MEMORIES OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XYVI, Mathematic No. 1, 1050.

Über die Homöomorphien der offenen Flächen

Von Ken-iti Koseki

(Received July 14, 1949)

Die Homöomorphie-Bedingung der offenen Flächen ist von S. Saks[1] und B, v, Kerékjártó[2] untersucht worden. S. Saks behandelte aber nur „compactifiable“ Flächen, d. h. die Gebiete auf geschlossenen Flächen, und damit ist seine Untersuchung unvollständig. B. v. Kerékjártósche Bedingung ist aber zu kompliziert. In der vorliegenden Arbeit will ich auf Grunde des Homologie-Begriffes (mod. 2) eine vollständige Homöomorphie-Bedingung der offenen Flächen angeben.

Definiton: Es sei G eine Abelsche Gruppe mit der Eigenschaft, dass zweimal jedes Element gleich Null ist. Wir bezeichnen von jetzt an solche Gruppe als Abelsche Gruppe (mod. 2). Eine nicht leere Teilmenge $K=\{b_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots$ ad. endlich oder unendlich) von den Elementen der Gruppe G heisst dann und nur dann Basis von G, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

A) irgendwelche endlich vielen Elemente von K sind linear unabhängig.

B) irgend ein Element $(\neq 0)$ von G lässt sich als lineare Kombination von den endlich vielen geeigneten Elementen aus K darstellen.

Satz I. Es sei G eine Abelsche Gruppe (mod. 2) und K sei eine Basis von G. Jedes Element von G lässt sich auf eine und nur eine Weise als lineare Kombination von den Elementen aus K darstellen.

Beweis. Es sei $a(\neq 0)$ ein Element von G, und a lasse sich auf den folgenden Weise als
$$a=b_1+b_2+\cdots+b_m$$
$$=b_1'+b_2'+\cdots+b_n'$$
darstellen. Angenommen, dass $n>m$ ist, so gibt es mindestens ein

---

1. S. Saks. Sur l'homéomorphie des variétés à deux dimensions Fund. Math. 5. (1924).

2. B. v. Kerékjártó. Vorlesungen über Topologie. Berlin. (1923).

Element b von der Beschaffenheit, dass b in dem System $(b_1', b_2' \cdots b_n')$ und aber nicht in $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ enthalten ist: dies ist ein Widerspruch mit der Eigenschaft A) von K. Auf demselben Grunde muss jedes Element von $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ mit einem von $(b_1', b_2', \cdots, b_n')$ identisch sein. W. z. b. w.

Satz II. Es sei G eine Abelsche Gruppe (mod. 2), und $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ seien Folgen der Elemente von G. Dafür, dass sowohl $\{b_n\}$ als auch $\{c_n\}$ eine Basis von G bildet, ist es notwendig und hinreichend, dass $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ die Eigenschaft A) erfüllen, und das jedes Element von $\{b_n\}$ bez. $\{c_n\}$ sich als lineare Kombination von den Elementen aus $\{c_n\}$ bez. $\{b_n\}$ darstellen lässt.

Dieser Satz ist so klar, dass wir den Beweis weglassen.

Zusatz. Es sei $\{b_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ eine Basis der Abelschen Gruppe (mod. 2) G. Wenn jedes Element des Systems $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ sich als lineare Kombination von $(b_1', b_2', \cdots, b_m')$ darstellen lässt und umgekert jedes Element des Systems $(b_1', b_2', \cdots, b_m')$ eine lineare Kombination von den Elementen des Systems $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ ist, und wenn die Elemente $b_1', b_2', \cdots, b_m'$ linear unabhängig sind, so muss $n=m$ sein, und $(b_1', b_2', \cdots, b_n', b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots)$ bildet eine Basis von G.

Satz III. Es seien G und G' die beiden Abelschen Gruppen (mod. 2), und $\{b_n\}$ sei eine Basis von G. Wenn f eine isomorphe Abbildung von G auf G' ist, so bildet $\{f(b_n)\}$ eine Basis von G'.

Beweis. Wenn $f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_n)=0$ wäre, so würde $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$ sein: dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\{b_n\}$ eine Basis von G bildet.

a' sei irgendein Element von G', und a sei $f^{-1}(a')$. Dann muss a die lineare Kombination der Elementen von $\{b_n\}$ derart sein, dass $a=b_1+b_2+\cdots+b_m$. Daher muss a' dem $f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_m)$ gleich sein. W. z. b. w.

Die Umkehrung dieses Satzes auch gilt.

Satz IV. Es seien G und G' die beiden Abelschen Gruppen (mod. 2), und $\{b_n\}$ bez. $\{b_n'\}$ sei eine aus unendlich vielen Elementen bestehende Basis von G bez. G'. Dann sind die beiden Gruppen G und G' isomorph.

Beweis. Wir stellen eine Zuordunung f zwischen $\{b_n\}$ und $\{b_n'\}$ her von der Beschaffenheit, dass $f(b_n)=b_n'$ ist. a sei irgendein Element $(\neq 0)$ von G, so lässt sich a auf eine und nur eine Weise als lineare Kombination der Elementen von $\{b_n\}$ derart darstellen, dass $a=b_1+b_2+\cdots+b_n$ ist. Wir lassen zu a das Element $f(b_1)+f(b_2)$

$+\cdots+f(b_n)$ von G' und zum Null-Element von G das Null-Element von G' entsprechen. Der Kürze halber bezeichnen wir diese Zuordnung zwischen G und G' wiederum mit f.

Wir wollen nun zeigen, dass f die isomorphe Abbildung von G auf G' ist. Erstens ist f eine Abbildung von G auf G'. a' sei in der Tat irgendein Element $(\neqq 0)$ von G', so lässt sich a' auf eine und nur eine Weise als lineare Kombination der Elementen von $\{b_n'\}$ derart darstellen, dass $a'=b_1'+b_2'+\cdots+b_n'$ ist. Wir bezeichnen das Element $f^{-1}(b_n)$ $(n=1, 2,\cdots, n)$ mit b_n, und bezeichnen das Element $b_1+b_2+\cdots+b_n$ mit a, folgt ohne weiteres aus Definition von f, dass $f(a)=a'$ ist: also ist f die Abbildung von G auf G'.

Zweitens ist die Abbildung f eineindeutig. Es seien in der Tat $a(\neqq 0)=b_1+b_2+\cdots+b_n$ und $c(\neqq 0)=b_{m_1}+b_{m_2}+\cdots+b_{m_p}$ die beiden voneinander verschiedenen Elemente von G, so sind die beiden Systeme $(b_1, b_2,\cdots, b_n)$ und $(b_{m_1}, b_{m_2},\cdots, b_{m_p})$ keineswegs identisch. Infolgedessen müssen $(f(b_1), f(b_2),\cdots, f(b_n))$ und $(f(b_{m_1}), f(b_{m_2}),\cdots, f(b_{m_p}))$ auch nicht identisch sein. Daraus folgt ohne weiteres, dass $f(a)$ und $f(b)$ keineswegs identisch sind.

Aus Definition von f folgt ohne weiteres, dass für je zwei Elemente a und c von G die Gleichung $f(a+c)=f(a)+f(c)$ erfüllt ist. W. z. b. w.

Satz V. Es seien zwei homöomorphe offene Flächen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ gegeben. B bez. B' sei die ein-dimensionale Zusammenhangsgruppe von $\mathfrak{G}$ bez. $\mathfrak{G}'$, so sind B und B' isomorph.

