MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVI, Mathematics No. 3, 1950.

# Sur quelques équations fonctionnelles et leurs solutions caractéristiques I

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu le 9 Décembre 1950)

Nous allons exprimer dans ce mémoire une novelle méthode, concernant essentiellement la définition de l'intégrale définie, pour résoudre quelques équations fonctionnelles suivantes. Dans la dernière partie de ce mémoire, nous aurons les solutions caractéristiques des équations fonctionnelles à un paramètre réel ayant leur valeurs caractéristiques.

## I. La première équation fonctionnelle

### 1. La première équation fonctionnelle.

Considérons l'équation fonctionnelle suivante, dont la fonction inconnue $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[a, b]$:

$$f(x)=\frac{1}{n}\left[f\left\{\frac{x+(n-1)a}{n}\right\}+f\left\{\frac{x+(n-2)a+b}{n}\right\}+\cdots+f\left\{\frac{x+(n-1)b}{n}\right\}\right] \tag{1}$$

ou

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\}$$

où $n$ est un nombre naturel fixe.

L'argument ci-dessous est équivalent à chercher les solutions continues dans $[0, 1]$ au cas du plus simple:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right\} \tag{1'}$$

### 2. Les solutions de la première équation.

A l'aide de l'équation (1), l'$i$-ième teme du côté droit de (1) est exprimée comme ceci:

$$f\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-j)a+(j-1)b}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f\left\{\frac{x+(n-i+n^2-nj)a+(i-1+nj-n)b}{n^2}\right\}$$

pour $i=1,2,\ldots,n$.

Employons ces $n$ relations dans le côté droit de (1), on a

$$f(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left[\frac{x+\{n^2-(n\overline{j-1}+i)\}a+\{(n\overline{j-1}+i)-1\}b}{n^2}\right]$$
$$=\frac{1}{n_2}\sum_{k=1}^{n^2}f\left\{\frac{x+(n^2-k)a+(k-1)b}{n^2}\right\}$$

Cette relation est le cas de $n^2$ au lieu de $n$, dans l'équation (1). Par la répétition du même moyen, l'équation (1) est vérifiée aux cas de $n^3, n^4,\ldots$ ; d'après la continuité dans $[a, b]$, son côté droit tend vers l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ dans $[a, b]$.

$$f(x)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left\{\frac{x+(N-k)a+(k-1)b}{N}\right\}\quad (N=n^m,\ m: \text{naturel})$$
$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=c: \text{ constante}$$

En plus,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b c\,dx=c$$

Donc, c'est nécessaire que

$$f(x)=c$$

où $c$ est une constante arbitraire.

Puisque cette fonction remplit l'équation (1), c'est la solution continue cheerchée. Mais évidemment, sans la restriction de la continuité, nous pouvons obtenir la même solution d'après la sommabilité de $f(x)$ dans $[a, b]$.

## II. La deuxieme équation fonctionnelle

**3. La deuxième équation fonctionnelle.**

Nous allons supposer l'équation fonctionnelle (2) plus générale que l'équation (1).

$$f(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n} f\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\} \tag{2}$$

où $\lambda$ est une constante réelle. Cette équation (2) donne divers résultats par conséquence de la valeur de $\lambda$.

**4. Le cas où $0<\lambda<\frac{1}{n}$.**

Posons $\lambda=\frac{\theta}{n}$ $(0<\theta<1)$, nous obtenons l'équation suivante, par le même moyen du numéro 2.

$$f(x)=\frac{\theta^m}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m} f\left\{\frac{x+(n^m-i)a+(i-1)b}{n^m}\right\}$$

En suite,

$$f(x)=\lim_{m\to+\infty}\left[\theta^m\cdot\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m} f\left\{\frac{x+(n^m-i)\,a+(i-1)b}{n^m}\right\}\right]$$
$$=0\times\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx=0$$

Donc, une seule solution continue de l'équation (2) est $f(x)=0$.

**5. Le cas où $\frac{1}{n}<\lambda$.**

Posons $\lambda=\frac{1}{\theta n}$ $(0<\theta<1)$, nous avons

$$\theta^m\cdot f(x)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m} f\left\{\frac{x+(n^m-i)\,a+(i-1)b}{n^m}\right\}$$

Considérons la limite: $m\to+\infty$, nous avons une condition nécessaire pour $f(x)$ :

$$0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

C'est-à-dire,

$$\int_a^b f(x)\,dx=0. \tag{3}$$

Alors, nous devons diviser ici ce problème en deux cas: 1°. $\lambda=n^{p-1}$ et 2°. $\lambda\neq n^{p-1}$, où $p$ est un nombre naturel.

1°. $\lambda=n^{p-1}$. En plus, ajoutons les conditions pour la fonction inconnue $f(x)$, que celle-ci a la dérivée continue du $p$-ième ordre dans $[a, b]$.

Après les différentiations de $q$ fois, on a

$$f^{(q)}(x)=n^{p-q-1}\sum_{i=1}^{n} f^{(q)}\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\} \tag{4}$$

$$(q=1, 2,\dots, p)$$

Cette équation fonctionnelle (4), ayant la fonction inconnue $f^{(q)}(x)$, coincide à l'équation (2), parce que $n^{p-q-1}$ est supérieur à $\frac{1}{n}$; pour la fonction $f^{(q)}(x)$, l'équation (3) change en

$$\int_a^b f^{(q)}(x)\,dx=0 \tag{5}$$

$$(q=0, 1,\dots, p-1)$$

Au cas excepté ci-dessus où $q$ est égal à $p$, d'après le numéro 2., on a

$$f^{(p)}(x)=c \tag{5'}$$

où $c$ est une constante arbitraire.

