Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XVIII, Number 3, July 1977
NDJFAM

SEMANTIQUE DES FORMULES LOGIQUES EN FORME D'ÉQUIVALENCE n-AIRE (DEMI-MODÈLES)

METODĚJ K. CHYTIL

0 *Introduction**

0.1 L'Etude présentée se propose d'étudier la sémantique de telles formules du calcul classique des propositions qui ne contiennent, en plus de n variables propositionnelles, que des foncteurs d'équivalence $\equiv$ et de négation $\neg$. On distingue, en même temps, le cas où:

(a) $p \equiv q \equiv r$ s'entend comme une abbréviation pour $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r)$

et

(b) celui où il s'entend comme une abbréviation pour $(p \equiv q) \equiv r$.

Pour le second cas, on adopte un nouveau foncteur $\boxminus$ appelé, comme jusqu'à présent, foncteur n-aire d'équivalence, tandis que le foncteur n-aire $\equiv$ (pris comme une abbréviation pour l'équivalence conjonctive) est désigné par la suite comme foncteur de conéquivalence.

Les formules spéciales du système $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ définies dans l'Etude (dites équivalences élémentaires), peuvent être prises pour la forme normale des formules factuelles du système donné (soit formules qui ne sont pas tautologies elles-mêmes ni le sont leurs négations).

0.2 Notons que des systèmes similaires ont déjà attiré l'attention de Leśniewski (1923), de Rasiowa (1947), de Mostowski (1948) et de Church (1951). Mihăilescu s'en est occupé systématiquement (1937 et 1969). Les études des auteurs mentionnés sont cependant orientées plutôt vers des aspects déductifs.

Leśniewski n'employait (selon [2] et [3]) dans ses considérations que le

---

*J'ai plusieurs fois discuté le contenu de cette Etude avec M. Petr Hájek de l'Institut de Mathématiques de la ČSAV à Prague et je lui remercie de ses observations importantes.

Received June 2, 1972

système $\mathcal{L}(\equiv)$, pour lequel il a déduit le théorème de prouvabilité de ses formules:

La formule $A \in \mathcal{L}(\equiv)$ est prouvable si, et seulement si le nombre de l'occurrences de chacune de ses variables est pair.

Mostowski (voir [3]) considère la formule

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \ldots \equiv p_n$$

comme une abbréviation de la formule

$$(p_1 \equiv p_2) \wedge (p_2 \equiv p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \equiv p_n).$$

Il introduit, en outre, pour une formule quelconque $A \in \mathcal{L}(\equiv)$ composée des variables propositionnelles, des parenthèses et du foncteur $\equiv$, sa forme normale

$$p_1 \equiv (p_2 \equiv (p_3 \equiv \ldots \equiv (p_{n-1} \equiv p_n))) \ldots$$

et parle de la commutativité et de l'associativité de l'équivalence. Le même auteur part du théorème de Leśniewski et en établit un autre pour le système $\mathcal{L}(\equiv)$:

La formule A est logiquement équivalente à la formule A', si, et seulement si la différence des nombres des fréquences de chaque variable dans les deux formules représente un nombre pair.

De plus, Mostowski s'occupe, en marge de ses considérations, d'un système qu'il est possible d'exprimer comme $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$ et indique la forme normale de ses formules comme suit:

$$p_1 \equiv (p_2 \equiv \ldots \equiv (p_n \equiv (q_1 \not\equiv (q_2 \not\equiv \ldots \not\equiv (q_{m-1} \not\equiv q_m)) \ldots$$

En raison du fait que le système $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$ est équivalent au $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$, on peut identifier chaque formule du $\mathcal{L}'$ avec une formule du $\mathcal{L}''$ décrit aussi par Church [5] et adopté également dans l'Etude présentée comme système dit "à EN-formules". Mostowski renvoie, en outre, au théorème de Rasiowa qui dit:

La formule du système $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$ est prouvable si, et seulement si le foncteur $\equiv$ a une fréquence qui représente un nombre impair et, en même temps, si la fréquence du foncteur $\not\equiv$ aussi bien que celles de chaque variable sont des nombres pairs,

se référant également à l'Etude de Mihăilescu [1] dont Church fait mention en [4]. Church indique en [5] le système $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$[1] avec les axiomes:

1. $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$
2. $(p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r)$
3. $(\neg p \equiv \neg q) \equiv (p \equiv q)$

---

1. En original: P^{EN}.

et avec deux règles de déduction:

(a) règle de substitution,

(b) règle modus ponens en forme: $\dfrac{A,\ A \equiv B}{B}$

où on mentionne le théorème:

La formule $A \in \mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ *est prouvable si, et seulement si chaque variable propositionnelle, aussi bien que le signe* $\neg$*, apparaissent en fréquence représentant un nombre pair (sous réserve qu'ils apparaissent).*

Il est la conséquence d'un théorème analogue que Leśniewski donne pour $\mathcal{L}(\equiv)$. Sa solution antérieure est attribuée par Church [5] indépendamment à McKinsey et à Mihăilescu.

La dernière Etude de Mihăilescu (voir [6]) ne s'occupe que du problème syntaxique des systèmes incomplets du calcul des propositions $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$, $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$, $\mathcal{L}'''(\equiv, \not\equiv, \neg)$, etc.

