ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 26, Number 3, Summer 1996

SUR QUELQUES CONSÉQUENCES DE LA CONJECTURE (abc) EN ARITHMÉTIQUE ET EN LOGIQUE

MICHEL LANGEVIN

Au Professeur Wolfgang Schmidt, en l'honneur de son $60^{\text{ème}}$ *anniversaire*

ABSTRACT. We recall the following problem of P. Erdős and A. Woods whose solution would be of interest in number theory and in logic:

Does there exist an integer $k > 2$ with the following property: "If x and y are positive integers such that, for $1 \leq i \leq k$, the two numbers $x+i$ and $y+i$ have the same prime factors, then $x = y$"? (A. Woods showed the equivalence of this problem with an open question of J. Robinson about definability of arithmetic by comprimeness and successor function.)

We show how to deduce from the (abc) conjecture of J. Oesterlé and D. Masser a solution for the following extension of this open problem (the result can be improved when d and d' are fixed): if x, y, d and d' are positive integers (with $\operatorname{lcd}(x,d) = \operatorname{lcd}(y,d') = 1$, $(x,d) \neq (y,d')$) such that, for $1 \leq i \leq 5$, $(x+id)$ and $(y+id')$ have the same prime factors, then (x,y,d,d') belongs to a finite set.

1. Le problème initial et ses généralisations; plan de l'exposé.

Notations. On note u la fonction radical (ou plus grand diviseur sans facteur carré, support...) définie sur les entiers. On a ainsi, en réservant la lettre p aux nombres premiers: $u(n) = \prod_{p|n} p$.

Intéressant doublement au titre de la théorie des nombres et de la logique puisque équivalent avec une conjecture plus ancienne de J. Robinson sur la constructibilité de l'arithmétique par les fonctions coprimarité et successeur, le problème de P. Erdős et A. Woods est le suivant (cf. [**8**]):

Received by the editors on October 21, 1994, and in revised form on November 3, 1995.
M.R. Class. 11A99, 11D99, 11J87, 11U99.

Existe-t-il un entier k tel que les égalités $u(x+i) = u(y+i)$ pour $i = 1, 2, \dots, k$ impliquent $x = y$?

Un tel entier, s'il existe, est au moins égal à 3 puisque: $u(x) = u(x^2)$ et $u(x-1) = u(x^2-1)$ lorsque x est de la forme $2^m - 1$ (il y a aussi des contre-exemples isolés: $u(75) = u(1215)$, $u(76) = u(1216)$...). En fait, l'inégalité conjecturale $u((y+1)(y+2)(y+3)) > y$ (vérifiée jusqu'à de grandes valeurs de y) de R. Tijdeman suggère que $k = 3$ (si $u(y+i)$ divise $(x+i)$ avec $1 \leq i \leq 3$ et $x < y$, alors $u((y+1)(y+2)(y+3))$ divise $(y-x)$).

Le problème s'étend de manière naturelle aux progressions arithmétiques:

Existe-t-il k tel que l'hypothèse: $u(x+id) = u(y+id)$ avec $1 \leq i \leq k$, $pgcd(x,d) = pgcd(y,d) = 1$ implique $x = y$?

Plus généralement, suivant une idée de T.N. Shorey:

Existe-t-il k tel que l'hypothèse: $u(x+id) = u(y+id')$ avec $1 \leq i \leq k$, $pgcd(x,d) = pgcd(y,d') = 1$ implique $x = y$ et $d = d'$?

La réponse est inconnue mais des exemples montrent que k doit être supérieur à 3:

$$\begin{aligned} &u(2) = u(2), \qquad u(3) = u(9), \qquad u(4) = u(16);\\ &u(8) = u(4), \qquad u(9) = u(27), \qquad u(10) = u(50) \end{aligned}$$

(le premier exemple est spécialement intéressant car 2, 9, 16 est l'unique progression arithmétique de $k > 2$ termes de raison > 1 pour laquelle le plus grand facteur premier apparaissant (3 dans ce cas, 5 dans le second) est non pas $> k$ mais égal à k; résultat dû à T.N. Shorey et R. Tijdeman).

