MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVI, Mathematics No. 2, 1950.

Sur la connexion affine admettant d'une métrique.

Par

Jōyō KANITANI

(Reçu, le 12, Mars, 1950)

---

1. Envisageons un espace R_n décrit par un point $x^i(i=1,\cdots, n)$ et doué une connexion affine $\Gamma^h_{ij}d\omega^j$ où les $d\omega^i(i=1,\cdots, n)$ sont des expressions linéaires homogènes et distinctes de $dx^1,\cdots, dx^n$, les coefficients de ces expressions ainsi que les Γ^h_{ij} étant des fonctions analytiques de $x^1,\cdots, x^n$.

Cet article est consacré à l'étude de la condition pour qu'il existe une forme quadrique diifférentielle définie

$$ds^2=g_{ij}d\omega^i d\omega^j$$

telle que les Γ^h_{ij} s'expriment par

$$(1\cdot1)\qquad \Gamma^h_{ij}=\frac{1}{2}g^{hl}\Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial\omega^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial\omega^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial\omega^l}-g_{im}\omega^m_{jl}-g_{jm}\omega^m_{il}-g_{lm}\omega^m_{ij}\Big),$$

où les ω^h_{ij} sont les coefficients qui se figurent dans l'expression du covariant bilinéaire de $d\omega^h$, à savoir,

$$(\delta,\ d)\,\omega^h=\omega^h_{ij}d\omega^i\delta\omega^j.$$

Désignons par R^h_{kij} le tenseur de courbure. Il est défini par

$$R^h_{kij}=\frac{\partial\Gamma^h_{ki}}{\partial\omega^j}-\frac{\partial\Gamma^h_{kj}}{\partial\omega^i}+\Gamma^h_{kl}\omega^l_{ij}+\Gamma^l_{ki}\Gamma^h_{lj}-\Gamma^l_{kj}\Gamma^h_{li}.$$

Le système d'équations $(1\cdot1)$ est équivalent à celui des équations

$$(1\cdot2)\qquad \frac{\partial g_{hk}}{\partial\omega^i}=\Gamma^l_{hi}g_{lk}+\Gamma^l_{ki}g_{lh},$$

$$(1\cdot3)\qquad R^l_{0ij}=\Gamma^l_{ij}-\Gamma^l_{ji}+\omega^l_{ij}=0.$$

Le système des équations $(1\cdot3)$ veut dire que la connexion est sans torsion.

Pour que le systèm³ des équations (1•2) soit complètem³nt intégrable il faut et il suffit que les équations

$$(\delta,\ d)g_{hk}=0 \qquad (h,\ k=1,\cdots,\ n)$$

soient vérifiées comme conséquence de (1•2). En écrivant cette condition nous obtenons

$$(1\cdot 4)\quad g_{kl}R^l_{hij}+g_{hl}R^l_{kij}=0 \qquad (h,\ k,\ i,\ j=1,\cdots,\ n),$$

d'où

$$(1\cdot 5)\quad g_{kl}D_mR^l_{hij}+g_{hl}D_mR^l_{kij}=0 \qquad (m,\ h,\ k,i,\ j,=1,\cdots,\ n).$$

Considérons deux vecteurs contrevariants U^i, V^i et un bivecteur

$$T^{ij}=U^iV^j-U^jV^i,$$

Posons

$$\Omega^h_k=R^h_{klm}U^lV^m=R^h_{k12}T^{12}+R^h_{k13}T^{13}+\cdots+R^h_{k\,n-1,\,n}T^{n-1,n}$$

On a d'après (1•4)

$$\Omega^l_l=0,$$

$$g_{il}\Omega^l_j+g_{jl}\Omega^l_i=0,$$

d'où

$$\Omega^p_q=-g^{pm}g_{ql}\Omega^l_m.$$

Donc, si l'on introduit un autre bivecteur T'^{ij}, il vient

$$\Omega^p_s\Omega'^s_q=g^{pm}g_{ql}\Omega^t_m\Omega'^l_t.$$

Nous voyons ainsi que le nombre du rang du déterminant

$$(1\cdot 6)\qquad \begin{vmatrix} \Omega^1_l\Omega'^l_1\cdots\cdots & \Omega^n_l\Omega'^l_1 \\ \cdots & \cdots \\ \Omega^1_l\Omega'^l_n\cdots\cdots & \Omega^n_l\Omega'^l_n \end{vmatrix}$$

est conservé mêm³ quand on échange T^{ij}, T'^{ij}.

D³ même, si l'on prend quatre bivecteurs T^{ij}, T'^{ij}, T''^{ij}, T'''^{ij} le nombre du rang de la matrice

$$(1\cdot 7)\qquad \begin{pmatrix} \cdots\Omega^i_l\Omega''^l_1\cdots\cdots\Omega^i_l\Omega'''^l_1\cdots\cdots\Omega'^i_l\Omega''^l_1\cdots\cdots\Omega'^i_l\Omega'''^l_1\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\Omega^i_l\Omega''^l_n\cdots\cdots\Omega^i_l\Omega'''^l_n\cdots\cdots\Omega'^i_l\Omega''^l_n\cdots\cdots\Omega'^i_l\Omega'''^l_n\cdots \end{pmatrix}$$

$$(i:1\rightarrow n)$$

est conservé même quand on fait un échange entre T^{ij}, T'^{ij}, T''^{ij}, T'''^{ij}.

2. Lorsqu'on effectue la transformation

$$(2\cdot1) \qquad d\omega'^i = P^i_l d\omega^l$$

ce qui donne

$$d\omega^j = Q^i_m d\omega'^m,$$

les Ω^h_k se transforme d'après

$$\Omega'^h_k = P^h_l Q^m_k \Omega^l_m.$$

Par suite, le nombre du rang du déterminant $|\Omega^h_k|$ se conserve pendant cette transformation. Nous voyons ainsi que le rang de ce déterminant est un nombre pair. En effet, si l'on choisi les $d\omega^i$ de manière à avoir

$$ds^2 = (d\omega^1)^2 + \cdots + (d\omega^n)^2,$$

les équations (1•4) deviennent

$$R^h_{kij} + R^k_{hij} = 0$$

de sorte que le déterminant $|\Omega^h_k|$ se fait symmetrique gauche et, par suite, s'il est du rang s, au moins un mineur principal d'ordre s est different de zéro. Il faut donc que s est un nombre pair.

