ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 25, Number 3, Summer 1995

THEOREME DE LA GOUTTE LISSE

ABDELHAKIM MAADEN

1. Introduction. Soit $(X, |.|)$ un espace de Banach. $B_{(X,|.|)}$ désigne la boule unité de X. La goutte définie par $x \in X \backslash B_{(X,|.|)}$, notée $D(x, B_{(X,|.|)})$, est l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup B_{(X,|.|)}$.

Dans le cas où un fermé S de X est à une distance positive de $B_{(X,|.|)}$, il existe toujours un élément $s \in S$ tel que $D(s, B_{(X,|.|)}) \cap S = \{s\}$, c'est le théorème de la goutte de Daneš [**3**]. Ce travail a été repris par plusieurs auteurs [**5, 8, 9**]. Remarquons ici qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "S est à distance positive de $B_{(X,|.|)}$" par "S est disjoint de $B_{(X,|.|)}$." Lorsque pour tout S fermé non vide disjoint de $B_{(X,|.|)}$, il existe $s \in S$ tel que $D(s, B_{(X,|.|)}) \cap S = \{s\}$, on dit que X a la propriété de la goutte. Montesinos a montré que X a la propriété de la goutte si et seulement si X est réflexif et les convergences faibles et fortes des suites coïncident sur la sphère unité. Pour plus de détails sur cette propriété voir [**6, 7, 8**].

Dans cette note, en se basant sur le papier de Borwein et Preiss [**1, 10**], nous montrons une variante lisse du théorème de la goutte dans les espaces de Banach $(X, |.|)$ dont l'ensemble des normes équivalentes Fréchet-différentiables est dense dans l'ensemble des normes équivalentes muni de la métrique usuelle. Comme conséquence nous donnons un résultat analogue au théorème de Browder [**2**].

On désigne par $(\mathcal{P}, \rho)$ l'espace des normes équivalents à $|.|$ sur X, muni de la métrique donnée par $p, q \in (\mathcal{P}, \rho)$:

$$\rho(p, q) = \sup\{|p(x) - q(x)|; x \in B_{(X,|.|)}\}.$$

Notons que $\mathcal{P}$ est un sous-espace ouvert de l'espace (Q, ρ) des semi-normes continues sur $(X, |.|)$, muni de la métrique définie par $f, g \in (Q, \rho)$:

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in B_{(X,|.|)}\}.$$

Received by the editors on March 10, 1993.
Key words. Convexité, densité, différentiabilité, espace lisse, goutte, goutte lisse.

On montre alors que (Q, ρ) est un espace métrique complet et par conséquent $(\mathcal{P}, \rho)$ est un espace de Baire [**4**].

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des normes équivalentes à $|.|$ sur X, qui sont Fréchet-différentiables sur $X \backslash \{0\}$. On pose alors la définition suivante:

Définition 1.1. On dit qu'un espace de Banach $(X, |.|)$ est lisse si l'ensemble $\mathcal{L}$ est dense dans $\mathcal{P}$ pour la métrique ρ.

Il est bien connu que si un espace de Banach X possède une norme équivalente dont la norme duale est localement uniformément convexe sur X^*, alors X est un espace de Banach lisse. Par contre, il n'est pas connu si un espace de Banach est lisse dès qu'il possède une norme équivalente Fréchet-différentiable. Pour plus d'information sur ce sujet, voir [**4**].

C'est facile de voir que ces deux lemmes sont vérifiés.

Lemme 1.2. *Soit $(X, |.|)$ un espace de Banach lisse. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme équivalente $||.||$ Fréchet-différentiable sur $X \backslash \{0\}$ telle que:*

$$(1 - \varepsilon)|x| \leq ||x|| \leq (1 + \varepsilon)|x| \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Lemme 1.3. *Soit $(X, |.|)$ un espace de Banach lisse. Soit S un fermé tel que l'on ait* $\operatorname{dist}(S, B_{(X,|.|)}) > 0$. *Alors il existe une norme $||.||$ équivalent Fréchet-différentiable telle que* $\operatorname{dist}(S, B_{(X,||.||)}) > 0$ *et* $B_{(X,|.|)} \subset B_{(X,||.||)}$.

Définition 1.4. Soient $(X, |.|)$ un espace de Banach et $D \subset X$ un convexe d'intérieur non vide. On dit que D est lisse s'il existe une fonction f de X dans $\mathbf{R}$ convexe et différentiable, tel que:

$$D = \{x \in X; f(x) \leq 0\} \text{ et } \inf\{f(x); x \in X\} < 0.$$

On dit que D est une goutte lisse si D est un convexe borné lisse contenant la boule unité.