Les formulations ci-dessus sont "uniformes en d (et d')." On pourrait fixer d (et/ou d') mais la réponse reste inconnue comme pour $d = 1$. La proposition suivante est d'ailleurs non triviale:

Proposition 1. 1° *Soient $x \neq y$, d des entiers. Pour i assez grand, $u(x+id) \neq u(y+id)$ et il n'existe aucun i_0 tel que la relation de divisibilité $u(y+id) | (x+id)$ soit vérifiée pour tout $i \geq i_0$. Plus généralement, des entiers x, d étant donnés, l'ensemble des entiers y vérifiant $u(y+id) | (x+id)$ $(i = 1, 2)$ est fini et il existe un rang i_0 tel que l'hypothèse: $u(y+id) | u(x+id)$ $(1 \leq i \leq i_0)$ implique $x = y$.*

2° *Soient* x, y, d, d' *des entiers avec* $(x,d) \neq (y,d')$, $pgcd(x,d) = pgcd(y,d') = 1$. *Pour* i *assez grand,* $u(x+id) \neq u(y+id')$ *et il n'existe aucun* i_0 *tel que* $u(y+id')|(x+id)$ *soit vérifiée pour* $i \geq i_0$. *De plus, si* x, d, d' *sont donnés, l'ensemble des entiers* y *vérifiant* $u(y+id')|(x+id)$ $(i = 1,2)$ *est fini et il existe un rang* i_0 *tel que l'hypothèse "*$pgcd(x,d) = 1$, $u(y+id')|(x+id)$ $(1 \leq i \leq i_0)$*" implique* $(x,d) = (y,d')$.

Dém. 1°. La méthode de Baker montre que $u((x+id)(y+id))$ tend vers l'infini avec i, $(x+id)$ et $(y+id)$ étant voisins et distincts; c'est incompatible avec l'hypothèse $u(x+id) = u(y+id)$ montrant que $u((x+id)(y+id))$ divise l'écart $(y-x)$; d'autre part, il existe d'après le Th. de Dirichlet des facteurs premiers de $y+id$ supérieurs à $|y-x|$. Cette méthode montre aussi la finitude annoncée, d et $u((y+d)(y+2d))$ étant fixés (si $d = 1$, celle de Størmer (cf. [**3**]) suffit) et on termine comme ci-dessus.

2°. On applique toujours la méthode de Baker aux entiers voisins et distincts par hypothèse $d'(x+id)$ et $d(y+id')$ de facteurs premiers parmi ceux du produit $dd'(d'x-dy)$; si $u(y+id')$ divise $(x+id)$ pour i assez grand, existe alors d'après le Th. de Dirichlet appliqué aux $(x+id)$ des entiers i grands pour lesquels $(y+id') \geq (x+id)^2$ ce qui est impossible. La fin du 2° s'obtient comme celle du 1°. □

Remarques. Les hypothèses: $pgcd(x,d) = pgcd(y,d') = 1$ forment bien un pléonasme, l'une de ces égalités impliquant l'autre dans le contexte du problème; en effet, tout nombre premier p divisant x et d divise $x+d$ et $x+2d$ et donc $y+d'$, $y+2d'$, y, d'. Mais, l'omission des deux hypothèses est impossible puisqu'il suffirait de considérer les multiples par deux entiers distincts (ayant les mêmes facteurs premiers) d'une progression arithmétique $x_n = a+nb$ pour obtenir une solution. Quand $d = d'$, il est bon d'écrire: $pgcd(x,d) = 1$, $pgcd(y,d) = 1$ pour éviter les exemples comme: $u(14) = u(98)$, $u(14+49) = u(98+49)$, $u(14+2.49) = u(98+2.49)$ déduits du cas $d \neq d'$ (si $u(x+id) = u(y+id')$, alors $u(xdd'^2 + i(dd')^2) = u(yd^2d' + i(dd')^2)\ldots$).