3. D'après les équations

$$(3\cdot1) \qquad g_{hl} R^l_{hij} = 0, \qquad g_{hl} D_m R^l_{hij} = 0$$
$$(h, m, i, j = 1, \cdots, n)$$

les déterminants d'ordre n de la matrice

$$(3\cdot2) \qquad \begin{pmatrix} R^1_{h12} & R^1_{h13} \cdots\cdots R^1_{h,n-1,n} & D_m R^1_{h12} \cdots\cdots D_m R^1_{h,n-1,n} \\ R^2_{h12} & R^2_{h13} \cdots\cdots R^2_{h,n-1,n} & D_m R^2_{h12} \cdots\cdots D_m R^2_{h,n-1,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R^n_{h12} & R^n_{h13} \cdots\cdots R^n_{h,n-1,n} & D_m R^n_{h12} \cdots\cdots D_m R^n_{h,n-1,n} \end{pmatrix}$$

sont tous nuls. Or, les équations (1•4), (1•5) étant les équations invariantes relatives le changement des expressions de Pfaff de base (2•1), il en est ainsi, en particulier, pour (3•1), c'est-à-dire, nous avons

$$g'_{hl} R'^l_{hij} = 0, \qquad g'_{hl} D'_m R'^l_{hij} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$(3\cdot 3)\quad \begin{cases}(Q^\alpha_h g_{\alpha 1})Q^k_h R^1_{krt}+(Q^\alpha_h g_{\alpha 2})Q^k_h R^2_{krt}+\cdots+(Q^\alpha_h g_{\alpha n})Q^k_h R^n_{krt}=0,\\ (Q^\alpha_h g_{\alpha 1})Q^k_h D_p R^1_{krt}+\cdots+(Q^\alpha_h g_{\alpha n})Q^k_h D_p R^n_{krt}=0\end{cases}$$

$$(h,\ p,\ r,\ t=1,\cdots,\ n).$$

Nous voyons ainsi que les déterminants d'ordre n de la matrice

$$(3\cdot 4)\quad \begin{pmatrix} Q^l R^1_{l12} & Q^l R^1_{l13}\cdots Q^l R^1_{l,n-1,n} & Q^l D_m R^1_{l12}\cdots Q^l D_m R^1_{l,n-1,n}\\ Q^l R^2_{l12} & Q^l R^2_{l13}\cdots Q^l R^2_{l,n-1,n} & Q^l D_m R^2_{l12}\cdots Q^l D_m R^2_{l,n-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ Q^l R^n_{l12} & Q^l R^n_{l13}\cdots Q^l R^n_{l,n-1,n} & Q^l D_m R^n_{l12}\cdots Q^l D_m R^n_{l,n-1,n}\end{pmatrix}$$

sont tous nuls indépendamment du choix de valeurs de Q^1, $Q^2,\cdots$, Q^n.

Chacun de ces déterminants est une expression homogène d'ordre n relative à Q^1, $Q^2,\cdots$, Q^n. La condition veut dire que les coefficients de $(Q^1)^n$, $(Q^1)^{n-1}Q^2,\cdots$, $(Q^n)^n$ dans ces expressions sont tous nuls.

Cela revient aussi à dire que les déterminants d'ordre n de la matrice $(3\cdot 2)$ sont tous nuls indépendamment du choix des expressions de Pfaff de base.

Les équations $(3\cdot 3)$ peuvent s'écrire aussi

$$Q^1_h(Q^\alpha_h g_{\alpha l})R^l_{1rt}+Q^2_h(Q^\alpha_h g_{\alpha l})R^l_{2rt}+\cdots+Q^n_h(Q^\alpha_h g_{\alpha l})R^l_{nrt}=0,$$

$$Q^1_h(Q^\alpha_h g_{\alpha l})D_p R^l_{1rt}+\cdots+Q^n_h(Q^\alpha_h g_{\alpha l})D_p R^l_{nrt}=0.$$

Nous pouvons donc conclnre aussi que les déterminants d'ordre de la matrice

$$(3\cdot 5)\quad \begin{pmatrix} Q_l R^l_{112} & Q_l R^l_{113}\cdots Q_l R^l_{1,n-1,n} & Q_l D_m R^l_{112}\cdots Q_l D_m R^l_{1,n-1,n}\\ Q_l R^l_{212} & Q_l R^l_{213}\cdots Q_l R^l_{2,n-1,n} & Q_l D_m R^l_{212}\cdots Q_l D_m R^l_{2,n-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ Q_l R^l_{n12} & Q_l Q^l_{n13}\cdots Q\, R^l_{n,n-1,n} & Q_l D_m R^l_{n12}\cdots Q_l D_m R^l_{n,n-1,n}\end{pmatrix}$$

sont tous nuls indépendamment de choix des valeurs de Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_n.

Cela revient à dire que les déterminant d'ordre n de la matrice

$$\begin{pmatrix} R^l_{112} & R^l_{113}\cdots\cdots R^l_{1,n-1,n} & D_m R^l_{112}\cdots\cdots D_m R^l_{1,n-1,n}\\ R^l_{212} & R^l_{213}\cdots\cdots R^l_{2,n-1,n} & D_m R^l_{212}\cdots\cdots D_m R^l_{2,n-1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ R^l_{n12} & R^l_{n12}\cdots\cdots R^l_{n,n-1,n} & D_m R^l_{n12}\cdots\cdots D_m R^l_{n,n-1,n}\end{pmatrix}$$

sont tous nuls indépendamment du choix dex des expressions de Pfaff de base.

