Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XIII, Number 4, October 1972
NDJFAM

BEMERKUNGEN ZU HENKINS BEWEIS FÜR DIE NICHTSTANDARD-VOLLSTÄNDIGKEIT DER TYPENTHEORIE

KLEMENS DÖPP

1 In seiner Arbeit "Completeness in the Theory of Types" (JSL 15 Nr.2 (1950), S. 81-91) hat Henkin gezeigt, daß jeder Ausdruck des von Church in "A Formulation of the Simple Theory of Types" (JSL 5 (1940), S. 56-68) entwickelten Systems der Typentheorie, der im von Henkin a.a.o. erklärten Nichtstandardsinn allgemeingültig ist, auch im Formalismus hergeleitet werden kann; dasselbe gilt—wie Henkin in einer Nachbemerkung ausführt—für eine große Zahl von abgewandelten Systemen. Der wesentliche Teil des Beweises wird durch den Nachweis geführt, daß jede widerspruchsfreie Menge von *abgeschlossenen* Ausdrücken im Nichtstandardsinn erfüllbar ist. Dieser Umstand hat Einschränkungen bei der Formulierung einiger verwandter Sätze zur Folge: Der Endlichkeitssatz für Nichtstandard-Erfüllbarkeit sowie der Satz von Löwenheim und Skolem gelten zunächst nur für Mengen von abgeschlossenen Ausdrücken. Als zweite Fassung des Vollständigkeitssatzes erhält man (unter Benutzung des Deduktionstheorems in der Formulierung von Church) zunächst nur, daß jede Nichtstandard-Folgerung aus einer Menge von abgeschlossenen Ausdrücken des Typs o auch aus dieser formal herleitbar ist; Entsprechendes gilt für den sich unmittelbar daran anschließenden Endlichkeitssatz für Nichtstandard-Folgerungen.

Die genannten Einschränkungen sind jedoch unnötig: Henkins Argumentation läßt sich nämlich *wörtlich* auch für Mengen von nicht notwendig abgeschlossenen Ausdrücken verwenden; dabei erhält lediglich das Lemma von S. 87 die abgeänderte, jedoch völlig ausreichende Fassung: Es gibt eine Belegung ϕ, sodaß für jeden Ausdruck $\mathbf{B}_\beta$ gilt: $V_\phi(\mathbf{B}_\beta) = \Phi([\mathbf{B}_\beta^\phi])$. Damit wird zunächst die Forderung nach Abgeschlossenheit überflüssig. Die Voraussetzung, daß die Prämissenmengen nur Ausdrücke vom Typ o enthalten, wird schließlich dadurch entbehrlich, daß eine Hinzunahme von Ausdrücken anderer Typen als Prämissen keine weiteren Ausdrücke des Typs o herleitbar werden läßt, wie eine triviale Induktion über die Beweislänge zeigt.

Received December 9, 1971

2 Die oben in Rede stehende Folgerungsbeziehung liegt genau dann vor, wenn jede Belegung mit sämtlichen Prämissen immer auch die Konklusion mit Wahr bewertet. Daneben hat sich eine Variante des Folgerungsbegriffs eingebürgert, die auf der Gepflogenheit der Mathematiker beruht, freie Variablen stillschweigend als durch Allquantoren gebunden aufzufassen, und für die ich hier die Bezeichnung *Konsequenz* verwende: Die Konsequenzbeziehung besteht genau dann, wenn mit sämtlichen Prämissen immer auch die Konklusion gültig ist. An die Stelle der Erfüllbarkeit tritt bei der fraglichen Auffassung die Existenz eines Modells, d.h. einer (Standard– bzw. Nichtstandard-) Struktur, in welcher alle zu der betreffenden Menge gehörigen Ausdrücke vom Typ o gültig sind. Für abgeschlossene Ausdrücke fallen Folgerungs- und Konsequenzbegriff zusammen.

Der von Church entwickelte typentheoretische Kalkül ist auf den Folgerungsbegriff nur durch die Zusatzforderung zugeschnitten, daß freie Variablen aus mathematischen Axiomen nicht generalisiert und nicht durch Substitution ersetzt werden dürfen. Läßt man diese Einschränkung fallen, so werden Ausdrücke vom Typ o und deren Abschließungen durch Generalisierung aus einander herleitbar, und für das so abgewandelte System erhält man die entsprechenden Nichtstandard-Vollständigkeitssätze bezüglich des Konsequenzbegriffs. Den angeführten Sätzen über Nichtstandard-Erfüllbarkeit entsprechen dabei solche über die Existenz von Nichtstandard-Modellen.

Institut für Mathematik
der Technischen Universität
Hannover, West Germany