Sur les solutions de ces problèmes, les seules indications connues d'ordre non numérique (et le domaine est numériquement difficile à explorer avec deux progressions arithmétiques) se déduisent, comme pour le problème initial, de la conjecture de Hall ou de celle, plus récente, d'Oesterlé et Masser (conjecture (abc)). Ces dernières prouvent l'existence d'un entier k (à un ensemble fini d'exceptions près, éliminable en augmentant k par la Proposition 1) uniformément ou non en d et d' suivant la conjecture employée, et en utilisant partiellement les hypothèses. La réelle profondeur de ces problèmes pourrait donc être non évidente sans l'équivalence (prouvée par Woods, cf. [**8**]) avec la conjecture de J. Robinson quand $d = d' = 1$. La mise en oeuvre de toute la richesse des hypothèses est une difficulté constante du problème apparue dès les premiers travaux [**1**] relatifs à des questions voisines avec des hypothèses appauvries suffisantes. N'apparaîtra guère ici que l'inégalité: $|d'x - dy| \geq u(\prod_{1\leq i\leq k}(x+id)) = u(\prod_{1\leq i\leq k}(y+id'))$ déduite de $u(x+id) = u(y+id')$, $1 \leq i \leq k$. Quand $d = d'$, puisque $pgcd(x,d) = pgcd(y,d') = 1$, on peut remplacer le membre de gauche de la précédente inégalité par $|x-y|$ (et, si $x < y$, on obtient un résultat en minorant $u(\prod_{1\leq i\leq k}(y+id))$ (voire une conclusion s'il est $\geq y$)). Dans [**1**], $u(\prod_{1\leq i\leq k}(y+i))$ est minoré par la méthode de Baker (résultats améliorables en restreignant convenablement son champ d'application, cf. [**3**]). Seules des inégalités conjecturales fortes semblent donner une indication quant à la solution. La Section 2 est consacrée au rappel de ces conjectures, la Section 3 à leurs conséquences et la Section 4 aux progrès actuels démontrés sur les minorations de $u(\prod_{1\leq i\leq k}(y+id))$.

2. Les inégalités conjecturales (abc) (Oesterlé-Masser) et de Hall.

$$u(abc) > C_\varepsilon c^{1-\varepsilon} \tag{abc}$$

$$|x^3 - y^2| > H_\varepsilon \sup(x^3, y^2)^{(1-\varepsilon)/6} \tag{Hall}$$

Lire. pour (abc): pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour tout couple (a, b) d'entiers > 0 premiers entre eux, l'inégalité précédente soit vérifiée avec $c = a + b$; pour (Hall): pour tout $\varepsilon > 0$, existe $H_\varepsilon > 0$ telle que l'inégalité soit vérifiée pour tout couple (x, y) d'entiers > 0 avec $x^3 \neq y^2$; la conjecture "classique" est plus forte et s'écrit (cf. [**2**]): $|x^3 - y^2| >> \sup(x^3, y^2)^{1/6}$.

Lemme 1. (i) *les deux inégalités conjecturales suivantes (à lire comme ci-dessus) sont équivalentes*: $u(abc) \gg_\varepsilon c^{1-\varepsilon}$ (avec $a+b=c$, $pgcd(a,b)=1$)

$$u(|x^3-y^2|)pgcd(x^3,y^2)/u(pgcd((x,y)) \gg_\varepsilon \sup(x^3,y^2)^{(1-\varepsilon)/6}$$

(cette dernière implique (Hall)).

(ii) *Réciproquement, la conjecture de Hall établit l'inégalité:* $(y-x)u(xy)^{5/3} \gg_\varepsilon y^{(1-\varepsilon)/6}$ *pour tout couple* (x,y) *d'entiers avec* $0<x<y$ *(comparer avec l'application de* (abc)*:* $(y-x)u(xy) \gg_\varepsilon y^{1-\varepsilon}$*).*

(iii) *Les conjectures suivantes sont équivalentes*:

$$u(abc) \gg_{\varepsilon,\mu} c^{1-\varepsilon} \quad (\textit{avec } pgcd(a,b) \le \mu,\ a+b=c)$$
$$u(|x^3-y^2|) \gg_{\varepsilon,\mu} \sup(x^3,y^2)^{(1-\varepsilon)/6} \quad (\textit{avec } x^3 \neq y^2 \textit{ et } pgcd(x,y) \le \mu)$$

Dém. (i) La conjecture (abc) peut s'écrire sans l'hypothèse $pgcd(a,b)=1$ sous l'une des formes:

$$\frac{u(ab)u(c)pgcd(a,b)}{u(pgcd(a,b))} \gg_\varepsilon c^{1-\varepsilon}$$
$$\text{(pour tout triplet avec } c=a+b)$$
$$\frac{u(xy)u(y-x)pgcd(x,y)}{u(pgcd(x,y))} \gg_\varepsilon y^{1-\varepsilon}$$
$$\text{(pour tout couple } (x,y) \text{ avec } 0<x<y)$$