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, dass, wenn Δ_1 und Δ_2 die beiden voneinander unabhängigen Simplizialzerlegungen von $\mathfrak{G}$ sind und B^1 und B^2 die ein-dimensionalen Zusammenhangsgruppen bei der Simplizialzerlegungen Δ_1 und Δ_2 von $\mathfrak{G}$ sind, so B^1 und B^2 isomorph sind.

Wenn Δ_2 eine Unterteilung von Δ_1 ist, so[1] sind B^1 und B^2 miteinander isomorph. Man beachte dabei, dass, wenn Z_1 ein zu einem Element c von B^1 gehörender Zyklus und Z_2 eine Unterteilung

---

1. Vgl. P. Alexandroff und H. Hopf. Topologie (Erster Band) VI Kapitel. Julius Springer in Berlin. (1935).

2. Vgl. B. v. Kerékjártó. a. a. O. S. 134–135. Kerékjártóscher Beweis ist ein wenig falsch. S. 135, die vierte Zeile. Wir können dies folgendermassen berichtigen: die in (π) liegenden Teile dieser Kanten werden auf endlich oder unendlich viele einfache Bögen im Polygonbereich (π') abgebildet. Unter diesen Bögen können höchstens endlich viele Bögen sowohl mit Δ' als auch mit π' die gemeinsamen Punkte haben.

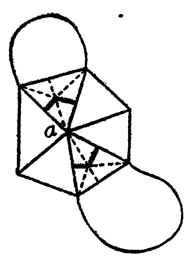
von Z_1 ist, so Z_2 zu einem dem c entsprechenden Element von B^2 gehört.

Wenn Δ_1 und Δ_2 voneinander unabhängig sind, können[2] wir aus Δ_1 durch interne Transformationen zu Δ_2 übergehen. Wir können nämlich eine gemeinsame Unterteilung von Δ_1 und Δ_2 haben oder eine dritte Simplizialzerlegung Δ_3 nehmen derart, dass sowohl Δ_1 und Δ_3 als auch Δ_2 und Δ_3 eine gemeinsame Unterteilung haben. Daraus folgt ohne weiteres, dass B^1 und B^2 miteinander isomorph sind. W. z. b. w.

Satz VI. Es sei B die I-dimensionale Zusammenhangsgruppe einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$ und b sei irgendein Element von B. Δ sei eine vorgelegte Simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$, so können wir immer auf $\mathfrak{G}$ ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon P derart konstruieren, dass P aus den I-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ besteht.

Beweis. 1. Schritt: L sei ein zu b gehörender Zuklus von der Art, dass L aus den I-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_1 von Δ besteht: Wir bezeichnen die Komponenten von L mit $L_1, L_2, \cdots, L_n$.

Angenommen, dass L_1 die vielfachen Punkte hat, und a sei zwar ein vielfacher Punkt uon L_1. Dann können wir immer ein Zyklus L_1' derart konstruieren, dass $L_1' \sim L_1$ ist (dabei ist es nötig, dass B bei irgendeiner Unterteilung invariant bleibt), und dass L_1' nicht a enthält und die Anzahl der vielfachen Punkte von L_1' kleiner als die von L_1 ist.



Zu endlich vielen verschiedenen Malen wiederholen wir dieses Verfahren, so bekommen wir endlich viele einfach-geschlossene Polygone $P_1, P_2, \cdots, P_p$ derart, dass $P_1 + P_2 + \cdots + P_p \sim L_1$ ist. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass L_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ ein einfach-geschlossenes Polygon ist.

2. Schritt: $L_1, L_2, \cdots, L_{n-1}$, und L_n bestimmen auf die endlich viele Gebiete[1] $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_m$. Angenommen, dass $L_1 + L_2 + \cdots + L_i$ die Begrenzung[2] von $\mathfrak{K}_1$ bildet. Wir können einen Punkt l_1 auf L_1 mit einem Punkt l_2 auf L_2 durch einen einfachen Bogen[3] Q verbinden derart, dass $Q - l_1 - l_2$ in $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist.

---

1. Eine Menge $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$ heisst ein Gebiet, wenn $\mathfrak{K}$ eine offene Menge in Bezug auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ eine zussamenhängende Menge ist.

2. Die Vereinigungsmenge aller zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Grenzpunkte eines Gebietes $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$ nennen wir die Begrenzung von $\mathfrak{K}$.

3. Ein eineindeutiges und stetiges Bild von einer Strecke heisst ein einfacher Bogen.

Da $\mathfrak{G}$ orientierbar ist, so können wir auf L_j die beiden Ufer unterscheiden. Wir können leicht einsehen, dass am Punkte l_1. Q auf einem Ufer von L_1 liegt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller zu $\mathfrak{K}_1+L_1+L_2+\cdots+L_i$ gehörenden 2-dimensionalen Simplexe S von Δ_1 mit den folgenden Eigenschaften.

1. S hat mit $Q+L_1+L_2$ mindestens einen Punkt gemein.

2. Wenn S mit L_1 einen Punkt gemein hat, so liegt S mit Q in einem und demselben Ufer von L_1.

3. Wenn S mit L_2 einen Punkt gemein hat, so liegt S mit Q in einem und demselben Ufer von L_2.

Wir bezeichnen den Rand von $\mathfrak{A}$ mit R. Die Komponenten von R seien L_1, L_2, R_1, $R_2,\cdots$, R_r, und a_1, $a_2,\cdots$, a_p seien die vielfachen Punkte von R. Offenbar kann a_i $(i=1, 2,\cdots, p)$ nicht auf L_1+L_2 liegen. R hat mit Q keine Punkte gemeinsam. a_1 sei in einem 2-dimensionalen Simplex $\mathfrak{P}$, das in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, von Δ_1 enthalten. Für genügend grosse Nummer n unterteilen wir Δ_1 n-mal sukzessiv baryzentrisch, und wir bezeichnen diese Unterteilung mit Δ_n. $\mathfrak{P}_n$ sei die Unterteilung von $\mathfrak{P}$ durch Δ_n und $\mathfrak{B}_n$ sei die Menge aller den Punkt a_1 enthaltenden und in $\mathfrak{P}_n$ enthaltenen 2-dimensionalen Simplexe von Δ_n. Für genügend grosse Nummer n kann $\mathfrak{B}_n$ keine Punkte von L_1+L_2+Q enthalten, so muss $\mathfrak{P}_n-\mathfrak{B}_n$ die Punkte von L_1+L_2+Q enthalten. Anderseits ist $\mathfrak{P}_n-\mathfrak{B}_n$ offenbar zusammenhängend.

$\mathfrak{P}_n-\mathfrak{B}_n$ enthält nicht mehr den Punkt a_1. Auf dieser Weise können wir alle vielfachen Punkte aussondern. Nachdem, dass wir alle vielfachen Punkte ausgesondert haben, bekommen wir nach der obigen Betrachtungen einen zusammenhängenden 2-dimensionalen Komplex. Der Kürze halber nehmen wir an, dass R_i $(i=1, 2,\cdots, r)$ von Anfang an nicht die vielfachen Punkte hat.