Cette relation (5′) est certainement toutes les solutions de l'équation (4), où $q$ est égal à $p$. L'intégrale indéfinie de celle-ci est l'équation:

$$f^{(p-1)}(x)=n^{p-q-2}\sum_{i=1}^{n} f^{(p-1)}\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\}+\text{constante}$$

Par conséquence, prenant une constante convenable $c_1$, l'équation (4), où $q$ est égal à $p-1$, est remplie par la fonction suivante:

$$f^{(p-1)}(x)=cx+c_1$$

Par la répétition de ces procédures, on a la solution de l'équation (2) comme suivante, prenant $p$ constantes: $c_1, c_2,\dots$, et $c_p$ convenables et uniques.

$$f(x)=cx^p+c_1x^{p-1}+\dots+c_p \tag{6}$$

Les conditions qui déterminent uniquement les constantes: $c_1, c_2, \dots$ et $c_p$ sont justement les $p$ relations (5). En même temps, puisque quelques autres fonctions que cette fonction ne satisfont point les conditions (5) et (5′), les polynômes (6) sont toutes les solutions de l'équation fonctionnelle présente.

2°. $\frac{1}{n}<\lambda\neq n^{p-1}$. Il $y$ a un nombre naturel $q$ qui remplit l'inégalité:

$$n^{q-2}<\lambda<n^{q-1}.$$

Supposons aussi que la fonction inconnue $f(x)$ ait la dérivée continue du $q$-ième ordre, après les différentiations de $q$ fois, on a

$$f^{(q)}(x)=\frac{\lambda}{n^q}\sum_{i=1}^{n} f^{(q)}\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\}.$$

Par le résultat du numéro 4., avec l'inégalité: $0<\frac{\lambda}{n^q}<\frac{1}{n}$, nous obtenons

$$f^{(q)}(x)\equiv 0,$$

et en suite

$$f^{(q-1)}(x)=c$$

où $c$ est une constante d'intégration. Mais, d'après la relation (3), on a

$$\int_a^b f^{(q-1)}(x)dx=c(b-a)=0$$

C'est-à-dire, on a

$$c=0,$$

ou

$$f^{(q-1)}(x)\equiv 0.$$

De même, à la dernière fois, il en résulte

$$f(x)\equiv 0.$$

C'est la seule solution au cas présent.

**6. Le cas où $\lambda<0$.**

Employant une seule fois l'itération comme le numéro 2., l'équation fonctionnelle donnée devient celle-ci, dont le paramètre est égal à $\lambda^2$ et est non négatif. Donc, les solutions sont banales ou sont égales aux polynômes (6), ceux-ci sont aussi banaux, car, lorsqu'on compare des coefficients des termes du même degré dans l'équation fonctionnelle primitive, les polynômes (6) sont identiquement nuls.

**7. Les conclusions.**

**Théorème.** Les solutions de l'équation fonctionnelle:

$$f(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}f\left\{\frac{x+(n-i)a+(i-1)b}{n}\right\} \tag{2}$$

où $n$ est un nombre naturel, ayant la dérivée continue du $p$-ième ordre dans $[a,b]$, où $p$ est aussi un nombre naturel satisfaisant l'inégalité:

$$n^{p-2}<\lambda\leqq n^{p-1},$$

sont données au dessous.

1°. Au cas où $\lambda$ est égal à $n^{p-1}$, elles sont les polynômes du $p$-ième degré:

$$f(x)=cx^p+c_1x^{p-1}+\dots+c_p \tag{6}$$

où $c$ est une constante arbitraire, et où $c_1, c_2, \dots$ et $c_p$ sont les $p$ constantes déterminées par les $p$ équations simultanées:

$$\int_a^b f^{(q)}(x)dx=0,$$
$$(q=0,1,\dots,p-1).$$

2°. Au cas où $\lambda$ n'est pas égal à $n^{p-1}$, elles sont banales, c'est-à-dire, sont identiquement nulles.

**8. Les solutions caractéristiques.**

Au cas où le paramètre $\lambda$ est égal à $n^{p-1}(=\lambda_p)$, calculant les solutions caractéristiques $f_p(x)$, on a

$$f_0(x)=c \qquad (c \text{ est une constante arbitraire.}),$$
$$f_1(x)=cx-\frac{1}{b-a}\int_a^b cxdx=c\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

$$f_2(x)= \ \dots \ =c\left\{\frac{x^2}{2}-\frac{(a+b)x}{2}+\frac{a^2+4ab+b^2}{12}\right\},$$

...........

En général, on a

$$f_q(x)=\int_a^x f_{q-1}(x)\,dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b dy\int_a^y f_{q-1}(x)\,dx. \tag{7}$$

## III. Remarques

**9. La transformation.**

Nous remarquons d'abord que, dans l'équation (2), posons

$$x=a+(b-a)t \quad \text{ou} \quad t=\frac{x-a}{b-a},$$

et

$$f(x)=g(t)=f\{a+(b-a)t\}=g\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

l'intervalle $[a, b]$ est transformé en $[0, 1]$ et l'équation lui-même en la relation simple:

$$g(t)=\lambda\left\{g\left(\frac{t}{n}\right)+g\left(\frac{t+1}{n}\right)+\dots+g\left(\frac{t+n-1}{n}\right)\right\}. \tag{8}$$

**10. Le nombre naturel $n$.**

Il est remarquable secondement que nous avons les fonctions caractéristiques $f_p(x)$ pour le naturel quelconque $n$, parce que les solutions données par les formules (7) sont indépendentes de la valeur du naturel $n$.

En terminant ce mémoire, l'auteur veut exprimer ses remerciements sincères à M. le Professeur T. Matsumoto pour ses conseils précieux qu'il lui a donné pendent la recherche.