Les rapports à la présente Etude sont donc les suivants:

(a) Les formules du système de Mihăilescu $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ sont précisément les mêmes que celles du système de Church dites P^{EN} et que celles appelées *EN*-formules, spécifiées par la Définition 5 de l'Etude présentée.
(b) Les formules prouvables des systèmes $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ et P^{EN} sont toutes les tautologies, égales aux *EN*-formules. De ce fait et à l'observation de [5], il est justifiable de remplacer le terme syntaxique "prouvabilité" par le terme sémantique "validité dans le modèle canonique complet".

0.3 L'auteur s'est contenté avec l'étude de la sémantique du système $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$, parce que chaque formule du système est logiquement équivalente à la formule du système $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$ et vice versa. L'ensemble de tous les modèles canoniques de *EN*-formules est égal à l'ensemble de tous les modèles canoniques des *ER*-formules, c'est à dire des formules du système $\mathcal{L}'(\equiv, \not\equiv)$. A plus forte raison, on n'examine pas le système $\mathcal{L}'''(\equiv, \not\equiv, \neg)$.

A l'avis de l'auteur, l'Etude apporte les contributions suivantes:

1. définition de la forme normale des formules factuelles du système $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ (en d'autres termes des équivalences élémentaires) et étude de leurs propriétés;
2. classification des équivalences élémentaires;
3. introduction et étude des demi-modèles comme modèles canoniques pour les équivalences élémentaires et étude de leurs propriétés;
4. adoption de certaines idées nouvelles dans le but de rendre possible l'étude exacte de la sémantique du système $\mathcal{L}''(\equiv, \neg)$ et, en général, de tout système similaire, en particulier du type et de l'ordre de la formule du calcul des propositions, etc.

1 *Preliminaires* Pour le texte qui suit, convenons la terminologie suivante:

Le fait que la formule φ est une *tautologie du calcul des propositions* (dans ce qui suit seulement tautologie), est mis en évidence par le symbole $\vdash\varphi$. On dira que φ *est logiquement valide* si, et seulement si φ est une tautologie du calcul des propositions. Et φ *est logiquement équivalente* à ψ si la formule $\varphi \equiv \psi$ est logiquement valide (symbole $\varphi \Leftrightarrow \psi$). L'expression *carte à n-membres* signifiera, en sens général, une suite de Boole, c'est-à-dire une suite à n-éléments dont les membres ne sont que des zéros et des uns. Si la structure $\mathfrak{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_n\rangle$ est telle que M est un ensemble fini non vide et P_i (pour $1 \leqslant i \leqslant n$) une fonction de Boole (c'est-à-dire l'application de l'ensemble M dans l'ensemble $\{0,1\}$), on parlera du *modèle sémantique fini unaire* $\mathfrak{M}$. Chaque modèle $\mathfrak{M}^0 = \langle M, P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\rangle$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant \ldots \leqslant n$, sera appelé *modèle partiel du modèle* $\mathfrak{M}$. Le modèle $\mathfrak{M}' = \langle M', P_1 \restriction M', \ldots, P_n \restriction M'\rangle$ où $M' \subseteq M$ et $\restriction$ est le symbole de partialisation, sera le *sous-modèle du modèle* $\mathfrak{M}$.

Définition 1 Soit le modèle $\mathfrak{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_n\rangle$.

(a) L'ensemble $\mathsf{K}(a) = \langle P_1(a), \ldots, P_n(a)\rangle$ où $a \in M$ sera *carte de l'objet a dans le modèle* $\mathfrak{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_n\rangle$ (voir [7]).
(b) L'ensemble de toutes les diverses cartes du modèle $\mathfrak{M}$ portera le symbole $\mathsf{K}_{\mathfrak{M}}$.
(c) L'ensemble $\mathsf{K}^0(a) = \langle P_{i_1}(a), \ldots, P_{i_k}(a)\rangle$ où $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$, sera appelé *carte partielle de l'objet a*.
(d) Le modèle $\mathfrak{M}$ est *simple* s'il y a une application biunivoque entre l'ensemble des objets M et l'ensemble des cartes $\mathsf{K}_{\mathfrak{M}}$.

Acceptons, en outre, les concepts: *type* du modèle et *ordre* du modèle. On dira que le modèle $\mathfrak{M}$ est du type n si, et seulement s'il comprend n fonctions (symbole $\mathfrak{M}^n$). On dira que le modèle $\mathfrak{M}$ est de l'ordre m si, et seulement si l'ensemble M est à m éléments (symbole $\mathfrak{M}_m$). Cela permet de distinguer aisément les modèles qui diffèrent l'un de l'autre par le nombre d'éléments ou de fonctions et d'étudier les classes des modèles dont le type et l'ordre sont identiques.

Pour pouvoir étudier, dans ce contexte, les modèles qu'on pourrait appliquer d'une manière univoque à une certaine formule du calcul des propositions et vice versa, admettons le concept du modèle canonique d'un certain type et ordre avec la description de l'application qui existe entre les modèles ainsi définis et les formules du calcul des propositions.

Définition 2 Un modèle quelconque $\mathfrak{M} = \langle M, P_1, \ldots, P_n\rangle$, tel que M soit l'ensemble de m diverses cartes à n-éléments et $\mathsf{P}_i(\langle u_1, \ldots, u_n\rangle) = u_i$, sera appelé *modèle canonique du type n et de l'ordre m*. Si $m = 2^n$, le modèle respectif sera *modèle canonique et complet* du type n.

Note 1: Il résulte de la construction des modèles canoniques que tous les différents sous-modèles propres d'un modèle canonique complet du type n sont au nombre de $(2^{(2^n)} - 2)$, tandis que tous les différents modèles canoniques du type n et de l'ordre m sont au nombre de $\binom{2^n}{m}$ pour $1 \leqslant m \leqslant 2^n$.