4. Considérons maintenant le cas où $n=2$. D'après ce qui précède, si la connexion $\Gamma^h_{ij}d\omega^i$ admet d'une métrique il faut que

$$(4\cdot1)\qquad R^h_{012}=0, \qquad R^l_{l12}=0,$$

$$(4\cdot2)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} R^1_{112} & D_mR^1_{112} \\ R^2_{112} & D_mR^2_{112} \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} R^1_{212} & D_mR^1_{212} \\ R^2_{212} & D_mR^2_{212} \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} R^1_{112} & D_mR^1_{212} \\ R^2_{112} & D_mR^2_{212} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R^1_{212} & D_mR^1_{112} \\ R^2_{212} & D_mR^2_{112} \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

et que le rang du déterminant $|R^h_{k12}|$ soit un nombre pair.

Nous allons démontrer que ces conditions sont suffisantes.

D'après la dernière condition il ne peut arriver que deux cas: 1° les R^h_{k12} $(h, k=1, 2)$ sont tous nuls, 2° $|R^h_{k12}|\neq 0$. Au cas premier le système des équations (1•2) est complètement intégrable et, par suite, l'espace R_2 est équivalent à un espace eucldien à deux dimensions. Supposons ensuite que $|R^h_{k12}|\neq 0$. Dans ce ces d'après (4•2) nous avons

$$(4\cdot3)\qquad D_mR^h_{k12}=\sigma_mR^h_{k12}$$

et, par suite,

$$(\bar{\delta}\bar{d}-\bar{d}\bar{\delta})R^h_{k12}=\bar{\delta}(R^h_{k12}\sigma_l d\omega^l)-\bar{d}(R^h_{k12}\sigma\ \ \delta\omega^m),$$

en désignant par $\bar{d}$ la différentielle absolue.

Or, en vertu de (4•1)

$$\begin{aligned}(\bar{\delta}\bar{d}-\bar{d}\bar{\delta})R^h_{kij}=R^h_{lij}d\omega^i\delta\omega^jR^l_{k12}-R^l_{kij}d\omega^i\delta\omega^jR^h_{l12} \\ -R^l_{1ij}d\omega^i\delta\omega^jR^h_{kl2}-R^l_{2ij}d\omega^i\delta\omega^jR^h_{k1l}=0.\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}0&=(\bar{\delta}R^h_{k12})\sigma_ld\omega^l-\bar{d}(R^h_{k12})\sigma_m\delta\omega^m+\{\delta(\sigma_ld\omega^l)-d(\sigma_m\delta\omega^m)\}R^h_{k12} \\ &=\left(\frac{\partial\sigma_l}{\partial\omega^m}-\frac{\partial\sigma_m}{\partial\omega^l}+a^s_{lm}\sigma_s\right)d\omega^l\delta\omega^mR^h_{k12}.\end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\sigma_md\omega^m$ est une différentielle totale exacte.

Posons ainsi

$$\frac{\partial\log\rho}{\partial\omega^m}=-\sigma_m, \qquad g_{ij}=\rho R^l_{i\,jl}.$$

Il vient alors

$$D_m g_{ij} = -\rho\, \sigma_m R^l_{ijl} + \rho\, \sigma_m R^l_{ijl} = 0.$$

Nous pouvons ainsi trouver les fonctions g_{ij} satisfaisant aux équations (1·2) où $n=2$.

5. Considérons maintenant le cas où $n=3$. D'après la condition du n°2 le rang du du déterminant $|\Omega^h_k|$ est un nombre pair. En prenant le cas le plus général, nous suppserons que ce déterminant soit du rang deux, indépendamment du choix de bivecteur T^{ij}. Dans ce cas, comme nous le démontrerons plus tard, les déterminants

$$(5\cdot1)\qquad \begin{vmatrix} X^l R^1_{l12} & X^l R^1_{l13} & X^l R^1_{l23} \\ X^l R^2_{l12} & X^l R^2_{l13} & X^l R^2_{l23} \\ X^l R^3_{l13} & X^l R^3_{l13} & X^l R^3_{l23} \end{vmatrix},$$

$$(5\cdot2)\qquad \begin{vmatrix} U_l R^l_{112} & U_l R^l_{1\;3} & U R^l_{123} \\ U_l R^l_{212} & U_l R^l_{2\;3} & U_l R^l_{223} \\ U_l R^l_{312} & U_l R^l_{3\text{-}3} & U_l R^l_{323} \end{vmatrix}$$

sont tous les deux du rang deux indépendamment du choix de X^1, X^2, X^3 et de U_1, U_2, U_3.

Soit $[A, A_1, A_2, A_3]$ le repere associé au point x^i pendant le développement d'une courbe sur R_3, issue de ce point x^i. Les équations

$$(5\cdot3)\qquad \rho\, Y^i = \Omega^i_1 X^1 + \Omega^i_2 X^2 + \Omega^i_3 X^3 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

déterminent une transformation homographique qui amène un point X^i dans le plan $A_1A_2A_3$ à un point Y^i dans ce plan. Cette transformation est singulière. Il existe un et un suel point X^i satisfaisant aux équations

$$(5\cdot4)\qquad \Omega^i_1 X^1 + \Omega^i_2 X^2 + \Omega^i_3 X^3 = 0,$$

et une seul droite satisfaisant aux équations

$$(5\cdot5)\qquad \Omega^1_i U_1 + \Omega^2_i U_2 + \Omega^3_i U_3 = 0.$$

Ce sont le point singulier et la droite singulière de la transformation cosidérée. Nous pouvons ainsi établir une correspondence entre un point et une droite au moyen d'un bivecteur.