2. Théorème de la goutte lisse. Nous rappelons que $D = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$ est une goutte lisse si f est une fonction convexe différentiable sur X, tel que D est borné, $B_{(X|.|)} \subset D$ et $\inf\{f(x); x \in X\} < \alpha$.

Lemme 2.1. *Soit X un espace de Banach et soit $||.||$ une norme équivalente Fréchet-différentiable sur X. Soit $C = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\}$ une goutte lisse telle que $\beta = \sup_{B_X} f < \alpha$. Soit x_0 tel que $f(x_0) = \alpha$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que $D = \{x \in X; f(x) + \lambda||x - x_0||^2 \leq \alpha\}$ vérifie*:

i) $D \subset C$.

ii) $\sup_{B_X} g < \alpha$ *où* $g(x) = f(x) + \lambda||x - x_0||^2$

iii) $D \cap \{x \in X; f(x) = \alpha\} = \{x_0\}$.

Preuve. Quitte à considérer $C = \{x \in X; f(x) + \lambda' \leq \alpha + \lambda'\}$, on peut supposer que $\alpha > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha - \beta - \varepsilon > 0$, un tel ε existe car par hypothèse $\alpha - \beta > 0$. Considérons la fonction g suivante:

$$g(x) = f(x) + \frac{\alpha - \beta - \varepsilon}{(1 + ||x_0||)^2}||x - x_0||^2$$

il est clair que la fonction g est convexe différentiable sur X. On pose alors:

$$D = \{x \in X; g(x) \leq \alpha\}.$$

Il est tout à fait évident de voir que $D \subset C$, d'où (i).

Soit $x \in B_X$, alors:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \frac{\alpha - \beta - \varepsilon}{(1 + ||x_0||)^2}||x - x_0||^2 \\ &\leq \beta + \frac{\alpha - \beta - \varepsilon}{(1 + ||x_0||)^2}(1 + ||x_0||)^2 \\ &= \alpha - \varepsilon < \alpha \end{aligned}$$

d'où (ii).

Soit $x \in D \cap \{f = \alpha\}$, alors $g(x) \leq \alpha$ et $f(x) = \alpha$, ce qui implique que:

$$f(x) + \frac{\alpha - \beta - \varepsilon}{(1 + ||x_0||)^2}||x - x_0||^2 \leq \alpha$$

ce qui donne que:

$$\alpha + \frac{\alpha - \beta - \varepsilon}{(1 + ||x_0||)^2} ||x - x_0||^2 \leq \alpha.$$

Or $\alpha - \beta - \varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, donc nécessairement $||x - x_0||^2 = 0$, ce qui montre que $x = x_0$. D'où $D \cap \{f = \alpha\} = \{x_0\}$, d'où (iii). $\square$

Théorème 2.2. *Soit* $(X, |\cdot|)$ *un espace de Banach lisse. Soit* S *un fermé non vide tel que* $\operatorname{dist}(S, B_{(X,|.|)}) > 0$ *et soit* $x_1 \in S$. *Alors il existe une goutte lisse* D *telle que*:

1) $D \subset B(0, |x_1|)$
2) $D \cap S = \{a\}$
3) $x_n \to a$ *dès que* (x_n) *dans* D *et* $\operatorname{dist}(x_n, S) \to 0$.

Preuve. $(X, |.|)$ est un espace de Banach lisse et $\operatorname{dist}(S, B_{(X,|.|)}) > 0$, alors d'après le Lemme 1.3 ci-dessus, il va exister une norme équivalente $||.||$ Fréchet-différentiable telle que $\operatorname{dist}(S, B_{(X,||.||)}) > 0$ et $B_{(X,|.|)} \subset B_{(X,||.||)}$. On peut alors supposer que la norme initiale $|.|$ est Fréchet-differentiable.

Soit $R = \operatorname{dist}(S, B_X) > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $(|x_1| + 1)^2/\alpha < R^2$.

Posons:

$$g_1(x) = \operatorname{dist}^2(x, B_X) \quad \text{et} \quad g_2(x) = g_1(x) + \frac{1}{2\alpha}|x - x_1|^2,$$

et choisissons $x_2 \in S$ tel que:

$$(*) \qquad g_2(x_2) \leq \frac{1}{3} g_1(x_1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \inf_S \, g_2$$

Pour montrer l'existence de x_2, on observe que soit $\inf_S g_2 = g_2(x_1) = g_1(x_1)$ auquel cas $x_2 = x_1$ convient; soit $\inf_S g_2 < g_2(x_1) = g_1(x_1)$, auquel cas le membre de droite de $(*)$ est strictement plus grand que $\inf_S g_2$.

