p^3_{j+1}\Big)\ldots\Big(\prod_{i_1=0}^{m_1-2}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\ldots\prod_{i_h=0}^{m_h-3}K^{i_1+\ldots+i_h-1}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{i_2}$$

$$p^2_{j+1}\ldots\prod_{j=0}^{i_h}p^h_{j+1}\Big)\ldots\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}\ldots\prod_{i_v=0}^{m_v-3}K^{i_1+\ldots+i_v+v-1}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\ldots$$

$$\prod_{j=0}^{i_v}p^v_{j+1}\Big)\Big]\Big[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_2}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{m_2}\prod_{i_2=0}^{m_2-3}K^{i_2+m_1}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}\Big)\Big(\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_2+m_3}$$

$$\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{m_2}p^2_j\prod_{j=1}^{m_3}p^3_j\prod_{i_2=0}^{m_2-3}K^{i_2+m_1+m_3}\prod_{j=0}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\prod_{j=1}^{m_3}p^3_j\prod_{i_3=0}^{m_3-3}K^{i_3+m_1+m_2}$$

$$\prod_{j=0}^{i_3}p^3_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\prod_{j=1}^{m_2}p^2_j\Big)\ldots\prod_{i_1=0}^{m_1-3}K^{i_1+m_1+\ldots+m_h}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=0}^{m_2}\ldots\prod_{j=1}^{m_h}p^h_j\prod_{i_2=0}^{m_2-3}$$

$$K^{i_2+m_1+m_3+\ldots+m_h}\prod_{j=1}^{i_2}p^2_{j+1}\prod_{j=0}^{m_2}p^1_j\prod_{j=1}^{m_3}p^3_j\ldots\prod_{j=1}^{m_h}p^h_j\ldots\prod_{i_h=0}^{m_h-3}K^{i_h+m_1+\ldots+m_{h-1}}$$

$$\prod_{j=0}^{i_h}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\ldots\prod_{j=1}^{m_{h-1}}p^{h-1}_j\Big)\Big]\ldots\Big[\prod_{i_1=0}^{m_1-3}\Big(K^{i_1+m_2+\ldots+m_v}\prod_{j=0}^{i_1}p^1_{j+1}\prod_{j=1}^{m_2}p^2_j\ldots$$

$$\prod_{j=1}^{m_v}p^v_j\ldots\prod_{i_h=0}^{m_h-3}K^{i_h+m_1+\ldots+m_{h-1}+m_{h+1}+\ldots+m_v}\prod_{j=0}^{i_h}p^h_{j+1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\ldots\prod_{j=0}^{m_{h-1}}p^{h-1}_{h+1}$$

$$\prod_{j=0}^{m_{h+1}}p^{h+1}_j\ldots\prod_{j=1}^{m_v}p^v_j\ldots\prod_{i_v=0}^{m_v-3}K^{i_v+m_1+\ldots+m_{v-1}}\prod_{j=0}^{i_v}p^v_{j-1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\ldots\prod_{j=1}^{m_{v-1}}p^{v-1}_j\Big)\Big]$$

$$\Big(K^{m_1+m_2-1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\prod_{j=1}^{m_2}p^2_j\Big)\Big(K^{m_1+m_2+m_3-1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\prod_{j=1}^{m_2}p^2_j\prod_{j=1}^{m_3}p^3_j\Big)\ldots$$

$$\Big(K^{m_1+\ldots+m_v-1}\prod_{j=1}^{m_1}p^1_j\ldots\prod_{j=1}^{m_v}p^v_j\Big)$$

où nous avons

$$\mathfrak{N}=\sum_{j=1}^{v}\sum_{i=1}^{j}m_i+v-1$$

Cette formule on peut la restreindre et ainsi nous avons: $\mathbf{N}_3(D)$.

(*À suivre*)

Centre de Logique
Académie de la République Populaire Roumaine
Bucarest, Rumania