Réciproquement, si l'on prend un point X^i arbitrairairement, le déterminant (5·1) étant du rang deux, on peut déterminer un bivecteur satisfaisant aux équations (5•4) et, par suite, une droite qui lui correspond. De même, à toute droite il correspond un point. D'ailleurs si un point X^i se trouve sur la droite U'_i, la droite U_i homologue à X^i renferme la point X'^i homologue à U'_i d'après la condition du n°1. En effet, si les matrices

$$(5\cdot 6)\qquad \begin{pmatrix} \Omega_1^p & \Omega_2^p & \Omega_3^p \\ \Omega_1^q & \Omega_2^q & \Omega_3^q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \Omega_r'^1 & \Omega_r'^2 & \Omega_r'^3 \\ \Omega_s'^1 & \Omega_s'^2 & \Omega_s'^3 \end{pmatrix}$$

sont du rang deux, nous avons

$$\frac{X^1}{\begin{vmatrix} \Omega_2^p & \Omega_3^p \\ \Omega_2^q & \Omega_3^q \end{vmatrix}} = \frac{X^2}{\begin{vmatrix} \Omega_3^p & \Omega_1^p \\ \Omega_3^q & \Omega_1^q \end{vmatrix}} = \frac{X^3}{\begin{vmatrix} \Omega_1^p & \Omega_2^p \\ \Omega_1^q & \Omega_2^q \end{vmatrix}},$$

$$\frac{U'_1}{\begin{vmatrix} \Omega_r'^2 & \Omega_r'^3 \\ \Omega_s'^2 & \Omega_s'^3 \end{vmatrix}} = \frac{U'_2}{\begin{vmatrix} \Omega_r'^3 & \Omega_r'^1 \\ \Omega_s'^3 & \Omega_s'^1 \end{vmatrix}} = \frac{U'_3}{\begin{vmatrix} \Omega_r'^1 & \Omega_r'^2 \\ \Omega_s'^1 & \Omega_s'^2 \end{vmatrix}}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation

$$X^l U'_l = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^p & \Omega_2^p & \Omega_3^p \\ \Omega_1^q & \Omega_2^q & \Omega_3^q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega_r'^1 & \Omega_r'^2 & \Omega_r'^3 \\ \Omega_s'^1 & \Omega_s'^2 & \Omega_s'^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \Omega_l^p \Omega_r'^l & \Omega_l^p \Omega_s'^l \\ \Omega_l^q \Omega_r'^l & \Omega_l^q \Omega_s'^l \end{vmatrix} = 0$$

Il est clair que l'équation dernière est vésifiée lorsque les matrices (5•6) ne sont pas tous du rang deux. Donc, le nombre du rang du déterminant (1•6) où $n=3$ est moindre que deux. Il en est ainsi même quand on échange T^{ij}, T'^{ij}, si la condition du n°1 est vérifiée. Par conséquent, nous avons

$$U_l X'^l = 0.$$

Donc, la correspondence considérée est une correlation projective régulière. D'ailleurs les éléments homolcques sont en involution d'après la définition même, et un point X^i ne se trouve pas toujours sur la droite qui lui est homologue: cela arrive seulement pour des bivecteurs tels que le nombre du rang du déterminant $|\Omega_k^i|^2$ moindre que deux. Donc, cette correaltion projective est une polaité: nons pouvons écrire

$$\rho U_i = e_{il} X^l \qquad (e_{ij} = e_{ji},\ |e_{ij}| \neq 0).$$

Soient X_0^i le point singulier de la transformation (5·3), et X^i un point quelconque dans le plan $A_1A_2A_3$. Tout point sur la droite joignant X^i avec X_0^i est amené à un même point sur la droite singulière par la transformation (5·3). Nous avons ainsi une correspondence entre un point et une droite. Comme nous le verrons plus tard, les telles correspondences sont contenues dans la polarité mentionnée plus haut. Donc, $\rho Y^i = \Omega^i_l X^l$ est le point homologue à la droite XX_0 et, par suite, ce point se trouve sur la droite $\rho U_i = e_{il} X^l$. C'est-à-dire que nous avons

$$e_{sl} \Omega^s_m X^l X^m = 0$$

ce qui nous donne

$$(5\cdot7) \qquad e_{hl} R^l_{kij} + e_{kl} R^l_{hij} = 0 \qquad (h,\ k,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

La matrice (3·2) où $n=3$ étant du rang deux, il vient de ces équations

$$e_{hl} D_m R^l_{hij} = 0 \qquad (h,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3).$$

Or, en dérivant les équations (5·7), on obtient

$$(D_m e_{hl}) R^l_{kij} + (D_m e_{kl}) R^l_{hij} + e_{hl} D_m R^l_{kij} + e_{kl} D_m R^l_{hij} = 0,$$

en particulier,

$$(D_m e_{hl}) R^l_{hij} + e_{hl} D_m R^l_{hij} = 0.$$

On a donc

$$(D_m e_{hl}) R^l_{hij} = 0,$$

et, pas suite,

$$D_m e_{hl} = \sigma_m e_{hl}.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} 0 &= -(R^s_{lij} e_{sm} + R^s_{mij} e_{ls}) d\omega^i \delta\omega^j \\ &= (\bar\delta \bar d - \bar d \bar\delta) e_{lm} = \bar\delta (e_{lm} \sigma_i d\omega^i) - \bar d (e_{lm} \sigma_j \delta\omega^j) \\ &= (\bar\delta e_{lm}) \sigma_i d\omega^i - \bar d (e_{lm}) \sigma_j \delta\omega^j + (\delta(\sigma_i d\omega^i) - d(\sigma_j \delta\omega^j) e_{lm}) \\ &= \left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial\omega^j} - \frac{\partial\sigma_j}{\partial\omega^i} + \omega^s_{ij} \sigma_s \right) e_{lm} d\omega^i \delta\omega^j. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_m d\omega^m$ est une différentielle totale exacte. En posant

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial \omega^i} = -\sigma_i, \qquad g_{ij} = \rho e^{ij}$$

nous obtenons les fonctions g_{ij} satisfaisant aux équations (1・2) où $n=3$.

6. Nous allons nous occuper maintenant du cas où $n>3$. Entre $\frac{1}{2}n(n-1)$ composants d'un bivecteur $T^{ij}(i=1,\cdots, n-1; j=i+1,\cdots, n)$ il existe $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ relations qui peuvent s'écrire, si $T^{12}\neq 0$, par exemple,

$$T^{12}T^{ij} - T^{1i}T^{2j} + T^{1j}T^{2i} = 0$$
$$(i=3\cdots, n-1;\ j=i+1,\cdots, n)$$

de sorte qu'un bivecteur est déterminé par $2(n-2)$ conditions. Ainsi, il s'exprime par un point situé sur l'intersection $V^{(n-2)(n-3)}_{2(n-2)}$ des $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ hyperquadriques dans un espace à $\frac{1}{2}n(n-1)-1$ dimensions.