Eu égard à l'application biunivoque de l'ensemble de tous les sous-modèles propres d'un modèle canonique complet du type n dans l'ensemble de toutes les formules du type n logiquement non équivalentes, on parlera parfois d'un modèle canonique $\mathfrak{M}_m^n$ comme d'un *modèle canonique de la formule* φ (symbole $\mathfrak{M}_\varphi$) où φ est la *formule caractéristique* du modèle $\mathfrak{M}_m^n$, c'est-à-dire une formule qui est valide dans $\mathfrak{M}_m^n$ et, en même temps, elle n'est valide dans aucun modèle $\mathfrak{M}_v^n$ pour $m < v \leqslant 2^n$. Il suit de la Définition 2 que chaque modèle canonique est simple. Ci-après suit la définition usuelle du terme "*satisfaire*":

Définition 3[2]

(a) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle; définissons, en utilisant le principe de récurrence, le predicat "*Objet a satisfait à la formule* φ *dans le modèle* $\mathfrak{M}$".

(1) Si la formule φ est p_i, on définit: a satisfait à φ si, et seulement si $\mathsf{P}_i(a) = 1$;
(2) a satisfait à la formule $\varphi \vee \psi$ si, et seulement s'il satisfait à la formule φ ou qu'il satisfait à la formule ψ; a satisfait à la formule $\varphi \wedge \psi$ si, et seulement s'il satisfait à la formule φ et qu'il satisfait à la formule ψ; a satisfait à la formule $\varphi \rightarrow \psi$ si, et seulement si a satisfait à φ, a satisfait à ψ; a satisfait à la formule $\neg\varphi$ si a ne satisfait pas à φ.

Disons que la formule φ est valide dans le modèle $\mathfrak{M}$ si chaque objet $a \in \mathfrak{M}$ satisfait à la formule φ.

(b) On dira que la carte $\mathsf{K} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ satisfait à la formule φ si K satisfait à φ dans le modèle canonique et complet.

Lemme 1 [Associativité] *Soient A, A' deux formules, chacune composée de n formules* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(n \geqslant 3)$ *par la connection du foncteur* $\equiv$, *qui ne diffèrent l'une de l'autre que par la mise différente entre parenthèses (à condition que la mise soit juste). Dans ce cas, A est logiquement équivalente à A'.*

La démonstration est évidente.

2 *Conéquivalences, équivalences n-aires et EN-formules*

Note 2: Pour des formules quelconques du calcul des propositions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, la conjonction de $(n - 1)$ équivalences binaires

$$(\varphi_1 \equiv \varphi_2) \wedge \ldots \wedge (\varphi_{n-1} \equiv \varphi_n) \tag{1}$$

s'écrit, en général, tout court:

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \ldots \equiv \varphi_n. \tag{2}$$

Adoptons pour (1) encore une autre abbréviation:

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\equiv}} (\varphi_i) \tag{3}$$

2. Prenons p.e. de [7].

Appelons l'expression (1) *conéquivalence n-aire* où n indique le nombre des formules composantes.

L'expression (2) peut, bien entendu, être utilisée dans un autre sens (justifié par Lemme 1), soit comme abbréviation de la formule

$$((((\varphi_1 \equiv \varphi_2) \equiv \varphi_3) \equiv \ldots) \equiv \varphi_{n-1}) \equiv \varphi_n \tag{4}$$

soit comme abbréviation d'une autre formule composée par l'autre mise de (2) entre parenthèses. Pour éviter des confusions, on utilisera, par la suite, toutes les fois que (2) est pris au sens (4), le foncteur $\boxminus$ à la place du foncteur $\equiv$, si bien que (4) équivaut à l'expression

$$\varphi_1 \boxminus \varphi_2 \boxminus \ldots \boxminus \varphi_n. \tag{5}$$

Adoptons, en outre, l'abbréviation:

$$\mathop{\boxminus}_{i=1}^{n} (\varphi_i). \tag{6}$$

L'expression (5) sera appelée *équivalence n-aire,* tandis que sa négation portera le nom d'*antivalence n-aire.* On a toujours

$$(\varphi_1 \equiv \varphi_2) \Longleftrightarrow (\varphi_1 \boxminus \varphi_2). \tag{7}$$

On démontrera encore de manière usuelle que (5) est commutative:

Lemme 2 (Commutativité) *Soit n le nombre naturel $n \geqslant 2$. Prenons n formules du calcul des propositions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et pour $i_1, \ldots, i_n$ les entiers* $1, \ldots, n$, *dans un ordre quelconque. On aura*

$$(\varphi_1 \boxminus \varphi_2 \boxminus \ldots \boxminus \varphi_n) \Longleftrightarrow (\varphi_{i_1} \boxminus \varphi_{i_2} \boxminus \ldots \boxminus \varphi_{i_n}). \tag{8}$$

Définition 4 (de la formule élémentaire) Soit φ une formule du calcul des propositions. On dira qu'elle est *du type n* si l'on y trouve précisément n variables différentes. On dira qu'elle est *de l'ordre m* si elle est la formule caractéristique pour un modèle canonique de l'ordre m. La formule du calcul des propositions du type n, dans laquelle la négation apparaît au plus devant les formules atomiques et qui ne comprend qu'une seule fois chacune des n variables, les diverses variables étant connectées par un foncteur binaire d'un seul genre entre parenthèses quelconques, sera appelée *formule élémentaire du type n.*

Selon le genre du foncteur binaire dans la formule, on parlera p.e. de la

disjonction élémentaire tant qu'elle ne comprend des foncteurs binaires que le foncteur $\vee$,
conjonction élémentaire tant qu'elle ne comprend des foncteurs binaires que le foncteur $\wedge$,
équivalence élémentaire tant qu'elle ne comprend des foncteurs binaires que le foncteur $\boxminus$.