Ce sont des formes équivalentes de (abc) (appliquer l'identité $u(\xi\eta) = u(\xi)u(\eta)/u(pgcd(\xi,\eta)))$ (dont la seconde permet d'écrire l'inégalité générale (cf. (ii)): $(y-x)u(xy) \gg_\varepsilon y^{1-\varepsilon}$ puisque $|\xi-\eta|$ est un multiple de $u(\xi-\eta)pgcd(\xi,\eta)/u(pgcd(\xi,\eta)))$. Ainsi, la $2^{\text{ème}}$ inégalité de (i) se déduit de la $1^{\text{ère}}$ en écrivant: $c=\sup(x^3,y^2)$, $b=\inf(x^3,y^2)$, $a=|x^3-y^2|$ puis en majorant $u(cb)$ par $c^{5/6}$ (d'où la conjecture de Hall par la remarque précédente). Réciproquement, si $pgcd(a,b)=1$, alors $x=(a+b)^2-ab$, $y=(a-b)(a+2b)(2a+b)/2$ vérifient $x^3-y^2=3^3(ab(a+b)/2)^2$ (appliquer l'identité: $((X+1)^2-2(X-1))^3-(X-3)^2X^2(X+3)^2 = 3^3(X-1)^2(X+1)^2$ (polynômes pairs de degré ≤ 5 égaux pour $X=0,1,2,3$) du "discriminant cube" avec $X = 2(a/b) + 1)$; on conclut en notant que $pgcd(x, y) = 3$ si $a \equiv b \pmod 3$ et $pgcd(x, y) = 1$ sinon.

(ii) Si $x < y$ sont des entiers, on introduit un diviseur α de $(u(4xy))^2$ tel que $\alpha^2(4xy)$ soit un cube ξ^3 et on applique la conjecture de Hall à: $\alpha^2(x+y)^2 - \xi^3 = \alpha^2(x-y)^2$ d'où, comme dans [**4**]: $(y-x)u(xy)^{5/3} \gg_\varepsilon y^{(1-\varepsilon)/6}$ pour tout couple $0 < x < y$ d'entiers. Enfin, (iii) se déduit de (i).

On utilisera aussi les formes affaiblies de la conjecture (abc) à lire comme précédemment:

$(\alpha - abc)$

$$u(abc) \gg c^\alpha \quad \text{et}$$

$(\exists - abc)$

"il existe $\alpha > 0$ pour laquelle $(\alpha - abc)$ est vraie."

(aucun exemple (cf. [**7**]) ne semble infirmer l'inégalité: $u(abc) \geq c^\alpha$ avec $\alpha = 0,61353017451...$ correspondant à la relation (E. Reyssat): $2 + 3^{10}.109 = 23^5$, d'où la conjecture de Nitaj impliquant celle précitée de Tijdeman (observer que $u(y(y+1)(y+2)) = u((y+1)^2((y+1)^2-1)) \geq (y+1)^{2\alpha})$). On obtient de même une conjecture α-Hall en remplacant l'exposant $(1-\varepsilon)/6$ par α.

3. Applications des conjectures précédentes au problème d'Erdős-Woods. La conjecture (abc) permet de donner des résultats "uniformes" en la raison. C'est naturel, un triplet (a, c, b) où $c = a + b$ coïncide avec la progression: $2a$, $2a + (b-a)$, $2a + 2(b-a)$ au facteur 2 près. En bref, (abc) est équivalente avec les inégalités (avec x, d entiers > 0 et $pgcd(x, d) = 1$):

$$u(x(x+d)(x+2d)) \gg_\varepsilon (x+d)^{1-\varepsilon} \quad \text{ou (cf. fin de la Section 2)}$$
$$u(x(x+d)(x+2d)) \gg_\varepsilon \frac{(x+d)^{2-\varepsilon}}{u(d)}.$$