Supposons d'abord que n est un nombre impair. D'après la condition du n°2 le rang du déterminant $|\Omega^h_k|$ est un nombre pair. En prenant le cas le plus général, nous supposerons que ce déterminant soit du rang $n-1$, indépendamment du choix de bivecteur T^{ij}. Dans ce cas, comme nous le démontrerons plus tard, les matrices

$$(6\text{・}1) \qquad \begin{pmatrix} Q^l R^1_{lij} \\ Q^l R^n_{lij} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} Q_l R^l_{1ij} \\ Q_l R^l_{nij} \end{pmatrix}$$

sont toutes du rang $n-1$ indépendamment du choix de $Q^1,\cdots, Q^n$, $Q_1,\cdots, Q_n$.

Considédons la transformation homographique singulière

$$(6\text{・}2) \qquad \rho\, Y^i = Q^i_l X^l \qquad (i=,\cdots, n)$$

qui amène un point X^i dans l'espace $A_1A_2\cdots A_n$ à un point Y^i dans cet espace. Elle admet un et un seul point singulier défini par

$$(6\text{・}3) \qquad \Omega^l_i X^l = 0 \qquad (i=1,\cdots, n),$$

et un seul hyperplan singulier défini par

$$(6\text{・}4) \qquad \Omega^l_i U_l = 0 \qquad (i=1,\cdots, n)$$

Nous pouvons ainsi établir une correspondence entre un point et un hyperplan dans l'espace $A_1A_2\cdots A$ au moyen d'un bivecteur.

Réciproquement, si l'on prend un point X^i arbitrairement, le première matrice de (6•1) étant du rang $n-1$, le système (6•3) ne contient que $n-1$ équations indépendantes. L'ensemble des bivecteurs satisfaisant à ces équations a pour l'image l'intersection $V_{n-3}^{(n-2)(n-3)}$ de $V_{2(n-2)}^{(n-2)(n-3)}$ avec un espace à $\frac{1}{2}n(n-3)$ dimensions. De même, si l'on prend un hyperplan l'ensemble des bivecteurs satisfaisant aux équations (6•4) a pour l'image une variété algébrique du même degré et du même dimensions. Nous faisons correspondre un point et un hyperplan ayant l'image en commun.

Par le raisonnement du n° précédent nous pouvons démontrer que si un point X^i se trouve dans l'hyperplan U'_i, l'hyperplan U^i homologue à X^i renferme le point X'^i homologue à U'_i d'après la condition du n°1. Par suite, la correpondence considérée est une polalité: nous pouvons écrire

$$\rho\, U_i = e_{il}X^l \qquad (e_{ij}=e_{ji},\ |e_{ij}| \neq 0).$$

Soit X_0^i le point singulier de la transformation (6•2), et X^i un point quelconque dans l'eyperplan $A_1A_2\cdots A_n$. Tout point sur la droite joignant X^i avec X_0^i est amené à un même point sur l'hyperplan singulier par la transformation (6•2). Comme nons le verrons plus tard ce point se trouve aussi sur l'hyperplan homologue au point X^i de sorte que nons avons

$$e_{il}\Omega^i_m X^l X^m = 0$$

d'où

$$e_{hl}R^l_{kij} + e_{kl}R^l_{hij} = 0 \qquad (h,\ k,\ i,\ j, = 1, \cdots, n).$$

Donc, par le raisonnement du n° précedent, nous pouvons trouver les fonctions g_{ij} satisfaisant aux équations (1•2).

7. Nous allons maintenant démontrer que si le déterminant $|\Omega^h_k|$ est du rang $n-1$ indépendamment du choix de bivecteur T^{ij}, les matrices (6•1) sont toutes du rang $n-1$ indépandamment du choix de $Q^1, \cdots, Q^n$, $Q_1 \cdots, Q_n$, n étant un nombre impair.

Envisageons par exemple la premiere matrice. Par un changement convenable des expressions de Pfaff de base, nous pouvons faire $Q^1=1$, $Q^2=\cdots=Q^n=0$. Supposons que les matrices

$$(7{\cdot}1) \qquad \begin{pmatrix} R^1_{1ij} \\ R^2_{1ij} \\ \\ R^n_{1ij} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R^1_{2ij} \\ R^2_{2ij} \\ \\ R^n_{2ij} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} R^1_{nij} \\ R^2_{nij} \\ \\ R^n_{nij} \end{pmatrix}$$

soient du rang p, $q,\cdots$, s respectivement. Nous pouvons écrire

$$(7\cdot2)\qquad \begin{cases} R^h_{1ij}=\lambda^h_1 P^1_{1ij}+\cdots+\lambda^h_p P^p_{1ij}, \\ R^h_{2ij}=\mu^h_1 P^1_{2ij}+\cdots+\mu^h_q P^q_{2ij}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R^h_{nij}=\sigma^h_1 P^1_{nij}+\cdots+\sigma^h_s P^s_{nij}. \end{cases}$$

Posons

$$(7\cdot3)\qquad \theta^a_{hij}=P^a_{hij}U^i V^j.$$

Si $p+q\leqq 2(n-2)$, pour un bivecteur satisfaisant aux équations

$$\theta^1_1=0,\cdots,\ \theta^p_1=0,\qquad \theta^1_2=0,\cdots,\ \theta^q_2=0$$

tous les mineurs d'ordre $n-1$ du déterminant $|\Omega^h_k|$ serait nuls contrairement à l'hypothèse.