L'équivalence élémentaire du type n qui comprend le nombre $\left\{\begin{matrix}\text{pair}\\ \text{impair}\end{matrix}\right\}$ des variables positives, sera appelée *équivalence élémentaire* $\left\{\begin{matrix}\textit{paire}\\ \textit{impaire}\end{matrix}\right\}$ *du* *type n.* Adoptons pour une équivalence élémentaire du type n le symbole EE^n avec l'indice supérieur "+" si elle est paire et "-" si elle est impaire.

En ne retenant dans le calcul des propositions que les foncteurs $\neg$ et $\boxminus$, on obtient des formules "construites à la seule base de la négation et de l'équivalence":

Définition 5 (de la EN-formule)

1. Chaque variable du calcul des propositions est une EN-formule. Appelons-la atomique.
2. Si φ est une EN-formule, il en résulte que $\neg\varphi$ est, à son tour, une EN-formule.
3. Si φ et ψ sont des EN-formules, il en résulte que l'expression $(\varphi \boxminus \psi)$ est, à son tour, une EN-formule.
4. Seules sont des EN-formules les expressions obtenues en vertu d'un nombre fini des opérations 1-3.

3 *Transformations des EN-formules* Une EN-formule peut comprendre, par définition, des variables, des foncteurs $\neg$, $\boxminus$ et des parenthèses. Le nombre des occurrences d'une certaine variable est quelconque ce qui est aussi le cas du foncteur de négation qui peut se présenter au nombre quelconque devant une formule correcte. On se propose de démontrer que toute EN-formule, tant qu'elle n'est pas logiquement $\left\{\begin{matrix}\text{valide}\\ \text{fausse}\end{matrix}\right\}$, peut être exprimée en forme d'une équivalence élémentaire (paire ou impaire).

Lemme 3 *Une négation k-multiple d'une formule φ du calcul des propositions est logiquement équivalente à la formule $\left\{\begin{matrix}\varphi\\ \neg\varphi\end{matrix}\right\}$ pour k $\left\{\begin{matrix}\textit{pair}\\ \textit{impair}\end{matrix}\right\}$ où k est un nombre naturel quelconque.*

Le lemme n'est qu'une généralisation de la loi de la négation double par la substitution répétée: $p/\neg p$ ou $p/\neg\neg p$ dans la formule $p \equiv \neg\neg p$.

Lemme 4 *Pour les formules quelconques φ, ψ on a:*

$$\neg(\varphi \equiv \psi) \Longleftrightarrow (\neg\varphi \equiv \psi)$$
$$\neg(\varphi \equiv \psi) \Longleftrightarrow (\varphi \equiv \neg\psi).$$

La démonstration est facile, par exemple au moyen de la méthode de matrice.

Corollaires 1 et 2 (du Lemme 3 et du Lemme 4):

1. *Les EN-formules avec négations multiples devant une certaine variable ou parenthèse peuvent être transformées en formules logiquement équivalentes ayant une négation au plus devant la variable (parenthèse) concernée.*

2. *Les EN-formules avec négation devant la parenthèse peuvent être transformées en formules avec négations simples n'apparaissant que devant les formules atomiques. Cela veut dire que l'on est en mesure de trouver pour chaque EN-formule une EN-formule logiquement équivalente*

en forme de l'équivalence n-aire, n'ayant pour membres que les formules atomiques et leurs négations.

Lemme 5 *Soit p la variable propositionnelle. Soit E une équivalence n-aire du type $n = 1$, c'est-à-dire établie seulement au moyen des formules atomiques p, $\neg p$ et soit k le nombre des variables p positives ou négatives dans E. Il en résulte:*

(a) *E est une tautologie si, et seulement si k est pair et si les occurrences de p et celles de $\neg p$ sont en nombres pairs,*
(b) *E est une contradiction si, et seulement si k est pair et si les occurrences de p et celles de $\neg p$ sont en nombres impairs,*
(c) *E est logiquement équivalente à la formule p si, et seulement si k est impair et si les occurrences de p sont en nombres impairs,*
(d) *E est logiquement équivalente à la formule $\neg p$ si, et seulement si k est impair et si les occurrences de $\neg p$ sont en nombres impairs.*

Démonstration: 1. Le théorème est évident pour $k = 1$.
2. Pour $k = 2$, on obtient par la méthode de matrices:

$$\vdash (p \boxminus p) \tag{9}$$
$$\vdash (\neg p \boxminus \neg p) \tag{10}$$
$$\vdash \neg(\neg p \boxminus p) \tag{11}$$
$$\vdash \neg(p \boxminus \neg p). \tag{12}$$

3. Supposons maintenant que le théorème soit valable pour un $k \geqslant 2$ et démontrons pour $k + 1$: La formule avec $k + 1$ fréquences de p a soit la forme

$$\varphi \boxminus p \tag{13}$$

soit la forme

$$\varphi \boxminus \neg p. \tag{14}$$

Examinons seulement (13), le cas (14) étant analogique:

(a) Soit k pair; on a:

(aa) si φ est une tautologie, le nombre des fréquences positives et le nombre des fréquences négatives de p dans φ étant pair, il est facile de voir que $(\varphi \boxminus p) \Longleftrightarrow p$. En même temps, le nombre des fréquences positives de p dans la formule $\varphi \boxminus p$ est impair et celui des fréquences négatives est pair.
(ab) si φ est une contradiction, le nombre des fréquences positives et le nombre des fréquences négatives de p dans φ étant impair, il est évident que $(\varphi \boxminus p) \Longleftrightarrow \neg p$. En même temps, le nombre des fréquences positives de p dans la formule $\varphi \boxminus p$ est pair et celui des fréquences négatives impair.