Des exemples comme $u(2(2+4373)(2+2.4373)) = u(2(2+2399)(2+2.2399)) = 2.3.5.7$ montrent qu'on ne peut écrire une conjecture comme celle de Tijdeman dans le cas $d = 1$. On peut construire d'autres exemples par les méthodes de [**10**] ou [**7**]. La "duplication cubique de Fermat" permet aussi d'écrire, pour tout $M > 0$, une infinité d'inégalités: $u(x(x+d)(x+2d)) < M^{-1}(x(x+d)(x+2d))^{1/3}$. En effet, l'identité: $(T+3)(T-1)^3 - (T-3)(T+1)^3 = 16T$ (tirée de la famille de [**5**]) devient: $(X+Y)(X-Y)^3 = X(X+2Y)^3 - Y(2X+Y)^3$ avec $T = 3X/(X+2Y)$. Soient: $X' = X(X^3+2Y^3)$, $Y' = -Y(2X^3+Y^3)$, $Z' = Z(X^3-Y^3)$ d'où $(X^3+Y^3)/Z^3 = (X'^3+Y'^3)/Z'^3$. Par récurrence, à partir de tout triplet (u_0, v_0, w_0) d'entiers où $pgcd(u_0, v_0) = 1$, $u_0 \neq v_0 \pmod 3$ et $u_0^3 + v_0^3/w_0^3 = K$ entier, on obtient par ce procédé une suite (u_n, v_n, w_n) infinie (la valuation 2-adique de $u_n v_n w_n$ croissant strictement) de triplets vérifiant les mêmes propriétés et donc le résultat.

Exemples. $(u_0, v_0, w_0) = (3, 5, 2)$ (resp. $(2, 7, 3), (37, 17, 21)$...) avec $K = 19$ (resp. $13, 6\ldots$) d'où des inégalités de forme $u(x(x+d)(x+2d)) < x$ dès le calcul de (u_1, v_1, w_1).

Les conjectures (*abc*) et ($\exists$-*abc*) (resp. de Hall et α-Hall) permettent de résoudre le problème d' Erdős et Woods pour une simple ou une double progression arithmétique (cf. Théorème 1 (resp. 2)) uniformément (resp. avec d et d' fixés). La conjecture (*abc*) permettra en outre d'affaiblir l'hypothèse "termes consécutifs d'une progression arithmétique" en "termes voisins d'une progression arithmétique." C'est une application de la forme polynômiale (en fait équivalente, (cf. [**5, 6**])) de (*abc*):

"Soient $F \in \mathbf{Z}[X,Y]$ un polynôme homogène sans facteur multiple vérifiant $F(X,0)F(0,Y) \neq 0$ et $\varepsilon > 0$; il existe une constante $C(\varepsilon, F)$, positive si $C_\varepsilon = \inf_{a>0,b>0,pgcd(a,b)=1} u(ab(a+b))(a+b)^{\varepsilon-1} > 0$ (i.e. si (*abc*) est vraie), explicitement calculable en fonction de F et de C_ε, pour laquelle on a, (a,b) désignant un couple quelconque d'entiers satisfaisant à $a \geq b > 0$, $pgcd(a,b) = 1$, $F(a,b) \neq 0$: $u(abF(a,b)) > C(\varepsilon, F)a^{f-\varepsilon}$ (f désignant le degré de F)."

Théorème 1. 1° *Si la conjecture (abc) est vérifiée, alors:*

(i) *Soit d_0 un entier. L'ensemble des triplets (x, y, d) d'entiers > 0 (où $x < y$) tels que d divise d_0 et tout facteur premier de $y + id$ divise $x + id$ (avec $i = 0, 1, 2$) est fini.*

(ii) *L'ensemble des triplets (x, y, d) d'entiers > 0 (où $x < y$,*

$(y,d)=1)$ pour lesquels tout facteur premier de $y+id$ divise $x+id$ avec $i=0,1,2,3$ est fini.

(iii) *Soit d_0 un entier. L'ensemble des quadruplets (x,y,d,d') d'entiers positifs vérifiant $d\neq d'$, d et d' diviseurs de d_0, $u(x+id)=u(y+id')$ (avec $i=0,1,2)$ est fini.*

(iv) *L'ensemble des quadruplets (x,y,d,d') d'entiers positifs vérifiant $(x,d)\neq(y,d')$, pgcd$(x,d)=1$, pgcd$(y,d')=1$, $u(x+id)=u(y+id')$ avec $i=0,\dots,4$ est fini.*

2° *Si la conjecture ($\exists$-abc) est vérifiée, les résultats précédents restent valables en augmentant convenablement k, i.e. l'intervalle de variation de l'entier i.*

Dém. 1° (i). L'écart $(y-x)$ est un multiple de $u(y(y+d)(y+2d))$ lequel est minoré, grâce à (abc), par $C'_\varepsilon(y+d)^{2-\varepsilon}$ puisque $pgcd(y,d)$ est borné. (i) se déduit aussi de (α-*abc*) avec $\alpha>1/2$.