Supposons ensuite que

$$p=n-2,\ q=\cdots=s=n-1.$$

Désignons par L_i le complément algébrique de l'élément a^i du déterminant

$$\begin{vmatrix} a^1 & \mu^1_1 & \cdots\cdots & \mu^1_{n-1} \\ a^2 & \mu^2_1 & \cdots\cdots & \mu^2_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a^n & \mu^n_1 & \cdots\cdots & \mu^n_{n-1} \end{vmatrix}.$$

De l'équation

$$\begin{pmatrix} R^1_{1ij} \\ R^2_{2ij} \\ R^3_{2ij} \\ R^n_{2ij} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R^1_{2ij} \\ R^2_{\ ij} \\ R^3_{2i} \\ R^n_{2ij} \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} R^1_{2ij} \\ R^2_{2ij} \\ R^{n-1}_{2ij} \\ R^n_{1ij} \end{pmatrix}=0,$$

on tire

$$\begin{pmatrix} L_h\lambda^h_a P^a_{1ij} \\ P^1_{2ij} \\ P^{n-1}_{2ij} \end{pmatrix}=0.$$

Si l'un des $L_h\lambda^h_a(a=1,\cdots,\ n-2)$ au moins, par exemple $L_h\lambda^h_1$ n'est par nul, pour un bivecteur satisfaisant aux $2(n-2)$ équations

$$\theta^2_1=0,\cdots,\ \theta^{n-1}_1=0,\ \theta^2_1=0,\cdots,\ \theta^{n-1}_2=0$$

on aurait

$$\Omega^h_1=0, \quad \Omega^h_2=0 \qquad (h=1,\cdots, n)$$

et, par suite, tous les mineurs d'ordre $n-1$ du déterminant $|\Omega^h_k|$ serait nuls contrairement à l'hypoteèse. Nous avons ainsi

$$L_h\lambda^h_a=0 \qquad (a=1,\cdots, n-2).$$

Les $L_i (i=1,\cdots, n)$ ne sont pas tous nuls. Supposons que $L_1\neq 0$. Si l'on ajoute aux éléments de la première colonne du déterminant $|\Omega^i_k|$ multipliés par L_1, ceux d'autres colonnes multiplés par $L_2,\cdots, L_n$ respectivement, ce déterminant devient

$$(7\cdot4) \qquad \begin{vmatrix} 0 & \Omega^2_1 & \cdots\cdots & \Omega^n_1 \\ 0 & \Omega^2_2 & \cdots\cdots & \Omega^n_1 \\ L_h\Omega^h_3 & \Omega^2_3 & \cdots\cdots & \Omega^n_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ L_h\Omega^h_n & \Omega^2_n & \cdots\cdots & \Omega^n_n \end{vmatrix}$$

Désignons par Λ^k_h le complément algébrique de l'elément Ω^h_k. L'identité $|\Omega^h_k|\equiv 0$ s'écrit alors

$$\sum_{a=3}^{n} L_h\Omega^h_a\Lambda^a_1\equiv 0.$$

Donc comme conséquence des équations

$$(7\cdot5) \qquad L_h\Omega^h_3=0,\cdots, L_h\Omega^h_{n-1}=0$$

nous avons ou bien $L_h\Omega^h_n=0$, ou bien $\Lambda^n_1=0$.

Au cas premier pour un bivecteur satisfaisant aux $n-3$ équuations (7•5) et $n-1$ équations

$$\theta^1_1=0,\cdots, \theta^{n-2}_1=0, \Lambda^1_1=0$$

tous les mineurs d'ordre $n-1$ du déterminant $|\Omega^h_k|$ serait nuls contrairement à l'hypothèse. Au cas dernier cela arrivera pour un bivectur satifaisant (7•5) et $n-1$ équetions

$$\theta^1_n=0,\cdots, \theta^{n-1}_n=0.$$

Nous voyons ainsi que le nombre p doit être égal à $n-1$.

8. Nous démontrerons maintenant que le point auquel tout point sur la droite XX_0 est amené par la transformation (6•2) se trouve sur l'hyperplan homoloque au point X^i.

En faisant un changement convenable des expressions de Pfaff de base, prenons comme sommet $A_1(1, 0, \cdots, 0)$ le point singulier de la transformation (6•2), et comme sommets $A_2(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $A_n(0, 0, \cdots, 0, 1)$ $n-1$ points sur l'hyperplan singulier. Les équations de la transformation deviennent alors

$$(8\cdot1) \qquad \begin{cases} \rho\, Y^1=0, \\ \rho\, Y^2=\Omega^2_2X^2+ \cdots +\Omega^2_nX^n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \rho\, Y^n=\Omega^n_2X^2+ \cdots +\Omega^n_nX^n. \end{cases}$$

Soit X^i un point de l'espace $A_1A_2\cdots A_n$. Joignons le au point singulier. Prenons comme sommet A_2 $(0, 1, 0, \cdots, 0)$ le point d'intersection de cette droite de jonction avec l'hyperplan singulier. Nous supposerons que ce point A_2 ne soit pas un point double de la transformation (6•2), le cas où A_2 est un point double pouvant être regardé comme cas de limite. Prenons comme sommet $A_3(0, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ le point auquel tout point sur la droite A_1A_2 est amené par la transformation (6•2). Il vient alors

$$(8\cdot2) \qquad \Omega^1_2=0,\ \Omega^2_2=0,\ \Omega^4_2=0, \cdots,\ \Omega^n_2=0.$$

Puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} R^1_{2ij} \\ R^n_{2ij} \end{pmatrix}$$

est du rang $n-1$, la martice

$$\begin{pmatrix} R^1_{2ij} \\ R^2_{2ij} \\ R^4_{2ij} \\ \\ R^n_{2ij} \end{pmatrix}$$

doit être du rang $n-2$, car sinon il viendrait $\Omega^3_2=0$ comme conséquence de (8•2). C'est à dire que pour tout bivecteur le systeme (8•2) ne contient que $n-2$ équations indépendantes, et que l'quation $\Omega^3_2=0$ est indépendante de ces équations. Or, le déterminant $|\Omega^h_k|$ est nul identquement. Il faut donc que l'équations $\Lambda^2_3=0$ soit vérifiée comme conséquence de (8•2), Λ^h_k étant le complément algébrique de l'élément Ω^k_h dans le déterminant $|\Omega^k_h|$.