(b) Soit k impair; on a:

(ba) si $\varphi \Longleftrightarrow p$ et par suite, le nombre des fréquences positives de p dans φ est impair, on peut voir que $\vdash (\varphi \boxminus p)$. En même temps, le nombre des

fréquences positives de p dans la formule $\varphi \boxminus p$ est pair et celui de fréquences négatives l'est aussi. Où bien
(bb) si $\varphi \Longleftrightarrow \neg p$ et le nombre des fréquences de $\neg p$ dans φ est impair, on peut voir que $\varphi \boxminus p$ est une contradiction. En même temps, le nombre des fréquences positives de p dans la formule $\varphi \boxminus p$ est impair et celui des fréquences négatives de p l'est aussi.

Corollaire *Chaque EN-formule du type $n = 1$ est logiquement équivalente à la formule d'une des classes suivantes:*

(a) p,
(b) $\neg p$,
(c) *tautologie,*
(d) *contradiction.*

Théorème 1 (Mihăilescu-McKinsey-Rasiowa)[3] *Une EN-formule est une tautologie si, et seulement si chaque de ses variables apparaît au nombre pair aussi bien que le foncteur*

Théorème 2 (de la forme normale des *EN*-formules) *Pour chaque EN-formule φ, on a un de trois cas suivants:*

(a) $\vdash \varphi$
(b) $\vdash \neg\varphi$,
(c) *il existe l'équivalence élémentaire telle que* $\vdash(\varphi \equiv EE)$.

Démonstration: 1. Pour $n = 1$. Selon les Corollaires 1 et 2, il est possible d'admettre que φ soit en forme de l'équivalence n-aire composée des formules p_1 et $\neg p_1$. φ est selon le Corollaire 3 équivalente soit à la formule p_1, soit à $\neg p_1$ (qui sont équivalences élémentaires), soit à une formule qui est ou bien une tautologie, ou bien une contradiction.
2. Pour $n > 1$. Admettons de nouveau que φ soit en forme d'équivalence n-aire, composée des formules $p_1, \neg p_1, \ldots, p_n, \neg p_n$. Si chaque variable n'apparaît qu'une seule fois, il s'agit d'une équivalence élémentaire. Si certaines variables (parmi eux par exemple p_1) apparaissent à plusieurs reprises, φ a la forme de $(\varphi_0 \equiv \varphi')$ où φ_0 ne comprend que la variable p_1 (en fréquences répétées), tandis que φ' comprend les autres variables. Selon le Corollaire 3 appliqué pour φ_0, φ est équivalente à une des formules φ', $\neg\varphi'$, $(p_1 \equiv \varphi')$, $(\neg p_1 \equiv \varphi')$. Notons encore que $\neg\varphi'$ est logiquement équivalente à une équivalence n-aire. Effectuons successivement la transformation d'après le Corollaire 3 pour toutes les autres variables à fréquences répétées. Si l'on n'obtient de cette manière ni tautologie ni contradiction, la formule finale ne peut comprendre chacune des variables qu'une seule fois; la formule φ est donc logiquement équivalente à une équivalence élémentaire.

Théorème 3 *Soient φ_i et φ_j deux formules en forme d'équivalence élémentaire du même type n, composées des variables $p_1, \ldots, p_n$ chacune.*

3. Voir [6] et [3] où l'on mentionne ce théorème.

φ_i est logiquement équivalente à $\begin{Bmatrix} \varphi_j \\ \neg\varphi_j \end{Bmatrix}$ si, et seulement si la valeur absolue de la différence du nombre des négations dans les formules φ_i et φ_j est un nombre $\begin{Bmatrix} pair \\ impair \end{Bmatrix}$.

Démonstration: (a) Soit la différence paire. Toute variable apparaît en φ_i et φ_j exactement deux fois et la négation est au nombre pair. $\varphi_i \equiv \varphi_j$ est donc une tautologie selon T1 et en suit que φ_i est logiquement équivalente à φ_j.
(b) Soit la différence impaire. Dans ce cas, toute variable apparaît en φ_i et φ_j deux fois et la négation est au nombre impair. $\varphi_i \equiv \neg\varphi_j$ est donc une tautologie et en suit que φ_i est logiquement équivalente à $\neg\varphi_j$.

Corollaire 4 (du Théorème 3) *Une équivalence élémentaire du type n peut être exprimée par 2^{n-1} exemplaires au total d'équivalences élémentaires du type n qui sont logiquement équivalentes l'une à l'autre. L'ensemble des équivalences élémentaires du type n se décompose en deux classes disjointes du même nombre de formules logiquement équivalentes l'une à l'autre. Dans l'une, toutes les équivalences élémentaires du type n sont à parité paire, dans l'autre à parité impaire.*

Définition 6 Soit EE une équivalence élémentaire du type n. On appelera *carte* $\begin{Bmatrix} \textit{négative} \\ \textit{positive} \end{Bmatrix}$ *de la formule EE* la suite des zéros et des uns si, et seulement si:

(a) à la i-ème place ($1 \leq i \leq n$) se trouve $\begin{Bmatrix} \text{zéro} \\ \text{un} \end{Bmatrix}$ si, et seulement si la i-ème variable de EE est en forme positive

et

(b) à la j-ème place ($1 \leq j \leq n$) se trouve $\begin{Bmatrix} \text{un} \\ \text{zéro} \end{Bmatrix}$ si, et seulement si la j-ème variable de EE est en forme négative.