Wenn $\mathfrak{A}$ das Geschlecht q hat, so können wir auf $\mathfrak{A}$ die q zueinander punktfremden Rückkehrschnitte Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_q derart konstruieren, dass $\mathfrak{A}-(Q_1+Q_2+\cdots+Q_q)$ zusammenhängend ist. Danach bilden wir $\mathfrak{A}$ auf das ebene Jordansche[1] Gebiet $\mathfrak{A}'$, die durch die $2q+r+2$ einfach-geschlossenen Jordanschen Kurve L_1', L_2', R_i' $(i=1, 2,\cdots, r)$, Q_i' $(i=1, 2,\cdots, 2q)$ begrenzt wird, derart ab, dass die Abbildung auf den Rückkehrschnitte ein-und-zweideutig

1. Ein ebenes Gebiet $\mathfrak{A}'$ heisst Jordansches Gebiet, wenn $\mathfrak{A}'$ durch endlich viele einfach-geschlossene Jordan-Kurve begrenzt wird.

und übrigens eineindeutig ist, und dass durch die Abbildung L_i $(i=1, 2,\cdots\quad)$ auf L_i', R_i $(i=1, 2,\cdots, r)$ auf R_i' abgebildet werden. Diese Abbildung bezeichnen wir mit f. Durch f werden die 2-dimensionalen Simplexe von $\mathfrak{A}$ auf die 2-dimensionalen Simplexe von $\mathfrak{A}'$ abgebildet.

Wir verbinden L_1' und L_2' durch einen in $\mathfrak{A}'$ laufenden einfachen Bogen A und verbinden je von R_1', $R_2'\cdots$, R_r', Q_1', $Q_2'\cdots$, Q_{2q}' mit dem folgenden durch einen einfachen Bogen. Wir bezeichnen die Vereingungsmenge von R_i' $(i=1, 2,\cdots, r)$ und Q_i' $(i=1, 2,\cdots, 2q)$ und alle Verbindungsbögen mit M, und bezeichnen die Entfernung zwischen $L_1'+L_2'+A$ und M mit d. Wir können die Verbindungsbögen derart konstruieren, dass M und $L_1'+L_2'+A$ keine Punkte gemein hat. Dann ist $d>0$.

Wir unterteilen die Simpleve von $\mathfrak{A}'$ derart, dass der Durchmesser von jedem feinen Simplexe kleiner als d ist. Diese Unterteilung bezeichnen wir mit $\varDelta_2'$. Wir greifen alle mit M gemeinsame Punkte besitzenden 2-dimensionalen Simplexe von $\varDelta_2'$ heraus und bezeichnen die Menge dieser 2-dimensionalen Simplexe mit $\mathfrak{B}'$. Wir können auf demselben Grunde wie für $\mathfrak{A}$ annehmen, dass der Rand von $\mathfrak{B}'$ nicht die vielfachen Punkte hat. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{B}'$ mit R_1', $R_2',\cdots$, R_r', Q_1', $Q_2',\cdots$, Q_{2q}', S_1', $S_2',\cdots$, S_s'.

Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2,\cdots$, $\mathfrak{L}_c$. $L_1'+L_2'+A$ muss in einem von $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2,\cdots$, $\mathfrak{L}_c$, etwa in $\mathfrak{L}_1$ enthalten sein. Wir können nun leicht einsehen, dass $\mathfrak{L}_1$ nur eines von S_1', $S_2',\cdots$, S_s', etwa S_1' als Begrenzung hat und S_1' homolog mit $L_1'+L_2'$ ist. Infolgedessen können wir auf $\mathfrak{K}_1$ ein einfach-geschlossenes Polygon S_1, das homolog mit L_1+L_2 ist, derart konstruieren, dass S_1 mit jedem von L_3, $L_4,\cdots$, L_n keine Punkte gemein hat.

Zu endlich vielen verschiedenen Malen wiederholen wir dieses Verfahren, bekommen wir ein zu b gehörendes einfach-gechlossenes Polygon. W. z. b. w.

Satz VII. Es sei eine orientierbare offene Fläche $\mathfrak{G}$ gegeben, und $\mathfrak{P}$ sei eine berandete Fläche auf $\mathfrak{G}$. Wenn der Rand von $\mathfrak{P}$ aus der Summe (mod. 2) von den einfach-geschlossenen Polygonen R_0, R_1, $R_2,\cdots$, R_n besteht von der Art, dass R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, n)$ aus den 1-dimensionalen Simplexen von der vorgelegten Simplizialzerlegung $\varDelta$ von $\mathfrak{G}$ oder einer Unterteilung $\varDelta_1$ von $\varDelta$ besteht, und wenn jedes von R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, n)$ nicht homolog Null ist und jedes von R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, n)$ ein Schnitt[1] von $\mathfrak{G}$ ist, so kann die Summe (mod. 2) oos echten Teilsystems von $(R_0, R_1,\cdots, R_n)$ nicht nullhomolog ist.

Beweis. Wenn $n=1$ ist, so ist die Behauptung offenbar richtig. Daher nehmen wir an, dass $n>1$ ist.

Angenommen, dass R_0, $R_1,\cdots$, R_p $(p<n)$ insgesamt den Rand einer 2-dimensionalen Kette[2] $\mathfrak{K}$ von $\varDelta_1$ bilden. Wenn wir $\mathfrak{K}$ in die Komponenten zerlegen, so bildet jede Komponente eine berandete Fläche, da je zwei von R_0, $R_1,\cdots$, R_p miteinander punktfremed sind. Daher nehmen wir von jetzt ab an, dass $\mathfrak{K}$ eine berandete Fläche ist.

Nun muss das zu $\mathfrak{K}$ gehörende Ufer von R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, p)$ mit das zu $\mathfrak{P}$ gehörende Ufer von R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, p)$ identisch sein. Um eies zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass, wenn das nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörende Ufer von R_i $(i=0, 1,\cdots, p)$ zu $\mathfrak{K}$ gehört, wir zu einem Wirderspruch kommen. Angenommen in der Tat, dass das nicht zu $\mathfrak{P}$ gehörende Ufer von R_1 zu $\mathfrak{K}$ gehört. Da R_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so bestimmt R_1 auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_1$ uud $\mathfrak{H}_2$. $\mathfrak{P}$ gehört etwa zu $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{K}$ gehört zu $\mathfrak{H}_2$. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{K}$ als Rand das $R_0+R_1+\cdots+R_p$ hat.

Also gehört das zu $\mathfrak{K}$ gehörende Ufer von R_i $(i=0, 1, 2,\cdots, p)$ auch zu $\mathfrak{P}$. Daraus folgt ohne weiteres, dass $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten ist.

Anderseits bestimmt R_{p+1} auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$. $\mathfrak{P}$ ist nur in einem von den beiden $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, etwa in $\mathfrak{M}'$ enthalten. Da R_{p+1} in $\mathfrak{K}$ und nicht in dem Rand von $\mathfrak{K}$ enthalten ist, so muss $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ enthalten sein.

Nun, da R_{p+1} nicht homolog Null ist, so muss $\mathfrak{M}+R_{p+1}$ nicht kompakt sein. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathfrak{K}$ eine berandete Fläche ist. Also führen wir jedenfalls unter der Annahme, dass $R_0+R_1+\cdots+R_p$ $(p<n)$ nullhomolog ist, zu einem Widerspruch. W. z. b. w.

Satz VIII. Es sei B die ein-dimensionale Zusammenhangsgruppe einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$, und b sei irgendein

---

1. Wenn $\mathfrak{G}-R$ nicht eine zusammenhängende Menge ist, so heisst R ein Schnitt von $\mathfrak{G}$.

2. Die Vereinigung endlich vieler 2-dimensionaler Simplexe heisst 2-dimensionale Kette.

von Null verschiedenes Element von B. L_1 und L_2 seien die beiden beliebigen, zu b gehörenden einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass L_1 bez. L_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von der Simplizialzerlegung Δ_1 bez. Δ_2 besteht, und Δ_2 sei eine Unterteilung von Δ_1. Wenn L_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so ist L_2 auch ein Schnitt von $\mathfrak{G}$.