Cela posé, soit T^{ij} un bivecteur correspondant à la transformation dont le point singulier est au point $A_2(0, 1, 0,\cdots, 0)$. Nous avons

$$\Omega_2'^i=0$$

et, par suite

$$\Lambda_3'^2=0$$

d'après ce que nous venons de remaquer. L'hyperplan singulier U_i' est donné par

$$U_i'\Omega_i'^i=0 \qquad (i=1,\cdots, n)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{U_1'}{\Lambda_1'^2}=\frac{U_2'}{\Lambda_2'^2}=\frac{U_3'}{\Lambda_3'^2}=\cdots=\frac{U_n'}{\Lambda_n'^2}.$$

Nous avons donc

$$U_3'=0.$$

Nous voyons ainsi que l'hyperplan homologue au point A_2 passe par le point A_3 auquel le point A_2 est amené par la transformation (6•2). De plus, ce point A_3 est un point de l'hyperplan homologue à A_1, Ainsi, l'hyperplan homologue à un point de la droite A_1A_2 passe toujours par A_3.

9. Nous nous occupous enfin du cas où n est un nombre pair plus grand que deux. En prenant le cas le plus général nous supposerons que pour tout bivecteur le déterminant $|\Omega_k^h|$ soit du rang $n-2$ au moins. Dans ce cas comme nous le démontrerons plus tard, les matrices (6•1) sont tous du rang $n-1$ indépendamment du choix de $Q^1,\cdots, Q^n, Q_1,\cdots, Q_n$.

D'aprés la condition du n°2, pour un bivecteur satisfaisant à l'équation $|\Omega_k^h|=0$ ce déterminant est du rang $n-2$ et, par suite, la transformation (6•2) aemet une droite singuliére. Chaque point sur un plan passant par cette droite singulière est amenè par cette transformation à un même point sur un espace S_{n-3} qui est l'espace singulier de la transformation.

Réciproquement, envisagenos un point P. Prenons le comme sommet $A_1(1, 0,\cdots, 0)$. La première matrice de (6•1) étant du rang $n-1$, le système d'equations

$$\Omega_1^i=0 \qquad (i=1,\cdots, n)$$

contient justement $n-1$ equations indépendantes. L'ensemble des bivecteurs satissaisant à ces équations a pour l'image un $V_{n-3}^{(n-2)(n-3)}$. Les droite singulières des transformations correspondant à ces bivecteurs construisent un cône dont le sommet est au point P, et dont les genératrices dépendent de $n-3$ paramètres. Sioent PQ, PQ' deux génératrices. Considérons un espace S_{n-4} qui est contenu dans l'espace $A_1A_2\cdots A_n$, et qui n'a pas de point en commun avec le plan PQQ'. L'espace $Q'S_{n-4}$ est en projejectivité régulière avec l'espace singulier S_{n-3} correspodant à la droite singulièse PQ. Il en est ainsi pour QS_{n-4} et S'_{n-3} (l'espace singulier correspondant à droite sigulière PQ'). Donc, les espoces S_{n-3} et S'_{n-3} se coupent en un espace a $n-4$ dimensions. Nous voyons ainsi que l'ensemble des bivecteurs considérés donne l'ensemble des espaces singuliers à $n-3$ dimensions, deux espaces desquels se coupent toujours en un espace à $n-4$ dimensions. Evidemment ils ne passent pas un même espace à $n-4$ dimensions. Donc, ils sont contenus dans un hyperplan α. Faisons correpondre au point P cet hyperplan α. Nous pouvons ainsi établir une correspondence entre un point et un hyperplan. D'après la condition du n°1 cette correspondence est une polarité. Elle s'exprime sous la forme

$$\rho U_i = e_{il} X^l \qquad (i=1,\cdots, n).$$

Envisageons encors un bivecteur qui donne une transsormation projective singulière ayant une droite singulière d. Soit X un point quelconque dans l'espace $A_1A_2\cdots A_n$. Tout point sur le plan Xd est amené à un même point sur l'espace singulier correspondant à la droite d. Comme nous le verrons plus tard ce point se trouve aussi sur l'hyperplan homologue au point X de sorte que nous avons

$$e_{il}\Omega^i_m X^l X^m = 0,$$

d'où

$$e_{hl}R^l_{kij} + e_{kl}R^l_{hij} = 0 \qquad (h,\ k,\ i,\ j=1,\cdots, n).$$

Donc, par le raisonnement du n°5, nous puovons trouver les fonctions g_{ij} satisfaisant aux équations (1·2).

10. Nous allons maintenant démontrer que si le déterminant $|\Omega^h_k|$ est du rang $n-2$ au moins indépendamment du choix de bivecteur T^{ij}, les matrices (6·1) sont tous du rang $n-1$ indépendamment du choix de $Q^1,\cdots, Q^n$, $Q_1,\cdots, Q_n$. Pour cela, comme

nous l'avons remanqué au n°7, il suffit de prouver que la première matrice de (7•1) est du rang $n-1$. Or, si le déterminant $|\Omega_k^h|$ est du rang $n-2$ au moins, d'après la condition du n°2, comme conséquence des équations

$$(10\cdot1)\qquad \Omega_1^i=0 \qquad (i=1,\cdots, n)$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} \Omega_2^1 \cdots\cdots \Omega_2^n \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \Omega_n^1 \cdots\cdots \Omega_n^n \end{pmatrix}$$

est du rang $n-2$ et, par suite,

$$(10\cdot2)\qquad \frac{\varDelta_{1a}^{12}}{\varDelta_{1b}^{12}}=\frac{\varDelta_{1a}^{13}}{\varDelta_{1b}^{13}}=\cdots=\frac{\varDelta_{1a}^{n-1,n}}{\varDelta_{1b}^{n-1,n}} \qquad (a,\ b=2,\cdots, n),$$

où $\varDelta_{ab}^{hk}$ est le complément algébrique du mineur

$$\begin{vmatrix} \Omega_a^h & \Omega_a^k \\ \Omega_b^h & \Omega_b^k \end{vmatrix}$$

dans le déterminant $|\Omega_k^h|$. Soient $p,\ q,\cdots,\ s$ les nombres du rang des matrices (7•1). Si $p+q\leqq 2(n-2)$ le système

$$\Omega_1^i=0,\quad \Omega_2^i=0 \qquad (i=1,\ \cdots,\ n)$$

ne contient que $2(n-2)$ équations indépendantes au plus et, par suite, il existe un bivecteur satisfaisaut à ces équations. Comme conséquence de ces équations nous avons $\varDelta_{ab}^{hk}=0$ $(a,\ b=2,\cdots,\ n)$, $\varDelta_{ab}^{hk}=0$ $(h=3,\cdots,\ u)$ et, par suite, $\varDelta_{12}^{hk}=0$ en vertu de (10•2). Les mineurs d'ordre $n-2$ du déterminant $|\Omega_k^h|$ seraient alors tous nuls contrairement à l'hypothèse.