Note 3: En général, il est possible de définir de la même manière la carte positive et la carte négative de toute formule élémentaire. On n'utilisera pas, néanmoins, cette possibilité dans cette Etude.

Lemme 6 *La carte positive de l'équivalence élémentaire EE^n satisfait à EE^n.*

La démonstration est facile si l'on utilise le principe de la récurrence.

Définition 7

1. La *carte est* $\begin{Bmatrix} \textit{paire} \\ \textit{impaire} \end{Bmatrix}$ si elle comprend un nombre $\begin{Bmatrix} \text{pair} \\ \text{impair} \end{Bmatrix}$ des uns.

2. Le *modèle* $\mathfrak{M}$ *est* $\begin{Bmatrix} \textit{pair} \\ \textit{impair} \end{Bmatrix}$ si toutes ses cartes sont $\begin{Bmatrix} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{Bmatrix}$.

Le modèle qui n'est ni pair ni impair, s'appelera *modèle à parité mixte.*

Note 4: (a) N'importe quelle couple des cartes diverses de la même parité et du même type diffère au nombre pair de places, soit à deux au moins, (b) le modèle canonique et complet du type n comprend évidemment 2^{n-1} de cartes paires et 2^{n-1} de cartes impaires du même type.

Lemme 7 *Soit* K_i *la carte du type n qui satisfait à la formule* φ_i, *étant en forme d'equivalence élémentaire du type n. Soit aussi* $\mathsf{K}_j (\mathsf{K}_i \neq \mathsf{K}_j)$ *une autre carte du même type et d'une parité* $\left\{\begin{matrix}\text{égale}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$. *Dans ce cas, on a:*

$$\mathsf{K}_j \left\{\begin{matrix}\textit{satisfait}\\ \textit{ne satisfait pas}\end{matrix}\right\} \textit{à } \varphi_i.$$

Le lemme est un corollaire du Théorème 3 et du Lemme 6.

4 *Modèles des équivalences* (*Demi-modèles*)

Définition 8 Le modèle $\mathfrak{M}$ est un *demi-modèle du type n* si chacun de ces modèles partiels $\mathfrak{M}^0$ du type $(n - 1)$ est canonique complet et simple.

Lemme 8 *Soit* $\mathfrak{M}$ *un modèle du type n.* $\mathfrak{M}$ *est un demi-modèle si, et seulement si le nombre des cartes du* $\mathfrak{M}$ *est* 2^{n-1} *et toutes les deux cartes diffèrent toujours l'une de l'autre au moins à deux places.*

Démonstration: Qu'une des paires des cartes K_i, K_j du type n n'accuse la différence qu' à une seule place. Cela signifie que dans le modèle $\mathfrak{M}^n$, il y a au moins une carte partielle répétée du type $(n - 1)$, à savoir celle qui résulte des cartes K_i et K_j par la suppression de la colonne représentant la différence entre ces cartes. Soit un modèle partiel du $\mathfrak{M}$ du type $(n - 1)$ a deux cartes identiques. Cela signifie que les cartes K_i, K_j du type n issues de ces deux cartes par adjonction de l'un à une carte et du zéro à l'autre ne diffèrent qu' à une place.

Lemme 9 *Le sous-modèle d'un modèle* $\mathfrak{M}$ *canonique complet du type n comprenant toutes les cartes à n membres* $\left\{\begin{matrix}\textit{paires}\\ \textit{impaires}\end{matrix}\right\}$ *est un demi-modèle du type n.*

Démonstration: Résulte de note 4, les points (a) et (b), et du Lemme 8.

Corollaire 5 *Pour chaque* $n(n > 2)$ *existent au moins deux demi-modèles du type n dont l'un est pair et l'autre impair.*

L'existence d'au moins deux demi-modèles du type n est donnée par le corollaire qui précède, mais il faut de plus démontrer qu'il n'en existe que deux au plus.

Théorème 4 *Pour chaque* $n(n \geqslant 2)$, *il n'existe que deux demi-modèles du type n et deux seulement.*

Démonstration: Soit $\mathfrak{D}$ un demi-modèle du type n. Soit en outre $\mathfrak{D}^0$ un modèle partiel du type $(n - 1)$ du demi-modèle $\mathfrak{D}$, issu de la suppression d'une colonne dans $\mathfrak{D}$. Selon la Définition 8, $\mathfrak{D}^0$ est canonique et complet du type $(n - 1)$. Séparons les cartes de ces modèles en paires et impaires et considérons, en même temps, la carte

$$\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0:}_{(n-1)\ \text{fois}}.$$