Beweis. Da L_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so bestimmt L_1 auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, und zwar, dass L_1 die gemeinsame Begrenzung von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ ist.

Wir greifen[1] alle mit L_1 gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe (von Δ_2) von $\mathfrak{P}_1$ heraus, und bezeichnen die Menge dieser Simplexe mit $\mathfrak{N}_1$. Zweitens greifen wir alle 2-dimensionan Simplexe S (von Δ_2) von $\mathfrak{P}_1$ heraus von der Art, dass S mit dem Rand von $\mathfrak{N}_1$ die gemeinsame Punkte hat und S noch nicht in $\mathfrak{N}_1$ enthalten wird. Die Menge dieser 2-dimensionalen Simplexe bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}_2$. Durch eine endlichmalige, etwa n-malige Wiederholung dieses Verfahrens, das wir im folgenden als Verfahren (V) bezeichnen, bekomwen wir eine 2-dimensionale Kette $\mathfrak{K}=\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\cdots+\mathfrak{N}_n$ derart, dass $\mathfrak{N}_n$ mit L_1+L_2 keine Punkte gemein hat. Dies ist immer möglich, da nur endlich viele 2-dimensionale Simplexe mit L_1+L_2 gemeinsame Punkte enthalten.

Indem wir die Simplexe von Δ_2 einmal baryzentrisch unterteilen, können wir die vielfache Punkte des Randes von $\mathfrak{K}$ weglassen. Der Punkt a sei in der Tat der vielfache Punkt des Randes von $\mathfrak{K}$. Wir bezeichnen die Menge aller den Punkt a enthaltenden kleineren Simplexe mit $\mathfrak{M}$. Wenn auch wir das Innere[2] von $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{K}$ weglassen, so bleibt $\mathfrak{K}-$(Innere von $\mathfrak{M}$) eine zusammenhängende Menge sein.

$\mathfrak{A}$ sei ein den Punkt a enthaltendes 2-dimensionales Simple von $\mathfrak{K}$. Dann kann $\mathfrak{A}$ nicht zu $\mathfrak{N}_i$ $(i\leqq n-1)$ gehören. Denn, wenn $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{N}_i$ $(i\leqq n-1)$ gehörend wäre, so würde der Stern[3] mit Eckpunkt a zu $\mathfrak{N}_i$ gehören entgegen der Tatsche, dass a im Rande von $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Daher muss $\mathfrak{A}$ bei einem von a verschiedenen Eckpunkt wit $\mathfrak{N}_{n-1}$ den gemeinsamen Punkt hat. Da $\mathfrak{N}_{n-1}$ zusammen-

1. Vgl. den Beweis des Satzes VI. Vgl. S. Stöilow. Leçons sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques. (1938) S. 87.

2. Die Menge aller in Bezug auf $\mathfrak{G}$ inneren Punkte von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als die Innere von $\mathfrak{M}$.

3. Wir bezeichnen alle die als Eckpunkt den a enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe als den Stern mit Eckpunkt a.

hängend ist, so bleibt $\mathfrak{K}-$(Innere von $\mathfrak{M}$) eine zusammenhängende Menge sein.

Unter den beiden von a verschiedenen Eckpunkt von $\mathfrak{A}$ muss mindestens ein Punkt nicht der vielfache Punkt des Randes von $\mathfrak{K}$ sein. Daher, wenn wir nach der obigen Weise alle vielfachen Punkte weggelassen haben, bekommen wir eine zusammenhängende 2-dimensionale Kette, die wir der Kürze halber wiederum mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen.

Nun hat der Rand von $\mathfrak{K}$ nicht mehr vielfache Punkte, so ist $\mathfrak{K}$ eine berandete Fläche. Wir bezeichnen die Komponenten, bis auf L_1, des Randes von $\mathfrak{K}$ mit $P_1, P_2, \cdots, P_n$. $P_1+P_2+\cdots+P_n$ hat mit L_1+L_2 keine Punkte gemeinsam.

$\mathfrak{B}$ sei eine Komponente von $\mathfrak{G}-\mathfrak{K}$. Angenommen, dass die Begrenzung von $\mathfrak{B}$ mindestens zwei von $L_1, P_1, P_2 \cdots, P_n$ enthält. Etwa $P_1, P_2, \cdots, P_i$ seien insgesamt die Begrenzung von $\mathfrak{B}$. Dann können wir $P_1+P_2+\cdots+P_i$ durch ein im $\mathfrak{B}$ liegendes einfach-geschlossenes Polygon ersetzen. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass jede Komponente von $\mathfrak{G}-\mathfrak{K}$ als Begrenzung genau eines von $L_1, P_1, P_2, \cdots, P_n$ hat, und damit dass die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{K}=$die Komponenten-Anzahl des Randes von $\mathfrak{K}$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass, wenn $\mathfrak{P}$ eine berandete Fläche auf $\mathfrak{G}$ ist, dafür, dass die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{K}=$die Komponenten-Anzahl des Randes von $\mathfrak{P}$ ist, es notwending und hinreichend ist, dass jede Komponente des Randes von $\mathfrak{P}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist.

Angenommen in der Tat, dass die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{P}=$die Komponenten-Anzahl des Randes von $\mathfrak{P}$ ist. Wir bezeichnen die Komponenten von $\mathfrak{G}-\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_n$ und die Komponenten des Randes von $\mathfrak{P}$ mit $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$, wobei $\mathfrak{K}_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$) als Begrenzung die Menge Q_i hat. Da $\mathfrak{G}-Q_1=\mathfrak{K}_1+\{\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_n+(\mathfrak{P}-Q_1)\}$ ist, und da $\mathfrak{K}_1$ und $\{\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_n+(\mathfrak{P}-Q_1)\}$ offenbar getrennt[1] sind, so ist Q_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$. Ebenfalls muss jedes von $Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$ auch ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein.

Umgekehrt angenommen, dass jede Komponente des Randes von $\mathfrak{P}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{P}$ mit $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$. Q_i ($i=1, 2, \cdots, n$) bestimmt

1. Die beiden Mengen heissen getrennt, wenn sie punktfremd sind und keine einen Häufungspunkt der anderen enthält.

auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i'$. $\mathfrak{P}$ kann mit nur einem von den beiden $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i'$ die gemeinsame Punkte haben, so können wir annehmen, dass $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{K}_i$ keine Punkte gemein hat.

Je zwei von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_n$ haben keine Punkte gemeinsam. Denn, wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mindestens einen Punkt gemein haben, so muss $\mathfrak{K}_1$ die Punkte von Q_2 und damit auch die Punkte von $\mathfrak{P}$ enthalten. Dies ist unmöglich, da $\mathfrak{K}_1$ nicht die Punkte von $\mathfrak{P}$ enthält. Also, wenn jede Komponente des Randes von $\mathfrak{P}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so ist die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{P}=$die Komponenten-Anzahl des Randes von $\mathfrak{P}$.

Da in unserem Falle die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{K}=$die Komponenten-Anzahl des Randes von $\mathfrak{K}$ ist, so muss jedes von P_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein.