2° (anal. de (ii) et (i)): Soit $\alpha>0$ tel que (α-*abc*) soit vérifiée. Si k vérifie $k\alpha>3$ et si $u(y+id)$ divise $x+id$ avec $i=0,\dots,k-1$, on obtient la finitude cherchée en notant que $u(y\dots(y+(k-1)d))$ divise $(y-x)$ et, à une constante multiplicative près, est minoré par $(y+d)^{k\alpha/3}$. Pour établir cette dernière minoration, l'austuce algébrique précédente est superflue et on montre d'abord que: $u(y(y+d)(y+2d))\gg(y+d)^\alpha$, $u(\prod_{0\le i\le 3}(y+id))\gg(y+d)^{4\alpha/3}$, $u(\prod_{0\le i\le 4}(y+id))\gg(y+d)^{5\alpha/3}$ (faire le produit membre à membre des 4 inégalités suivantes: $u((y+d)(y+3d)(2y+4d))\gg(y+d)^\alpha$, $u(y(2y+6d)(3y+6d)\gg(y+d)^\alpha$, $u(2y(y+3d)(3y+3d))\gg(y+d)^\alpha$, $u(y(y+2d)(2y+2d)\gg(y+d)^\alpha$ et observer que le membre de gauche obtenu est $\ll(u(y(y+d)(y+2d)(y+3d))^3$; écrire de même $u(y(y+d)(y+2d))\gg(y+d)^\alpha$, $u(y(2y+4d)(y+4d))\gg(y+d)^\alpha$, $u(2y(3y+3d)(y+3d)\gg(y+d)^\alpha$, $u((y+2d)(2y+6d)(y+4d))\gg(y+d)^\alpha$, $u((y+d)(2y+8d)(3y+9d))\gg(y+d)^\alpha\dots$); on en déduit ensuite le résultat en groupant les termes par paquets de 3 (et un groupe de 4 ou 5 si nécessaire).

1° (ii). Comme ci-dessus, $u(\prod_{0\le i\le 3}(y+id))$ divise $(y-x)$; on conclut en appliquant la conjecture (abc) à l'identité: $(y+d)^3(y+3d)-y(y+2d)^3=(2y+3d)d^3$ (d'où $u(\prod_{0\le i\le 3}(y+id))\gg_\varepsilon(y+d)^{(2-4\varepsilon)}$). On remarque aussi dans ce cas que la conjecture (α-*abc*) avec $\alpha>3/4$ suffit pour conclure.

1° (iii). Comme déjà vu, $u(x(x+d)(x+2d)) = u(y(y+d')(y+2d'))$ divise $|d'x - dy|(\ll \sup(x,y))$, $u(x(x+d)(x+2d)) \gg_\varepsilon (x+d)^{2-\varepsilon}/u(d)$, $u(y(y+d')(y+2d')) \gg_\varepsilon (y+d')^{2-\varepsilon}/u(d')$ ce qui permet de conclure. Là aussi, la conjecture (α-*abc*) avec une valeur $\alpha > 1/2$ suffit.

1° (iv). L'identité: $x^2(x+3d) + (x+d)(x+4d)^2 = 2(x+2d)^3$ et la conjecture (abc) prouvent que $u(\prod_{0\le i\le 4}(x+id)) \gg (x+d)^{3-\varepsilon}$; les hypothèses montrant que $u(\prod_{0\le i\le 4}(y+id)) = u(\prod_{0\le i\le 4}(x+id))$ divise $|dy - d'x|$, on déduit de ce qui précède l'inégalité: $(x+d)^{3-\varepsilon}(y+d')^{3-\varepsilon} \ll_\varepsilon (dy - d'x)^2$, d'où la finitude annoncée. Dans ce cas aussi, (α-*abc*) avec $\alpha > 2/3$ suffit pour conclure.