On construit les deux suites $(g_n)_n$ et $(x_n)_n$ par:

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) + \frac{1}{2^n \alpha}|x - x_n|^2$$

et $x_{n+1} \in S$ tel que:

$$g_{n+1}(x_{n+1}) \leq \frac{1}{3}g_n(x_n) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\inf_S g_{n+1}.$$

En utilisant la même technique, on montre qu'un tel x_{n+1} existe. Nous affirmons alors que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Pour ce faire, posons: $a_n = g_n(x_n)$ et $s_n = \inf_S g_n$.

Alors les suites (a_n) et (s_n) sont décroissante et croissante respectivement (et que $a_n \geq s_n$, $n = 1, 2, \dots$) ceci est clair d'après la définition des deux suites. C'est aussi évident que

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Nous notons alors par s cette valeur commune.

Nous montrons maintenant que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. En effet:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= g_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= g_n(x_{n+1}) + \frac{1}{2^n\alpha}|x_n - x_{n+1}|^2 \\ &\geq s_n + \frac{1}{2^n\alpha}|x_n - x_{n+1}|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n\alpha}|x_n - x_{n+1}|^2 &\leq a_{n+1} - s_n \leq a_n - s_n \\ &\leq \frac{1}{3}(a_{n-1} - s_n) \leq \frac{1}{3}(a_{n-1} - s_{n-1}) \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{3^{n-1}}(a_1 - s_1) \end{aligned}$$

ce qui montre alors que:

$$|x_n - x_{n+1}|^2 \leq 2\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(a_1 - s_1)$$

on en déduit alors que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Soit a la limite de cette dernière suite, alors a est dans S, car S est un fermé.

On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = \mathrm{dist}^2(x, B_X) + \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} |x - x_n|^2.$$

Alors f est une fonction convexe Fréchet-différentiable sur X (voir [**10**]). On pose:

$$C = \{x \in X; f(x) \leq f(a)\}.$$

Nous affirmons que $C \cap S = \{x \in S; f(x) = f(a)\}$, en effet:

Soit $x \in C \cap S$, alors $f(x) \leq f(a)$ et $x \in S$. Comme la suite (g_m) converge uniformément sur les bornés vers f et l'ensemble $\{x_n; n = 1, 2, \dots\} \cup \{a\}$ est compact, alors il est borné. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$, $0 \leq f(x) - g_m(x) < \varepsilon$, pour tout $x \in \{x_n; n = 1, 2, \dots\}$. En particulier,

$$0 \leq f(x_m) - a_m < \varepsilon, \qquad \forall\, m \geq m_0.$$

Mais $\lim_{m \to \infty} f(x_m) = f(a)$. On en déduit alors

$$f(a) = \lim_{m \to \infty} a_m = \lim_{m \to \infty} s_m = s.$$

Maintenant, c'est clair que

$$s = f(a) \leq f(x), \qquad \forall\, x \in S.$$

D'où $C \cap S = \{x \in S; f(x) = f(a)\}$. Nous montrons maintenant que $\sup_{B_X} f < f(a)$.

Soit $b \in B_X$, alors:

$$\begin{aligned} f(b) &= \mathrm{dist}^2(b, B_X) + \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} |b - x_n|^2 \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} |b - x_n|^2. \end{aligned}$$

Or $|x_n| \leq |x_1|$ pour tout n, en effet:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}^2(x_n, B_X) &= g_1(x_n) \leq g_2(x_n) \leq \cdots \leq g_n(x_n) \\ &= a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 \\ &= \mathrm{dist}^2(x_1, B_X). \end{aligned}$$

Ce qui montre alors que $|x_n| \leq |x_1|$ pour tout n. On en déduit que:

$$\begin{aligned} f(b) &= \frac{1}{\alpha}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}|b-x_n|^2 \\ &\leq \frac{(1+|x_1|)^2}{\alpha} < R^2 \\ &\leq \operatorname{dist}^2(a,B_X) \leq f(a), \end{aligned}$$

d'où: $\sup_{B_X} f < f(a)$.

Donc d'après le Lemme 2.1 il va exister une goutte lisse D telle que:

$$D = \{x \in X; f(x) + \lambda|x-a|^2 \leq f(a)\}$$

et

$$D \cap S = \{a\}.$$

D'où (2).

Comme (g_n) converge uniformément sur les bornés vers f et que (x_n) converge vers a:

$$f(a) \leq \lim_n g_n(x_n).$$

D'autre part, pour tout n, $g_n(x_n) \leq g_1(x_1) = \operatorname{dist}^2(x_1, B_X)$, donc $f(a) \leq \operatorname{dist}^2(x_1, B_X)$. On en déduit que pour tout x dans D, $|x| \leq |x_1|$, d'où (1).