Wenn $P_i \sim 0$ ist, so bestimmt P_i auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i'$, und eines von den beiden $\mathfrak{K}_i+P_i$ und $\mathfrak{K}_i'+P_i$, etwa $\mathfrak{K}_i+P_i$ muss eine kompakte Menge sein. Dann muss $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_i'+P_i$ enthalten sein. Denn, wenn $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}_i+P_i$ enthalten wäre, so würde $L_1 \sim 0$ sein. In diesem Falle ersetzen wir $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}+\mathfrak{K}_i$. Daher nehmen wir an, dass von Anfang an jedes von P_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ nicht nullhomolog ist.

Nun ist $L_1 \sim L_2$ und $L_1 \sim P_1+P_2+\cdots+P_n$, so ist $L_2 \sim P_1+P_2+\cdots+P_n$. Anderseits hat L_2 mit $P_1+P_2\cdots+P_n$ keine Punkte gemeinsam, und jedes von P_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ ist nicht homolog Null. Folglich bildet nach dem Satze VII $L_2+P_1+P_2+\cdots+P_n$ den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}$. Da P_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so bestimmt P_i auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_i'$. $\mathfrak{H}$ hat mit einem und nur einem von den beiden $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_i'$ gemeinsame Punkte, so nehmen wir an, dass $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_i'$ keine Punkte gemein hat.

Da $\mathfrak{G}$ orientierbar ist, so bestimmt L_2 auf $\mathfrak{G}$ die beiden Ufer. Eines von diesen beiden Ufern gehört zu $\mathfrak{H}$ und das andere gehört nicht zu $\mathfrak{H}$. Das nicht zu $\mathfrak{H}$ gehörende Ufer ist in einer Komponente $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}-\mathfrak{H}$ enthalten. $\mathfrak{L}$ kann keineswegs mit $\mathfrak{H}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ die gemeinsamen Punkte haben. Angenommen in der Tat, dass $\mathfrak{L}$ etwa mit $\mathfrak{H}_1$ einen Punkt gemein hat. Dann muss $\mathfrak{H}_1$ die Punkte von L_2 und damit auch die Punkte von $\mathfrak{H}$ enthalten. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{H}$ keine Punkte gemein hat. Also bilden $\mathfrak{L}, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_n$ insgesamt die Komponenten von $\mathfrak{G}-\mathfrak{H}$, und daher ist die Komponenten-Anzahl von $\mathfrak{G}-\mathfrak{H}=$die Komponenten-

Anzahl des Randes von $\mathfrak{H}$. Daher muss L_2 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein.
w. z. b. w.

Bemerkung. Aus den obigen Beweise folgt ohne weiteres die folgende Tatsache. $\mathfrak{R}$ sei eine berandete Fläche auf einer orientierbaren offenen Flache $\mathfrak{G}$. Wenn die einfach-geschlossenen Polygone $R_1, R_2, \cdots, R_n$ insgesamt den Rand von $\mathfrak{R}$ bilden, und wenn jedes von $R_2 \cdots, R_n$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so muss auch R_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein.

Satz IX. Es sei Δ_1 eine vorgelegte Simplizialzerlegung einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. B sei die ein-dimensionale Zusammenhangsgruppe von $\mathfrak{G}$, und b sei ein von Null verschiedenes Element von B. Δ_2 und Δ_3 seien die beiden voneinander unabhängigen Unterteilungen von Δ_1. L_1 sei ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Simplizialzerlegung Δ_2, und L_2 sei ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Simplizialzerlegung Δ_3. Dann muss L_2, wenn L_1 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, auch ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein.

Um diesen Satz zu beweisen, beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. Es seien Δ_1, Δ_2 und Δ_3 die drei voneinander unabhängigen Simplizialzerlegungen einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. A bez. B bez. C sei ein ein-dimensionaler Zyklus von Δ_1 bez. Δ_2 bez. Δ_3.

$\overline{A+B-A\cdot B}$[1] seien die Begrenzung einer kompakten Menge $\overline{\mathfrak{B}}$ von der Art, dass $\mathfrak{B}$ eine offene Menge auf $\mathfrak{G}$ ist. $\overline{A+C-A\cdot C}$ sei die Begrenzung einer kompakten Menge $\overline{\mathfrak{L}}$ von der Art, dass $\mathfrak{L}$ eine offene Menge auf $\mathfrak{G}$ ist. Dann muss $\overline{B+C-B\cdot C}$ die Begrenzung der kompakten Menge $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein.

Beweis. Es sei a ein Punkt von $\overline{B+C-B\cdot C}$. Wir haben erstens zu zeigen, dass a ein Grenzpunkt von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ ist. Wir unterscheiden hierbei die folgenden drei Fälle.

1. Fall. Der Punkt a sei in B, aber weder in A noch in C enthalten. In diesem Falle gibt es eine Umgebung $U(a)$ von a von der Art, dass $U(a)$ mit $A+C$ keine Punkte gemein hat. Da a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}}$ ist, so müssen in $U(a)$ sowohl die Punkte

1. $\overline{A+B-A\cdot B}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von $A+B-A\cdot B$.

von $\mathfrak{B}$ als auch die nicht zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehörenden Punkte existieren. Wir nehmen einen in $U(a)$ liegenden Punkt b von $\mathfrak{B}$ und einen in $U(a)$ liegenden, aber nicht zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehörenden Punkt c.

Da $U(a)$ mit $A+C$ keine Punkte gemein hat, so muss $U(a)$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein oder mit $\overline{\mathfrak{L}}$ keine Punkte gemein haben.

Angenommen erstens, dass $U(a)$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist. Da b in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so gibt es in $U(a)$ eine Umgebung $V(b)$ von b von der Art, dass jeder Punkt von $V(b)$ auch zu $\mathfrak{B}$ gehört. Dann muss jeder Punkt von $V(b)$ nicht zu $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ gehören, und damit muss der Punkt b nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ gehören. Da c nicht zu $\overline{\mathfrak{B}}$ gehört, so gibt es in $U(a)$ eine Umgebung $W(c)$ von c von der Art, dass $W(c)$ mit $\overline{\mathfrak{B}}$ keine Punkte gemein hat. Dann muss jeder Punkt von $W(c)$ nicht zu $\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ gehören. Anderseits da c in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, so existieren in $W(c)$ die unendlich viele Punkte von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}$. Daher muss c in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein. Folglich muss, wenn $U(a)$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, der Punkt a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein.

Angenommen zweitens, dass $U(a)$ mit $\overline{\mathfrak{L}}$ keine Punkte gemein hat. Der Punkt b muss dann offenbar zu $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$, damit auch zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ gehören. Der Punkt c kann nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}}$, damit auch nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ gehören. Daher muss, wenn $U(a)$ mit $\overline{\mathfrak{L}}$ keine Punkte gemein hat, der Punkt a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein.

2. Fall. Der Punkt a sei sowohl in B als auch in A, aber nicht in C enthalten. In diesem Falle ist a nicht in $A+B-A\cdot B$ enthalten. Angenommen erstens, dass a nicht ein Grenzpunkt von $\overline{A+B-A\cdot B}$ ist. Dann gibt es eine Umgebung $U(a)$ von a von der Art, dass $U(a)$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ keine Punkte gemein haben oder $U(a)$ in $\overline{\mathfrak{B}}$ enthalten ist.