(a) Que la carte de $\mathfrak{D}$ dont la carte partielle est la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$, possède zéro à la n-ème place. Dans ce cas, sa parité est paire. Toutes les cartes, n'ayant qu'un seul un dans $\mathfrak{D}^0$, diffèrent de la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$ à une seule place et c'est pourquoi selon le Lemme 8, les cartes de $\mathfrak{D}$ en sont prolongement, doivent présenter 1 à la n-ème place (pour qu'elles diffèrent de la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$ au moins à deux places) et sont également d'une parité paire. Procédons par le principe de récurrence:

soit pour tous les $i < k$, $(k \leqslant (n - 1))$ que la carte qui contient les uns au nombre i, a en $\mathfrak{D}$ son prolongement pair. Il est à démontrer que cela est aussi valable pour ces cartes de $\mathfrak{D}^0$ qui contient les uns au nombre k. Soit $\mathsf{U} = \langle u_1, \ldots, u_{n-1}\rangle$ la carte $\mathsf{U} \in \mathfrak{D}^0$ contenant les uns au nombre k. Il existe une carte $\mathsf{V} = \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$, $\mathsf{V} \in \mathfrak{D}^0$ contenant les uns au nombre $(k - 1)$ qui diffère à une seule place de la carte $\mathsf{U} \in \mathfrak{D}^0$. Cette carte est à prolonger à parité paire en $\mathfrak{D}$. Il en résulte une carte $\mathsf{V}' = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$. La carte $\mathsf{U}' = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, $\mathsf{U}' \in \mathfrak{D}$ doit différer de la carte V' au moins à deux places, mais à deux places au plus. Il en résulte que V' et U' diffèrent exactement à deux places et à deux places seulement. Comme V' est une parité paire, U' l'est aussi.

(b) Que la carte de $\mathfrak{D}$ dont la carte partielle est la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$, a 1 à la n-ème place. Dans ce cas, elle est d'une parité impaire. Toutes les cartes qui n'ont qu'un seul un en $\mathfrak{D}^0$, diffèrent de la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$ à une place (et à une seule) et c'est pourquoi selon le Lemme 8, les cartes de $\mathfrak{D}$ qui en sont prolongement, doivent présenter à la n-ème place 0 (pour qu'elles diffèrent de la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$ à deux places au moins). Elles sont également d'une parité impaire. On procède dès lors par récurrence, comme dans le cas ad (a).

Un prolongement de la carte $\underbrace{0\,.\,.\,.\,.\,.\,0}_{(n-1)\ \text{fois}}$ qui est différent de celui indiqué ad (a) et ad (b), n'est pas possible. Aussi existe-il une seule paire (et une seule seulement) des demi-modèles du type n? L'un est pair, l'autre impair. S'il importe de souligner leur parité, on écrit: $+\mathfrak{D}$, $-\mathfrak{D}$.

Lemme 10 *Pour chaque modèle simple* $\mathfrak{M}$ *d'une certaine parité p on a: dans chaque paire des cartes* K_i, $K_j \in K_{\mathfrak{M}}$, *les cartes:*

(a) *diffèrent l'une de l'autre à deux places au moins;*
(b) *diffèrent au nombre pair de places;*
(c) *diffèrent au plus aux* $\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right\}$ *places si le modèle* $\mathfrak{M}^n$ *est du type* $\left\{\begin{matrix} pair \\ impair \end{matrix}\right\}$.

Démonstration: La démonstration (a) et (b) est évidente, parce que la différence de deux entiers de la même parité (en l'occurrence, des entiers exprimant le nombre des uns dans les cartes) est toujours paire. Comme il s'agit d'un modèle simple, aucune des paires ne peut être composée des cartes identiques, si bien que le nombre le plus bas, représentant la différence entre les cartes, doit être égal à deux. De la partie (a) et (b) de ce lemme, on tire que dans un modèle du type pair, les cartes peuvent différer de n places au plus, parce que n est pair selon supposition. S'il s'agit d'un modèle du type impair, elles doivent différer (parce que n est impair) d'un nombre pair $< n$, si bien qu'elles ne peuvent différer que de $(n - 1)$ places au plus.

Théorème 5

(a) *L'équivalence élémentaire paire du type n est la formule caractéristique du demi-modèle pair du type n.*

(b) *L'équivalence élémentaire impaire du type n est la formule caractéristique du demi-modèle impair du type n.*

Démonstration: (a) Un demi-modèle $\mathfrak{D}$ pair du type $\left\{\begin{matrix} \text{pair} \\ \text{impair} \end{matrix}\right\}$ comprend des cartes paires, soit telles, selon définition, qui possèdent un nombre pair des uns et un nombre $\left\{\begin{matrix} \text{pair} \\ \text{impair} \end{matrix}\right\}$ des zéros. Selon le Lemme 9, toutes les cartes du $\mathfrak{D}$ sont telles et seulement telles. $\mathfrak{D}$ comprend donc aussi la carte positive de l'équivalence élémentaire EE du même type et de la même parité. Selon le Lemme 6, cette carte satisfait à EE. Mais selon le Lemme 7 on voit que EE est satisfaite aussi par toutes les autres cartes de la même parité et du même type qui composent, cependant, selon le Lemme 9 le demi-modèle $\mathfrak{D}$.
(b) D'une manière analogique, il serait possible de démontrer pour le demi-modèle impair $\mathfrak{D}$.

Corollaire 6 *Une équivalence élémentaire* $\left\{\begin{matrix} paire \\ impaire \end{matrix}\right\}$ *est logiquement équivalente à*

(a) *la disjonction de toutes (soit* 2^{n-1}*) conjonctions élémentaires du type n qui ont un nombre* $\left\{\begin{matrix} pair \\ impair \end{matrix}\right\}$ *des variables en forme positive,* *et aussi à*

(b) *la conjonction de toutes, soit* 2^{n-1}, *disjonctions élémentaires du type n qui ont un nombre* $\begin{Bmatrix} impair \\ pair \end{Bmatrix}$ *des variables en forme negative.*

Note 5: Un demi-modèle du type n comprend dans chacun des $\binom{n}{k}$ modèles partiels du type k (pour $1 \leqslant k < n$) au total 2^k diverses cartes, chacune en 2^{n-k} exemplaires.