2° anal. (iii) et (iv). On écrit: $u(\prod_{0\le i<k}(y+id')) \gg (y+d')^{k\alpha/3}$, $u(\prod_{0\le i<k}(x+id)) \gg (x+d)^{k\alpha/3}$ (cf. 2° (ii)) et on conclut comme précédemment dès que $k\alpha > 6$. Le même procédé convient pour 2° (iii). $\square$

Théorème 2 (cf. [**4**] et [**5**]): (on suppose vraie la conjecture de Hall)

(i) *Soit d un entier. L'ensemble des couples (x,y) d'entiers > 0 (où $x < y$) tels que tout facteur premier de $y+id$ divise $x+id$ (avec $i = 1,\dots,15$) est fini.*

(ii) *Soient $d \neq d'$ deux entiers. L'ensemble des couples (x,y) d'entiers positifs pour lesquels $u(x+id) = u(y+id')$ (avec $i = 1,\dots,15$) est fini.*

Dém. On établit d'abord les inégalités, d étant fixé: $u((x-2d)(x-d)(x+d)(x+2d)) \gg_{\varepsilon,d} x^{(3-\varepsilon)/10}$ et $u((x-d)x(x+d)) \gg_{\varepsilon,d} x^{(1-\varepsilon)/5}$ à partir de la conjecture de Hall. Ce sont en effet des conséquences des identités: $(x-d)^2(x+2d) - (x+d)^2(x-2d) = 4d^3$, $x^2 - (x^2-d^2) = d^2$ et de l'inégalité générale $(y-x)u(xy)^{5/3} \gg_\varepsilon y^{(1-\varepsilon)/6}$ pour tout couple d'entiers $0 < x < y$ (cf. Lemme 1). On va en déduire la minoration $u(\prod_{1\le i\le 15}(x+id) \gg_{\varepsilon,d} (x+d)^{(11-\varepsilon)/10}$; en effet, $u((x+d)(x+2d)(x+4d)(x+5d))$, $u((x+6d)(x+7d)(x+9d)(x+10d))$ et $u((x+11d)(x+12d)(x+14d)(x+15d))$ sont minorés par $x^{(3-\varepsilon)/10}$ à une constante multiplicative près tandis que $u((x+3d)(x+8d)(x+13d))$ est minoré par $x^{(1-\varepsilon)/5}$; il n'y a plus qu'à faire le produit membre à membre en observant que les facteurs premiers redondants sont en nombre fini. On conclut comme précédemment: dans (i), on observe que $u(\prod_{1\leq i\leq 15}(y+id))$ divise $(y-x)$ et dans (ii), on observe que $u(\prod_{1\leq i\leq 15}(x+id)) = u(\prod_{1\leq i\leq 15}(y+id'))$ divise $|d'x-dy|$. $\square$

Remarque. Par des arguments analogues, on voit que la conjecture α-Hall suffit pour conclure

L'example déjà utilisé des progressions: $(2+i)$ et $(2+7i)$ où $u(2) = u(2)$, $u(3) = u(9)$, $u(4) = u(16)$, $u(6)|u(30)$, $u(8)|u(44)$, $u(9)|u(51)$ (cette relation est vraie si $(2+i) = 2^a3^b$), $(\dots), u(12) = u(72), (\dots), u(20)$ est divisé par $u(128), (\dots), u(48) = u(324)\dots$ montre qu'existent, à défaut de longues relations d'égalité consécutives, de relations sporadiques de divisibilité ou d'égalité. La conjecture (abc) montre que cette possibilité est limitée. En effet, si $K\geq 5$, l'ensemble des quadruplets (x,y,d,d') d'entiers vérifiant $(x,d)\neq(y,d')$, $pgcd(x,d) = 1$, $pgcd(y,d') = 1$, $u(x+id) = u(y+id')$ (où i décrit un ensemble I d'au moins 5 termes parmi $1,\dots,K$) est fini (observer que $|dy-d'x|$ est multiple de $u(\prod_{i\in I}(y+id')) = u(\prod_{i\in I}(x+id))$, lequel, d'après la forme polynômiale de (abc), est minoré, à un facteur multiplicatif (explicitable à partir de K et ε) près, par $(x+d)^{3-\varepsilon}$ et par $(y+d')^{3-\varepsilon}$). De même, si $K\geq 8$, l'ensemble des quadruplets (x,y,d,d') d'entiers positifs vérifiant $(x,d)\neq(y,d')$, $pgcd(x,d) = 1$, $pgcd(y,d') = 1$, $u(x+id)|(y+id')$ (où i décrit un ensemble I_x d'au moins 4 termes parmi $1,\dots,K$), $u(y+id')|(x+id)$ (où i décrit un ensemble I_y (disjoint de I_x) d'au moins 4 termes parmi $1,\dots,K$) est fini (observer que les entiers $u(\prod_{i\in I_y}(y+id'))$ et $u(\prod_{i\in I_x}(x+id))$, diviseurs de $|dy-d'x|$, n'ont en commun que des facteurs premiers $<K$; leur produit est, d'après (abc) polynômial, majoré par $|dy-d'x|$ et, à une constante près, minoré par $((y+d')(x+d))^{2-\varepsilon}$).