Da a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{L}}$ ist, so gibt es in $U(a)$ sowohl einen Punkt b von $\mathfrak{L}$ als auch einen nicht zu $\overline{\mathfrak{L}}$ gehörenden Punkt c. Angenommen erstens, dass $U(a)$ in $\overline{\mathfrak{B}}$ enthalten ist. Da der Punkt b in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, so gibt es in $U(a)$ eine Umgebung $V(b)$ von b von der Art, dass $V(b)$ in $\mathfrak{L}$ enthalten ist. Dann muss jeder Punkt von $V(b)$ nicht zu $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}$ gehören, und damit muss der Punkt b nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ gehören. Da c nicht zu $\bar{\mathfrak{L}}$ gehört, so gibt es in $U(a)$ eine Umgebung $W(c)$ von c von der Art, dass $W(c)$ mit $\bar{\mathfrak{L}}$ keine Punkte gemein hat. Dann muss jeder Punkt von $W(c)$ nicht zu $\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}$ gehören. Anderseits da c in $\bar{\mathfrak{B}}$ enthalten ist, so existieren in $W(c)$ die unendlich viele Punkte von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}$. Daher muss c in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein. Folglich muss, wenn $U(a)$ in $\bar{\mathfrak{B}}$ enthalten ist, der Punkt a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ sein.

Angenommen zweitens, $U(a)$ mit $\bar{\mathfrak{B}}$ keine Punkte gemein hat. Der Punkt b muss dann offenbar zu $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}$, damit auch zu $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}$ gehören. Der Punkt c gehört nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}}$, damit auch nicht zu $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$. Daher muss, wenn $U(a)$ mit $\bar{\mathfrak{B}}$ keine Punkte gemein hat, der Punkt a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ sein.

Angenommen schliesslich, dass a ein Grenzpunkt von $\overline{A+B-A\cdot B}$ ist. Wenn dabei die Folge $\{b_n\}$ der zu B und nicht zu A gehörenden Punkte b_n existiert von der Art, dass die Folge $\{b_n\}$ gegen a konvergiert, so muss nach dem I. Falle der Punkt a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ sein. Wenn diese Folge nicht existiert, so gibt es eine Umgebung $U(a)$ von a von der Art, dass $U(a)\cdot B$ in $U(a)\cdot A$ enthalten ist. Da die vielfachen Punkte von A endlich viel sind, so existieren in $U(a)$ die unendlich viele, sowohl in B als auch in A, aber nicht in $A+B-A\cdot B$ enthaltenen Punkte. Daher muss der Punkt a nach dem Obigen ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ sein.

3. Fall. Der Punkt a sei in C, aber nicht in B enthalten. In diesem Falle können wir auf derselben Weise wie in beiden obigen Fälle zeigen; dass a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ ist.

4. Fall. Der Punkt a sei nicht in $B+C-B\cdot C$ enthalten. In diesem Falle gibt es in irgendeiner Umgebung $U(a)$ von a mindestens einen Punkt b von $B+C-B\cdot C$. Der Punkt b ist aber nach dem obigen Beweise ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$. Daher muss der Punkt a auch ein Grenzpnnkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\bar{\mathfrak{B}}\cdot\bar{\mathfrak{L}}}$ sein. Also ist es gezeigt worden, dass jeder Punkt von $\overline{B+C-B\cdot C}$ ein Grenzpunkt

von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass irgendein Grenzpunkt von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten ist. Zunächst muss ein Grenzpunkt von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ in $\overline{A+B-A\cdot B}+\overline{A+C-A\cdot C}$ enthalten sein.

Es sei a ein Grenzpunkt von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$. Hierbei unterscheiden wir die folgenden drei Fälle.

1. Falle. Der Punkt a sei weder in B noch in C enthalten. In diesem Falle muss der Punkt a in A enthalten, da der Punkt a in $\overline{A+B-A\cdot B}+\overline{A+C-A\cdot C}$, damit auch in $A+B+C$ enthalten sein muss. Dann gibt es eine Umgebung $U(a)$ von a derart, dass $U(a)$ und $B+C$ keine Punkte gemein haben. Wir können dabei $U(a)$ derart wählen, dass $U(a)$ in dem Stern mit Mittelpunkt a oder in den zwei, bei der a enthaltenden Kante benachbarten, 2-dimensionalen Simplexen von der Simplizialzerlegung Δ_1 enthalten ist.

Wir bezeichnen den in $U(a)$ liegenden Teil von A mit D. $U(a)$ wird durch D in die endlich vielen Gebiete zerlegt. Wir bezeichnen diese Gebiete mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_n$, wobei $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i+1}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ (auch $\mathfrak{G}_n$ und $\mathfrak{G}_1$) benachbart sind. Da jeder Punkt von D ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}}$ ist, so muss n eine gerade Zahl $2m$ sein, und $\overline{\mathfrak{B}}$ enthält eine und nur eine von den beiden Mengen $\overline{\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_3+\cdots+\mathfrak{G}_{2m-1}}$ und $\overline{\mathfrak{G}_2+\mathfrak{G}_4+\cdots+\mathfrak{G}_{2m}}$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $\overline{\mathfrak{B}}$ die Menge $\overline{\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_3+\cdots+\mathfrak{G}_{2m-1}}$, aber nicht die Menge $\overline{\mathfrak{G}_2+\mathfrak{G}_4+\cdots+\mathfrak{G}_{2m}}$ enthält.

Ebenfalls, da jeder Punkt von D ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{L}}$ ist, so muss eine und nur eine von den beiden Mengen $\overline{\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_3+\cdots+\mathfrak{G}_{2m-1}}$ und $\overline{\mathfrak{G}_2+\mathfrak{G}_4+\cdots+\mathfrak{G}_{2m}}$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein. Wenn $\overline{\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_3+\cdots+\mathfrak{G}_{2m-1}}$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, so kann jeder Pnnkt von $U(a)$ nicht in $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ und damit auch nicht in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein.

Anderseits, wenn $\overline{\mathfrak{G}_2+\mathfrak{G}_4+\cdots+\mathfrak{G}_{2m}}$ in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten ist, so muss $U(a)$ in $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein. Daher kann der Punkt a nicht ein Grenzpunkt von $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ sein. Folglich kann in der Tat 1. Fall nicht sich ergeben.

2. Fall. Der Punkt a sei in einem und nur einem von den

beiden B und C enthalten. In diesem Falle ist a in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten.

3. Fall. Der Punkt a sei sowohl in B als auch in C enthalten. Angenommen, dass a nicht in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten ist, so führen wir zu einem Widerspruch. Daraus, dass a nicht in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten ist, folgt es ohne weiteres, dass eine Umgebung $U(a)$ von a existiert von der Art, dass $U(a)\cdot B$ und $U(a)\cdot C$ ganz übereinstimmen. Wir können dabei $U(a)$ derart wählen, dass $U(a)$ in dem Stern mit Mittelpunkt a oder in den zwei, bei der a enthaltennen Kante benachbarten, 2-dimensionaleu Simplexen von der Simplizialzerlegung Δ_2 enthalten ist.

$U(a)$ wird durch $U(a)\cdot B$ in endlich viele Gebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2\cdots$, $\mathfrak{G}_n$ zerlegt. Wenn dabei a nicht in A enthalten ist, so können wir annehmen, dass $U(a)$ nicht einen Punkt von A enthält. Dann können wir auf ganz ähnlicher Weise wie im 1. Falle zeigen, dass der Punkt a nicht ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist.

Angenommen zweitens, dass $U(a)$ die Punkte von A enthält. Ein in $\mathfrak{G}_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ enthaltener Punkt von A kann nicht nach dem 1. Falle ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein. Daher muss jedes $\mathfrak{G}_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ ganz in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein oder mit $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ keine Punkte gemein haben. Wir bezeichnen die Menge (die Begrenzung von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}})\cdot U(a)$ mit D. D muss dann in $U(a)\cdot B$ enthalten sein.