Théorème 6 *Soient* $\mathfrak{M}$ *le modèle canonique et complet du type n et* $+\mathfrak{D}$, $-\mathfrak{D}$ *le demi-modèle pair et impair du type n. On a: n indiquant le type du modèle* $\mathfrak{M}$ *est*

(a) *impair si, et seulement si pour chaque carte* $K_i \in K_{\mathfrak{M}}$ *on a:* $K_i \in -\mathfrak{D}$ *si, et seulement si* $K_i^! \in +\mathfrak{D}$ *(où* $K_i^!$ *est la carte complêmentaire de la* K_i*);*
(b) *pair si, et seulement si pour chaque carte* $K_i \in K_{\mathfrak{M}}$ *on a: soit* K_i, $K_i^! \in +\mathfrak{D}$, *soit* K_i, $K_i^! \in -\mathfrak{D}$.

Dêmonstration: Le type soit n. Si la carte $U \in \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ est canonique et complet) comprend le nombre i des uns, la carte V, complêmentaire de U, en comprendra $(n - i)$. Si n est pair, les nombres i et $(n - i)$ sont de la même parité, c'est-à-dire que V, U sont de la même parité et (selon le Lemme 9) elles se trouvent dans le même demi-modèle. Si n est impair, les nombres i et $(n - i)$ sont de différentes parités et, par suite, les cartes U, V se trouvent dans différents demi-modèles.

Théorème 7 *Soient* $\mathfrak{M}$ *le modèle canonique et complet du type n et EE une équivalence élêmentaire du type k* $(k \leqslant n)$. *Le nombre des cartes qui satisfont à EE, est* 2^{n-1} *et ne dêpend pas de k.*

C'est un corollaire du Théorème 5 et de la Note 5.

Théorème 8 *A partir des variables diffêrentes* $p_1, \ldots, p_n$, *il est possible de construire au total*

$$2\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = 2^{n+1} - 2$$

des équivalences élêmentaires du type $\leqslant n$ *non équivalentes l'une à l'autre.*

Chacune de ces équivalences correspond, d'une manière univoque, à un demi-modèle du même type en qualité de sa formule caractéristique. Eu égard au Théorème 7 cela signifie que chacune des équivalences élêmentaires φ^k dêcrit dans le modèle canonique complet du type n un certain partiel sous-modèle $\mathfrak{M}'$ de l'ordre 2^{n-1} (qui n'est pas simple).

Dêmonstration: Soient $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ k différentes variables de $p_1, \ldots, p_n$. A partir de ces variables, il est possible d'obtenir deux équivalences élêmentaires φ^- et φ^+ du type k, une paire et une impaire. Toutes les cartes du modèle $\mathfrak{M}$ qui ont, aux places $i_1, \ldots, i_k$, un nombre $\begin{Bmatrix} \text{pair} \\ \text{impair} \end{Bmatrix}$ des uns, satisfont à $\left\{\begin{matrix}\varphi+\\ \varphi-\end{matrix}\right\}$. Si une autre équivalence ψ du même type k est composée à partir d'un autre ensemble de variables (disons $p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}$, où $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\} \neq \{p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}\}$), elle n'est certainement équivalente à aucune équivalence élémentaire du type k, formée de $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$. Car, en admettant $k \leqslant l$, au moins une des variables $p_{j_1}, \ldots, p_{j_k}$ n'est pas l'élément de l'ensemble $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$ ou bien par exemple p_{j_l}. Que la carte $\mathsf{U} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ satisfasse à φ dans $\mathfrak{M}$; si U ne satisfait pas ψ, le théorème se trouve démontré. Si U satisfait à ψ, la carte V qui diffère de U précisément à la place j_l, satisfait à φ, mais ne satisfait pas à ψ. De là, il suit que φ, ψ sont en tous cas non équivalentes.

Ainsi le nombre de toutes les équivalences élémentaires $(n \geqslant i)$ non équivalentes entre elles est deux fois plus grand que le nombre de sous-ensembles non vides d'un ensemble à n éléments $\{p_1, \ldots, p_n\}$ soit

$$2^{n+1} - 2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mihăilescu, E., "Recherches sur l'équivalence et la négation dans le calcul des propositions," *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. XXIII (1937), pp. 369-408, et "Recherches sur l'équivalence et la réciprocité dans le calcul des propositions," ibidem, t. XXIV (1938), pp. 116-153.

[2] Quine, W. V., Note dans *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), pp. 174-175.

[3] Mostowski, A., *Logika matematyczna.* Monografie matematyczne, t. XVIII, Warszawa-Wrocław (1948), pp. 30-37.

[4] Church, A., Note dans *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 3 (1938), p. 55.

[5] Church, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Vol. I, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1956), §26, pp. 140-148.

[6] Mihăilescu, E., "L'ordre d'incomplétitude pour le système d'équivalence, la négation et la réciprocité," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. X (1969), pp. 425-451.

[7] Hájek, P., I. Havel, et M. Chytil, "GUHA—metoda systematického vyhledávání hypotéz," *Kybernetika*, Nr. 1 (1966), pp. 31-44, Academia Praha.

Centre pour biomathêmatiques
de l'Acadêmie Tchêcoslovaque des Sciences
Prague, Tchêcoslovaquie