Il nous reste à montrer que l'assertion (3).

Soit $(z_n)_n$ une suite dans D telle que $\operatorname{dist}(z_n, S) \to 0$, alors il existe une suite $(y_n)_n$ dans S telle que $|z_n - y_n| \to 0$. Comme $(z_n)_n$ dans D qui est un borné, alors la suite $(y_n)_n$ est bornée, donc il existe une boule B telle que z_n, y_n sont dans B pour tout n. De plus la fonction f est bornée sur tout borné et est convexe. Donc elle est Lipschitzienne sur tout borné (voir Proposition 1–6 [**10**]). Il existe alors une constante $k > 0$ telle que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|, \quad \text{pour tout } x, y \text{ dans } B.$$

On en déduit que $|f(x_n) - f(y_n)| \leq k|x_n - y_n| \to 0$.

De plus $(x_n)_n$ est dans D donc $f(x_n) + \lambda|x_n - a|^2 \leq f(a)$ et $(y_n)_n$ est dans S donc $f(a) \leq f(y_n)$, ce qui implique que $x_n \to a$. $\square$

Le théorème ci-dessus permet de retrouver le théorème de Daneš dans le cas où l'espace de Banach X est lisse.

Corollaire 2.3. *Soit X un espace de Banach lisse et S un fermé non vide tel que* $\operatorname{dist}(B_X, S) > 0$ *alors il existe $a \in S$ tel que $D(a, B_X) \cap S = \{a\}$.*

Preuve. Soit D et a donnés par le théorème. On a

$$\{a\} \subset D(a, B_X) \cap S \subset D \cap S = \{a\}.$$

D'où le résultat. □

Comme conséquence de ce dernier théorème, nous donnons le résultat suivant qui est une variante lisse du théorème de Browder [**2**].

Théorème 2.4. *Soit X un espace de Banach lisse. Soit S un fermé non vide. Alors l'ensemble $\mathcal{D}(S) = \{x \in S$; il existe un convexe lisse D dans X tel que $D \cap S = \{x\}\}$, est dense dans le bord de S.*

Preuve. Soit $x \in \partial S$ et soit $\varepsilon > 0$. On considère la boule fermée de centre x et de rayon ε, notée $B(x, \varepsilon)$. On pose $S' = B(x, \varepsilon) \cap S$.

Soit $\omega \in B(x, \varepsilon/4) \backslash S'$ et soit $d = \operatorname{dist}(\omega, S')$, alors $d > 0$. On considère la boule fermée $B_0 = B(\omega, d/2)$, il est clair que $\operatorname{dist}(B_0, S') > 0$.

Le théorème de la goutte lisse appliqué à B_0 et S' implique qu'il existe un convexe lisse C vérifiant:

$$C \subset B(\omega, ||\omega - x||), \qquad B_0 \subset C, \qquad C \cap S' = \{x_0\}.$$

Si $y \in C \cap S$, $||y - w|| \leq ||w - x|| \leq \varepsilon/4$, donc $||y - x|| \leq ||y - w|| + ||w - x|| \leq \varepsilon/2$ et par consequent $C \cap S = C \cap S'$. On en déduit que: $C \cap S = \{x_0\}$ et que $||x - x_0|| \leq \varepsilon$.

Donc $\mathcal{D}(S)$ est dense dans le bord de S. □

Remerciement. Je tiens à remercier Robert Deville pour ses suggestions, ses encouragements et nos fructueuses conversations durant la réalisation de ce travail. Aussi que le referee pour ses suggestions et pour la forme finale de cette note.

REFERENCES

1. J.M. Borwein and D. Preiss, *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 517–527.

2. F.E. Browder, *Normal solvability and the Fredholm alternative for mappings into infinite dimensional manifolds*, J. Funct. Anal. **8** (1971), 250–274.

3. J. Daneš, *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. **6** (1972), 369–375.

4. R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Longman Scientific & Technical, Pitman **64**, Harlow, 1993.

5. P. Georgiev, *The strong Ekeland variational principle, the strong drop theorem and applications*, J. Math. Anal. Appl. **131** (1988), 1–21.

6. D. Kutzarova, *A sufficient condition for the drop property*, C.R. Acad. Bulgar. Sci. **39** (1986), 17–19.

7. ———, *On the drop property of convex sets in Banach spaces*, Constructive Theory of Functions '87, Sofia, (1988), 283–287.

8. V. Montesinos, *Drop property equals reflexivity*, Studia Math. **87** (1987), 93–100.

9. J.P. Penot, *The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 813–822.

10. R.R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes Math. **1364**, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1989.

Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, Route de Gray, 25030 Besançon, France.