Une autre application de (abc) à la logique et au problème d'Erdős-Woods est la conjecture (cf. [**8**]): "$u(x^m-1) = u(y^m-1)$ pour tout m de la forme 2^n implique $x=y$." Le résultat a été établi par A. Schinzel. Il n'y a ici aucun ensemble d'exceptions et le résultat est généralisable à d'autres suites.

On quitte maintenant le domaine des conjectures pour celui des résultats acquis. Ces derniers ne fournissant rien de substantiel sur le problème d'Erdős et Woods, on abandonne le contexte de ce dernier pour se concentrer sur les minorations de $u(\prod_{1\le i\le k}(x+id))$ avec $pgcd(x,d)=1$.

4. Partie sans facteur carré d'un produit de termes consécutifs d'une progression. Comme dans le cas $d=1$, les techniques de minoration dépendent des positions relatives de k et $x+d$. On n'abordera ici que les conséquences de la méthode de Baker, donc le domaine où $x+d$ est grand devant k (pour les méthodes élémentaires, voir [**1**] ou les améliorations données dans [**3**]). Comme on cherche des résultats "uniformes en d," on n'emploiera plus de formes linéaires de logarithmes complexes mais des formes linéaires de logarithmes p-adiques comme dans le travail de C. Stewart et Kunrui Yu (cf. [**11**]). Ces auteurs y mixent ces deux types de formes mais, comme vu dans [**4**], l'amélioration en p du terme p^2 dans le lemme 1 de [**11**] permet d'éviter l'emploi des formes complexes et de montrer que $u((x+d)(x+2d)(x+3d)) \gg_\varepsilon (\log(x+d))^{2-\varepsilon}$, d'où $u(\prod_{1\le i\le k}(x+id)) \gg_{\varepsilon,k} (\log(x+d))^{(2-\varepsilon)k/3}$ (avec $k\ge 3$ fixé) par des arguments combinatoires.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Balasubramanian, T.N. Shorey and M. Waldschmidt, *On the maximal length of two sequences of consecutive integers with the same prime divisors*, Acta Math. Hung. **54** (1989), 225–236.

2. M. Hall, Jr., *The diophantine equation* $x^3-y^2=k$, in *Computers in number theory* (Atkin and Birch, eds.), Academic Press, New York, 1971, 173–205.

3. M. Langevin, *Autour d'un problème d'Erdős et Woods*, in *Méthodes transcendantes en théorie des nombres*, Thèse Etat, Paris 6, 1987, 158–177.

4. ———, *Partie sans facteur carré d'un produit d'entiers voisins*, dans *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* (P. Phillippon, ed.), de Gruyter, 1992, 203–214.

5. ———, *Cas d'égalité pour le théorème de Mason et applications de la conjecture* (abc), C.R. Acad. Sci. Paris **317** (1993), 441–444.

6. ———, *Partie sans facteur carré de* $F(a,b)$ *(modulo la conjecture* (abc)), Séminaire de Théorie des Nombres **93–94**, Publ. Math. Univ. Caen, 1995.

7. A. Nitaj, *Conséquences et aspects expérimentaux des conjectures* (abc) *et de Szpiro*, Thèse Doctorat, Caen, 1994.

8. D. Richard, *Equivalence of some questions in mathematical logic with some conjectures in number theory*, in *Number theory and applications* (R. Mollin, ed.), Kluwer, 1989, 529–545.

9. W. Schmidt, *The abc-conjecture*, Epilogue in *Diophantine approximations and diophantine equations*, Lecture Notes **1467** Springer-Verlag, 1991, 205–208.

10. C.L. Stewart and R. Tijdeman, *On the Oesterlé-Masser conjecture*, Mh. Math. **102** (1986), 251–257.

11. C.L. Stewart and K. Yu, *On the* (*abc*) *conjecture*, Math. Ann. **291** (1991), 225–230.

J.E. $A \otimes TdN$, Université de Lille, U.F.R. Mathématiques M 2, 59655-Villeneuve d'Ascq, France
E-mail address: `lgv@math.u-bordeaux.fr`