Supposons ensuite que $p=n-2,\ q=\cdots=s=n-1$. Alors, comme nous l'avons remaqué au n°7, le déterminant $|\Omega_k^h|$ peut s'écrire sous la forme (7•4). Or, comme conséquence de (10•1) nous avons

$$(10\cdot3)\qquad \frac{\varDelta_{12}^{1c}}{\varDelta_{12}^{bc}}=\frac{\varDelta_{13}^{1c}}{\varDelta_{13}^{bc}}=\cdots=\frac{\varDelta_{1n}^{1c}}{\varDelta_{1n}^{bc}} \qquad (b,\ c=2,\cdots,\ n)$$

Le systéme formé par (10•1) et par $n-2$ équations

$$L_h\Omega_3^h=0,\cdots,\ L_h\Omega_n^h=0$$

ne contient que $2(n-2)$ équations au plus et, par suite, il existe un bivecteur satisfaisant à ces équations. Comme conséquence de ces équations nous avons $\Delta^{ij}_{bc}=0$, $\Delta^{bc}_{ij}=0(i,\ j=1,\cdots,\ n\ ;\ b,\ c=2,\cdots,\ n)$ et, par suite, $\Delta^{1c}_{1b}=0(b,\ c=2,\cdots,\ n)$ en vertu de (10·3). Les mineurs d'ordre $n-2$ du déterminant $|\Omega^{h}_{k}|$ serait alors tous nuls contrairement à l'hypothèse. Il faut donc que $p=n-1$.

11. Nous démontrerons maintenant que le point aupuel tout point sur le plan Xd est amené par la transformation (6·2) se trouve sur l'hyperplan homologue au point X^{i}.

Considérons un point P dans l'espace $A_1A_2\cdots A_n$. Prenons le comme sommet $(1,\ 0,\cdots,\ 0)$ et prenons les autres sommets $(0,\ 1,\ 0,\cdots,\ 0),\cdots,\ (0,\cdots,\ 0,\ 1)$ dans l'hyperplan correspondant au point P. Envisageons un bivecteur T^{ij} qui donne une transformation projective dont le droite singulière d passe par P. Les équations de cette transformation s'écrivent sous la forme (8·1), où le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Omega^{2}_{2}\cdots\cdots\Omega^{2}_{n} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Omega^{n}_{2}\cdots\cdots\Omega^{n}_{n} \end{vmatrix}$$

est du rang $n-2$.

Soit Q le point d'intersection de Xd avec l'espace singulier de cette transformation. Nous supposerons que ce point Q ne soit pas un point double de la transformation, le cas où Q est un point double pouvant être regardé comme cas de limite. Prenons Q comme sommet $(0,\ 1,\ 0,\cdots,\ 0)$, et prenons comme sommet $(0,\ 0,\ 1,\ 0,\cdots 0)$ le point Q' auquel le point Q est amené par la transformation. Nous avons alors

$$(11\cdot1)\qquad \Omega^{1}_{2}=0,\quad \Omega^{2}_{2}=0,\quad \Omega^{4}_{2}=0,\cdots,\ \Omega^{n}_{2}=0.$$

D'après ce que nous avons remarqué au n°8, pour tout bivecteur ce système d'équation ne contient que $n-2$ équations indépendantes, et l'qvuaton $\Omega^{3}_{2}=0$ est indépendante de ces équations.

Donc, si l'on considère un mineur Δ d'odse $n-1$ du déterminant $|\Omega^{h}_{k}|$, contenant l'élément Ω^{3}_{2} le mineur de Ω^{3}_{2} dans ce déterminant Δ sera nul pour tout bivecteur satisfaisant aux équations (11·1), et à l'équation $|\Omega^{h}_{k}|=0$. Cela arrive même quand $\Omega^{3}_{2}=0$, car ce cas-ci peut être regardé comme cas de limite.

Considérons un bivecteut T^{ij} tel que la transformation projective lui correspondant

$$\rho Y^{i}=\Omega^{i}_{l}X^{l}$$

a pour droite singulière une droite passant par Q. Nous avons alors

$$\Omega_2'^i=0 \qquad (i=1,\cdots,\ n).$$

L'espace singulier de cette transformation est défini par

$$\Omega_1'^l U_l=0,\ \Omega_3'^l U_l=0,\cdots,\ \Omega_n'^l U_l=0.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \Omega_1'^1 & \Omega_1'^2 & \cdots\cdots & \Omega_1'^n \\ \Omega_3'^1 & \Omega_3'^2 & \cdots\cdots & \Omega_3'^n \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \Omega_n'^1 & \Omega_n'^2 & \cdots\cdots & \Omega_n'^n \end{pmatrix}$$

étant du rang $n-2$, ce système des équations peut s'écrire

$$\begin{aligned} U_{i_1} &= \alpha_1 U_i + \beta_1 U_j, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{j_{n-2}} &= \alpha_{n-2} U_i + \beta_{n-2} U_i \end{aligned}$$

où $i_1,\cdots,\ i_{n-2},\ i,\ j\,(i\neq 3,\ j\neq 3)$ est une permutation de $1,\cdots,\ n$, et nous avons

$$U_3=0$$

d'après ce que nous avons remarqué plus haut. Nous voyons ainsi que l'hyperplan correspondant au point Q passe passe par le point Q'. De plud, Q' étant un point de l'espace singulier homologue à d, les hyperplans correspondant à un point de d pass toujours par Q'. Il en est donc ainsi pour les hyperplans corresspondant à un point de $Xd(=Qd)$.