Nun ist D offenbar eine abgeschlossene Menge in $U(a)$. Wenn ein Punkt b von $U(a)\cdot B$ nicht in $U(a)\cdot A$ enthalten ist, so gibt es eine Umgebung $V(b)$ von b von der Art, dass $V(b)$ in $U(a)$ enthalten ist, und dass $V(b)$ mit A keine Pnnkte gemein hat. Dann muss der Punkt b nicht ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein. Daraus muss D in $U(a)\cdot A$ enthalten sein.

Wenn D in $U(a)\cdot A$ enthalten ist, so nehmen wir, da die vielfachen Punkt von A höchstens endlich viel sind, einen geeigneten Punkt b von D und wir können in $U(a)$ eine Umgebung $V(b)$ von b konstruieren derart, dass $V(b)\cdot A$ uud $V(b)\cdot B$ ganz übereinstimmen. Dann können wir wieder zeigen, dass der Punkt b nicht ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist.

Also können wir zeigen, dass jeder Punkt von $(A+B+C)\times U(a)-a$ nicht ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist. Daher muss

$U(a)-a$ ganz in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein oder mit $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ keine Punkte gemein haben. Wenn $U(a)-a$ in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten ist, so muss der Punkt a auch in $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ enthalten sein. Damit kann der Punkt a nicht ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ sein.

Angenommen zweitens, dass $U(a)-a$ und $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ keine Punkte gemein haben. Unter der Annahme, dass a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist, muss a selbst in $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein. Daher muss a in einem und nur einem von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}$, etwa in $\mathfrak{B}$, enthalten sein. Dann muss a nicht in $\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein. Daher gibt es in $U(a)$ eine Umgebung $W(a)$ von a von der Art, dass $W(a)$ in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, und dass $W(a)$ und $\mathfrak{L}$ keine Punkte gemein haben. Daher muss $W(a)$ in $\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}$ enthalten sein. Dies ist unmöglich, da a ein Grenzpunkt von $\overline{\mathfrak{B}+\mathfrak{L}-\overline{\mathfrak{B}}\cdot\overline{\mathfrak{L}}}$ ist.

Also gelangen wir zu einem Widerspruch unter der Annahme, dass a sowohl in B als auch in C, aber nicht in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten ist. Daher, wenn a sowohl in B als auch in C enthalten ist, so muss a in $\overline{B+C-B\cdot C}$ enthalten sein. Damit ist die Behauptung des Hilfssatzes bewiesen worden.

Beweis des Satzes IX. L sei ein zu b gehörender Zyklus von der Simplizialzerlegung Δ_1. Wir nehmen zunächst an, dass L mit L_1 oder mit L_2 übereinstimmt. Wenn L mit L_1 übereinstimmt, so muss L offenbar ein Schnitt von $\mathfrak{S}$ sein. Da Δ_3 eine Unterteilung von Δ_1 ist, so ist L auch zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von Δ_3.[1] Da L_2 ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von Δ_3 ist, so muss nach dem Satze VIII L_2 auch ein Schnitt von $\mathfrak{S}$ sein.

Wenn auch L mit L_2 übereinstimmt, können wir auf ähnlicher Weise zeigen, dass L_2 ein Schnitt von $\mathfrak{S}$ ist.

Angenommen zweitens, dass L weder mit L_1 noch mit L_2 übereinstimmt. $L+L_1$ (mod. 2)[2] bildet den Rand einer 2-dimensionalen

1. Wenn ein einfach-geschlossenes Polygon L aus ein-dimensionalen Simplexen von der Simplizialzerlegung Δ von $\mathfrak{S}$ besteht, so sagen wir, dass L ein einfach-geschlossenes Polygon von Δ ist.

2. Wir bezeichnen die Summe (mod. 2) von den Ketten L und L_1 mit $L+L_1$ (mod. 2) und die Vereinigungsmenge von den beiden Mengen L und L_1 mit $L+L_1$. Wenn kein Missverstandniss furchtbar ist, so beschreiben wir gelegentlich für $L+L_1$ (mod. 2) einfach $L+L_1$.

Kette $\mathfrak{A}$, und $L+L_2$ (mod. 2) bildet den Rand einer 2-dimensionalen Kette $\mathfrak{B}$. Daher ist $\overline{L+L_1-L\cdot L_1}$ die Begrenzung der kompakten Menge $\mathfrak{A}$, und das Innere von $\mathfrak{A}$ ist eine offene Menge. $\overline{L+L_2-L\cdot L_2}$ ist die Begrenzung der kompakten Menge $\mathfrak{B}$. Daher ist $\overline{L_1+L_2-L_1\cdot L_2}$ die Begrenzung der abgeschlossenen Hülle von (Das Innere von $\mathfrak{A}$) $+$(Das Innere von $\mathfrak{B}$)$-\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$.

Wir können nun wie im Beweise des Satzes VIII eine berandete Fläche $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$ konstruieren derart, dass $\mathfrak{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. $\mathfrak{K}$ hat als Rand die Menge $L_1+P_1+P_2+\cdots+P_n$ (mod. 2), wobei P_i $(i=1, 2, \cdot\cdot, n)$ ein einfach-geschlossenes Polygon bedeutet.
2. P_i $(i=1, 2,\cdots, n)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$.
3. P_i ist nicht homolog Null.
4. P_i hat mit L_2 keine Pnnkte gemeinsam.

Nach dem Hilfsatze ist $L_2+P_1+P_2+\cdots+P_n$ die Begrenzung einer kompakten Menge $\mathfrak{L}$.

Da P_i ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so bestimmt P_i auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_i'$. Da die Summe (mod. 2) eines Teilsystems von $(P_1, P_2,\cdots, P_n)$ nicht nullhomolog ist, so hat $\mathfrak{L}$ mit einem von den beiden $\mathfrak{G}_i$ nnd $\mathfrak{G}_i'$ keine Punkte gemeinsam. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{G}_i$ keine Punkte gemein hat.

Da $\mathfrak{G}$ orientierbar ist, so bestimmt L_2 auf $\mathfrak{G}$ die beiden Ufer. Eines von diesen Ufern gehört zu $\mathfrak{L}$ und das andere gehört nicht zu $\mathfrak{L}$. Das nicht zu $\mathfrak{L}$ gehörende Ufer von L_2 ist in einer Komponente $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}-\mathfrak{L}$ enthalten. $\mathfrak{H}$ kann keineswegs mit $\mathfrak{G}_i$ die gemeinsamen Punkte haben. Nun ist $\mathfrak{G}-L_2=(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_n+\mathfrak{L}-L_2)+\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_n+\mathfrak{L}-L_2$ und $\mathfrak{H}$ sind die miteinander punktfremden offenen Mengen auf $\mathfrak{G}$. Daher muss L_2 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein. W. z. b. w.

Nach dem Satze IX können wir ohne weiteres die folgende Definition einführen.

Definition. B sei die 1-dimensionale Zusammenhangsgruppe einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$, und Δ sei eine vorgelegte Simplizialzerleguug von $\mathfrak{G}$. b sei ein von Null verschiedenes Element von B, und L sei ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass L aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ besteht. Wenn L ein Schnitt von

$\mathfrak{G}$ ist, so heisst b ein Element von erster Art von B. Wenn L nicht ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so heisst b ein Element von zweiter Art von B.

Es ist sinnlos zu fragen, ob die Nullmenge ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist oder nicht. Es ist aber zweckmässig zu verabreden, das Null-Element von B als ein Element von erster Art von B zu bezeichnen, da, wenn ein einfach-geschlossenes Polygon L zu dem Null-Element von B gehört, L offenbar ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist.

Satz X. Es sei B die 1-dimensionale Zusammenhangsgruppe einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. Die Menge aller Elemente von ersten Arten von $\mathfrak{G}$ bildet eine Abelsche Gruppe[1].

Beweis. Wir haben nur zu zeigen, dass, wenn a $(\neq 0)$ und b $(\neq 0)$ die beiden Elemente von ersten Arten sind, so $a+b$ auch ein Element von erster Art ist. Wir können dabei annehmen[2], dass a und b voneinander verschieden sind. L_1 sei ein zu a gehörendes einfach-geschlossenes Polygon und L_2 sei ein zu b gehörendes einfach-geschlossenes Polygon[3].

L_2 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$. Wir konstruieren auf $\mathfrak{R}_1+L_2$ eine berandete Fläche $\mathfrak{P}$ derart, dass jede von der Komponenten L_1, R_1, $R_2,\cdots$, R_n des Randes von $\mathfrak{P}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht nullhomolog ist, und dass $R_1+R_2+\cdots+R_n$ mit L_2 keine Punkte gemein hat. Wir behandeln erstens den folgenden Fall.

1. Fall. Je zwei von R_1, $R_2,\cdots$, R_n, L_2 seien niemals durch das dritte von R_1, $R_2,\cdots$, R_n, L_2 getrennt[4]. In diesem Falle bestimmt $R_1+R_2+\cdots+R_n+L_2$ auf $\mathfrak{G}$ die $n+2$ Gebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2,\cdots$, $\mathfrak{G}_{n+2}$ und eines von $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2,\cdots$, $\mathfrak{G}_{n+2}$, etwa $\mathfrak{G}_1$ muss als Begrenzung die Menge $R_1+R_2+\cdots+R_n+L_2$ haben. Dann können wir, wie im Satze VI gezeigt worden ist, auf $\mathfrak{G}_1$ ein einfach-geschlossenes Polygon L_3 derart konstruieren, dass L_3 homolog mit $R_1+R_2+\cdots+R_n+L_2$ ist, und dass L_3 mit $R_1+R_2+\cdots+R_n+L_2$ keine Punkte gemein hat.

1. Diese Gruppe bezeichnen wir im folgenden als B_1-Gruppe.
2. Wenn $a=b$ ist, so ist $a+b=0$.
3. Nach dem Satze IX können wir immer annehmen, dass sowohl L_1 als auch L_2 wie R_1, $R_2,\cdots$, R_n, L_3 aus den 1-dimensionalen Simplexen von den sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen der vorgelegten Simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$ besteht.
4. Wenn ein Punkt a von L_1 und ein Punkt b von L_2 keineswegs durch einen mit L_3 keine Punkte gemeinsam enthaltenden Bogen auf $\mathfrak{G}$ verbunden werden können, so sagen wir, dass L_1 und L_2 durch L_3 getrennt sind.

Nun kann die Vereinigung eines echten Teilsystems von (R_1, $R_2, \cdots$, R_n, L_2, L_3) niemals homolog Null sein. Angenommen in der Tat, dass die Vereinigung eines echten Teilsystems von (R_1, $R_2, \cdots$, R_n, L_2, L_3) homolog Null ist. Dann muss die Vereinigung eines echten Teilsystems von (R_1, $R_2, \cdots$, R_n, L_2) homolog Null sein, da $L \sim_{\mathfrak{G}} R_1 + R_2 + \cdots + R_n + L_2$ ist. Dies ist aber unmöglich, da je zwei von R_1, $R_2, \cdots$, R_n, L_2 neimals durch das dritte getrennt sind, und da L_1 nicht homolog mit L_2 ist.

Daraus, dass die Vereinigung eines echten Teilsystems von (R_1, $R_2, \cdots$, R_n, L_2, L_3) niemals homolog Null ist, folgt ohne weiteres, dass $L_2 + L_3 + R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ den Rand einer berandeten Fläche bildet. Da jeder von R_1, $R_2, \cdots$, R_n L_2 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so muss auch L_3 ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist. Daher muss, wenn wir $a+b$ mit c bezeichnen, c ein Element von erster Art sein.

2. Fall. Die geeigneten zwei von R_1, $R_2 \cdots$, R_n, L_2 seien durch das dritte getrennt.

Da je zwei von R_1, $R_2, \cdots$, R_n niemals durch das dritte von R_1, $R_2, \cdots$, R_n getrennt sind, so muss eines von den durch $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2, \cdots$, $\mathfrak{G}_{n+1}$, etwa $\mathfrak{G}_1$, als Begrenzung die Menge $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$ haben.

R_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i'$. $\mathfrak{G}_1$ muss in einem von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{K}_i'$, etwa in $\mathfrak{K}_i'$, enthalten sein.

Angenommen erstens, dass L_2 in einem von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2, \cdots$, $\mathfrak{K}_n$, etwa in $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist. Wenn L_2 nicht homolog mit R_1 ist, so existiert eine berandete Fläche $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{K}_1 + R_1$ derart, dass $\mathfrak{P}$ als Rand die Menge $R_1 + L_2 + L_3$ hat, wobei L_3 ein einfach-geschlossenes Polygon bedeutet.

Das Gebiet $\mathfrak{G}_1 +$(das Innere von $\mathfrak{P}$) hat aber als Begrenzung die Menge $R_2 + \cdots + R_n + L_2 + L_3$. Je zwei von R_2, $R_3, \cdots$, R_n, L_3 sind daher niemals durch das dritte von R_2, $R_3, \cdots$, R_n, L_3 getrennt. Also können wir den 2. Fall auf den 1. Fall zurückführen.

Angenommen zweitens, dass L_2 in $\mathfrak{G}_1$ enthalten ist. $\mathfrak{G}_1$ wird durch L_2 in die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zerlegt. Da die geeigneten zwei von R_1, $R_2, \cdots$, R_n durch L_2 getrennt sind, so muss $\mathfrak{M}_1$ als Begrenzung die Vereinigungsmenge von dem echten Teilsysteme von (R_1, $R_2, \cdots$, R_n) und L_2, etwa $R_1 + R_2 + \cdots + R_i + L_2$ haben. Ebenfalls muss $\mathfrak{M}_2$ als Begrenzung die Vereinigungsmenge $R_{i+1} + R_{i+2} + \cdots + R_n + L_2$ haben.

Wenn $R_1+R_2+\cdots+R_i+L_2$ nicht homolog Null ist, so können wir auf $\mathfrak{M}_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{P}$ von der Art konstruieren, dass $\mathfrak{P}$ als Rand die Menge $R_1+R_2+\cdots+R_i+L_2+L_3$ hat, wobei L_3 ein einfach-geschlossenes Polygon bedeutet. Je zwei von R_{i+1}, R_{i+2}, $\cdots$, R_n, L_3 sind niemals durch das dritte von R_{i+1}, $R_{i+2},\cdots$, R_n, L_3 getrennt. Also können wir den 2. Fall auf den 1. Fall zurückführen, wenn $R_1+R_2+\cdots+R_i+L_2$ nicht homolog Null ist.

Wenn $R_1+R_2+\cdots+R_i+L_2$ homolog Null ist, so können wir den 2. Fall auf den 1. Fall zurückführen, da R_{i+1}, $R_{i+2},\cdots$, R_n die Bedingung des 1. Falls erfüllen. W. z. b. w.

(Fortgesetzt)